Thèse
Présentée pour obtenir le grade de
docteur de l'Université de Franche comté
Spécialité **Mathématiques appliquées**
par
Céline Caldini-Queiros

Analyse mathématique et numérique de modèles gyrocinétiques

Soutenue le 15 novembre 2013
Devant la commission d'examen

Nicolas Besse, examinateur
Mihaï Bostan, directeur de thèse
Nicolas Crouseilles, invité
Emmanuel Frénod, rapporteur
Virginie Grandgirard, examinateur
Maxime Hauray, examinateur
Alexei Lozinski, examinateur
Éric Sonnendrücker, rapporteur









École Doctorale Carnot-Pasteur

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée par

Céline CALDINI-QUEIROS

Analyse mathématique et numérique de modèles gyrocinétiques.

dirigée par Mihaï BOSTAN

Rapporteurs : Emmanuel FRÉNOD et Éric SONNENDRÜCKER
Soutenue le 15 novembre 2013 devant le jury composé de :

M. Nicolas BESSE	Examinateur
M. Mihaï BOSTAN	Directeur
M. Nicolas CROUSEILLES	Invité
M. Emmanuel FRÉNOD	Rapporteur
Mme. Virginie GRANDGIRARD	Examinatrice
M. Maxime HAURAY	Examinateur
M. Alexei LOZINSKI	Examinateur
M. Éric SONNENDRÜCKER	Rapporteur

À ma grand-mère
et/é
Para os meus avós

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Mihai Bostan, pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser cette thèse, et pour m'avoir encadrée durant ces trois années. Il a su me faire partager ses connaissances et son savoir scientifique pour me faire découvrir les équations gyrocinétiques. Je tiens à le remercier tout particulièrement pour sa relecture attentive de ma thèse et ses conseils avisés en terme de rédaction.

Je remercie ensuite Emmanuel Frénod et Éric Sonnendrücker pour avoir accepté d'être mes rapporteurs. Je les remercie pour leurs lectures attentives de ma thèse, leurs remarques, et je les remercie d'avoir accepté de faire le déplacement pour prendre part à mon jury de soutenance. Cela a été pour moi un grand honneur.

Je souhaite également remercier Nicolas Crouseilles pour sa patience et sa disponibilité tout au long de ma thèse. Il a été un collaborateur indispensable à celle-ci et chaque moment de travail commun était très enrichissant et constructif. Je le remercie vivement pour sa bonne humeur et son optimisme qui ont pu rendre possible un projet un petit peu ambitieux, le cinquième chapitre de ma thèse n'aurait jamais vu le jour sans son aide. Je le remercie également d'être venu assister à ma soutenance de thèse.

Je remercie ensuite Alexeï Lozinski d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, Nicolas Besse, Virginie Grandgirard et Maxime Hauray d'en avoir fait partie.

Faire de la recherche implique de faire des rencontres, je tiens à remercier tous ces chercheurs que j'ai pu croiser lors de ces trois ans, pour ces moments d'échange que nous avons partagés. Ainsi, je remercie le Laboratoire Mathématique de Besançon pour son accueil, et plus particulièrement l'équipe d'Analyse Numérique et Calcul Scientifique, pour m'avoir fait me sentir parfaitement intégrée. Merci donc à Antoine, Franz, Julien, Nabile, Pauline et Ulrich d'être toujours souriants et disposés à parler, que ce soit de science ou non. Merci aussi à Nicolas d'avoir été un voisin de bureau si agréable, et à Richard et Romain pour leur réactivité et leur patience. Je remercie également l'INRIA, sans qui je n'aurais pas pu réaliser cette thèse, et plus particulièrement l'équipe Calvi ainsi que tous ses membres. Je n'oublie pas non plus ceux que j'ai rencontrés lors de mes déplacements, et remercie Mohammed avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer.

Je tiens également à remercier l'intégralité de l'équipe du CEMRACS, l'équipe ViVaBrain, qui en m'acceptant dans son projet m'a permis de renouer avec un sujet qui me tient vraiment à coeur. Ainsi merci à Christophe, Gonçalo, Marcela, Mourad, Ranine et Vincent.

Il y a également les frères et soeurs, les autres doctorants de calcul scientifique et d'ailleurs, qui font que ces années paraissent moins dures. On pense en

particulier aux fous rires des maintenant "anciens" du bureau 401B qui m'ont fait comprendre que la thèse n'avait pas à être monotone. Merci à Alexis, tout d'abord, pour sa présence au quotidien et ce même depuis son départ. Merci à Émilie, qui a été un véritable exemple tout au long de sa thèse. Merci à Aude et Charlotte, pour leur soutien inconditionnel, leur énergie, leur bonne humeur, et (parfois) leur humour. Merci à Anthony, Guillaume, Karine, et occasionnellement Damien et Maxime pour les fous rires au bureau. Merci aux nouveaux qui peuplent le bureau, Michel, Firmin, Xiao et Cyrille. Merci à Clément qui égaie le bureau à chacune de ses visites. Merci à Anaïs, qui est comme une grande sœur de thèse, mais surtout la meilleure qu'on puisse avoir. Merci à Benoît, Tony, Elisa, Christophe, Nhung-Noémie et Jonathan, avec qui j'aimerais passer tous mes étés au CIRM si je le pouvais. Merci aussi à Matthieu pour tous les moments où l'on se croise.

Merci à Kevin, qui est si loin, et si près. Je remercie aussi les membres de La communauté (La communauté), pour les fous rires interminables qu'elle engendre, ainsi que ceux qui me lisent au quotidien, Anne-Françoise, Bérénice, Christophe, Harmony, Jean-David, Sébastien, Sylvain, Thibaud et les autres.

Je remercie Virginie, la fille la plus géniale du monde, et la meilleure amie dont on puisse rêver, pour toutes ces années et pour un humour intarrissable.

Je souhaite aussi remercier ma famille, pour avoir toujours cru en moi, mon frère *e a minha mãe por me repetir sempre que não havia nada que eu não pudesse fazer*, ainsi que ma belle-famille pour son soutien, et sa compréhension.

Enfin, et surtout, je souhaite remercier Julien, d'avoir supporté ces 3 années de quotidien pas toujours facile, de m'avoir soutenue et comprise, d'avoir stressé avec moi et parfois plus que moi, et d'avoir toujours cherché à me faire sourire. Du fond du coeur merci.

Et merci à Chewie de m'avoir rappelé comment se détendre et se reposer.

Table des matières

1 Introduction **13**
- 1.1 Principe du confinement magnétique . . . 15
- 1.2 Modélisation des plasmas . . . 16
  - 1.2.1 Rappel de l'origine de la modélisation des plasmas . . . 16
  - 1.2.2 Différents modèles pour les plasmas . . . 17
- 1.3 Équations de Vlasov, Maxwell et Poisson . . . 19
  - 1.3.1 Équation de Vlasov . . . 19
  - 1.3.2 Densité de charge et de courant . . . 19
  - 1.3.3 Équations de Poisson . . . 20
  - 1.3.4 Équations de Maxwell . . . 20
- 1.4 Difficultés rencontrées . . . 21
- 1.5 Outils mathématiques . . . 22
  - 1.5.1 Opérateur de moyenne le long d'un flot caractéristique . . . 22
  - 1.5.2 Invariants du flot . . . 24
  - 1.5.3 Commutateur des opérateurs différentiels du premier ordre 25

2 Modèles gyrocinétiques pour le confinement magnétique **29**
- 2.1 L'équation de Vlasov . . . 29
- 2.2 Différents couplages : Poisson, Maxwell . . . 30
  - 2.2.1 Le couplage Vlasov-Maxwell . . . 30
  - 2.2.2 Champ électrique et couplage Vlasov-Poisson . . . 31
- 2.3 Principaux régimes . . . 33
  - 2.3.1 Modèle centre-guide . . . 33
  - 2.3.2 Rayon de Larmor . . . 33
- 2.4 Les opérateurs de collision . . . 33

3 L'opérateur de moyenne **37**
- 3.1 Moyenne le long d'un flot . . . 38
- 3.2 Rayon de Larmor fini . . . 47
  - 3.2.1 Flot caractéristique . . . 48
  - 3.2.2 Invariants du flot . . . 49
  - 3.2.3 Opérateur de moyenne le long du flot . . . 51
  - 3.2.4 Propriétés de l'opérateur de moyenne . . . 51
  - 3.2.5 Moyenne et opérateur différentiel du premier ordre . . . 54
- 3.3 Centre guide . . . 58
- 3.4 Conclusions . . . 61

4 Gyromoyenne des noyaux de collision **63**
4.1 Gyromoyenne des noyaux de relaxation . . . 64
4.1.1 Propriétés de Q_B . . . 65
4.1.2 Calcul de la moyenne de Q_B . . . 67
4.2 Fokker–Planck . . . 81
4.2.1 Propriétés de Q_{FP} . . . 81
4.2.2 Calcul de la moyenne de Q_{FP} . . . 83
4.3 Fokker–Planck–Landau . . . 84
4.3.1 Propriétés de Q_{FPL} . . . 85
4.3.2 Calculs préliminaires . . . 86
4.3.3 Calcul de la moyenne de Q_{FPL} . . . 96
4.4 Conclusions et perspectives . . . 108

5 Simulations numériques par des schémas micro-macro **111**
5.1 Les outils mathématiques . . . 113
5.1.1 Opérateur de moyenne associé . . . 113
5.1.2 Dérivation du modèle limite . . . 114
5.2 Construction du schéma micro-macro . . . 122
5.3 Calcul analytique du terme d'ordre dominant . . . 127
5.4 Calculs préliminaires aux simulations numériques . . . 131
5.4.1 Passage en coordonnées polaires . . . 131
5.4.2 Calcul de $\left\langle \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}) \right\rangle$ . . . 132
5.4.3 Inversion de $\left(\varepsilon^2 I + \Delta t \mathcal{T}\right)$: advection linéaire avec Fourier . 133
5.5 Discrétisation et algorithmes . . . 135
5.5.1 Discrétisation en espace . . . 135
5.5.2 Algorithmes . . . 138
5.6 Résultats numériques . . . 139
5.6.1 Validation de l'ordre de notre schéma . . . 139
5.6.2 Validation en limite Vlasov-Poisson : amortissement Landau et instabilité double faisceau . . . 140
5.6.3 Résultats numériques en limite centre-guide . . . 143
5.7 Conclusions et perspectives . . . 147

6 Vers une simulation du flux sanguin dans des géométries réalistes **149**
6.1 Mathematical models and methods . . . 151
6.1.1 Variational Formulations . . . 151
6.1.2 Discretization choices . . . 156
6.2 HPC with Feel++ . . . 158
6.2.1 General description . . . 158
6.2.2 Challenges in handling complex geometries . . . 159
6.2.3 Scalability analysis . . . 161
6.3 Numerical results . . . 164
6.3.1 Flow simulation on cerebrovenous system . . . 169
6.4 Conclusion and outlook . . . 170

A Preuve des propositions 4.19 et 4.23 **171**

B Preuve des propositions 4.24 et 4.26 **175**

C Preuve de la proposition 5.12 **185**

D Preuve de la proposition 5.15 **189**

chapitre 1

Introduction

Quand un gaz est chauffé très fortement, ou soumis à un champ électromagnétique de forte intensité, les électrons se séparent des atomes qu'ils composent. Le gaz laisse alors place à un milieu globalement neutre mais toujours constitué de particules chargées en mouvement. Le mélange obtenu est considéré comme un nouvel état de la matière.

Ce nouvel état est à dissocier de ceux que nous connaissons, solide, liquide et gaz : le plasma. Il s'agit d'un fluide. Il est également possible d'obtenir des plasmas non neutres ou des faisceaux de particules chargées. Pour ce faire, on soumet certains métaux à une très grande différence de potentiel, ce qui permet d'en extraire les ions. Il ne sera pas question de cette méthode ici.

Les tubes à néons ou les écrans plasmas ne sont que quelques exemples d'utilisation du plasma dans la vie courante. Mais c'est à l'état naturel dans les étoiles ou les aurores boréales qu'on trouve majoritairement le plasma. La fusion qui se produit dans le plasma qui compose les étoiles et ses applications en énergétique est au cœur d'une problématique majeure en science actuelle.

Les physiciens étudient la question du comportement des particules dans un plasma dans le cadre de la recherche sur la fusion «contrôlée ». C'est dans ce cadre que le confinement magnétique a son intérêt. Pour plus d'informations sur la physique des plasmas, on pourra se référer aux livres de CHEN [28], de BERS et DELCROIX [10], d'HAZELTINE et MEISS [50], de BIRDSALL et LANGDON [11], ou encore aux sites du CEA ou du projet ITER [52, 24].

Les centrales nucléaires actuelles utilisent l'énergie de la réaction de fission, consistant à générer deux noyaux d'atomes légers à partir d'un noyau lourd. Le but de la réaction de fusion est inverse, il s'agit de générer un noyau d'atome lourd à partir de deux noyaux d'atomes légers. Cette réaction est encore actuellement au stade de la recherche, ce qui n'enlève rien à l'importance de l'enjeu et aux moyens mis en œuvre. La réaction étudiée repose sur la fusion de noyaux de Deutérium et de Tritium, qui sont des isotopes naturels de l'Hydrogène, pour obtenir un atome d'Hélium et un neutron, comme illustré figure 1.1. Ce dernier est fortement chargé en énergie qui servira à produire la chaleur nécessaire à la fabrication d'éléctricité. La température nécessaire pour obtenir cette réaction est très élevée. C'est pourquoi les électrons se détachent de leur atome et on obtient alors un plasma. Mais contenir une réaction à une température très élevée est un problème. Une première solution à ce problème est la fusion par confinement

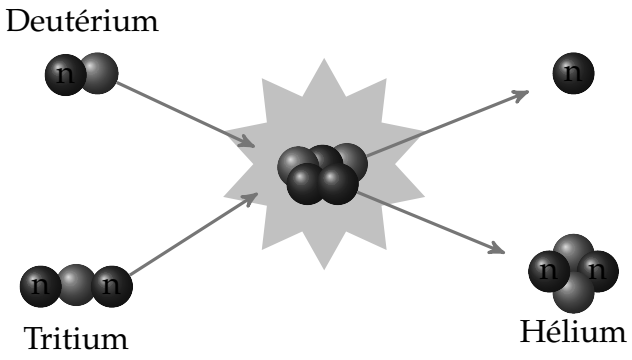


FIGURE 1.1 – La réaction de fusion Deutérium-Tritium

inertiel. Ce type de confinement consiste à concentrer sur une capsule de deutérium et de tritium des faisceaux laser. On atteint alors une densité très élevée pendant un temps relativement court. Cette thèse se concentre sur une deuxième méthode : la fusion par confinement magnétique.

Plan du chapitre

1.1 Principe du confinement magnétique 15
1.2 Modélisation des plasmas 16
1.2.1 Rappel de l'origine de la modélisation des plasmas 16
1.2.2 Différents modèles pour les plasmas 17
Le modèle à N-corps 17
Le modèle cinétique 18
Le modèle fluide 18
1.3 Équations de Vlasov, Maxwell et Poisson 19
1.3.1 Équation de Vlasov 19
1.3.2 Densité de charge et de courant 19
1.3.3 Équations de Poisson 20
1.3.4 Équations de Maxwell 20
1.4 Difficultés rencontrées 21
1.5 Outils mathématiques 22
1.5.1 Opérateur de moyenne le long d'un flot caractéristique . . 22
1.5.2 Invariants du flot 24
1.5.3 Commutateur des opérateurs différentiels du premier ordre 25

1.1 Principe du confinement magnétique

Le confinement magnétique consiste à maintenir le plasma dans un espace restreint à l'aide d'un champ magnétique pendant un temps plus long mais à une densité moins élevée. Le plasma est confiné dans une chambre toroïdale, appelée Tokamak. Cette approche est explorée dans le projet international ITER, «International Thermonuclear Experimental Reactor», lancé en 2006. Ce projet a pour objectif de montrer qu'il est possible de produire de l'électricité par réaction de fusion. Le Tokamak ITER est construit à Cadarache, dans le sud de la France. Il est représenté en figure 1.2. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au site officiel du projet ITER [52].

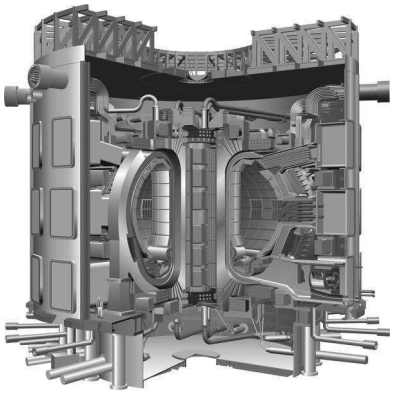


FIGURE 1.2 – Tokamak ITER en construction à Cadarache

Il est important d'éviter que les particules ne touchent les bords du Tokamak, au risque de l'endommager. Il faut donc assurer le confinement des particules. Lorsqu'un plasma est en présence d'un champ magnétique intense, les particules s'enroulent autour des lignes de champ magnétique (voir figure 1.3).

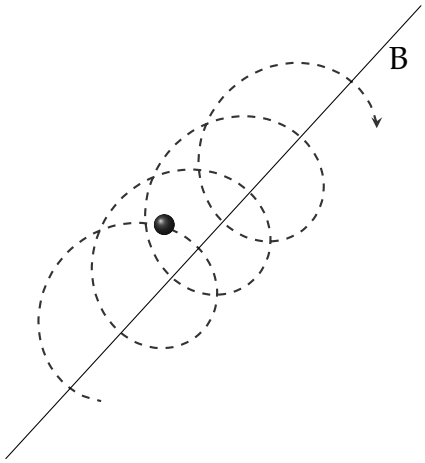


FIGURE 1.3 – Particule suivant une ligne de champ

Le rayon des cercles décrits par les particules autour des lignes de champ est d'autant plus petit que le champ magnétique est intense. Ainsi il est aisé de voir

qu'en présence d'un champ magnétique fort, on confine les particules loin des parois du Tokamak. Les plasmas, et en particulier les plasmas de fusion, sont des objets très complexes mettant en jeu des interactions non linéaires et des échelles de temps et d'espace multiples. Ils sont sujets à de fortes instabilités et des phénomènes de turbulence viennent s'opposer à leur confinement. Pour pouvoir un jour se servir de la fusion nucléaire comme source d'énergie, il faut donc comprendre très précisément ces plasmas à l'aide de modèles adaptés et des simulations numériques qui y correspondent.

1.2 Éléments de modélisation de particules chargées en présence d'un champ éléctromagnétique

1.2.1 Rappel de l'origine de la modélisation des plasmas

Le livre de RAX [68] place les origines de l'électromagnétisme en 1600 lorsque GILBERT publie son traité de magnétisme. L'invention de la lunette astronomique en 1609 par GALILÉE en Italie et KEPLER dans le Saint Empire Germanique permettent en 1637 à Descartes de formuler les lois sur la réfraction. Au cours du XVII^{e} siècle, de nombreuses découvertes sont faites en optique par NEWTON ou HUYGENS par exemple. Le siècle suivant voit les prémices de l'invention de la pile d'après une idée de GALVANI, invention qui est attribuée à VOLTA en 1800. Cette invention permet ensuite le développement d'un grand nombre d'expériences sur les phénomènes électriques et magnétiques.

En 1820, ØRSTED démontre qu'un courant électrique engendre un champ magnétique. L'année d'après, AMPÈRE met en place le formalisme permettant d'interpréter ces phénomènes. Puis, en 1831, FARADAY démontre que les champs magnétiques engendrent les champs électriques. Vers le milieu du XIX^{e} siècle, MAXWELL publie les équations qui servent encore aujourd'hui de base à la théorie de l'électromagnétisme.

L'étude de la dynamique des plasmas requiert une grande connaissance de l'électromagnétisme. Dans notre cas par exemple, les particules sont soumises à un fort champ électromagnétique. Mais l'électromagnétisme ne suffit pas à l'étude des plasmas. Les modèles cinétiques que nous utiliserons prennent leur origine dans les modèles de cinétique des gaz développés par BERNOULLI en 1785, puis par PASCAL et TORRICELLI. Durant le XIX^{e} siècle, BOYLE, MARIOTTE et GAY LUSSAC permettent d'établir l'équation des gaz parfaits qui constituera le modèle de référence en thermodynamique. Le milieu de XIX^{e} siècle verra aussi le développement de la physique des décharges électriques dans le gaz. DAVY en 1813, FARADAY en 1839 suivis par HITTORF, GLEISSLER, PLÛCKER, CROOKES, GOLDSTEIN et bien d'autres permettent de comprendre le rayonnement des décharges électriques dans les gaz de basse pression.

Le terme électron est introduit en 1891 par STONEY, et les théories de LORENTZ (1895) et THOMSON (1897) posent un cadre cohérent pour l'interprétation des gaz ionisés dans les décharges électriques. On pourra ensuite parler du modèle de BOHR-SOMMERFELD puis de mécanique quantique. Mais il ne faudra pas oublier de citer les quelques astrophysiciens ou spécialistes de physique spatiale

auxquels le développement de la physique des plasmas doit beaucoup. Ainsi, ALFVÉN, au milieu du XX^{e} siècle, construit des études sur l'environnement terrestre à haute altitude. En 1901, MARCONI réussit une expérience de télécommunication hertzienne transatlantique. S'ensuivent les études de HEAVISIDE et CONNELY puis APPLETON et HARTREE qui mènent à l'observation de la magnétosphère et à l'intérêt de la communauté scientifique au plasma, considéré dès lors comme le principal constituant de l'univers. Enfin, ce sont les recherches de HOOTERMANS et ATKINSON sur l'origine thermonucléaire de l'énergie solaire, qui a mené dès la fin des années 1950 à la création de grands projets internationaux et aujourd'hui, la construction du tokamak ITER.

1.2.2 Différents modèles pour les plasmas

Notations

x est la position exprimée en mètres (m), v la vitesse en mètres par secondes ($m.s^{-1}$), t le temps en secondes (s).

Le modèle à N-corps

Si on s'intéresse au plasma au niveau microscopique, on observe des particules, toutes soumises aux lois de la dynamique relativiste ou classique. Chaque particule obéit alors à la loi de Newton,

$$\frac{dp}{dt} = \sum F_{ext}, \tag{1.1}$$

où p est la quantité de mouvement de la particule. Ici, les forces appliquées à la particule se réduisent à la force de Lorentz. La force de Lorentz est la force induite par le champ électromagnétique extérieur et générée par les autres particules. Les autres forces sont négligeables par rapport à celle-ci. On peut donc réécrire notre loi de Newton en détaillant $\sum F_{ext}$, et on obtient

$$\frac{dp}{dt} = q(E + v \wedge B). \tag{1.2}$$

Comme on a

$$v(p) = \frac{\frac{p}{m}}{\sqrt{1 + \frac{|p|^2}{m^2c^2}}} = \frac{p}{m\gamma},$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide, et γ le facteur de Lorentz défini par $\gamma = \left(1 - \frac{|v|^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, on obtient pour une particule

$$\frac{d(\gamma m v)}{dt} = \sum q(E + v \wedge B). \tag{1.3}$$

Sachant que $\frac{dx}{dt} = v$, on a ainsi déterminé complètement l'évolution des particules.

Remarque 1.1. *En mécanique classique, la vitesse des particules est petite devant c, on considère donc que* $c = +\infty$ *et on prend* $\gamma = 1$. *On obtient alors* $p = mv$ *et* $\frac{dmv}{dt} = \sum q(E + v \wedge B)$. *On se placera dorénavant dans le cadre de la mécanique classique.*

Il faut savoir qu'un plasma est constitué d'un très grand nombre de particules, de l'ordre de 10^{10} ou plus. Chercher à décrire les interactions entre les particules serait beaucoup trop coûteux ! Ainsi le modèle microscopique que nous venons de voir n'est pas utilisable en pratique pour décrire l'évolution d'un plasma. Il existe également des modèles macroscopiques, les modèles fluides, et des modèles intermédiaires, les modèles cinétiques, que nous présenterons par la suite.

Le modèle cinétique : dérivation du modèle de Vlasov

Les équations cinétiques décrivent l'évolution d'une fonction de distribution $f(t, x, v)$ de particules dans l'espace des phases, c'est-à-dire en fonction de leur vitesse v et de leur coordonnée en espace x à un instant t. Plus précisément, cela signifie que le nombre de particules dans l'élément de phase $\mathrm{d}v\mathrm{d}x$ est donné par la quantité $f(t, x, v)\mathrm{d}v\mathrm{d}x$. Un exemple d'équation cinétique est l'équation du transport libre qui se présente commme suit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0. \tag{1.4}$$

Dans le cadre qui nous intéresse, le cas des particules dans un plasma, on regarde l'équation de Vlasov ou équation de champ auto-consistant. Cette équation se dérive du modèle à N-corps vu précédemment par des méthodes de physique statistique que nous n'expliciterons pas ici. Elle s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(f) \cdot \nabla_v f = 0. \tag{1.5}$$

Dans l'équation (1.5), F est une force fonction de notre distribution f. Cette équation a la forme d'une équation de transport. Dans le cas qui nous intéresse, on prend $F(f) = \frac{q}{m}(E + v \times B)$. Nous pouvons ainsi réécrire notre équation sous la forme suivante :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0. \tag{1.6}$$

Le modèle fluide

On peut dériver de l'équation de Vlasov un modèle fluide permettant une description macroscopique de l'évolution de notre système. Dans ces modèles, on assimile chaque espèce de particules du plasma à un fluide, caractérisé alors par sa densité, sa vitesse moyenne définie par

$$u = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v)\mathrm{d}v}{\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v)\mathrm{d}v}$$

et sa température θ, définie par exemple par

$$\frac{3}{2}\rho\theta = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v - u|^2}{2} f(t, x, v)\mathrm{d}v, \text{ avec } \rho = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v)\mathrm{d}v.$$

Ces grandeurs sont des *moments* en vitesse de la densité de particules. Lorsque les particules sont proches de l'équilibre thermodynamique, le modèle fluide est une bonne approximation de notre problème. Les particules retournent vers l'équilibre thermodynamique en temps long sous l'effet des collisions, et la distribution en vitesse des particules est alors une gaussienne, ce qui rend utilisables les modèles fluides.

L'utilisation de tels modèles réduit notre problème à des équations qui ne dépendent que de la position et du temps. Des modèles moins précis mais plus aisés à résoudre. Il n'en sera pas question ici.

1.3 Présentation des équations de Vlasov, Maxwell et Poisson

Cette thèse se concentre sur le modèle cinétique, ou plus précisément le modèle gyrocinétique, que nous détaillerons au chapitre 2. Nous détaillons dans cette section les équations de base de ce modèle.

1.3.1 Équation de Vlasov

Les modèles cinétiques, comme nous l'avons dit à la section précédente, se basent sur l'équation de Vlasov, du nom du physicien russe Anatoly Alexandrovich VLASOV (1908-1975). Rappelons l'équation de Vlasov.

Équation (Vlasov)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0, \tag{1.7}$$

où f est la densité de répartition des particules, q la charge des particules, m leur masse, E le champ électrique et B le champ magnétique. Dans un premier temps, nous regarderons l'équation de Vlasov seule. Mais, pour plus de réalisme, il est possible de la coupler avec l'équation de Maxwell ou l'équation de Poisson. Ces équations décrivent en effet l'évolution du champ électromagnétique ou électrique.

1.3.2 Densité de charge et de courant

Lorsqu'une particule est en mouvement, elle crée un courant. On définit ici la densité de charge et la densité de courant du milieu dans lequel les particules se déplacent. La densité de charge ρ est définie par

$$\rho(x,t) = q \int f(x,v,t) \mathrm{d}v. \tag{1.8}$$

Pour un mélange d'ions i et d'électrons e^-, on a

$$\rho_i = q_i \int f_i(t,x,v) \mathrm{d}v$$

et

$$\rho_{e^-} = q_{e^-} \int f_{e^-}(t,x,v)\mathrm{d}v.$$

En général $q_i = +e$ et $q_{e^-} = -e$, où $e > 0$ est la charge des électrons en valeur absolue ($-e \approx -1.60217653 \times 10^{-19} As$). Alors

$$\rho = \rho_i + \rho_{e^-}.$$

La densité de courant J est donnée par

$$J(x,t) = q \int f(x,v,t) v \mathrm{d}v. \tag{1.9}$$

On a une décomposition ions/électrons du même type que précédemment. C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} J(x,t) &= q_i \int v f_i(t,x,v)\mathrm{d}v + q_{e^-} \int v f_{e^-}(t,x,v)\mathrm{d}v \\ &= e \int v f_i \mathrm{d}v - e \int v f_e \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

1.3.3 Équations de Poisson

On couple l'équation de Vlasov à l'équation de Poisson, du nom de Siméon Denis POISSON (1781-1840), le mathématicien, physicien et géomètre français qui corrigea l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre de Laplace pour le potentiel, qui porte aujourd'hui son nom. Cette équation exprime le champ électrique E à partir d'une distribution connue de charge.

Équation (Poisson)

$$\varepsilon_0 \, \mathrm{div} E = \rho, \tag{1.10}$$

$$E = -\nabla_x \phi, \tag{1.11}$$

avec

$$\rho(x,t) = \rho_i + \rho_{e^-} = q_i \int f_i(t,x,v)\mathrm{d}v + q_{e^-} \int f_{e^-}(t,x,v)\mathrm{d}v, \tag{1.12}$$

où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide et ρ la densité de charge.

Il est donc possible de coupler l'équation de Vlasov avec l'équation de Poisson pour permettre une évolution du champ électrique au cours du temps.

1.3.4 Équations de Maxwell

L'équation de Vlasov peut aussi être couplée aux équations de Maxwell. James Clerk MAXWELL (1831-1879) est un physicien et mathématicien écossais qui a unifié des équations concernant l'électromagnétisme. Ainsi des équations d'électricité, d'induction et de magnétisme se retrouvent toutes sous le terme «équations de Maxwell ».

Équation (Équations de Maxwell)

Équation de Maxwell-Faraday :

$$\partial_t B + \text{rot} E = 0. \tag{1.13}$$

Loi de Gauss magnétique :

$$\text{div } B = 0. \tag{1.14}$$

Équation de Maxwell-Ampère :

$$\partial_t E - c^2 \text{rot } B = -\frac{J}{\varepsilon_0}. \tag{1.15}$$

Loi de Gauss :

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.16}$$

où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide ($\varepsilon_0 = 8.854187 \times 10^{-12} \frac{A^2 s^4}{m^3 kg}$). En appliquant la divergence dans (1.15) on obtient

$$\partial_t(\varepsilon_0 \, \text{div} E) + \text{div} J = 0, \tag{1.17}$$

et ainsi

$$\partial_t \rho + \text{div} J = 0, \tag{1.18}$$

ce qui signifie que les densités de charge et de courant doivent obligatoirement satisfaire l'équation de continuité pour qu'il existe des champs (E, B) qui vérifient les équations de Maxwell.

Mais tous ces couplages négligent les interactions entre les particules. Les particules entrent en effet en collisions les unes avec les autres. Ces collisions se présentent sous forme de noyaux comme second membre de l'équation de Vlasov. Deux noyaux seront étudiés ici, le noyau de Boltzmann et le noyau de Landau-Fokker-Planck.

1.4 Difficultés rencontrées

Tout champ magnétique intense de type

$$B^\varepsilon = \frac{B}{\varepsilon}, \text{ avec } 0 < \varepsilon \ll 1,$$

conduit à un mouvement rapide autour des lignes de champ. Ainsi, en présence d'un champ magnétique fort, les particules vont osciller autour des lignes de champ à la fréquence cyclotronique $q|B^\varepsilon|/m = q|B|/m\varepsilon \sim 1/\varepsilon$ sur des cercles de Larmor, nommés d'après Joseph LARMOR (1857-1942) physicien et mathématicien irlandais. Le rayon de Larmor ρ_L est proportionnel à l'inverse de la fréquence cyclotronique, *i.e.* $\rho_L \sim \varepsilon$. Ainsi, dans le cas des forts champs magnétiques,

c'est-à-dire $0 < \varepsilon \ll 1$, les particules suivent les lignes de champ ($\rho_L \searrow 0$). Par ailleurs, des mouvements de dérive selon la direction perpendiculaire aux lignes de champs apparaissent, mais uniquement à l'ordre supérieur. On peut regarder par exemple la dérive électrique de champs croisés $E \wedge B^\varepsilon / |B^\varepsilon|^2 = \varepsilon E \wedge B / |B|^2$.

On voit ainsi apparaître plusieurs échelles qui rendent difficile la simulation numérique de l'équation de Vlasov.

De plus, $\varepsilon \searrow 0$ nous oblige à ne pas prendre un schéma explicite. En effet, un schéma explicite nous forcerait à respecter une condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL, d'après Richard COURANT, Kurt FRIEDRICHS, et Hans LEWY) qui lierait alors le pas de temps à ε pour éviter les instabilités numériques. Lier le pas de temps à ε n'est pas acceptable car les simulations prendraient beaucoup trop de temps quand $\varepsilon \searrow 0$.

1.5 Outils mathématiques

Plusieurs outils mathématiques ont été développés pour l'étude de l'équation de Vlasov, nous les présenterons brièvement dans cette section.

1.5.1 Opérateur de moyenne le long d'un flot caractéristique

Le chapitre 3 est dédié à l'étude de l'opérateur de moyenne le long d'un flot. On y considère le problème de transport linéaire introduit dans [16], où une partie du transport est fortement pénalisée,

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + a(t,y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon + \dfrac{b(y)}{\varepsilon} \cdot \nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \\ u^\varepsilon(0,y) = u_0^\varepsilon(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{1.19}$$

Dans ce cas $b : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ est un champ donné qui satisfait

$$b \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m), \tag{1.20}$$

$$\operatorname{div}_y b = 0 \tag{1.21}$$

et la condition de croissance

$$\exists C > 0 : |b(y)| \leq C(1 + |y|),\ y \in \mathbb{R}^m. \tag{1.22}$$

Sous ces conditions, le flot $Y = Y(s;y)$ est bien défini

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = b(Y(s;y)),\ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \tag{1.23}$$

$$Y(0,y) = y,\ y \in \mathbb{R}^m, \tag{1.24}$$

$Y \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. Le flot caractéristique Y est associé à un opérateur, l'opérateur $\mathcal{T} = b(y) \cdot \nabla_y$. En effet, à l'aide d'une expansion formelle de Hilbert ($u^\varepsilon = u + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$), on obtient

$$\varepsilon^{-1} : b(y)\cdot\nabla_y u = 0, \tag{1.25}$$
$$\varepsilon^{0} : \partial_t u + a(t,y)\cdot\nabla_y u + b(y)\cdot\nabla_y u_1 = 0, \tag{1.26}$$
$$\varepsilon^{1} : \partial_t u_1 + a(t,y)\cdot\nabla_y u_1 + b(y)\cdot\nabla_y u_2 = 0, \tag{1.27}$$
$$\vdots$$

et on voit que l'opérateur $\mathcal{T}$ ainsi que son noyau ont un rôle majeur dans notre analyse. L'ordre dominant de l'expansion appartient en effet au noyau de $\mathcal{T}$, et pour déterminer u, on projette 1.26 sur le noyau de $\mathcal{T}$. Si on note $\langle u\rangle$ la projection orthogonale de u sur le noyau de $\mathcal{T}$, on démontre au chapitre 3 les théorèmes suivants.

Théorème 1.2

Pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ on note $\langle u\rangle$ sa projection orthogonale, c'est-à-dire

$$\langle u\rangle \in \ker\mathcal{T} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^m} \left(u(y) - \langle u\rangle\,(y)\right)\varphi(y)\mathrm{d}y = 0, \forall\varphi \in \ker\mathcal{T}. \tag{1.28}$$

Alors nous avons les convergences faibles dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ suivantes

$$\begin{aligned}\langle u\rangle &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s\\ &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^0 u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s\\ &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Théorème 1.3

Pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ nous avons les convergences fortes dans $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^0 u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s = \langle u\rangle\,.$$

Ainsi, on construit dans le chapitre 3 l'opérateur de moyenne le long du flot, que l'on identifie à $\mathrm{Proj}_{\ker\mathcal{T}}$,

$$\langle u\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s = \mathrm{Proj}_{\ker\mathcal{T}}. \tag{1.29}$$

De plus, comme on a

$$\ker\mathcal{T}\oplus\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{T}} = (\mathrm{Im}\,\mathcal{T})^\perp\oplus((\mathrm{Im}\,\mathcal{T})^\perp)^\perp = L^2(\mathbb{R}^m),$$

et que l'opérateur de moyenne coïncide avec la projection orthogonale sur le noyau de $\mathcal{T}$, on a aussi

$$\ker \langle \cdot \rangle = \ker \mathrm{Proj}_{\ker \mathcal{T}} = (\ker \mathcal{T})^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\, \mathcal{T}},$$

ce qui nous permet d'écrire la décomposition orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^m)$ de la façon suivante,

$$u = \langle u \rangle + (u - \langle u \rangle), \ \int_{\mathbb{R}^m} \langle u \rangle \, (u - \langle u \rangle) \mathrm{d}y = 0,$$

avec $\langle u \rangle \in \ker \mathcal{T}$ la moyenne de u et $u - \langle u \rangle \in \ker \langle \cdot \rangle$ la fluctuation de u autour de la moyenne.

Dans les deux régimes que nous étudions, le régime du rayon de Larmor fini et le régime centre-guide, nous nous trouvons bien dans les cas de transport, dont une partie est fortement pénalisée. De plus, nous développerons dans le chapitre 3 des propriétés spécifiques aux flots périodiques, ce qui est le cas dans chacun de nos régimes. Après avoir résolu les systèmes d'équations dont sont solutions les caractéristiques du flot associé au transport dominant de nos équations et trouvé les invariants du flot, nous appliquerons les résultats généraux développés dans la première partie à ces cas particuliers, puis étudierons des propriétés des opérateurs de moyenne.

Dans le cas du régime de Larmor fini, l'opérateur de moyenne devient

$$\langle u \rangle \, (x, v) = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u \left(\overline{x} + \frac{\overline{v}}{\omega_c} - \frac{^{\perp}\{R(-\omega_c s)\overline{v}\}}{\omega_c}, x_3, R(-\omega_c s)\overline{v}, v_3 \right) \mathrm{d}s,$$

où $R(\alpha)$ est la rotation d'angle α, T_c la période cyclotronique et ω_c la fréquence cyclotronique.

Dans le cas du régime centre-guide, l'opérateur de moyenne devient

$$\langle u \rangle \, (x, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, \mathcal{R}(\alpha)v) \, \mathrm{d}\alpha.$$

1.5.2 Invariants du flot

Définition 1.4

$\phi \in C^1$ est un invariant du champ $b(y)$ si

$$b(y) \cdot \nabla_y \phi = 0, \ y \in \mathbb{R}^m.$$

On a immédiatement le théorème suivant.

Théorème 1.5

ϕ est un invariant si et seulement si ϕ est constant le long du flot, c'est-à-dire si et seulement si

$$\phi(Y(s; y)) = \phi(y), \ (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Preuve.

Si ϕ est un invariant, alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi(Y(s;y))}{\mathrm{d}s} &= \nabla_y\phi(Y(s;y)) \cdot \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} \\ &= \nabla_y\phi(Y(s;y)) \cdot b(Y(s;y)) \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc ϕ est constant le long du flot. On montre la réciproque par le même argument.

■

Les invariants que nous introduirons dans les chapitres suivants sont des invariants **fonctionnellement indépendants**.

Définition 1.6

Soit $b(y)$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^m$ et $\phi_1(y), \ldots, \phi_p(y)$ p invariants du champ b. On dit que $\phi_1, \ldots, \phi_p$ sont fonctionnellement indépendants sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^m$ si et seulement si la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$$

est de rang p en tout point $y \in D$.

1.5.3 Commutateur des opérateurs différentiels du premier ordre

On définit ci dessous le commutateur entre deux opérateurs différentiels.

Définition 1.7

Soit L_A et L_B deux opérateurs différentiels associés aux champs de vecteurs réguliers A et B respectivement. Le commutateur entre L_A et L_B est l'opérateur

$$L_A L_B - L_B L_A.$$

Remarque 1.8. *Lorsque $L_A L_B - L_B L_A = 0$, on dit que L_A et L_B commutent. On trouve dans [3] la démonstration du lemme suivant.*

Lemme 1.9

Le commutateur entre deux opérateurs différentiels du premier ordre est encore un opérateur différentiel du premier ordre.

Preuve.

Soient $(A_1, \ldots, A_m)$ et $(B_1, \ldots, B_m)$ les composantes des champs A et B. Dans le système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_m)$ sur $\mathbb{R}^m$. Alors, pour une fonction $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_B L_A \phi &= \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{j=1}^{m} A_j \frac{\partial}{\partial y_j} \phi \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} B_i \frac{\partial A_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \phi + \sum_{i,j=1}^{m} B_i A_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \phi. \end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$L_A L_B \phi = \sum_{i,j=1}^{m} A_i \frac{\partial B_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \phi + \sum_{i,j=1}^{m} A_i B_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \phi.$$

En appliquant Cauchy-Schwartz, on obtient

$$(L_A L_B - L_B L_A)\phi = \sum_{i,j=1}^{m} \left(A_i \frac{\partial B_j}{\partial y_i} - B_i \frac{\partial A_j}{\partial y_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \phi.$$

■

Comme tout opérateur différentiel linéaire du premier ordre est donné par un champ de vecteurs, notre opérateur $L_A L_B - L_B L_A$ correspond également à un champ de vecteurs C.

Définition 1.10

Le **crochet de Poisson** entre deux champs de vecteurs A et B est le champ de vecteurs C pour lequel

$$L_C = L_A L_B - L_B L_A.$$

On le note

$$C = [A, B].$$

On a alors

$$C_j = A \cdot \nabla_y B_j - B \cdot \nabla_y A_j = L_A(B_j) - L_B(A_j).$$

On peut alors donner la définition suivante.

Définition 1.11

Soient $A(y)$ et $B(y)$ deux champs de vecteurs de R^m. On dit que A et B sont en **involution** si et seulement si leur crochet de Poisson est nul, c'est-à-dire

$$[A, B] = 0.$$

Ceci est équivalent à dire que les opérateurs différentiels associés L_A, L_B commutent

$$L_A L_B - L_B L_A = 0.$$

On trouve dans [3] la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.12

Soient A et B deux champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^m$, de flots caractéristiques notés Y et Z respectivement.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Y = A(Y(s;y)),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Z = B(Z(s;y)),\ s \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Alors A et B sont en involution si et seulement si les flots associés commutent, *i.e.*

$$Y(t; Z(s;y)) = Z(s; Y(t,y)),\ s,t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m$$

Pour simplifier la démonstration, nous introduisons le lemme suivant.

Lemme 1.13

Pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^2 nous avons

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{s=t=0} \{\phi(Z(s;Y(t;x))) - \phi(Y(t;Z(s;x)))\} = (L_A L_B \phi - L_B L_A \phi)(x).$$

Preuve.

Par la définition de L_A on obtient,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \phi(Y(t;Z(s;y))) = (L_A \phi)(Z(s;y)).$$

En notant $\psi := L_A \phi$, la définition de L_B nous donne

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \psi(Z(s;y)) = (L_B \psi)(y).$$

Ainsi

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{s=t=0} \phi(Y(t;Z(s;y))) = (L_B L_A \phi)(y).$$

De la même façon

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{s=t=0} \phi(Z(s;Y(t;y))) = (L_A L_B \phi)(y),$$

et notre résultat suit.

■

Preuve (du théorème 1.12).

Supposons que les deux flots commutent. Alors, pour toute fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R}^m)$ on a

$$\phi(Z(s;Y(t;y)) - \phi(Y(t;Z(s;y)) = 0,\ s,t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m.$$

En utilisant le lemme 1.13, on en déduit que

$$\begin{aligned}[A,B]\cdot\nabla_y\phi(y) &= \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{s=t=0} \{\phi(Z(s;Y(t;y))) - \phi(Y(t;Z(s;y)))\} \\ &= 0,\ y \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

et donc $[A,B] = 0$. Donnons quelques indications pour la preuve de l'implication réciproque (pour la preuve détaillée, le lecteur intéressé pourra se référer à [3]). Supposons que $[A,B] = 0$, alors pour toute fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R}^m)$ on introduit

$$\Delta(s,t;y) = \phi(Z(s;Y(t;y))) - \phi(Y(t,Z(s;y))),\ s,t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m.$$

On a

$$\Delta(0,t;y) = \phi(Y(t;y)) - \phi(Y(t,y)) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m$$

et

$$\Delta(s;y) = \phi(Z(s;y)) - \phi(Z(s,y)) = 0,\ s \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Ainsi

$$\Delta(0,0;y) = 0,\ \left.\frac{\partial^2}{\partial t}\right|_{s=t=0} \Delta = \left.\frac{\partial^2}{\partial s}\right|_{s=t=0} = 0$$

et par le lemme 1.13 on a aussi

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{s=t=0} \Delta = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$\phi(Z(s;Y(t;y))) - \phi(Y(t,Z(s;y))) = o(s^2+t^2),\ \text{quand } s \to 0,\ t \to 0.$$

On peut alors montrer que cela implique $\phi(Z(s;Y(t;y))) = \phi(Y(t,Z(s;y)))$, s, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^m)$. D'où

$$Z(s;Y(t;y)) = Y(t,Z(s;y)),\ s,t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^m$$

■

chapitre 2

Modèles gyrocinétiques pour le confinement magnétique

La théorie cinétique nous fournit pour toute espèce de particule s une **fonction de distribution** $f_s(x, v, t)$. Une fonction de distribution est une fonction statistique de la répartition des particules dans l'espace des phases, de façon que $f_s(x, v, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ est le nombre de particules de l'espèce s qui sont proches du point x et qui ont la vitesse v au temps t. L'évolution de cette fonction de distribution dépend du champ éléctromagnétique dans lequel les particules sont plongées. Cette évolution est décrite par l'équation de Vlasov.

Plan du chapitre

2.1 L'équation de Vlasov 29
2.2 Différents couplages : Poisson, Maxwell 30
2.2.1 Le couplage Vlasov-Maxwell 30
2.2.2 Champ électrique et couplage Vlasov-Poisson 31
2.3 Principaux régimes 33
2.3.1 Modèle centre-guide 33
2.3.2 Rayon de Larmor 33
2.4 Les opérateurs de collision 33

2.1 L'équation de Vlasov

L'équation de Vlasov est au centre du modèle gyrocinétique, elle décrit l'évolution de la fonction de distribution f en fonction des champs E et B. Rappelons

l'équation de Vlasov pour une seule espèce de particules lorsque les collisions entre les particules, dont nous parlerons plus loin, sont négligées (avec la condition initiale qui convient) :

Équation (Vlasov)

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \frac{q}{m}(E + v \wedge B^\varepsilon) \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

$$f^\varepsilon(0, x, v) = f^{\text{in}}(x, v), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.2}$$

où $f^\varepsilon = f^\varepsilon(t, x, v) \geq 0$ est la fonction de distribution dans l'espace des phases $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, m est la masse des particules, q est la charge des particules et (E, B^ε) le champ éléctromagnétique. On peut considérer simplement le problème (2.1)-(2.2), en supposant que (E, B^ε) est un champ donné, ou réaliser les couplages nécessaires à la modélisation de ces champs dont nous verrons des exemples connus dans la partie 2.2 suivante. Le cas qui nous intéresse est le comportement asymptotique de (2.1) dans le cas du confinement magnétique et donc dans le cas d'un large champ magnétique. Dans ces conditions, nous avons

$$B^\varepsilon(x) = \frac{B(x)}{\varepsilon}, \quad B(x) = B(x)b(x),$$

avec $B(x)$ une fonction scalaire positive, et $b(x)$ un champ de vecteurs unitaires.

2.2 Différents couplages : Poisson, Maxwell

Pour modéliser l'évolution du champ éléctromagnétique, il est possible de coupler le problème (2.1)-(2.2) avec les équations qui régissent l'évolution du champ électromagnétique auto-consistant : les équations de Maxwell.

2.2.1 Le couplage Vlasov-Maxwell

Dans le cas où on complète encore notre modèle avec les équations qui régissent l'évolution du champ magnétique, on considère l'équation (2.1) avec la condition initiale (2.2) couplées avec les équations de Maxwell.

Équation (Équations de Maxwell)

Équation de Maxwell-Faraday :

$$\partial_t B + \text{rot } E = 0. \tag{2.3}$$

Loi de Gauss magnétique :

$$\text{div } B = 0. \tag{2.4}$$

Équation de Maxwell-Ampère :

$$\partial_t E - c^2 \text{rot } B = -\frac{J}{\varepsilon_0}. \tag{2.5}$$

Loi de Gauss électrique :

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.6}$$

avec

$$\rho(x,t) = q \int f(x,v,t)\mathrm{d}v, \; J(x,t) = q \int f(x,v,t) v \mathrm{d}v. \tag{2.7}$$

Le modèle de Vlasov-Maxwell vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2.1

- Conservation de la masse

$$\partial_t \iint f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v = 0. \tag{2.8}$$

- Conservation de l'énergie totale

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \iint \frac{m|v|^2}{2} f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(|E|^2 + c^2 |B|^2 \right) \mathrm{d}x \right) = 0. \tag{2.9}$$

Pour plus de détails sur les propriétés du couplage Vlasov-Maxwell, on pourra se référer à [46], [47], [37] ou encore [21]. Avant d'étudier le modèle complet de Vlasov-Maxwell, il est d'usage d'étudier un modèle approché : le modèle de Vlasov-Poisson.

2.2.2 Champ électrique et couplage Vlasov-Poisson

On se place toujours dans le cas d'un plasma contenant des ions et des électrons. Comme les ions sont plus lourds que les électrons, ils ont une inertie plus grande. On peut donc considérer que les ions ont un mouvement rectiligne uniforme en moyenne. En faisant l'hypothèse qu'ils sont distribués de manière homogène, on dira qu'ils constituent un fond neutralisant de charge opposée n_0.

Nous nous concentrons donc sur le mouvement des électrons. Nous allons considérer que leur vitesse est négligeable devant la vitesse de la lumière c. Pour cela, nous faisons tendre c vers l'infini, ce qui revient à considérer que les ondes électromagnétiques se déplacent beaucoup plus vite que les particules. Nous choisirons même de considérer que les particules sont soumises à un champ qui a atteint l'état stationnaire et dont nous pouvons négliger la dérivée en temps.

Si on prend l'équation (2.3) de Maxwell Faraday, négliger B donne

$$\text{rot } E = 0, \tag{2.10}$$

et donc

$$E = -\nabla_x \phi. \tag{2.11}$$

La loi de gauss électrique

$$\varepsilon_0 \, \text{div} E = \rho \tag{2.12}$$

donne

$$-\varepsilon_0 \nabla \phi = \rho. \tag{2.13}$$

Avec le fond d'ions neutralisant, on obtient

$$\varepsilon_0 \text{div} E = e \left(\int f(t,x,v) \mathrm{d}v - n_0 \right) \tag{2.14}$$

avec la condition de neutralité globale

$$\iint f^{in}(x,v) \mathrm{d}v \mathrm{d}x = \int n_0 \mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Pour plus de détails sur la dérivation du modèle de Vlasov-Poisson à partir du modèle de Vlasov-Maxwell, le lecteur pourra se référer à [32] ou [12]. On obtient ainsi les équations de Poisson suivantes.

Équation (Équations de Poisson)

$$\varepsilon_0 \, \text{div} E = \rho, \tag{2.16}$$

$$E = -\nabla_x \phi, \tag{2.17}$$

avec

$$\rho(x,t) = |e| \int f(x,v,t) \mathrm{d}v. \tag{2.18}$$

Les propriétés de ces équations ont été étudiées par exemple dans [4], [8], [45], [49] ou [33].

2.3 Principaux régimes

2.3.1 Modèle centre-guide

On peut décomposer la trajectoire de nos particules en une trajectoire dominante, appelée le **centre-guide**, et un rayon qui définit l'oscillation. Si $\rho_L \sim \varepsilon$, alors pour $\varepsilon \searrow 0$, le modèle centre-guide est le modèle limite de notre équation. L'étudier permet entre autres de mettre en évidence la consistance de nos calculs, ainsi que le caractère de préservation de l'asymptotique de nos schémas. Nous verrons que dans ce modèle limite, la fonction f dépend uniquement de $x_1, x_2, |v|$, c'est-à-dire

$$\exists\, g = g(t,x,r) \text{ tel que } f(t,x,v) = g(t,x,r=|v|).$$

On sait que pour une telle fonction, notre solution appartient alors au noyau de $\langle\cdot\rangle$, opérateur que l'on détaillera par la suite.

2.3.2 Rayon de Larmor

Quand un plasma est soumis à un champ électromagnétique fort, les particules s'enroulent autour des lignes de champ, d'après la figure 1.3, que l'on peut décomposer comme une rotation autour des lignes de champs et une translation le long des lignes de champ. Le mouvement de rotation est appelé **mouvement cyclotronique**, et la vitesse le long de l'orbite cyclotronique est appelée vitesse cyclotronique. La rotation est caractérisée par la pulsation cyclotronique $\omega_c = q|\mathbf{B}|/m$, que l'on appellera par abus de langage **fréquence cyclotronique**. La position de la particule est donc décomposée en la position du centre de rotation, le **centre-guide**, et le rayon de l'orbite cyclotronique définissant le **rayon de Larmor** ρ_L.

On suppose comme précisé à la section 2.1 que

$$\mathbf{B}^\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{B}(x)}{\varepsilon}, \quad \mathbf{B}(x) = B(x)b(x),$$

avec $B(x)$ une fonction scalaire positive et $b(x)$ un champ de vecteurs unitaires. On sait que la fréquence cyclotronique est telle que $q|\mathbf{B}^\varepsilon|/m = qB/(m\varepsilon) \sim 1/\varepsilon$. Si de plus on suppose que $\mathrm{div}_x(Bb) = 0$, $0 < \varepsilon << 1$, alors le rayon de Larmor est proportionnel à l'inverse de cette fréquence *i.e.* $\rho_L \sim \varepsilon$. Nous étudions les cas de champs magnétiques forts et nous voyons que dans ces cas, alors que $\varepsilon \searrow 0$, le rayon $\rho_L \searrow 0$ et donc les trajectoires se rapprochent des lignes de champs.

2.4 Les opérateurs de collision

Parler de plasma en négligeant les interactions entre les particules a un sens. En effet, les mouvements des particules perpendiculaires au champ sont contenus par leurs orbites de petit rayon de Larmor. Cette approximation qui néglige les collisions est même suffisante dans beaucoup de cas, en particulier en astrophysique. Cependant, les particules ne bougent pas de manière indépendante. En effet, sous l'action de champs magnétiques intenses, les particules d'une espèce

s peuvent entrer en collision avec les particules d'une espèce s', les unes avec les autres. Modéliser ces collisions revient à faire intervenir un noyau de collision dans le second membre de l'équation de Vlasov, c'est-à-dire écrire

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \frac{q}{m}(E + v \wedge B^\varepsilon) \cdot \nabla_v f^\varepsilon = Q(f^\varepsilon), \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.19}$$

où Q représente le noyau de collision. Plusieurs noyaux de collision sont connus. Le but est d'étudier l'opérateur de Fokker-Planck-Landau, du nom de Adriaan Daniël FOKKER (1887-1972), Max PLANCK (1858-1947) et Lev Davidovich LANDAU (1908-1968).

Équation (Opérateur de Fokker-Planck-Landau)

$$Q_{FPL}(f, f)(v) = \mathrm{div}_v\Big(\int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v - v'|) S(v - v')[f(v')\nabla_v f(v) - f(v)\nabla_{v'} f(v')]\mathrm{d}v'\Big).$$

Il est cependant raisonnable de commencer par étudier le noyau de relaxation de Boltzmann (Ludwig BOLTZMANN, 1844-1906).

Équation (Opérateur de relaxation Boltzmann linéarisé)

$$Q_B(f(t, x, \cdot))(v) = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^3} s(v, v')\{M(v)f(t, x, v') - M(v')f(t, x, v)\}\, \mathrm{d}v'$$

où M est l'équilibre Maxwellien à température θ

$$M(v) = \frac{1}{(2\pi\theta/m)^{3/2}} e^{-(m|v|^2)/2\theta}, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

Nous consacrerons le chapitre 4 à l'étude de ces noyaux. Nous y avons en effet cherché à calculer la gyromoyenne de ces noyaux.

Nous cherchons un modèle pour la densité dominante. Le problème étant un problème sous contraintes, nous éliminons cette contrainte en projetant sur le noyau d'un opérateur que nous détaillerons. Cette projection est en réalité un opérateur de moyenne le long du flot, et c'est lorsque l'on projette notre équation que l'on doit calculer la moyenne des noyaux de collision.

Les calculs de ces moyennes comportent quelques difficultés. Il s'agit de calculer la moyenne d'intégrales (convolutions) en vitesse, et aussi, dans le cas de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau, des opérateurs de deuxième ordre en vitesse. C'est pour cette raison que nous allons d'abord étudier des formules de commutation entre la moyenne et la convolution d'une part et la moyenne et la divergence d'autre part.

Dans le cas de l'opérateur de relaxation de Boltzmann, on obtient l'opérateur moyenné suivant

$$\langle Q_B \rangle f(x,v) = \frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z) \{ M(v) f(\overline{x'}, x_3, v') - M(v') f(x,v) \} \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'$$

avec $z = \omega_c \overline{x} + {}^{\perp}\overline{v} - (\omega_c \overline{x'} + {}^{\perp}\overline{v'})$ et la moyenne de la section de collision s'écrit

$$\mathcal{S}(r, v_3, r', v_3', z) = \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\,)\ \chi(r, r', z)$$

avec

$$\chi(r,r',z) = \frac{\mathbf{1}_{\{|r-r'|<|z|<r+r'\}}}{\pi^2 \sqrt{|z|^2 - (r-r')^2} \sqrt{(r+r')^2 - |z|^2}},\ r, r' \in \mathbb{R}_+, v_3, v_3' \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^2.$$

On remarque alors qu'il s'agit d'un opérateur présentant la même structure, mais qui agit maintenant en $(\overline{x}, v)$ et plus seulement en v.

Dans le cas de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau, on obtient comme opérateur moyenné

$$\langle Q_{FP} \rangle f(x,v) = \frac{\theta}{m\tau} \mathrm{div}_{\omega_c x, v} \left\{ M \mathcal{L} \nabla_{\omega_c x, v} \left(\frac{f}{M} \right) \right\},$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2(I_3 - e_3 \otimes e_3) & -E \\ E & I_3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque l'apparition d'une diffusion en (x_1, x_2). On peut alors étudier les propriétés de dissipations et vérifier l'inégalité d'entropie et le théorème de H.

chapitre 3

L'opérateur de moyenne

L'outil principal utilisé dans cette thèse est l'opérateur de moyenne le long d'un flot. Dans ce chapitre, nous introduisons rigoureusement cette notion et explorons ses propriétés.

Nous commencerons par énoncer rapidement et formellement les propriétés dans un cas général, comme étudié dans l'article [16], puis nous détaillerons les calculs dans les deux cas qui nous intéressent : le régime du rayon de Larmor fini et l'approximation centre-guide.

Plan du chapitre

3.1 Moyenne le long d'un flot 38

3.2 Rayon de Larmor fini 47

3.2.1 Flot caractéristique 48

3.2.2 Invariants du flot 49

3.2.3 Opérateur de moyenne le long du flot 51

3.2.4 Propriétés de l'opérateur de moyenne 51

3.2.5 Moyenne et opérateur différentiel du premier ordre 54

3.3 Centre guide 58

3.4 Conclusions 61

3.1 Opérateur de moyenne le long d'un flot

On considère le problème de transport linéaire introduit dans [16], où une partie du transport est fortement pénalisée

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + a(t,y)\cdot\nabla_y u^\varepsilon + \dfrac{b(y)}{\varepsilon}\cdot\nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0,y) = u_0^\varepsilon(y), & y\in\mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ici, a et b sont des champs donnés. On suppose que b est à divergence nulle. On a alors, comme nous l'avons déjà évoqué dans le cas de Vlasov, des échelles différentes : une advection lente le long de a et une advection rapide le long de b. Formellement, si on multiplie l'équation de transport de (3.1) par ε on obtient $b(y)\cdot\nabla_y u^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

On réalise le développement formel de Hilbert

$$u^\varepsilon = u + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \tag{3.2}$$

En injectant la décomposition (3.2) dans (3.1) on obtient

$$\varepsilon^{-1} : b(y)\cdot\nabla_y u = 0, \tag{3.3}$$

$$\varepsilon^0 : \partial_t u + a(t,y)\cdot\nabla_y u + b(y)\cdot\nabla_y u_1 = 0, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon^1 : \partial_t u_1 + a(t,y)\cdot\nabla_y u_1 + b(y)\cdot\nabla_y u_2 = 0, \tag{3.5}$$

$$\vdots$$

On voit à présent que l'opérateur $\mathcal{T} = b(y)\cdot\nabla_y$ joue un rôle majeur dans notre analyse. L'équation (3.3) indique en effet qu'à tout temps $t\in\mathbb{R}_+$ l'ordre dominant de l'expansion (3.2) appartient au noyau de $\mathcal{T}$. Cette information, que l'on interprète comme une contrainte, n'est pas suffisante pour déterminer u de manière unique. Pour déterminer u, nous voulons la coupler avec (3.4). On a alors besoin d'éliminer u_1 dans (3.4). Pour ce faire, on projette (3.4) sur l'orthogonal de l'image de $\mathcal{T}$ (considéré par exemple dans $L^2(\mathbb{R}^m)$) ou encore sur le noyau de $\mathcal{T}$ (car $\mathrm{div}_y b = 0$) et dans ce cas

$$(\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp = \ker\mathcal{T}.$$

En notant P cette projection, on obtient par linéarité

$$P(\partial_t u) + P\left(a\cdot\nabla_y u\right) = 0.$$

Comme P commute avec la dérivée en temps et qu'à chaque instant $u(t)\in\ker\mathcal{T}$, on en déduit que

$$P(\partial_t u) = \partial_t P u = \partial_t u.$$

Ainsi, le modèle permettant de calculer u est

$$\partial_t u + P\left(a\cdot\nabla_y u\right) = 0,\ (t,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m \tag{3.6}$$

à compléter par une condition initiale appropriée. Bien que le problème (3.6) soit bien posé (existence, unicité de la solution, ...), ce modèle, au moins sous cette forme, présente un intérêt limité du point de vue pratique lorsque l'on souhaite calculer numériquement u. La difficulté vient de la complexité de l'opérateur composé $P(a \cdot \nabla_y)$. Il convient de chercher une expression plus simple, à l'aide d'un nouvel opérateur de transport, que l'on va interpréter comme le moyenné (ou l'homogénéisé) de $a \cdot \nabla_y$ le long du flot caractéristique associé au champ b. Il est possible d'utiliser le même procédé pour calculer u_1, u_2, ... Par exemple une fois que l'on a calculé u, on obtient l'image par $\mathcal{T}$ de u_1 par (3.4).

$$\mathcal{T}u_1 = -\partial_t u - a(t,y) \cdot \nabla_y u \tag{3.7}$$

et donc on détermine u_1 à une fonction du noyau de $\mathcal{T}$ près

$$u_1 = v_1 + w_1,\ \mathcal{T}v_1 = 0,\ \mathcal{T}w_1 = -\partial_t u - a \cdot \nabla_y u.$$

En projetant sur le noyau de $\mathcal{T}$, on élimine u_2 de (3.5). On obtient ainsi l'évolution en temps de v_1.

$$\partial_t v_1 + P\left(a \cdot \nabla_y v_1\right) + P\left(\partial_t w_1 + a \cdot \nabla_y w_1\right) = 0,\ (t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m.$$

Analysons en détail la projection P. Nous allons montrer qu'elle représente la moyenne le long du flot de b. En effet, $b : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ est un champ donné qui satisfait

$$b \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m), \tag{3.8}$$

$$\text{div}_y b = 0 \tag{3.9}$$

et la condition de croissance

$$\exists C > 0 : |b(y)| \leq C(1 + |y|),\ y \in \mathbb{R}^m. \tag{3.10}$$

Sous ces conditions, le flot $Y = Y(s;y)$ est bien défini

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = b(Y(s;y)),\ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \tag{3.11}$$

$$Y(0;y) = y,\ y \in \mathbb{R}^m \tag{3.12}$$

et a la régularité $Y \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. Par (3.9), on déduit que pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'application $y \mapsto Y(s;y)$ préserve la mesure

$$\int_{\mathbb{R}^m} \theta(Y(s;y))\mathrm{d}y = \int_{R^m} \theta(y)\mathrm{d}y,\ \forall \theta \in L^1(\mathbb{R}^m).$$

On a la proposition suivante concernant le noyau de $u \mapsto \mathcal{T}u = \text{div}_y(b(y)u(y))$, pris au sens des distributions, c'est-à-dire que

$$\mathcal{T}u = 0$$

signifie

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(y)b(y)\nabla_y \varphi \mathrm{d}y = 0$$

pour tout $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}_m)$.

Proposition 3.1

Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, alors $\text{div}_y(b(y)u(y)) = 0$ dans $\mathcal{D}'(R^m)$ si et seulement si pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $u(Y(s;y)) = u(y)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 3.2. *Parfois on écrira $u \in \ker \mathcal{T}$, ce qui veut dire que u est constante le long des caractéristiques, c'est-à-dire que $u(Y(s;y)) = u(y)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et presque tout $y \in \mathbb{R}^m$.*

Les résultats suivants ont été démontrés dans [16] pour $L^q(\mathbb{R}^m)$ où $q \in [1, +\infty]$. On peut se référer à cet article pour les différentes démonstrations dans ces cadres. Dans cette thèse, nous nous restreignons au cas $q = 2$. On note $\mathcal{T}$ l'opérateur linéaire défini par

$$\mathcal{T}u = \text{div}_y(u(y)b(y))$$

pour tout u du domaine

$$\text{D} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^m) : \text{div}_y(u(y)b(y)) \in L^2(\mathbb{R}^m) \right\},$$

c'est-à-dire toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ telle qu'il existe une fonction de $L^2(\mathbb{R}^m)$, notée $b \cdot \nabla_y u$ ou encore $\text{div}_y(ub)$ vérifiant pour toute fonction test $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}_m)$

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(y)b(y) \cdot \nabla_y \varphi \text{d}y = -\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)(u \cdot \nabla_y b)\text{d}y.$$

La proposition 3.1 donne

$$\ker \mathcal{T} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^m) : u(Y(s;y)) = u(y),\ s \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } y \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Soit une fonction continue $h \in C([a,b]; L^2(\mathbb{R}^m))$. On note $\int_a^b h(t)\text{d}t \in L^2(\mathbb{R}^m)$ l'intégrale de Riemann de la fonction $t \mapsto h(t) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ sur l'intervalle $[a,b]$. Par construction de l'intégrale de Riemann on montre facilement que pour toute fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_a^b h(t)\text{d}t \right)(y)\varphi(y)\text{d}y = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^m} h(t,y)\varphi(y)\text{d}y \right) \text{d}t \tag{3.13}$$

et donc

$$\left\| \int_a^b h(t)\text{d}t \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \int_a^b \|h(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}\, \text{d}t.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^m} h(t,y)\varphi(y)\text{d}y \right) \text{d}t = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_a^b h(t,y)\text{d}t \right) \varphi(y)\text{d}y,$$

qui, combiné à (3.13), donne

$$\left(\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\right)(y) = \int_a^b h(t,y)\mathrm{d}t, \text{ p.p. } y \in \mathbb{R}^m.$$

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$, alors l'application $s \mapsto Y(s;\cdot)$ appartient à $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^m))$. Ainsi, pour tout $T > 0$, la fonction

$$\langle u \rangle_T := \frac{1}{T}\int_0^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s$$

est bien définie. On a $\langle u \rangle \in L^2(\mathbb{R}^m)$ et $\| \langle u \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$.

Quand $u \in \ker \mathcal{T}$, on a $\langle u \rangle_T = u$ pour tout $T > 0$. Plus généralement, on prouve la convergence de la famille $(\langle u \rangle_T)_{T>0}$ vers la projection orthogonale de u sur $\ker \mathcal{T}$, lorsque $T \to +\infty$. Commençons par un résultat de convergence faible dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Théorème 3.3

Pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ on note $\langle u \rangle$ sa projection orthogonale, c'est-à-dire

$$\langle u \rangle \in \ker \mathcal{T} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^m} (u(y) - \langle u \rangle (y))\, \varphi(y)\mathrm{d}y = 0, \forall \varphi \in \ker \mathcal{T}. \tag{3.14}$$

Alors on a les convergences faibles dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ suivantes

$$\begin{aligned}\langle u \rangle &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Preuve.

Considérons une suite $(T_n)_n$ telle que $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ et telle que $(\langle u \rangle_{T_n})_n$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ vers une fonction $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^m)$. On a $\tilde{u} \in \ker \mathcal{T}$. Il suffit de prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} \tilde{u}(y)\psi(Y(-t;y))\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{u}(y)\psi(y)\mathrm{d}y. \tag{3.15}$$

On utilise pour cela la convergence faible $\lim_{n\to+\infty} \langle u \rangle_{T_n} = \tilde{u}$ ainsi qu'une trans-

lation le long du flot, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \tilde{u}(y)\psi(Y(-t;y))\mathrm{d}y &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \langle u\rangle_{T_n}(y)\psi(Y(-t;y))\mathrm{d}y \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\psi(Y(-t;y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s+t;y))\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{T_n}\int_t^{T_n+t}\int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{T_n}\int_{T_n}^{T_n+t}\int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\quad - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{T_n}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\quad + \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \langle u\rangle_{T_n}(y)\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.16}$$

On voit facilement que

$$\frac{1}{T_n}\left|\int_{T_n}^{t+T_n}\int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \le \frac{|t|}{T_n}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \tag{3.17}$$

et que

$$\frac{1}{T_n}\left|\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \le \frac{|t|}{T_n}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \tag{3.18}$$

Si on combine à présent (3.16), (3.17) et (3.18) on obtient (3.15) ce qui implique que

$$\tilde{u}(Y(s;y)) = \tilde{u}(y),\ s\in\mathbb{R}, \text{p.p } y\in\mathbb{R}^m.$$

Prouvons maintenant que $\tilde{u}$ satisfait la formulation variationnelle dans (3.14). Pour tout $\varphi \in \ker\mathcal{T}$ et $s\in\mathbb{R}$ on a $u\varphi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ et ainsi par changement de variable le long des caractéristiques on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\varphi(Y(s;y))\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} u(Y(s;y))\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

On prend maintenant la moyenne sur $[0,T_n]$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} u(Y(s;y))\mathrm{d}s\right)\varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m}\langle u\rangle_{T_n}(y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

Comme $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^m)$, la convergence faible $\lim_{n\to+\infty}\langle u\rangle_{T_n} = \tilde{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ nous donne que

$$\int_{\mathbb{R}^m}(u(y)-\tilde{u}(y))\varphi(y)\mathrm{d}y = 0, \forall\varphi\in\ker\mathcal{T}.$$

Finalement $\tilde{u}$ coïncide avec la projection orthogonale de u sur $\ker\mathcal{T}$, $\tilde{u} = \langle u\rangle$ et par unicité de la projection on a aussi la convergence

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s = \langle u\rangle$$

faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^m)$. De façon similaire on obtient

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s=\langle u\rangle$$

faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.

■

Il est possible de montrer que les convergences établies précédemment sont fortes (voir aussi le théorème ergodique de Von Neumann [69] page 57).

Théorème 3.4

Pour toute fonction $u\in L^2(\mathbb{R}^m)$ on a les convergences fortes dans $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}u(Y(s;))\mathrm{d}s=\langle u\rangle\,.$$

Preuve.

Rappelons que l'adjoint de $\mathcal{T}$ satisfait

$$D(\mathcal{T}^\star)=D(\mathcal{T}),\ \mathcal{T}^\star u=-\mathcal{T}u,\ \forall u\in D(\mathcal{T}).$$

Ainsi, on a $\ker\mathcal{T}=\ker\mathcal{T}^\star=(\mathrm{Im}\,\mathcal{T})^\perp$, ce qui implique la décomposition orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\ker\mathcal{T}\oplus\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{T}}=(\mathrm{Im}\,\mathcal{T})^\perp\oplus((\mathrm{Im}\,\mathcal{T})^\perp)^\perp=L^2(\mathbb{R}^m).$$

Donc, pour tout $u\in L^2(R^m)$, il existe $v\in\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{T}}$ tel que $u=\langle u\rangle+v$. Comme on l'a vu précédemment, pour tout $T>0$, on a

$$\langle\langle u\rangle\rangle_T=\frac{1}{T}\int_0^T\langle u\rangle\,(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s=\langle u\rangle$$

et donc

$$\lim_{T\to+\infty}\langle u\rangle_T=\langle u\rangle+\lim_{T\to+\infty}\langle v\rangle_T\text{, et la convergence est forte dans }L^2(\mathbb{R}^m).$$

Pour prouver que $\lim_{T\to+\infty}\langle u\rangle_T=\langle u\rangle$, où la convergence est forte dans $L^2(\mathbb{R}^m)$, il reste à vérifier que $\lim_{T\to+\infty}\langle v\rangle_T=0$ et la convergence est forte dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ pour tout $v\in\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{T}}$. Considérons tout d'abord $v=\mathcal{T}w$ pour une certaine $w\in D(\mathcal{T})$. Considérons aussi une suite $(w_n)_n\subset C_c^1(\mathbb{R}^m)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(w_n,\mathcal{T}w_n)=(w,\mathcal{T}w),\text{où la convergence est forte dans }L^2(\mathbb{R}^m).$$

On a pour tout $y\in\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{T}w_n\rangle_T(y)&=\frac{1}{T}\int_0^T(\mathcal{T}w_n)(Y(s;y))\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(w_n(Y(s;y))\right)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{T}\left(w_n(Y(T;y))-w_n(y)\right)\end{aligned}$$

et ainsi

$$\| \langle \mathcal{T} w_n \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{2}{T} \|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}.$$

En passant à la limite pour $n \to +\infty$ on obtient $\| \langle v \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{2}{T} \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$, ce qui donne $\lim_{T\to+\infty} \langle v \rangle_T = 0$ au sens d'une convergence forte dans $L^2(\mathbb{R}^m)$. Considérons maintenant une fonction $v \in \overline{\operatorname{Im} \mathcal{T}}$. Pour tout $\delta > 0$ il existe $v_\delta \in \operatorname{Im} \mathcal{T}$ telle que $\|v - v_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} < \delta$. On a

$$\begin{aligned} \| \langle v \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &\leq \| \langle v - v_\delta \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \| \langle v_\delta \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq \|v - v_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \| \langle v_\delta \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq \delta + \| \langle v_\delta \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

En passant à la limite pour $T \to +\infty$, on obtient

$$\limsup_{T\to+\infty} \| \langle v \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \delta, \ \forall \delta > 0$$

et ainsi $\lim_{T\to+\infty} \| \langle v \rangle_T \|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = 0$ pour tout $v \in \overline{\operatorname{Im} \mathcal{T}}$.

■

Remarque 3.5. *On appelle opérateur de moyenne le long du flot Y l'application qui à toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ associe*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(Y(s;\cdot))\mathrm{d}s \text{ et la convergence est forte dans } L^2(\mathbb{R}^m).$$

D'après les théorèmes 3.3 et 3.4 on en déduit que l'opérateur de moyenne coïncide avec la projection orthogonale sur le noyau de $\mathcal{T}$ (d'où la notation $\langle \cdot \rangle$ pour cette dernière). Notons que

$$\ker \langle \cdot \rangle = \ker \operatorname{Proj}_{\ker \mathcal{T}} = (\ker \mathcal{T})^\perp = \overline{Im\, \mathcal{T}}.$$

Donc, la décomposition orthogonale $L^2(\mathbb{R}^m)$ s'écrit

$$u = \langle u \rangle + (u - \langle u \rangle), \ \int_{\mathbb{R}^m} \langle u \rangle \, (u - \langle u \rangle)\mathrm{d}y = 0$$

avec $\langle u \rangle \in \ker \mathcal{T}$ la moyenne de u et $u - \langle u \rangle \in \ker \langle \cdot \rangle$ la fluctuation de u autour de la moyenne.

On montre facilement que l'opérateur de moyenne préserve l'ordre de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.6

a. Pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ vérifiant $u \geq a$, on a $\langle u \rangle \geq a$.

b. Pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ vérifiant $u \leq A$, on a $\langle u \rangle \leq A$.

Preuve.
Immédiate car on sait que $\langle u \rangle = \lim_{T \to +\infty} \langle u \rangle_T$ et $\langle u \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T u\left(Y(s;\cdot)\right) \mathrm{d}s$ vérifient les mêmes bornes que u pour tout $T > 0$.

■

L'opérateur de moyenne est local par rapport aux trajectoires.

Proposition 3.7

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble invariant par le flot Y (c'est-à-dire que $Y(s;A) \subset A$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Alors, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ on a $\langle \mathbf{1}_A u \rangle = \mathbf{1}_A \langle u \rangle$. En particulier si on a $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{R}^m)$ telles que $u_1 = u_2$ sur A, alors $\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle$ sur A.

Preuve.
Pour tout $\varphi \in \ker \mathcal{T}$ on a $\int_{\mathbb{R}^m} (u - \langle u \rangle) \varphi \mathrm{d}y = 0$. Comme A est invariant par le flot, la fonction $\mathbf{1}_A \varphi$ appartient à $\ker \mathcal{T}$. Ainsi, $\int_{R^m} (u - \langle u \rangle) \mathbf{1}_A \varphi \mathrm{d}y = 0$ ce qui signifie que $\langle \mathbf{1}_A u \rangle = \mathbf{1}_A \langle u \rangle$. Si $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{R}^m)$ coïncident sur A alors $\mathbf{1}_A (u_1 - u_2) = 0$. De cette façon on a $\mathbf{1}_A \langle u_1 - u_2 \rangle = \langle \mathbf{1}_A (u_1 - u_2) \rangle = 0$ ce qui signifie que $\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle$ sur A.

■

Les flots que nous allons étudier plus tard sont des flots périodiques, *i.e.*

$$\forall y \in \mathbb{R}^m, \exists T_y > 0 \text{ t.q. } Y(T_y; y) = y.$$

Pour un tel flot nous montrerons que

$$\langle u \rangle (y) = \frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} u\left(Y(s;y)\right) \mathrm{d}s, y \in \mathbb{R}^m.$$

Pour démontrer ce résultat nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3.8

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction T-périodique localement intégrable. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$ on a

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t g(s) \mathrm{d}s - \frac{1}{T} \int_0^T g(s) \mathrm{d}s \right| \leq \frac{2}{|t|} \int_0^T |g(s)| \mathrm{d}s.$$

Preuve.
Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kT \leq t < (k+1)T$. Par périodicité on a

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(s) \mathrm{d}s = \frac{1}{t} \left(k \int_0^T g(s) \mathrm{d}s + \int_{kT}^t g(s) \mathrm{d}s \right)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{T}\int_0^T g(s)\mathrm{d}s\right| &\leq \left|\left(\frac{k}{t}-\frac{1}{T}\right)\int_0^T g(s)\mathrm{d}s\right| + \frac{1}{|t|}\int_{kT}^{(k+1)T}|g(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{|t-kT|}{|t|T}\int_0^T |g(s)|\mathrm{d}s + \frac{1}{|t|}\int_0^T |g(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{T}{|t|T}\int_0^T |g(s)|\mathrm{d}s + \frac{1}{|t|}\int_0^T |g(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{2}{|t|}\int_0^T |g(s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

■

On peut donc écrire dans le cas des flots périodiques l'opérateur de moyenne de la façon suivante.

Proposition 3.9

On suppose que toutes les trajectoires sont périodiques en temps de périodes uniformément bornées, *i.e.*

$$\exists \tilde{T} > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^m, \exists T_y \in]0, \tilde{T}] \text{ t. q. } Y(T_y; y) = y.$$

Alors, pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ on a

$$\langle u \rangle (y) := \frac{1}{T_y}\int_0^{T_y} u(Y(s;y))\ \mathrm{d}s.$$

Preuve.

On sait que

$$\langle u \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u\left(Y(s;\cdot)\right)\mathrm{d}s, \text{ et la convergence est forte dans } L^2(\mathbb{R}^m).$$

Il suffit de montrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t u\left(Y(s;\cdot)\right)\mathrm{d}s\right\} = \frac{1}{T_y}\int_0^{T_y} u\left(Y(s;\cdot)\right)\mathrm{d}s, \text{ où la convergence est forte dans } L^2(\mathbb{R}^m).$$

Grâce au lemme 3.8 on a pour tout $y \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t}\int_0^t u\left(Y(s;y)\right)\mathrm{d}s - \frac{1}{T_y}\int_0^{T_y} u\left(Y(s;y)\right)\mathrm{d}s\right| &\leq \frac{2}{t}\int_0^{T_y}\left|u\left(Y(s;y)\right)\right|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{2}{t}\int_0^{\tilde{T}}\left|u\left(Y(s;y)\right)\right|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t u\left(Y(s;y)\right)\mathrm{d}s - \frac{1}{T_y}\int_0^{T_y} u\left(Y(s;y)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &\leq \frac{2}{t}\left\|\int_0^{\tilde{T}} u\left(Y(s;y)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}\\ &\leq \frac{2}{t}\int_0^{\tilde{T}} \left\|u\left(Y(s;y)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}\mathrm{d}s\\ &= \frac{2T}{t}\left\|u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \to 0, \text{ quand } t\to\infty.\end{aligned}$$

■

3.2 Application au régime du rayon de Larmor fini

Rappelons que dans ce cas on considère que le champ électromagnétique est de la forme

$$E = -\nabla_x \phi, \quad B^\varepsilon = \left(0, 0, \frac{B}{\varepsilon}\right)$$

pour une certaine constante $B > 0$. On étudie alors pour $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ une équation de type

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(v_1\partial_{x_1} f^\varepsilon + v_2\partial_{x_2} f^\varepsilon) + v_3\partial_{x_3} f^\varepsilon + \frac{q}{m}E\cdot\nabla_v f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon}(v_2\partial_{v_1} f^\varepsilon - v_1\partial_{v_2} f^\varepsilon) = 0 \tag{3.19}$$

où $\omega_c^\varepsilon = \omega_c/\varepsilon = qB/m\varepsilon$ est la fréquence cyclotronique, avec la condition initiale

$$f^\varepsilon(0, x, v) = f^{\text{in}}(x, v), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \tag{3.20}$$

On applique à cette équation la démarche vue à la section 3.1. On décompose f^ε en une densité dominante f et des fluctuations d'ordre $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots$

$$f^\varepsilon = f + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2 + ... \tag{3.21}$$

Cette décomposition injectée dans (3.19) donne, avec les notations $\overline{x} = (x_1, x_2)$ et $\overline{v} = (v_1, v_2)$, ${}^\perp\overline{v} = (v_2, -v_1)$

$$\mathcal{T} f := \overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}} f + \omega_c\, {}^\perp\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{v}} f = 0, \tag{3.22}$$

$$\partial_t f + v_3\partial_{x_3} f + \frac{q}{m}E\cdot\nabla_v f + \mathcal{T} f^1 = 0, \tag{3.23}$$

$$\vdots$$

pour une fonction f du domaine

$$\mathrm{D}(\mathcal{T}) = \{u(x, v) \in L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2) \ : \ \mathrm{div}_{x,v}\{u(\overline{v}, 0, \omega_c\, {}^\perp\overline{v}, 0)\} \in L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)\}.$$

On note par $\|\cdot\|$ la norme standard de $L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$. L'équation (3.22) est une contrainte sur la divergence

$$\mathrm{div}_{x,v}\{f(\overline{v}, 0, \omega_c\, {}^\perp\overline{v}, 0)\} = 0.$$

L'équation (3.22) dit également qu'à tout temps t la densité $f(t,\cdot,\cdot)$ reste constante le long du flot associé à $\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}}+{\omega_c}^{\perp}\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{v}}$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}s}=\overline{V}(s),\ \ \frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}s}=0,\ \ \frac{\mathrm{d}\overline{V}}{\mathrm{d}s}={\omega_c}^{\perp}\overline{V}(s),\ \ \frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}s}=0, \tag{3.24}$$

ce qui nous donne qu'à tout temps t la densité $f(t,\cdot,\cdot)$ dépend uniquement des invariants de (3.24).

3.2.1 Flot caractéristique dans le cas du rayon de Larmor fini

On rappelle le système d'équations dont sont solutions les caractéristiques du flot associé à $\mathcal{T}=\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}}+{\omega_c}^{\perp}\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{v}}$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}s}=\overline{V}(s),\ \ \frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}s}=0,\ \ \frac{\mathrm{d}\overline{V}}{\mathrm{d}s}={\omega_c}^{\perp}\overline{V}(s),\ \ \frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}s}=0. \tag{3.25}$$

On rajoute à ce système la condition initiale

$$X(0;x,v)=x,\ \ V(0;x,v)=v. \tag{3.26}$$

On obtient immédiatement $X_3=x_3$ et $V_3=v_3$. Il reste à résoudre l'équation en $\overline{V}$. On écrit $Z=V_1+iV_2$, alors

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}s}=-i\omega_c Z,\ Z(0)=v_1+iv_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}Z(s)&=Z(0)\mathrm{e}^{-i\omega_c s}\\&=(v_1+iv_2)\left(\cos(\omega_c s)-i\sin(\omega_c s)\right)\\&=\left(v_1\cos(\omega_c s)+v_2\sin(\omega_c s)\right)+i\left(-v_1\sin(\omega_c s)+v_2\cos(\omega_c s)\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases}V_1(s;x,p)=v_1\cos(\omega_c s)+v_2\sin(\omega_c s)\\V_2(s;x,p)=-v_1\sin(\omega_c s)+v_2\cos(\omega_c s)\end{cases},$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos(\omega_c s)&\sin(\omega_c s)\\-\sin(\omega_c s)&\cos(\omega_c s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\\&=R(-\omega_c s)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

où pour tout α réel, $R(\alpha)$ désigne la rotation d'angle α. Ainsi, comme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\overline{X}(s)+\frac{{}^{\perp}\overline{V}}{\omega_c}\right\}&=\overline{V}(s)+\frac{1}{\omega_c}\,{}^{\perp}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overline{V}\right\}\\&=\overline{V}(s)+\frac{1}{\omega_c}\,{}^{\perp}\left\{{\omega_c}^{\perp}\overline{V}(s)\right\}\\&=0,\end{aligned} \tag{3.27}$$

on déduit que

$$\begin{aligned}\overline{X}(s) &= \overline{x} + \frac{\overline{v}}{\omega_c} - \frac{\overline{V}(s)}{\omega_c} \\ &= \overline{x} + \frac{\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{R(-\omega_c s)\overline{v}\}}{\omega_c}.\end{aligned}$$

Notre flot caractéristique s'écrit donc

$$\overline{X}(s) = \overline{x} + \frac{\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{R(-\omega_c s)\overline{v}\}}{\omega_c},\ \overline{V}(s) = R(-\omega_c s)\overline{v},\ X_3 = x_3 \text{ et } V_3 = v_3. \quad (3.28)$$

Notons que toutes les trajectoires sont périodiques de période $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$.

3.2.2 Familles d'invariants du flot

À partir de l'expression 3.28 du flot caractéristique, on peut déduire les invariants du flot. Il est évident que x_3 et v_3 sont des invariants du flot. De plus on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\overline{v}|^2 = 2\overline{v}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overline{v}(s) = 2\overline{v}(s) \cdot \omega_c{}^{\perp}\overline{v} = 0.$$

D'où $|\overline{V}(s)|^2 = |\overline{v}|^2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi $|\overline{v}|$ est aussi un invariant du flot. Le calcul 3.27 nous donne que $y = \overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}$ est également un invariant du flot.

Posons maintenant $\psi_1 = x_1 + \frac{v_2}{\omega_c}$, $\psi_2 = x_2 - \frac{v_1}{\omega_c}$, $\psi_3 = x_3$, $\psi_4 = |\overline{v}|$ et $\psi_5 = v_3$. Alors, un calcul direct montre la proposition suivante.

Proposition 3.10

Les fonctions $(\psi_i)_{i\in\{1,\dots,5\}}$ forment une famille d'invariants indépendants.

Preuve.

Il suffit de vérifier que le rang de la matrice jacobienne $A = \frac{\partial(\psi_1,\dots,\psi_5)}{\partial(x,v)}$ est 5. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}\left(x_1 + \frac{v_2}{\omega_c}\right)}{\mathrm{d}x} = e_1 \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial v} &= \frac{\mathrm{d}\left(x_1 + \frac{v_2}{\omega_c}\right)}{\mathrm{d}v} = \frac{e_2}{\omega_c} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial\psi_2}{\partial x} &= \frac{\partial\left(x_2 - \frac{v_1}{\omega_c}\right)}{\partial x} = e_2 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial v} &= \frac{\partial\left(x_2 - \frac{v_1}{\omega_c}\right)}{\partial v} = -\frac{e_1}{\omega_c} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_3}{\partial x} &= \frac{\partial x_3}{\partial x} = e_3 \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial v} &= \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial\psi_4}{\partial x} &= \frac{\partial|\overline{v}|}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\psi_4}{\partial v} &= \frac{\partial|\overline{v}|}{\partial v} = \frac{\partial\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{\partial v} = \left(\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}, 0\right) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_5}{\partial x} &= \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \psi_5}{\partial v} &= \frac{\partial v_3}{\partial v} = e_3 \end{cases},$$

où (e_1, e_2, e_3) sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\omega_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1/|\overline{v}| & v_2/|\overline{v}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien de rang 5 pour tout $\overline{v} \neq 0$.

■

Remarque 3.11. *Les égalités*

$$\overline{X}(s) + \frac{{}^{\perp}\overline{V}(s)}{\omega_c} = \overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} \text{ et } |\overline{V}(s)| = |\overline{v}|$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ signifient que

$$\left| \overline{X}(s) - \left(\overline{x} + \frac{\overline{v}}{\omega_c} \right) \right| = \frac{\left| {}^{\perp}\overline{V}(s) \right|}{|\omega_c|} = \frac{|\overline{v}|}{|\omega_c|}.$$

Par conséquent la projection de $X(s)$ sur le plan (x_1, x_2) orthogonal au champ magnétique décrit un cercle, appelé cercle de Larmor, de centre $\overline{x} + \frac{\overline{v}}{\omega_c}$ et de rayon $\frac{|\overline{v}|}{|\omega_c|}$.

Remarque 3.12. *En complétant la famille $(\psi_i)_{i \in \{1,\dots,5\}}$ par une sixième coordonnée ψ_0 on obtient un changement de coordonnées*

$$(x, v) \to (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_5).$$

On prend $\psi_0 = -\alpha/\omega_c$ avec $v_1 = |\overline{v}| \cos\alpha$, $v_2 = |\overline{v}| \sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi[$. La fonction ψ_0 est discontinue en tout $V = (v_1 > 0, v_2 = 0, v_3)$ mais son gradient se prolonge en une fonction continue pour tout $\overline{v} \neq 0$ et

$$\nabla_x \psi_0 = 0, \nabla_v \psi_0 = (\nabla_{\overline{v}} \psi_0, \partial_{v_3} \psi_0) = \left(\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c |\overline{v}|^2}, 0 \right)$$

d'où

$$\mathcal{T} \psi_0 = \omega_c {}^{\perp}\overline{v} \cdot \nabla_{\overline{v}} \psi_0 = \omega_c {}^{\perp}\overline{v} \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c |\overline{v}|^2} = 1.$$

Un calcul simple montre que $\det \frac{\partial(\psi_0,\dots,\psi_5)}{\partial(x,v)} = -\frac{1}{\omega_c |\overline{v}|} \neq 0$ *et donc $(x, v) \to (\psi_0, \dots, \psi_5)$ est un changement de coordonnées.*

3.2.3 Opérateur de moyenne le long du flot

Toutes les trajectoires sont périodiques de période $T_c = 2\pi/\omega_c$ et on peut appliquer la proposition 3.9. On introduit l'opérateur de moyenne pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}\langle u \rangle (x,v) &= \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} u(X(s;x,v),V(s;x,v))\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} u\left(\overline{x} + \frac{\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{R(-\omega_c s)\overline{v}\}}{\omega_c}, x_3, R(-\omega_c s)\overline{v}, v_3\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

et en effectuant le changement de variable $\alpha = -\omega_c s \in [0, 2\pi]$ pour $s \in [0, T_c]$, on obtient

$$\langle u \rangle (x,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{R(\alpha)\overline{v}\}}{\omega_c}, x_3, R(\alpha)\overline{v}, v_3\right)\mathrm{d}\alpha.$$

Pour des raisons pratiques, on introduit la notation $e^{i\varphi}$ pour le vecteur de $\mathbb{R}^2$ $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Supposons que le vecteur $\overline{v}$ s'écrive $\overline{v} = |\overline{v}|e^{i\varphi}$. Alors $R(\alpha)\overline{v} = |\overline{v}|e^{i(\alpha+\varphi)}$ et notre expression pour $\langle u \rangle$ devient

$$\begin{aligned}\langle u \rangle (x,v) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i(\alpha+\varphi)}\}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v}|e^{i(\alpha+\varphi)}, v_3\right)\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v}|e^{i\alpha}, v_3\right)\mathrm{d}\alpha. \qquad (3.29)\end{aligned}$$

On remarque alors que la moyenne $\langle u \rangle$ dépend uniquement des invariants $\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}$, x_3, $|\overline{v}|$ et v_3. Le noyau de $\mathcal{T}$ étant donné par les fonctions de L^2 invariantes le long des caractéristiques (3.24),

$$\ker\mathcal{T} = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) : \exists \mu \text{ tel que } u(x,v) = \mu\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}, |\overline{v}|, x_3, v_3\right)\right\}.$$

On retrouve le fait que $\langle u \rangle \in \ker\mathcal{T}$.

3.2.4 Propriétés de l'opérateur de moyenne

On rappelle à présent les propriétés de cet opérateur.

Proposition 3.13

L'opérateur de moyenne est linéaire et continu. De plus, il coïncide avec la projection orthogonale sur le noyau de $\mathcal{T}$, *i.e.*,

$$\langle u \rangle \in \ker\mathcal{T} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u - \langle u \rangle)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\,\varphi \in \ker\mathcal{T}. \qquad (3.30)$$

Cette proposition est une conséquence directe de ce qui a déjà été démontré, on pourra cependant retrouver une preuve par exemple dans [14].

Remarque 3.14. *Notons que* $(\overline{X}, \overline{V})$ *dépend uniquement de* s *et de* $(\overline{x}, \overline{v})$. *De ce fait la caractérisation variationnelle* (3.30) *reste vraie pour tout* $(x_3, v_3) \in \mathbb{R}^2$ *fixé. En fait, pour tout* $\varphi \in \ker \mathcal{T}$ *et tout* $(x_3, v_3) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi)(x,v)\,\mathrm{d}\overline{v}\mathrm{d}\overline{x} &= \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} u(x,v)\varphi(\overline{X}(-s;x,v), x_3, \overline{V}(-s;x,v), v_3)\,\mathrm{d}\overline{v}\mathrm{d}\overline{x}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\overline{X}(s;x,v), x_3, \overline{V}(s;x,v), v_3)\varphi(x,v)\,\mathrm{d}\overline{v}\mathrm{d}\overline{x}\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\langle u\rangle\,(x,v)\varphi(x,v)\;\mathrm{d}\overline{v}\mathrm{d}\overline{x}.\end{aligned}$$

On a la décomposition orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ en fonctions constantes le long des caractéristiques (3.24) et fonctions de moyenne nulle

$$u = \langle u\rangle + (u - \langle u\rangle), \quad \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u - \langle u\rangle)\,\langle u\rangle\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

En remarquant que $\mathcal{T}^\star = -\mathcal{T}$ et avec l'égalité $\langle\cdot\rangle = \mathrm{Proj}_{\ker\mathcal{T}}$, on obtient

$$\ker\langle\cdot\rangle = (\ker\mathcal{T})^\perp = (\ker\mathcal{T}^\star)^\perp = \overline{\mathrm{Im}\mathcal{T}}.$$

En particulier $\mathrm{Im}\mathcal{T} \subset \ker\langle\cdot\rangle$, donc tout élément dans l'image de $\mathcal{T}$ est une fluctuation. On peut également montrer que $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ est fermé, ce qui donne une condition de solvabilité pour $\mathcal{T}u = w$ (c.f. [14], proposition 3.15).

Proposition 3.15

Supposons que $B \neq 0$. Alors la restriction de $\mathcal{T}$ à $\ker\langle\cdot\rangle$ est une bijection sur $\ker\langle\cdot\rangle$. Son inverse appartient à $\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle, \ker\langle\cdot\rangle)$ et on a l'inégalité de Poincaré

$$\|u\| \leq \frac{2\pi}{|\omega_c|}\|\mathcal{T}u\|, \quad \omega_c = \frac{qB}{m} \neq 0$$

pour tout $u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \cap \ker\langle\cdot\rangle$.

Preuve.

On sait déjà que $\mathrm{Im}\mathcal{T} \subset \ker\langle\cdot\rangle$. Supposons maintenant que $u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \cap \ker\langle\cdot\rangle$ telle que $\mathcal{T}u = 0$. Sachant que $\langle\cdot\rangle = \mathrm{Proj}_{\ker\mathcal{T}}$ on a $u = \mathrm{Proj}_{\ker\mathcal{T}}u = \langle u\rangle = 0$ et donc $\mathcal{T}|_{\ker\langle\cdot\rangle}$ est injective.

Prenons à présent $w \in \ker\langle\cdot\rangle$ et montrons qu'il existe $u \in \ker\langle\cdot\rangle \cap \mathrm{D}(\mathcal{T})$ telle que $\mathcal{T}u = w$.

Pour tout $\alpha > 0$ il existe une unique $u_\alpha \in \mathrm{D}(\mathcal{T})$ telle que

$$\alpha\, u_\alpha + \mathcal{T}u_\alpha = w. \tag{3.31}$$

On voit facilement que les solutions $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ sont données par

$$u_\alpha(x,v) = \int_{\mathbb{R}_-} e^{\alpha s} w(X(s;x,v), V(s;x,v))\;\mathrm{d}s, \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

En appliquant l'opérateur de moyenne à (3.31) on obtient $\langle u_\alpha \rangle = 0$ pour tout $\alpha > 0$. On cherche maintenant une borne pour $(\|u_\alpha\|)_{\alpha>0}$. On introduit la fonction

$$W(s;x,v) = \int_s^0 w(X(\tau;x,v), V(\tau;x,v))\, \mathrm{d}\tau.$$

On remarque que pour tout (x,v) fixé, la fonction $s \to W(s;x,v)$ est périodique de période T_c par rapport à s, car $\langle w \rangle = 0$ et on a

$$\|W(s)\| \leq |T_c|\, \|w\|, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Une intégration par parties donne

$$u_\alpha(x,v) = -\int_{\mathbb{R}_-} e^{\alpha s} \partial_s W \, \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}_-} \alpha e^{\alpha s} W(s;x,v) \, \mathrm{d}s$$

et

$$\|u_\alpha\| \leq \int_{\mathbb{R}_-} \alpha e^{\alpha s} \|W(s)\| \, \mathrm{d}s \leq |T_c| \|w\|, \quad \alpha > 0.$$

Considérons maintenant une suite $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{\alpha_n} = u$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. En multipliant (3.31) par une fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\alpha_n \int_{\mathbb{R}^3} u_{\alpha_n} \varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} u_{\alpha_n} \mathcal{T}\varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} w\varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x.$$

En tenant compte de la convergence faible $u_{\alpha_n} \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ on en déduit après passage à la limite quand $n \to \infty$ que

$$-\int_{\mathbb{R}^3} u \mathcal{T}\varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} w\varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x,$$

d'où

$$u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}), \quad \mathcal{T}u = w.$$

Les fonctions $(u_{\alpha_n})_n$ étant toutes de moyenne nulle, il en résulte que $\langle u \rangle = 0$. En fait, pour toute fonction $\varphi \in \ker \mathcal{T}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} u\varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} u_{\alpha_n} \varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \langle u_{\alpha_n} \rangle \varphi \mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

Par la convergence faible on a

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_{\alpha_n}\| \leq \liminf_{n\to\infty} |T_c| \|w\| = |T_c| \|w\|$$

et donc $\left(\mathcal{T}|_{\ker\langle\cdot\rangle}\right)^{-1}$ appartient à $\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle, \ker\langle\cdot\rangle)$.

■

3.2.5 Moyenne et opérateur différentiel du premier ordre

Dans les chapitres suivants on aura besoin de calculer la moyenne d'opérateurs du second ordre. Pour faire cela il est utile de se demander quelles dérivations laissent invariant $\ker \mathcal{T}$. Il s'avère que ces dérivations sont celles le long des invariants

$$\psi_1 = x_1 + \frac{v_2}{\omega_c},\ \ \psi_2 = x_2 - \frac{v_1}{\omega_c},\ \ \psi_3 = x_3,\ \ \psi_4 = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2} \text{ et } \psi_5 = v_3.$$

On introduit également $\psi_0 = -\frac{\alpha}{\omega_c}$, où $\overline{v} = |\overline{v}|e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi[$. On remarque que la variable angle n'est pas continue, et l'angle ne se prolonge pas par continuité, il y a un saut de 2π. En revanche, si on calcule les dérivées par rapport à v_1, v_2 en tout point $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(v_1, 0), v_1 \geq 0\}$ on s'aperçoit que l'on peut les prolonger par continuité.

L'idée est de considérer des champs $(b^i)_{0\leq i\leq 5}$ tels que

$$b^i \cdot \nabla_{x,v}\psi_j = \delta^i_j,\ \ 0 \leq i, j \leq 5.$$

On peut alors remarquer que l'application $(x, v) \mapsto (\psi_i(x, v))_{0\leq i\leq 5}$ définit un changement de coordonnées

$$x_1 = \psi_1 + \frac{\psi_4}{\omega_c}\sin(\omega_c\psi_0),\ \ x_2 = \psi_2 + \frac{\psi_4}{\omega_c}\cos(\omega_c\psi_0),\ \ x_3 = \psi_3$$

$$v_1 = \psi_4\cos(\omega_c\psi_0),\ \ v_2 = -\psi_4\sin(\omega_c\psi_0),\ \ v_3 = \psi_5.$$

De cette façon, toute fonction $u = u(x, v)$ peut s'écrire $u(x, v) = U(\psi(x, v))$, $\psi = (\psi_i)_{0\leq i\leq 5}$ et donc pour tout $i \in \{0, 1, ..., 5\}$ on a

$$b^i \cdot \nabla_{x,v}u = b^i \cdot \sum_{j=0}^{5} \frac{\partial U}{\partial \psi_j}(\psi(x, v))\nabla_{x,v}\psi_j = \frac{\partial U}{\partial \psi_i}(\psi(x, v)).$$

Autrement dit, les dérivations $b^i \cdot \nabla_{x,v}$ agissent comme $\partial_{\psi_i}, 0 \leq i \leq 5$. En particulier si $u \in \ker \mathcal{T}$, c'est-à-dire que U ne dépend pas de ψ_0, on a que $b^i \cdot \nabla_{x,v}u = \partial_{\psi_i}U(\psi(x, v))$ ne dépend pas de ψ_0. Ainsi $\ker \mathcal{T}$ est laissé invariant par $b^i \cdot \nabla_{x,v}$, $0 \leq i \leq 5$.

Les expressions des champs b^i sont détaillées dans la proposition suivante. Pour tous champs de vecteurs réguliers ξ, η de $\mathbb{R}^6$, on note $[\xi, \eta]$ leur crochet de Poisson, c'est-à-dire

$$[\xi, \eta] = (\xi \cdot \nabla_{x,v})\eta - (\eta \cdot \nabla_{x,v})\xi,$$

comme définit dans la section 1.5.3 de l'introduction.

Proposition 3.16

Les champs $(b^i)_{0\leq i\leq 5}$ qui satisfont $b^i \cdot \nabla_{x,v}\psi_j = \delta^i_j$, $0 \leq i,j \leq 5$ sont donnés par

$$b^0 \cdot \nabla_{x,v} = \overline{v} \cdot \nabla_{\overline{x}} + \omega_c{}^{\perp}\overline{v} \cdot \nabla_{\overline{v}},\ \ b^1 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{x_1},\ \ b^2 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{x_2},$$

$$b^3 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{x_3},\ \ b^4 \cdot \nabla_{x,v} = -\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c|\overline{v}|} \cdot \nabla_{\overline{x}} + \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \cdot \nabla_{\overline{v}},\ \ b^5 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{v_3}.$$

De plus, les crochets de Poisson entre les $(b^i)_{0\leq i\leq 5}$ sont nuls et donc les dérivations $b^i \cdot \nabla_{x,v}$, $0 \leq i \leq 5$, commutent.

Preuve.

La démonstration de la première partie de cette proposition, c'est-à-dire que ces champs satisfont bien $b^i \cdot \nabla_{x,v}\psi_j = \delta^i_j$, consiste en des calculs directs simples.

Démontrons que les crochets de Poisson entre les $b^i \cdot \nabla_{x,v}$, $0 \leq i \leq 5$, sont nuls. On a $u(x,v) = U(\psi(x,v))$, et pour $i,j \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$$b^i \cdot \nabla_{x,v}\left(b^j \cdot \nabla_{x,v}u\right) = \frac{\partial}{\partial\psi_i}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_j}\right), \tag{3.32}$$

$$b^j \cdot \nabla_{x,v}\left(b^i \cdot \nabla_{x,v}u\right) = \frac{\partial}{\partial\psi_j}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_i}\right). \tag{3.33}$$

Le théorème de Schwarz appliqué à (3.32)-(3.33) nous donne que les parenthèses de Poisson entre tous les champs b^i sont nulles.

■

Remarque 3.17. *Les champs $(b^i)_{i\neq 4}$ sont à divergence nulle et* $\mathrm{div}_{x,v}b^4 = \frac{1}{|\overline{v}|}$.

L'intérêt des champs b^i est que les opérateurs de type $u \to \mathrm{div}_{x,v}(ub^i)$ sur le domaine

$$\mathrm{D}(\mathrm{div}_{x,v}(\cdot\, b^i)) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\ :\ \mathrm{div}_{x,v}(ub^i) \in L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\right\},\ \ 0 \leq i \leq 5$$

commutent avec l'opérateur de moyenne. Avec la définition 1.11 d'un champ en involution avec un autre champ, on a le résultat plus général suivant.

Proposition 3.18

Supposons que le champ $c \cdot \nabla_{x,v}$ est en involution avec $b \cdot \nabla_{x,v} = \overline{v} \cdot \nabla_{\overline{x}} + \omega_c{}^{\perp}\overline{v} \cdot \nabla_{\overline{v}}$, *i.e.*, $[c,b] = 0$. Alors l'opérateur $\mathrm{div}_{x,v}(\cdot\ c)$ commute avec l'opérateur de moyenne associé au flot de $b \cdot \nabla_{x,v}$. Cela signifie que, pour toute fonction $u \in \mathrm{D}(\mathrm{div}_{x,v}(\cdot\ c))$, sa moyenne $\langle u\rangle$ appartient à $\mathrm{D}(\mathrm{div}_{x,v}(\cdot\ c))$ et

$$\mathrm{div}_{x,v}(\langle u\rangle\, c) = \langle \mathrm{div}_{x,v}(uc)\rangle\,.$$

Preuve.

Considérons $u \in \mathrm{D}(\mathrm{div}_{x,v}(\cdot\, c))$. Pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap \ker \mathcal{T}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle \mathrm{div}_{x,v}(uc)\rangle\, \varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}_{x,v}(uc)\varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} uc\cdot\nabla_{x,v}\varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Mais $\mathcal{T}(c\cdot\nabla_{x,v}\varphi) = c\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{T}\varphi) = 0$ ce qui signifie que $c\cdot\nabla_{x,v}\varphi \in \ker\mathcal{T}$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} uc\cdot\nabla_{x,v}\varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle u\rangle\, c\cdot\nabla_{x,v}\varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x. \tag{3.35}$$

En combinant (3.34) et (3.35) on obtient pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap \ker\mathcal{T}$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle \mathrm{div}_{x,v}(uc)\rangle\, \varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle u\rangle\, c\cdot\nabla_{x,v}\varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x. \tag{3.36}$$

Cette égalité reste vraie pour les fonctions régulières $\varphi \in \ker\langle\cdot\rangle$. En fait, la proposition 3.15 nous donne que pour toute fonction régulière $\varphi \in \ker\langle\cdot\rangle$ il existe $\psi \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \cap \ker\langle\cdot\rangle$ telle que $\mathcal{T}\psi = \varphi$ et donc $c\cdot\nabla_{x,v}\varphi = c\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{T}\psi) = \mathcal{T}(c\cdot\nabla_{x,v}\psi) \in \mathrm{Im}\mathcal{T} = \ker\langle\cdot\rangle$. Comme $\ker\mathcal{T}$ est orthogonal à $\ker\langle\cdot\rangle$, on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle \mathrm{div}_{x,v}(uc)\rangle\, \varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0 = -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle u\rangle\, c\cdot\nabla_{x,v}\varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x,$$

pour $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap \ker\langle\cdot\rangle$. Ainsi (3.36) est vérifiée pour tout φ régulier, ce qui implique que

$$\langle u\rangle \in \mathrm{D}(\mathrm{div}_{x,v}(\cdot\, c)) \;\text{ et }\; \mathrm{div}_{x,v}(\langle u\rangle\, c) = \langle \mathrm{div}_{x,v}(uc)\rangle\,.$$

■

Nous avons également besoin de calculer la moyenne d'opérateurs de transports écrits sous forme conservative. Dans ces cas, il est utile d'établir la formule de commutativité suivante, entre la moyenne et la divergence. Pour simplifier, nous allons ignorer toutes les difficultés liées à la régularité minimale requise.

Proposition 3.19

Pour tout champ régulier $\xi = (\xi_x, \xi_v) \in \mathbb{R}^6$ on a l'égalité

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}_{x,v}\xi\rangle = \mathrm{div}_{\overline{x}} \Bigg\{ &\left\langle \xi_{\overline{x}} + \frac{{}^{\perp}\xi_{\overline{v}}}{\omega_c} \right\rangle + \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle \frac{\overline{v}}{\omega_c|\overline{v}|} \\ &- \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c|\overline{v}|} \Bigg\} + \partial_{x_3}\langle \xi_{x_3}\rangle \\ &+ \mathrm{div}_{\overline{v}} \left\{ \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} + \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\} + \partial_{v_3}\langle \xi_{v_3}\rangle\,. \end{aligned}$$

Preuve.

Par construction, on a $\sum_{i=0}^{5} b^i \otimes \nabla_{x,v}\psi_i = I$, et ainsi

$$\xi = \sum_{i=0}^{5} (\xi \cdot \nabla_{x,v}\psi_i) b^i.$$

La proposition 3.18 nous donne

$$\langle \mathrm{div}_{x,v}\xi \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{5} \mathrm{div}_{x,v}\{(\xi \cdot \nabla_{x,v}\psi_i) b^i\} \right\rangle = \mathrm{div}_{x,v} \left\{ \sum_{i=0}^{5} \langle \xi \cdot \nabla_{x,v}\psi_i \rangle \, b^i \right\}$$

et le résultat suit après calcul. ■

Remarque 3.20. *En considérant les champs $(\xi_x, 0)$ et $(0, \xi_v)$, on obtient en particulier que pour tout champ $\xi_x \in \mathbb{R}^3$*

$$\langle \mathrm{div}_x \xi_x \rangle = \mathrm{div}_x \langle \xi_x \rangle$$

et pour tout champ $\xi_v \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}_v \xi_v \rangle = \mathrm{div}_{\overline{x}} &\left\{ \left\langle \frac{{}^{\perp}\xi_{\overline{v}}}{\omega_c} \right\rangle + \left\langle \xi_{\overline{v}} \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{\overline{v}}{\omega_c |\overline{v}|} - \left\langle \xi_{\overline{v}} \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c |\overline{v}|} \right\} \\ + \mathrm{div}_{\overline{v}} &\left\{ \left\langle \xi_{\overline{v}} \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} + \left\langle \xi_{\overline{v}} \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\} + \partial_{v_3} \langle \xi_{v_3} \rangle . \end{aligned}$$

Une conséquence directe de la proposition 3.19 est le calcul de la moyenne de l'opérateur de transport dans (3.23).

Proposition 3.21

Supposons que le champ électrique dérive d'un potentiel, c'est-à-dire que $E = -\nabla_x \phi$. Alors, pour tout $f \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap \ker \mathcal{T}$, on a

$$\left\langle \partial_t f + v_3 \partial_{x_3} f + \frac{q}{m} E \cdot \nabla_v f + \mathcal{T} f^1 \right\rangle = \partial_t f + \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E} \right\rangle}{B} \cdot \nabla_{\overline{x}} f + v_3 \partial_{x_3} f + \frac{q}{m} \langle E_3 \rangle \, \partial_{v_3} f.$$

Preuve.

On peut écrire

$$\left\langle \partial_t f + v_3 \partial_{x_3} f + \frac{q}{m} E \cdot \nabla_v f + \mathcal{T} f^1 \right\rangle = \partial_t f + \langle v_3 \partial_{x_3} f \rangle + \frac{q}{m} \langle E \cdot \nabla_v f \rangle$$

car $\langle \mathcal{T} f^1 \rangle = 0$ et $\langle \partial_t f \rangle = \partial_t \langle f \rangle = \partial_t f$. La moyenne de $v_3 \partial_{x_3} f$ se calcule aisément à l'aide de la proposition 3.18 :

$$\langle v_3 \partial_{x_3} f \rangle = \left\langle \mathrm{div}_{x,v}\{f v_3 b^3\} \right\rangle = \mathrm{div}_{x,v}\{\langle f v_3 \rangle \, b^3\} = \mathrm{div}_{x,v}\{f v_3 b^3\} = v_3 \partial_{x_3} f.$$

Observons que $\mathcal{T}(f\phi) = f\ \overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}}\phi = -f\ \overline{v}\cdot\overline{E}$ et donc $\left\langle f\ \overline{v}\cdot\overline{E}\right\rangle = 0$. La proposition 3.19 nous donne

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}_v\{fE\}\rangle &= \mathrm{div}_{\overline{x}}\left\langle f\frac{{}^{\perp}\overline{E}}{\omega_c}\right\rangle + \mathcal{T}\left\langle f\frac{{}^{\perp}\overline{v}\cdot\overline{E}}{\omega_c|\overline{v}|^2}\right\rangle + \partial_{v_3}\langle fE_3\rangle \\ &= \mathrm{div}_{\overline{x}}\left\{f\left\langle\frac{\overline{E}^{\perp}}{\omega_c}\right\rangle\right\} + \partial_{v_3}\{f\langle E_3\rangle\},\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{q}{m}\langle \mathrm{div}_v\{fE\}\rangle = \mathrm{div}_{\overline{x}}\left\{f\frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\right\} + \frac{q}{m}\partial_{v_3}\{f\langle E_3\rangle\}.$$

En utilisant à nouveau la proposition 3.18 on obtient

$$\partial_{v_3}\langle E_3\rangle = \mathrm{div}_{x,v}\{\langle E_3\rangle b^5\} = \left\langle \mathrm{div}_{x,v}\{E_3b^5\}\right\rangle = \langle\partial_{v_3}E_3\rangle = 0$$

et

$$\mathrm{div}_{\overline{x}}\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle = \left\langle \mathrm{div}_{\overline{x}}\,{}^{\perp}\overline{E}\right\rangle = 0$$

et notre résultat suit.

■

Remarque 3.22. *Nous avons démontré que calculer la moyenne de l'opérateur de transport $a\cdot\nabla_{x,v} := v_3\partial_{x_3} + \frac{q}{m}E\cdot\nabla_v$ conduit à un autre opérateur de transport, $A\cdot\nabla_{x,v} := \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\cdot\nabla_{\overline{x}} + v_3\partial_{x_3} + \frac{q}{m}\langle E_3\rangle\,\partial_{v_3}$ qui vérifie*

$$\langle a\cdot\nabla_{x,v}f\rangle = A\cdot\nabla_{x,v}f,\quad f\in C_c^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\cap\ker\mathcal{T}.$$

Par construction, l'opérateur $A\cdot\nabla_{x,v}$ laisse invariant le sous-espace des fonctions régulières de $\ker\mathcal{T}$. *Par antisymétrie (comme* $\mathrm{div}_{x,v}A = 0$*), il est facile de voir que $A\cdot\nabla_{x,v}$ laisse aussi invariant le sous-espace des fonctions régulières de* $\ker\langle\cdot\rangle$. *Si on considère une fonction régulière h de moyenne nulle, on peut prouver que $\langle A\cdot\nabla_{x,v}h\rangle = 0$. Pour toute fonction f de* $\ker\mathcal{T}$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} A\cdot\nabla_{x,v}h\ f\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} hA\cdot\nabla_{x,v}f\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0$$

car $\ker\langle\cdot\rangle$ *et* $\ker\mathcal{T}$ *sont orthogonaux, et donc $\langle A\cdot\nabla_{x,v}h\rangle = 0$. On trouve enfin que $A\cdot\nabla_{x,v}$ commute avec l'opérateur de moyenne $\langle A\cdot\nabla_{x,v}f\rangle = A\cdot\nabla_{x,v}\langle f\rangle$ pour toute fonction régulière f.*

3.3 Application au régime centre-guide

On rappelle que dans ce régime on considère

$$B^{\varepsilon} = \left(0, 0, \frac{B(x)}{\varepsilon}\right)$$

pour une fonction scalaire positive B. On traitera le problème numérique en quatre dimensions, c'est pourquoi on se place aussi dans le cas à quatre dimensions dans cette section. On a alors $x = (x_1, x_2)$, $v = (v_1, v_2)$ et ${}^{\perp}v = (v_2, -v_1)$. On se place dans le régime centre-guide expliqué en section 2.3.1. Dans ce cas, on a

$$\frac{T_c}{T_{obs}} = \varepsilon \ll 1,$$

où T_c est la période cyclotronique et T_{obs} est le temps d'observation. De plus, il existe des dérives dans les directions perpendiculaires de l'ordre de ε. Pour les voir on choisit un temps d'observation beaucoup plus long, en $1/\varepsilon$. Ainsi, l'équation de Vlasov s'écrit

$$\varepsilon \partial_t f^\varepsilon + \left(v \cdot \nabla_x + \frac{q}{m} E(x) \cdot \nabla_v \right) f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon} {}^{\perp}v \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \tag{3.37}$$

Dans ce cas on étudie le flot associé à

$$\mathcal{T} f = \mathrm{div}_v (f \omega_c(x) {}^{\perp}v).$$

Les caractéristiques du flot sont donc les solutions de

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \omega_c(X(s; x, v)) {}^{\perp}V(s; x, v), \quad (X, V)(0; x, v) = (x, v). \tag{3.38}$$

Des calculs très similaires à ceux réalisés à la section précédente donnent

$$X(s; x, v) = x, \quad V(s; x, v) = \mathcal{R}(-\omega_c s) v \tag{3.39}$$

où $\mathcal{R}(\theta)$ est la rotation d'angle θ

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $\{\psi_1 = x_1, \psi_2 = x_2, \psi_3 = |v|\}$ est une famille d'invariants indépendants du flot. Les trajectoires sont une fois encore périodiques, de période $T_c(x) = 2\pi/\omega_c(x)$ pour tout $(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et l'opérateur de moyenne a la forme

$$\begin{aligned} \langle u \rangle (x, v) &= \frac{1}{T_c(x)} \int_0^{T_c(x)} u(X(s; x, v), V(s; x, v)) \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, \mathcal{R}(\alpha) v) \, \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. La proposition 3.13 reste vraie, et on a toujours l'inégalité de Poincaré.

Proposition 3.23

On suppose que $\inf_{x\in\mathbb{R}^2} B(x) > 0$. Alors :
1. $\mathcal{T}$ restreint à $\ker\langle\cdot\rangle$ est une bijection sur $\ker\langle\cdot\rangle$. Son inverse, noté $\mathcal{T}^{-1}$, appartient à $\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle, \ker\langle\cdot\rangle)$ et on a l'inégalité de Poincaré

$$\|u\| \leq \frac{2\pi}{|\omega_0|}\|\mathcal{T}u\|, \quad \omega_0 = \frac{q}{m}\inf_{x\in\mathbb{R}^2} B(x) \neq 0 \tag{3.40}$$

pour tout $u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \cap \ker\langle\cdot\rangle$.
2. Pour toute fonction $w \in \ker\langle\cdot\rangle$ à support compact

$$\operatorname{supp} w \subset \{(x,v) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq L_x, \ \ |v| \leq L_v\}.$$

L'unique fonction $u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \cap \ker\langle\cdot\rangle$ telle que $\mathcal{T}u = w$ a son support contenu dans le même compact

$$\operatorname{supp} u \subset \{(x,v) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq L_x, \ \ |v| \leq L_v\}.$$

Remarque 3.24. *Les opérateurs différentiels du premier ordre $b^1\cdot\nabla_{x,v} = \partial_{x_1}$, $b^2\cdot\nabla_{x,v} = \partial_{x_2}$, $b^3\cdot\nabla_{x,v} = \frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v$ commutent avec l'opérateur de moyenne $\langle\cdot\rangle$. En fait, pour $u \in L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ tel que $\partial_{x_i}u \in L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ on a*

$$\partial_{x_i}\langle u\rangle = \partial_{x_i}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\mathcal{R}(\alpha)v)\,\mathrm{d}\alpha\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_{x_i}u(x,\mathcal{R}(\alpha)v)\,\mathrm{d}\alpha = \langle\partial_{x_i}u\rangle.$$

De la même façon, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ tel que $\frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v u \in L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v\langle u\rangle &= \frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\mathcal{R}(\alpha)v)\,\mathrm{d}\alpha\right)\\
&= \frac{v}{|v|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {}^t\mathcal{R}(\alpha)(\nabla_v u)(x,\mathcal{R}(\alpha)v)\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{R}(\alpha)v}{|\mathcal{R}(\alpha)v|}\cdot(\nabla_v u)(x,\mathcal{R}(\alpha)v)\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \left\langle\frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v u\right\rangle \in L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Et la formulation de commutation entre divergence et moyenne 3.19 devient la suivante.

Proposition 3.25

Pour tout champ de vecteur régulier $\xi = \xi(x,v) \in \mathbb{R}^4$ on a

$$\langle\mathrm{div}_{x,v}\xi\rangle = \partial_{x_1}\langle\xi_{x_1}\rangle + \partial_{x_2}\langle\xi_{x_2}\rangle + \mathrm{div}_v\left\{\left\langle\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle\frac{v}{|v|}\right\}.$$

Preuve.
Les calculs précédents nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}_{x,v}\xi\rangle &= \langle \partial_{x_1}\xi_{x_1}\rangle + \langle \partial_{x_2}\xi_{x_2}\rangle + \langle \mathrm{div}_v\xi_v\rangle \\ &= \partial_{x_1}\langle \xi_{x_1}\rangle + \partial_{x_2}\langle \xi_{x_2}\rangle + \left\langle \mathrm{div}_v\left\{\left(\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|}\right\}\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \mathrm{div}_v\left\{\left(\xi_v\cdot\frac{{}^\perp v}{|v|}\right)\frac{{}^\perp v}{|v|}\right\}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_v\left\{\left(\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|}\right\} &= \left(\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right)\mathrm{div}_v\left(\frac{v}{|v|}\right) + \frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v\left(\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right) \\ &= \left(\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right)\frac{1}{|v|} + \frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v\left(\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right)\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{div}_v\left\{\left(\xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|}\right\}\right\rangle &= \mathrm{div}_v\left(\frac{v}{|v|}\right)\left\langle \xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle + \frac{v}{|v|}\cdot\nabla_v\left\langle \xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle \\ &= \mathrm{div}_v\left\{\left\langle \xi_v\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle\frac{v}{|v|}\right\}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Le dernier terme de (3.41) disparaît car

$$\mathrm{div}_v\left\{\left(\xi_v\cdot\frac{{}^\perp v}{|v|}\right)\frac{{}^\perp v}{|v|}\right\} = {}^\perp v\cdot\nabla_v\left(\xi_v\cdot\frac{{}^\perp v}{|v|^2}\right) = \mathcal{T}\left(\frac{\xi_v}{\omega_c}\cdot\frac{{}^\perp v}{|v|^2}\right)\in\ker\langle\cdot\rangle. \tag{3.43}$$

Le résultat s'obtient en combinant (3.41), (3.42), (3.43).

■

On remarque aussi que les commutateurs de $b^1\cdot\nabla_{x,v}$, $b^2\cdot\nabla_{x,v}$, $b^3\cdot\nabla_{x,v}$ par rapport à $\mathcal{T}$ sont donnés par

$$[b^i\cdot\nabla_{x,v},\mathcal{T}] = \frac{\nabla_x B}{B}\mathcal{T},\ \ i\in\{1,2\},\ \ [b^3\cdot\nabla_{x,v},\mathcal{T}] = 0.$$

3.4 Conclusions

Nous avons explicité l'opérateur de moyenne le long d'un flot dans les deux régimes qui nous intéressent dans cette thèse, les régimes centre-guide et du rayon de Larmor fini. Dans le cas du régime du rayon de Larmor fini, nous allons à présent utiliser ces calculs pour calculer explicitement la moyenne d'opérateurs de collisions. Dans le cas du régime centre-guide, ces calculs nous permettront de développer un modèle asymptotiquement préservatif dans le cas de champ magnétique fort.

chapitre 4

Gyromoyenne des noyaux de collision

Le but de ce chapitre est le calcul de la gyromoyenne de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau qui joue un rôle majeur en physique des plasmas. Nous nous plaçons pour ce faire dans la configuration du rayon de Larmor fini, présentée dans les chapitres précédents.

Quand on néglige les collisions, le modèle limite lorsque $\varepsilon \searrow 0$ s'obtient en calculant la moyenne par rapport au mouvement cyclotronique rapide [48, 70, 42, 13, 16, 15, 20, 17]. Le problème est réduit à une analyse d'homogénéisation et peut être résolu en utilisant la notion de convergence à deux échelles [40, 41, 61].

Notons qu'un opérateur de collision linéarisé a été écrit dans [75], mais que la programmation de cet opérateur semble difficile. Nous renvoyons le lecteur à [22, 23] pour un opérateur de collision de Fokker-Planck dans le cas centre-guide. Une autre difficulté réside en la relaxation de la fonction de distribution vers un équilibre Maxwellien local. La majeure partie des modèles disponibles pour ces opérateurs, en particulier ceux qui sont linéarisés près d'une Maxwellienne, n'ont pas cette propriété. Très récemment, des modèles d'opérateurs de collision on été obtenus dans [43], basés sur des principes variationnels d'entropie. Pour commencer, nous nous concentrerons sur l'opérateur de relaxation de Boltzmann linéarisé, pour lesquels les calculs sont plus aisés. On trouve cet opérateur dans [59], et il s'écrit

$$Q_B(f(t,x,\cdot))(v) = \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')\{M(v)f(t,x,v') - M(v')f(t,x,v)\}\,\mathrm{d}v'$$

où $\tau > 0$ est le temps de relaxation, $s(v,v')$ est la section de collision et M est l'équilibre Maxwellien à température θ

$$M(v) = \frac{1}{(2\pi\theta/m)^{3/2}} e^{-(m|v|^2)/2\theta}, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

Les techniques de gyromoyennes que nous développerons dans ce cas nous permettrons de traiter un grand nombre d'opérateurs de collision. Ainsi nous pourrons calculer la moyenne de l'opérateur de Fokker–Planck linéarisé.

$$Q_{FP}(f) = \frac{\theta}{m\tau}\mathrm{div}_v\left(\nabla_v f + \frac{m}{\theta}vf\right) = \frac{\theta}{m\tau}\mathrm{div}_v\left\{M\nabla_v\left(\frac{f}{M}\right)\right\}.$$

Notre motivation première est le calcul de la moyenne de l'opérateur bilinéaire de Fokker–Planck–Landau, ou plus exactement comment moyenner des noyaux de type

$$Q_{FPL}(f,f)(v) = \mathrm{div}_v \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|) S(v-v') [f(v') \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_{v'} f(v')] \, \mathrm{d}v' \right\}$$

où σ est la section de collision et $S(w) = I - \dfrac{w \otimes w}{|w|^2}$ est la projection orthogonale sur le plan de normale w, comme on peut le voir dans [50].

Plan du chapitre

4.1 Gyromoyenne des noyaux de relaxation 64
4.1.1 Propriétés de Q_B 65
4.1.2 Calcul de la moyenne de Q_B 67
4.2 Fokker–Planck 81
4.2.1 Propriétés de Q_{FP} 81
4.2.2 Calcul de la moyenne de Q_{FP} 83
4.3 Fokker–Planck–Landau 84
4.3.1 Propriétés de Q_{FPL} 85
4.3.2 Calculs préliminaires 86
4.3.3 Calcul de la moyenne de Q_{FPL} 96
4.4 Conclusions et perspectives 108

4.1 Gyromoyenne des noyaux de relaxation

Dans cette section nous étudions, comme nous l'avons fait dans [18], le noyau de relaxation que l'on peut trouver par exemple dans [64] ou [63]

$$Q_B(f)(x,v) = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^3} s(v,v') \{ M(v) f(x,v') - M(v') f(x,v) \} \, \mathrm{d}v' \tag{4.1}$$

associé à une section de collision vérifiant

$$s(v,v') = s(v',v), \ 0 < s_0 \leq s(v,v') \leq S_0 < +\infty, \ v,v' \in \mathbb{R}^3. \tag{4.2}$$

Rappelons tout d'abord les propriétés de cet opérateur.

4.1.1 Propriétés de Q_B

Ici on note les opérateurs de gain

$$Q_B^+(f)(x,v) = \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)f(x,v')dv', \tag{4.3}$$

et de perte

$$Q_B^-(f)(x,v) = \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v')f(x,v)dv'. \tag{4.4}$$

Proposition 4.1

Supposons que la section de collision satisfait (4.2), on a alors les propriétés suivantes .

1. Les opérateurs de collision de gain et de perte $Q_B^{\pm}$ sont linéaires bornés sur $L^2(M^{-1}\mathrm{d}v)$, avec $\|Q_B^{\pm}\| \leq S_0/\tau$, et symétriques par rapport au produit scalaire de $L^2(M^{-1}\mathrm{d}v)$.
2. Les opérateurs de collision de gain et de perte sont linéaires bornés sur $L^1(\mathbb{R}^3)$ et pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ on a $\int_{\mathbb{R}^3} Q(f)\mathrm{d}v = 0$.
3. Pour tout $f \in L^2(M^{-1}\mathrm{d}v)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} Q_B(f)(v)f(v)\,\frac{\mathrm{d}v}{M} &= -\frac{1}{2\tau}\iint s(v,v')M(v)M(v')\left[\frac{f(v)}{M(v)} - \frac{f(v')}{M(v')}\right]^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}v' \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Preuve.
1.a. Montrons que $\|Q_B\| \leq \frac{S_0}{\tau}$. On a

$$\begin{aligned}\left(Q_B^+(f)\right)^2 &= \frac{1}{\tau^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')\sqrt{M(v')}M(v)\frac{f(v')}{\sqrt{M(v')}}\mathrm{d}v'\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\tau^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left(f(v')\right)^2}{M(v')}\mathrm{d}v'\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')^2M(v')M(v)^2\mathrm{d}v'.\end{aligned}$$

On applique Cauchy et on obtient

$$\left(Q_B^+(f)\right)^2 \leq \frac{1}{\tau^2}\|f\|^2_{L^2(M^{-1})}S_0^2M(v)^2$$

car $\int M = 1$. Donc

$$\frac{\left(Q_B^+(f)\right)}{M(v)} \leq \frac{1}{\tau^2}\|f\|^2_{L^2(M^{-1})}S_0M(v).$$

Et ainsi

$$\int \frac{\left(Q_B^+(f)\right)^2}{M(v)}\mathrm{d}v \leq \frac{1}{\tau^2}\|f\|^2_{L^2(M^{-1})}S_0^2M(v),$$

donc

$$\|Q_B^+(f)\|^2_{L^2(M^{-1}\mathrm{d}v)} \leq \frac{1}{\tau^2}\|f\|^2_{L^2(M^{-1})}S_0^2$$

qui implique que

$$\|Q_B^+(f)\|^2_{L^2(M^{-1})} \leq \frac{S_0}{\tau}\|f\|_{L^2(M^{-1})}.$$

On a enfin

$$\|Q_B^+\|_{\mathcal{L}(L^2(M^{-1}),L^2(M^{-1}))} \leq \frac{S_0}{\tau}.$$

La démonstration pour la partie perte est identique.
1.b. Montrons d'abord que l'opérateur gain est symétrique. On a

$$\begin{aligned}\left(Q_B^+(f),g\right)_{L^2(M^{-1})} &= \int Q_B^+f(v)\frac{g(v)}{M(v)}\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\tau}\iint s(v,v')M(v)f(v')\frac{g(v)}{M(v)}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\tau}\iint s(v,v')f(v')g(v)\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}\left(f,Q_B^+(g)\right)_{L^2(M^{-1})} &= \int f(v)\frac{Q_B^+(g)(v)}{M(v)}\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\tau}\iint f(v)s(v,v')M(v)\frac{g(v')\mathrm{d}v'}{M(v)}\\ &= \frac{1}{\tau}\iint s(v,v')f(v)g(v')\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Avec Fubini et la symétrie de $s(v,v')$, on obtient que l'opérateur de gain est symétrique. Les calculs sont encore plus simples dans le cas de l'opérateur de perte. En effet, on a

$$\begin{aligned}\left(Q_B^-(f),g\right)_{L^2(M^{-1})} &= \int Q_B^-(f)(v)\frac{g(v)}{M(v)}\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\tau}\iint s(v,v')M(v')f(v)\frac{g(v)}{M(v)}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Et on voit que l'opérateur de perte est également symétrique.
2. Conservation locale de la masse.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}Q_B(f)\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}s(v,v')\left(M(v)f(v')-M(v')f(v)\right)\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}s(v,v')M(v)f(v')\mathrm{d}v'\mathrm{d}v-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}s(v,v')M(v)f(v')\mathrm{d}v\mathrm{d}v'\\ &= 0,\end{aligned}$$

par Fubini et par la symétrie.
3. Montrons l'inégalité donnée. On a

$$\begin{aligned}
(Q_B(f),g)_{L^2(M^{-1})} &= \int_{\mathbb{R}^3} Q_B(f)(v)g(v)\frac{\mathrm{d}v}{M(v)} \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')\left(M(v)f(v') - M(v')f(v)\right)\mathrm{d}v' g(v)\frac{\mathrm{d}v}{M(v)} \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)M(v')\left(\frac{f(v')}{M(v')} - \frac{f(v)}{M(v)}\right)\frac{g(v)}{M(v)}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v')M(v)\left(\frac{v}{M(v)} - \frac{f(v')}{M(v')}\right)\frac{g(v')}{M(v')}\mathrm{d}v\mathrm{d}v' \\
&= -\frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)M(v')\left(\frac{f(v')}{M(v')} - \frac{f(v)}{M(v)}\right)\frac{g(v')}{M(v')}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{2\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)M(v')\left(\frac{f(v')}{M(v')} - \frac{f(v)}{M(v)}\right) \\
&\qquad \times \left(\frac{g(v')}{M(v')} - \frac{g(v)}{M(v)}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}v' \\
&= (f, Q_B(g))),
\end{aligned}$$

en utilisant Fubini et la symétrie de $s(v,v')$. Si on prend $f = g$ on a bien

$$\begin{aligned}
(Q_B(f),f)_{L^2(M^{-1})} &= -\frac{1}{2\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)M(v')\left(\frac{f(v')}{M(v')} - \frac{f(v)}{M(v)}\right)^2\mathrm{d}v\mathrm{d}v' \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

■

4.1.2 Calcul de la moyenne de Q_B

Nous souhaitons ici calculer la moyenne de $Q_B(f)$ pour des fonctions f satisfaisant la contrainte

$$\mathcal{T}f = \overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}}f + {\omega_c}^{\perp}\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{v}}f = 0. \tag{4.5}$$

L'espace que l'on regarde quand on travaille avec le noyau linéaire de Boltzmann Q_B est $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$ plutôt que $L^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$. C'est pour cette raison que nous introduisons l'opérateur $\mathcal{T}_M : \mathrm{D}(\mathcal{T}_M) \subset L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right) \to L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$ donné par $\mathcal{T}_M u = \mathrm{div}_{x,v}(ub)$ pour toute fonction u du domaine

$$\mathrm{D}(\mathcal{T}_M) = \left\{u(x,v) \in L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right) \ :\ \mathrm{div}_{x,v}(ub) \in L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\right\}.$$

Immédiatement, on a que $u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}_M)$ si et seulement si $u/\sqrt{M} \in \mathrm{D}(\mathcal{T})$ et $\mathcal{T}_M(u) = \sqrt{M}\mathcal{T}(u/\sqrt{M})$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_M)$. En particulier, on a $\ker\mathcal{T}_M = \sqrt{M}\ker\mathcal{T}$. Remarquons que la formule (3.29) définit toujours un opérateur linéaire borné sur $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$, que l'on note $\langle\cdot\rangle_M$. Cet opérateur coïncide avec la projection orthogonale sur le noyau de $\mathcal{T}_M$ par rapport au produit scalaire de

$L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$. En fait, si on prend en compte que $M(v)$ est constant le long du flot caractéristique

$$\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}s} = \overline{V}(s), \quad \frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\overline{V}}{\mathrm{d}s} = \omega_c{}^{\perp}\overline{V}(s), \quad \frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}s} = 0,$$

on a pour tout $u \in L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$

$$\langle u\rangle_M = \sqrt{M}\left\langle \frac{u}{\sqrt{M}}\right\rangle \in \sqrt{M}\ker\mathcal{T} = \ker\mathcal{T}_M$$

et pour tout $\varphi \in \ker\mathcal{T}_M$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u - \langle u\rangle_M)\ \varphi(x,v)\frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}x}{M(v)} = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{u}{\sqrt{M}} - \left\langle\frac{u}{\sqrt{M}}\right\rangle\right)\frac{\varphi}{\sqrt{M}}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

L'inégalité de Poincaré reste également vraie, avec la même constante puisque pour tout $u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}_M)\cap\ker\langle\cdot\rangle_M$ on peut écrire

$$\|u\|_{L^2(M^{-1})} = \left\|\frac{u}{\sqrt{M}}\right\| \le \frac{2\pi}{|\omega_c|}\left\|\mathcal{T}\left(\frac{u}{\sqrt{M}}\right)\right\| = \frac{2\pi}{|\omega_c|}\left\|\frac{\mathcal{T}_M u}{\sqrt{M}}\right\| = \frac{2\pi}{|\omega_c|}\|\mathcal{T}_M u\|_{L^2(M^{-1})}.$$

À partir de maintenant, pour des raisons de simplicité, nous utiliserons uniquement les notations $\mathcal{T}, \langle\cdot\rangle$, indépendamment de leur action sur $L^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$ ou $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$.

On doit calculer la moyenne de fonctions de type $\int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\ \mathrm{d}v'$ où $C(v,v')$ est une fonction donnée. On remarque alors qu'on a uniquement besoin de considérer les fonctions laissées invariantes par rotations autour de $e_3 = (0,0,1)$. On suppose que pour toute matrice orthogonale $\mathcal{O} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{O}e_3 = e_3$, on a

$$C({}^t\mathcal{O}v, {}^t\mathcal{O}v') = C(v,v'), \quad v,v' \in \mathbb{R}^3. \tag{4.6}$$

On remarque alors que les fonctions laissées invariantes par ces rotations sont celles qui ne dépendent que de $|\overline{v}|$, v_3, $|\overline{v'}|$, v_3' et de l'angle entre $\overline{v}$ et $\overline{v'}$, c'est-à-dire l'angle $\varphi = \arg v' - \arg v$, on a donc

$$C(v,v') = \tilde{C}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', \varphi).$$

Proposition 4.2

Supposons que la fonction $C(v,v')$ satisfait (4.6) et appartient à l'espace $L^2(M^{-1}(v)M(v')\mathrm{d}v\mathrm{d}v')$. Alors pour toute fonction f de $\ker\mathcal{T}$ on a

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v' \right\rangle (x,v) = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(|\overline{v}|,v_3,|\overline{v'}|,v_3',z)f(\overline{x'},x_3,v')\mathrm{d}v'\mathrm{d}\overline{x'}, \tag{4.7}$$

où $z=\omega_c\overline{x}+{}^{\perp}\overline{v}-(\omega_c\overline{x'}+{}^{\perp}\overline{v'})$,

$$\mathcal{C}(r,v_3,r',v_3',z)=\frac{\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi)+\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',-\varphi)}{2\pi^2\sqrt{|z|^2-(r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2-|z|^2}}\,\mathbf{1}_{|r-r'|<|z|<r+r'}$$

et pour tout $|z|\in(|r-r'|,r+r')$, $\varphi\in]0,\pi[$ est l'unique angle tel que

$$|z|^2=r^2+(r')^2-2rr'\cos\varphi.$$

Preuve.

Pour $(x,v)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v'\right)^2 \le \int_{\mathbb{R}^3}(C(v,v'))^2M(v')\,\mathrm{d}v'\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(f(x,v'))^2}{M(v')}\,\mathrm{d}v'$$

ce qui implique que

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v'\right\|_{L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)} \le \|C\|_{L^2(M^{-1}(v)M(v')\mathrm{d}v\mathrm{d}v')}\|f\|_{L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)}.$$

Ainsi la fonction $(x,v)\to\int_{\mathbb{R}^3}C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v'$ appartient à $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$ et on peut calculer sa moyenne dans $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$. Considérons $(x,v)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. La formule (3.29) nous donne

$$\begin{aligned} I :&= \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v' \right\rangle (x,v)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} C(|\overline{v}|e^{i\alpha},v_3,v')f\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c},x_3,v'\right)\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha\in[0,2\pi[$ fixé on utilise les coordonnées cylindriques

$$v'=(r'e^{i(\varphi+\alpha)},v_3'),\quad r'\in\mathbb{R}_+,\quad \varphi\in[-\pi,\pi[$$

et ainsi

$$\begin{aligned} I =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} C(|\overline{v}|e^{i\alpha},v_3,r'e^{i(\varphi+\alpha)},v_3')\\ &\times f\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c},x_3,r'e^{i(\varphi+\alpha)},v_3'\right)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Mais $f \in \ker \mathcal{T}$ et donc il existe g tel que

$$f(x,v) = g\left(\overline{x} + \frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v}|, v_3\right), \tag{4.9}$$

ce qui implique que

$$f\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3'\right)=g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{r'e^{i(\varphi+\alpha)}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right).$$

Remarquons dans un premier temps que $r'e^{i(\varphi+\alpha)} - |\overline{v}|e^{i\alpha} = le^{i(\psi+\alpha)}$, où $l^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi$, $r = |\overline{v}|$ et ψ dépend de r, r', φ mais ne dépend pas de α. Dans un second temps, on déduit que

$$C(re^{i\alpha}, v_3, r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3') = \tilde{C}(r, v_3, r', v_3', \varphi), \quad \varphi = \arg\overline{v'} - \arg\overline{v},$$

car C est invariant par rotation autour de e_3.

L'application $\varphi \to l(\varphi) = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi}$ définit un changement de variables entre $\varphi \in]0, \pi[$ et $l \in]|r - r'|, r + r'[$, et

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{2l\mathrm{d}l}{\sqrt{l^2 - (r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2 - l^2}}.$$

Le théorème de Fubini nous donne

$$\begin{aligned}
I =& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^{2\pi}\tilde{C}(r, v_3, r', v_3', \varphi) \\
&\times g\left(\overline{x} + \frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^{\perp}\{le^{i(\psi+\alpha)}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\ \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3' \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^{2\pi}\tilde{C}(r, v_3, r', v_3', \varphi) \\
&\times g\left(\overline{x} + \frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\ \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3' \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{\tilde{C}(r, v_3, r', v_3', \varphi) + \tilde{C}(r, v_3, r', v_3', -\varphi)\} \\
&\times g\left(\overline{x} + \frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^{\perp}\{l(\varphi)e^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r'\mathrm{d}v_3' \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^{2\pi}\int_{|r-r'|}^{r+r'}\{\tilde{C}(r, v_3, r', v_3', \varphi(l)) + \tilde{C}(r, v_3, r', v_3', -\varphi(l))\} \\
&\times g\left(\overline{x} + \frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) \frac{2lr'\ \mathrm{d}l\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r'\mathrm{d}v_3'}{\sqrt{l^2 - (r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2 - l^2}}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha' \in [0, 2\pi[$ on a

$$g\left(\overline{x} + \frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) = f\left(\overline{x} + \frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c} - \frac{^{\perp}\{r'e^{i\alpha'}\}}{\omega_c}, x_3, r'e^{i\alpha'}, v_3'\right)$$

et en réalisant le changement de variables $v' = (r'e^{i\alpha'}, v_3')$ on obtient

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}_+} \{\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi(l)) + \tilde{C}(r,v_3,r',v_3',-\varphi(l))\} \\ &\times f\left(\overline{x} + \frac{^\perp\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^\perp\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c} - \frac{^\perp\{r'e^{i\alpha'}\}}{\omega_c}, x_3, r'e^{i\alpha'}, v_3'\right) \\ &\times \frac{\mathbf{1}_{|r-r'|<l<r+r'} r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}v_3' l\mathrm{d}l\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{l^2-(r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2-l^2}} \\ =& \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \{\tilde{C}(r,v_3,|\overline{v'}|,v_3',\varphi(l)) + \tilde{C}(r,v_3,|\overline{v'}|,v_3',-\varphi(l))\} \\ &\times f\left(\overline{x} + \frac{^\perp\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^\perp\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c} - \frac{^\perp\overline{v'}}{\omega_c}, x_3, v'\right) \frac{\mathbf{1}_{|\,|\overline{v}|-|\overline{v'}|\,|<l<|\overline{v}|+|\overline{v'}|}\mathrm{d}v' l\mathrm{d}l\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{l^2-(|\overline{v}|-|\overline{v'}|)^2}\sqrt{(|\overline{v}|+|\overline{v'}|)^2-l^2}}. \end{aligned}$$

En utilisant la notation

$$\mathcal{C}(r,v_3,r',v_3',z) = \frac{\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi) + \tilde{C}(r,v_3,r',v_3',-\varphi)}{2\pi^2\sqrt{|z|^2-(r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2-|z|^2}}\,\mathbf{1}_{|r-r'|<|z|<r+r'}$$

où pour tout $|z| \in (|r-r'|, r+r')$, $\varphi \in]0,\pi[$ est l'unique angle tel que

$$|z|^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi,$$

on obtient

$$\begin{aligned} I = \int_{\mathbb{R}^3}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}_+} & \mathcal{C}(|\overline{v}|,v_3,|\overline{v'}|,v_3',-^\perp\{le^{i\alpha}\}) \\ & \times f\left(\overline{x} + \frac{^\perp\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^\perp\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c} - \frac{^\perp\overline{v'}}{\omega_c}, x_3, v'\right) l\mathrm{d}l\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}v'. \end{aligned}$$

On prend comme nouvelle variable

$$\overline{x'} = \overline{x} + \frac{^\perp\overline{v}}{\omega_c} + \frac{^\perp\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c} - \frac{^\perp\overline{v'}}{\omega_c}.$$

En observant que $\det\frac{\partial(x_1',x_2')}{\partial(l,\alpha)} = \frac{l}{\omega_c^2}$ on déduit que

$$\begin{aligned} I = \omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\!\!\int_{\mathbb{R}^3} & \mathcal{C}(|\overline{v}|,v_3,|\overline{v'}|,v_3',(\omega_c\overline{x} + {}^\perp\overline{v}) \\ & - (\omega_c\overline{x'} + {}^\perp\overline{v'}))f(x_1',x_2',x_3,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

■

Remarque 4.3. *La contrainte $\mathcal{T}f = 0$ nous permet de réduire le membre de droite de* (4.7) *à une intégrale à quatre dimensions. En fait, il existe g telle que*

$$f(x,v) = g\left(\overline{x} + \frac{^\perp\overline{v}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v}|, v_3\right) \tag{4.10}$$

et on obtient, avec la notation $\overline{y} = \overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}$,

$$\begin{aligned} I =& \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', (\omega_c\overline{x} + {}^{\perp}\overline{v}) - (\omega_c\overline{x'} + {}^{\perp}\overline{v'})) \\ & \times g\left(\overline{x'} + \frac{{}^{\perp}\overline{v'}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v'}|, v_3'\right) \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2' \\ =& \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', \omega_c(\overline{y} - \overline{y'}))\; g(\overline{y'}, x_3, |\overline{v'}|, v_3')\; \mathrm{d}v'\mathrm{d}y_1'\mathrm{d}y_2' \\ =& 2\pi\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{C}(|\overline{v}|, v_3, r', v_3', \omega_c(\overline{y} - \overline{y'}))\; g(\overline{y'}, x_3, r', v_3')\; r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\overline{y'}. \end{aligned}$$

Nous préférons garder la représentation en intégrale à cinq dimensions, car dans la suite nous allons introduire des termes intégraux similaires, mais avec des densités f *qui ne satisfont pas la contrainte* $\mathcal{T}f = 0$.

Remarque 4.4. *Si la fonction* $\tilde{C}(r, v_3, r', v_3', \varphi)$ *est impaire par rapport à* φ, *alors* $\mathcal{C} = 0$ *et*

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} C(v, v')f(x, v')\; \mathrm{d}v' \right\rangle = 0, \quad f \in \ker \mathcal{T}.$$

Remarque 4.5. *Introduisons la fonction* χ

$$\chi(r, r', z) = \frac{\mathbf{1}_{|r-r'|<|z|<r+r'}}{\pi^2\sqrt{|z|^2 - (r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2 - |z|^2}}$$

pour tout $r, r' \in \mathbb{R}_+$ *et* $z \in \mathbb{R}^2$. *Alors pour tout* $r, r' \in \mathbb{R}_+$, $\chi(r, r', z)\mathrm{d}z$ *est une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi(r, r', z)\; \mathrm{d}z = 1, \quad r, r' \in \mathbb{R}_+$$

et $\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} C(v, v')f(x, v')\; \mathrm{d}v' \right\rangle$ *apparaît comme une convolution par rapport aux invariants* $\omega_c\overline{x} + {}^{\perp}\overline{v}$. *En fait, si on utilise la formule*

$$f(\overline{x'}, x_3, v') = g\left(\overline{x'} + \frac{{}^{\perp}\overline{v'}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v'}|, v_3'\right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} C(v, v')f(x, v')\; \mathrm{d}v' \right\rangle (x, v) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2} & \mathcal{C}\Big(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', (\omega_c\overline{x} + {}^{\perp}\overline{v}) \\ & - (\omega_c\overline{x'} + {}^{\perp}\overline{v'})\Big) g\left(\overline{x'} + \frac{{}^{\perp}\overline{v'}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v'}|, v_3'\right) \\ & \mathrm{d}(\omega_c\overline{x'} + {}^{\perp}\overline{v'})\mathrm{d}v'. \end{aligned}$$

Remarque 4.6. *La conclusion de la proposition 4.2 reste vraie pour les fonctions* f *bornées constantes le long du flot associé à* $\overline{v} \cdot \nabla_{\overline{x}} + \omega_c{}^{\perp}\overline{v} \cdot \nabla_{\overline{v}}$,

$$\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}s} = \overline{V}(s), \quad \frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\overline{V}}{\mathrm{d}s} = \omega_c{}^{\perp}\overline{V}(s), \quad \frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{4.11}$$

dans le cas où $C(v,v')$ appartient à $L^\infty(\mathrm{d}v; L^1(\mathrm{d}v'))$ et satisfait (4.6). *De plus, dans ce cas $f \to \int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v'$est bornée sur $L^\infty(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v' \right\|_{L^\infty(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)} \leq \|C\|_{L^\infty(\mathrm{d}v;L^1(\mathrm{d}v'))}\ \|f\|_{L^\infty(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)},$$

et, en utilisant la version L^∞ de l'opérateur de moyenne, les mêmes calculs que ceux de la preuve de la proposition 4.2 permettent de montrer que

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} C(v,v')f(x,v')\,\mathrm{d}v' \right\rangle (x,v) = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z) f(\overline{x'}, x_3, v')\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.$$

Corollaire 4.7

Soit $s(v,v')$ une section vérifiant (4.2) et

$$s(v,v') = \sigma(|v-v'|), \quad v, v' \in \mathbb{R}^3 \tag{4.12}$$

pour une fonction $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Alors pour tout $f \in \ker \mathcal{T}$ on a

$$\begin{aligned}\langle Q_B f \rangle (x,v) = \frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z)\{M(v)f(\overline{x'}, x_3, v') \\ - M(v')f(x,v)\}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\end{aligned}$$

avec $z = \omega_c \overline{x} + {}^\perp\overline{v} - (\omega_c \overline{x'} + {}^\perp\overline{v'})$ et

$$\mathcal{S}(r, v_3, r', v_3', z) = \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\,)\chi(r, r', z).$$

Preuve.

La fonction $C(v,v') = \sigma(|v-v'|)M(v)$ satisfait (4.6), et appartient à $L^2(M^{-1}(v)$ $M(v')\mathrm{d}v\mathrm{d}v')$. On a également

$$\tilde{s}(r, v_3, r', v_3', \varphi) = \sigma(\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi + (v_3 - v_3')^2}\,),$$

$$\mathcal{S}(r, v_3, r', v_3', z) = \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\,)\chi(r, r', z).$$

Alors la proposition 4.2 donne, avec $z = (\omega_c \overline{x} + {}^\perp\overline{v}) - (\omega_c \overline{x'} + {}^\perp\overline{v'})$,

$$\begin{aligned}\tau \langle Q_B^+ \rangle &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)f(x,v')\,\mathrm{d}v' \right\rangle \\ &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z)M(v)f(\overline{x'}, x_3, v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.\end{aligned}$$

De plus, comme f appartient à $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$ et reste constante le long du flot (4.11) on a

$$\tau \langle Q_B^- \rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v')f(x,v)\,\mathrm{d}v' \right\rangle = f(x,v)\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v')\,\mathrm{d}v' \right\rangle$$

où il faut comprendre le premier opérateur de moyenne au sens de $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$ et le second dans la configuration $L^\infty(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$. On applique enfin la remarque 4.6 avec $C(v,v') = s(v,v')M(v') \in L^\infty(\mathrm{d}v; L^1(\mathrm{d}v'))$ et la fonction constante $1 \in L^\infty(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$ pour obtenir

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v')\ \mathrm{d}v' \right\rangle = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z)M(v')\ \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.$$

De cette manière, on a

$$\begin{aligned}\tau\left\langle Q_B^-\right\rangle &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)f(x,v)\ \mathrm{d}v' \right\rangle \\ &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z)M(v')f(x,v)\ \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\end{aligned}$$

et notre conclusion suit.

■

Nous allons chercher à généraliser notre résultat pour ne plus nous restreindre aux fonctions f vérifiant la contrainte $\ker \mathcal{T} = 0$. De plus, lorsque l'on simule numériquement ces modèles, la densité des particules peut ne pas satisfaire exactement $\mathcal{T}f = 0$, et le besoin de construire une telle extension apparaît. Pour construire cette extension, il est possible d'utiliser la décomposition $f = \langle f\rangle + (f - \langle f\rangle)$ et de négliger la fluctuation $f - \langle f\rangle$. On a ainsi l'opérateur $f \to \tilde{Q}_B f$ avec

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_B f &= \langle Q_B\langle f\rangle\rangle \\ &= \frac{\omega_c^2}{\tau}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z)\{M(v)\langle f\rangle(\overline{x'}, x_3, v') - M(v')\langle f\rangle(x,v)\}\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\end{aligned}$$

pour tout $f \in L^2(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$. Il est clair que pour tout $f \in \ker\mathcal{T}$, $\tilde{Q}_B$ coïncide avec $\langle Q_B f\rangle$. On remarque également que pour tout (x,v), (x_3', v_3'), la fonction

$$(\overline{x'}, \overline{v'}) \to \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', \omega_c\overline{x} + {}^\perp\overline{v} - (\omega_c\overline{x'} + {}^\perp\overline{v'}))M(v)$$

ne dépend que de $\omega_c\overline{x'} + {}^\perp\overline{v'}$, $|\overline{v'}|$, c'est pourquoi avec la remarque 3.14 on obtient la forme plus simple

$$\tilde{Q}_B f = \frac{\omega_c^2}{\tau}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z)\{M(v)f(\overline{x'}, x_3, v') - M(v')\langle f\rangle(x,v)\}\ \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.$$

Il n'est cependant pas possible d'enlever la moyenne dans la partie perte de cet opérateur. Puisque Q_B et $\langle\cdot\rangle$ sont des opérateurs linéaires bornés sur $L^2(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$, alors $\tilde{Q}_B$ est linéaire bornée sur $L^2(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$. On peut déduire les propriétés de $\tilde{Q}_B$ de celles de Q_B, c'est-à-dire celles de la section 4.1.1. Par exemple, pour tout f de $L^2(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\tilde{Q}_B f\frac{f}{M}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\langle Q_B\langle f\rangle\rangle\frac{f}{M}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} Q_B\langle f\rangle\frac{\langle f\rangle}{M}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} s(v,v')M(v)M(v')\left[\frac{\langle f\rangle(x,v)}{M(v)} - \frac{\langle f\rangle(x,v')}{M(v')}\right]^2\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Il est également possible d'étendre cette moyenne d'opérateur par

$$\langle Q_B \rangle f := \frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z) \{ M(v) f(\overline{x'}, x_3, v') - M(v') f(x, v) \} \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \tag{4.13}$$

pour tout $f \in L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$, ce qui ressemble fortement à la définition de l'opérateur Q_B (4.1). On conserve cet opérateur comme extension pour la suite. Nous résumons ensuite les propriétés de l'opérateur $\langle Q_B \rangle$.

Proposition 4.8

Soit $s(v, v')$ une section vérifiant (4.2) et de la forme $s(v, v') = \sigma(|v - v'|), v, v' \in \mathbb{R}^3$. Alors

1. L'opérateur $\langle Q_B \rangle$ est linéaire borné sur $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$ et symétrique par rapport au produit scalaire de $L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$.
2. Pour tout $f \in L^2(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v)$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \langle Q_B \rangle (f) \frac{f}{M} \mathrm{d}v\mathrm{d}x = & -\frac{\omega_c^2}{2\tau} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z) M(v) M(v') \\ & \times \left[\frac{f(x, v)}{M(v)} - \frac{f(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} \right]^2 \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Preuve.

1. On montre que la partie perte est bornée à partir du fait qu'il s'agit de la multiplication par la fonction bornée (voir remarque 4.5)

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : &= \frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z) M(v') \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', -z') M(v') \, \mathrm{d}z' \, \mathrm{d}v' \\ &\leq \frac{S_0}{\tau}. \end{aligned}$$

Pour la partie gain on utilise les inégalités

$$\begin{aligned} & \omega_c^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z) f(\overline{x'}, x_3, v') \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \right)^2 \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S} \frac{f^2(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \;\; \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S} M(v') \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \\ & \leq S_0 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S} \frac{f^2(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

La remarque 4.5 nous permet de dire, avec $L^2_M = L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$, que

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}M(v) f(\overline{x'}, x_3, v')\, \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2' \right\|^2_{L^2_M} \\
&\quad \leq \frac{\omega_c^2}{\tau^2} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} M(v) S_0 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}\frac{f^2(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')}\, \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{S_0}{\tau^2} \int_{\mathbb{R}^3} M(v) \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^2(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')}\, \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}v \\
&\quad \leq \frac{S_0^2}{\tau^2} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^2(x_1', x_2', x_3, v')}{M(v')}\, \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3 \\
&\quad = \frac{S_0^2}{\tau^2} \|f\|^2_{L^2_M}.
\end{aligned}$$

2. Échanger $(\overline{x'}, v')$ avec $(\overline{x}, v)$ laisse S invariant. On a donc, pour tout $f, g \in L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$,

$$\begin{aligned}
\left(\langle Q_B\rangle f, g\right)_{L^2_M} &= \frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}M(v)M(v') \left[\frac{f(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} - \frac{f(x,v)}{M(v)}\right] \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2' \\
&\qquad \times \frac{g(x,v)}{M(v)}\, \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}M(v)M(v') \left[\frac{f(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} - \frac{f(x,v)}{M(v)}\right] \mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\qquad \times \frac{g(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3 \\
&= -\frac{\omega_c^2}{2\tau} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}M(v)M(v') \left[\frac{f(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} - \frac{f(x,v)}{M(v)}\right] \\
&\qquad \times \left[\frac{g(\overline{x'}, x_3, v')}{M(v')} - \frac{g(x,v)}{M(v)}\right] \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\, \mathrm{d}v\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ce qui justifie la symétrie de $\langle Q_B\rangle$ et que $\langle Q_B\rangle \leq 0$.

■

Remarque 4.9. *L'opérateur $\langle Q_B\rangle$, contrairement à l'opérateur Q_B, n'est pas local en espace. La valeur de $\langle Q_B\rangle(f)$ au point (x,v) dépend de toutes les valeurs de f dans la configuration*

$$\begin{aligned}
A(x,v) &= \left\{ (x_1', x_2', x_3, v') \ :\ \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', (\omega_c\overline{x} + {}^{\perp}\overline{v}) - (\omega_c\overline{x'} + {}^{\perp}\overline{v'})\ ) > 0 \right\} \\
&= \left\{ (x_1', x_2', x_3, v') : \left| |\overline{v}| - |\overline{v'}| \right| < \left| (\omega_c\overline{x} + {}^{\perp}\overline{v}) - (\omega_c\overline{x'} + {}^{\perp}\overline{v'}) \right| < |\overline{v}| + |\overline{v'}| \right\}.
\end{aligned}$$

Si on note $\mathscr{C}_{x,v}$ le cercle de Larmor, alors

$$\mathscr{C}_{x,v} = \left\{ (x_1', x_2', x_3) \ :\ |\ \omega_c\overline{x'} - (\omega_c\overline{x} + {}^{\perp}\overline{v})\ | = |\overline{v}| \ \right\}.$$

On a

$$\mathscr{C}_{x,v} \times \{v' \ : \ v' \in \mathbb{R}^3\} \subset \overline{A(x,v)},$$

où $\overline{X}$ *est l'adhérence de* X *dans* $\mathbb{R}^6$. *En particulier* $\{x\} \times \mathbb{R}^3 \subset \overline{A(x,v)}$.

Remarque 4.10. *Les parties gain/perte de* $\langle Q_B \rangle$ *sont bornées sur* $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ *et pour* $f \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ *la masse se compense globalement :* $\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle Q_B \rangle f \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0$. *En fait, on a*

$$\begin{aligned}
\|\langle Q_B \rangle^+ f\|_{L^1} &\leq \frac{\omega_c^2}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z) M(v) \Big| f(\overline{x'}, x_3, v') \Big| \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2' \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{S_0}{\tau} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} M(v) |f(\overline{x'}, x_3, v')| \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3\mathrm{d}v \\
&= \frac{S_0}{\tau} \|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

et de manière similaire

$$\| \langle Q_B \rangle^- f\|_{L^1} \leq \frac{S_0}{\tau} \|f\|_{L^1}.$$

On montre que la masse se compense globalement en échangeant $(\overline{x'}, v')$ *avec* $(\overline{x}, v)$.

Rappelons l'équation de Vlasov dans le cadre qui nous intéresse.

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(v_1 \partial_{x_1} f^\varepsilon + v_2 \partial_{x_2} f^\varepsilon) + v_3 \partial_{x_3} f^\varepsilon + \frac{q}{m} E \cdot \nabla_v f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon}(v_2 \partial_{v_1} f^\varepsilon - v_1 \partial_{v_2} f^\varepsilon) = Q(f^\varepsilon), \tag{4.14}$$

$$f^\varepsilon(0, x, v) = f^{\mathrm{in}}(x, v), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \tag{4.15}$$

Nous allons à présent combiner la proposition 3.21, les propriétés de la section 4.1.1 et (4.13), pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.11

Soit $s(v,v')$ une section de la forme $s(v,v') = \sigma(|v-v'|), v, v' \in \mathbb{R}^2$ vérifiant (4.2). Supposons que $E(x) = -\nabla_x \phi(x), \phi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3)$. On prend $f^{\text{in}} \geq 0, f^{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$ et on note f^ε la solution faible de (4.14)–(4.15) avec $Q = Q_B$ pour tout $\varepsilon > 0$. On suppose que $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\right)$, alors la famille $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement $\star$ dans $L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\right)$ vers la solution de

$$\partial_t f + \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B} \cdot \nabla_{\overline{x}} f + v_3 \partial_{x_3} f + \frac{q}{m} \langle E_3 \rangle \partial_{v_3} f = \langle Q_B \rangle f, \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{4.16}$$

$$f(0,x,v) = \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle (x,v), \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \tag{4.17}$$

La moyenne de l'opérateur de relaxation est donnée par

$$\begin{aligned}\langle Q_B \rangle f(x,v) = &\frac{\omega_c^2}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v_3', z)\{M(v) f(\overline{x'}, x_3, v') \\ &- M(v') f(x,v)\}\, \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\end{aligned}$$

avec $z = \omega_c \overline{x} + {}^{\perp}\overline{v} - (\omega_c \overline{x'} + {}^{\perp}\overline{v'})$ et la moyenne de la section de collision s'écrit

$$\mathcal{S}(r, v_3, r', v_3', z) = \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\,)\ \chi(r, r', z)$$

avec

$$\chi(r,r',z) = \frac{\mathbf{1}_{\{|r-r'|<|z|<r+r'\}}}{\pi^2 \sqrt{|z|^2 - (r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2 - |z|^2}}, \ r, r' \in \mathbb{R}_+, v_3, v_3' \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^2.$$

Preuve.

On a $0 \leq f^\varepsilon \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)\right)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f^\varepsilon(t,x,v)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f^{\text{in}}(x,v)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}_+, \varepsilon > 0.$$

On considère une suite $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+^\star$ qui converge vers 0 telle que $\lim_{k\to+\infty} f^{\varepsilon_k} = f$ faiblement $\star$ dans $L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\right)$. En utilisant la formulation faible de (4.14)–(4.15) avec des fonctions tests $\eta(t)\varphi(x,v), \eta \in C_c^1(\mathbb{R}_+), \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ on déduit, après multiplication par ε_k et en faisant tendre k vers l'infini, que la densité limite satisfait la contrainte

$$\mathcal{T} f(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.18}$$

En considérant des fonctions test de type $\eta(t)\varphi(x,v)$, où $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}_+), \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times$

$\mathbb{R}^3) \cap \ker \mathcal{T}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f^{\varepsilon_k}\{\eta'\varphi + \eta v_3 \partial_{x_3}\varphi + \eta\frac{q}{m}E(x)\cdot\nabla_v\varphi\}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f^{\mathrm{in}}\eta(0)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta Q_B(f^{\varepsilon_k})\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (4.19)$$

La symétrie de Q_B, démontrée à la section 4.1.1 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta Q_B(f^{\varepsilon_k})\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta f^{\varepsilon_k}Q_B(\varphi M)\,\frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}x}{M}\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta f Q_B(\varphi M)\,\frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}x}{M}\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta Q_B(f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta\,\langle Q_B(f)\rangle\,\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta\,\langle Q_B\rangle\,(f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad (4.20)\end{aligned}$$

car $f(t) \in \ker\mathcal{T}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et donc $\langle Q_B(f)\rangle = \langle Q_B\rangle(f)$. Pour les autres termes de (4.19) on utilise la proposition 3.21 et la remarque 3.22 pour obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f^{\varepsilon_k}(\partial_t + a\cdot\nabla_{x,v})(\eta\varphi)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(\partial_t + a\cdot\nabla_{x,v})(\eta\varphi)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(\partial_t + A\cdot\nabla_{x,v})(\eta\varphi)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \quad (4.21)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f^{\mathrm{in}}(x,v)\eta(0)\varphi(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\eta(0)\left\langle f^{\mathrm{in}}\right\rangle(x,v)\varphi(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x. \quad (4.22)$$

Si on met ensemble les équations (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22), on obtient pour toute fonction test régulière $\eta(t)\varphi(x,v)$ avec $\varphi \in \ker\mathcal{T}$

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(\partial_t + A\cdot\nabla_{x,v})(\eta\varphi)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left\langle f^{\mathrm{in}}\right\rangle\eta(0)\varphi(x,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\langle Q_B\rangle(f)\eta\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (4.23)$$

La remarque 3.22 nous donne que $A\cdot\nabla_{x,v}$ laisse inchangé le sous espace des fonctions de moyenne nulle et il est donc facile de voir que (4.23) est satisfaite pour toute fonction test $\eta(t)\psi(x,v)$, avec $\psi \in C^1_c(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\cap\ker\langle\cdot\rangle$. Ainsi, (4.23) reste vraie pour toute fonction test régulière, et donc f est solution de (4.16)–(4.17). La démonstration est terminée si on prouve l'unicité de la solution de (4.16)–(4.17) et dans ce cas toute la famille $(f^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers f faiblement $\star$ dans

$L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\right)$. Supposons que f soit solution de (4.16) avec une condition initiale nulle. On obtient de façon standard que

$$\partial_t|f| + \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\cdot\nabla_{\overline{x}}|f| + v_3\partial_{x_3}|f| + \frac{q}{m}\left\langle E_3\right\rangle\partial_{v_3}|f| = \left\langle Q_B\right\rangle(f)\,\mathrm{sgn}f$$

ce qui implique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}|f(t,x,v)|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left\langle Q_B\right\rangle(f)\,\mathrm{sgn}f(t,x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x,\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

En observant enfin que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\langle Q_B\rangle(f)\mathrm{sgn}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x =& \frac{\omega_c^2}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}\Big\{M(v)f(t,\overline{x'},x_3,v')\\ &-M(v')f(t,x,v)\Big\}\,\mathrm{sgn}f(t,x,v)\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ =&\frac{\omega_c^2}{\tau}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}M(v')\{f(t,x,v)\mathrm{sgn}f(t,\overline{x'},x_3,v')\\ &-|f(t,x,v)|\}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ \leq& 0,\end{aligned}$$

on obtient l'unicité de la solution et donc le résultat.

■

Remarque 4.12. *L'opérateur intégro-différentiel que l'on trouve dans* (4.16) *propage la contrainte $\mathcal{T}f = 0$. Pour cela, il suffit de prouver que $f_s = f$ pour tout $s\in\mathbb{R}$, où $f_s(t,x,v) = f(t,X(s;x,v),V(s;x,v))$, et (X,V) est le flot caractéristique* (4.11). *Un calcul direct donne que $\mathcal{T}$ et $A\cdot\nabla_{x,v} = \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\cdot\nabla_{\overline{x}} + v_3\partial_{x_3} + \frac{q}{m}\left\langle E_3\right\rangle\partial_{v_3}$ commutent, c'est-à-dire que*

$$A\cdot\nabla_{x,v}f_s = (A\cdot\nabla_{x,v}f)_s.$$

On observe également que

$$\left\langle Q_B\right\rangle^+ f_s = \left\langle Q_B\right\rangle^+ f = (\left\langle Q_B\right\rangle^+ f)_s,\quad \left\langle Q_B\right\rangle^- f_s = (\left\langle Q_B\right\rangle^- f)_s$$

et donc $\left\langle Q_B\right\rangle f_s = (\left\langle Q_B\right\rangle f)_s$. On a donc que f et f_s sont solutions de (4.16)–(4.17) *et l'unicité montrée dans la démonstration du théorème précédent nous permet de conclure.*

L'équation de transport (4.16) *peut être écrite dans l'espace des phases réduit ($\overline{y} = \overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}, x_3, r = |\overline{v}|, v_3$) car la contrainte $\mathcal{T}f = 0$ donne $f(t,x,v) = g(t,\overline{y},x_3,r,v_3)$. On obtient*

$$\begin{aligned}&\partial_t g + \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\cdot\nabla_{\overline{y}}g + v_3\partial_{x_3}g + \frac{q}{m}\left\langle E_3\right\rangle\partial_{v_3}g\\ &\qquad= 2\pi\frac{\omega_c^2}{\tau}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\mathcal{S}(r,v_3,r',v_3',\omega_c(\overline{y}-\overline{y'}))\\ &\qquad\qquad\times\{M\,g(t,\overline{y'},x_3,r',v_3') - M'\,g(t,\overline{y},x_3,r,v_3)\}\,r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\overline{y'},\end{aligned}$$

où

$$M = \frac{1}{(2\pi\theta/m)^{3/2}}e^{-\frac{m}{2\theta}(r^2+(v_3)^2)},\quad M' = \frac{1}{(2\pi\theta/m)^{3/2}}e^{-\frac{m}{2\theta}((r')^2+(v_3')^2)}.$$

Remarque 4.13. *La famille* $(f^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ *reste bornée dans* $L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\right)$ *pour des potentiels de la forme* $\phi(x) = \overline{\phi}(\overline{x}) + \phi_3(x_3)$. *Dans ce cas on peut observer que la fonction d'énergie* $W^\varepsilon(x,v) := \frac{m|v|^2}{2} + q(\varepsilon\,\overline{\phi}(\overline{x}) + \phi_3(x_3))$ *satisfait*

$$\partial_t W^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}} + \omega_c{}^\perp\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{v}})W^\varepsilon + v_3\partial_{x_3}W^\varepsilon + \frac{q}{m}E(x)\cdot\nabla_v W^\varepsilon = 0.$$

Et de cette façon on a

$$\left\{\partial_t + \frac{1}{\varepsilon}(\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}} + \omega_c{}^\perp\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{v}}) + v_3\partial_{x_3} + \frac{q}{m}E(x)\cdot\nabla_v\right\}\left(\frac{(f^\varepsilon)^2}{2M(v)\exp(-\frac{q}{\theta}[\varepsilon\,\overline{\phi}(\overline{x}) + \phi_3(x_3)])}\right)$$
$$= \frac{Q_B(f^\varepsilon)f^\varepsilon}{M(v)\exp(-\frac{q}{\theta}[\varepsilon\,\overline{\phi}(\overline{x}) + \phi_3(x_3)])}.$$

En intégrant par rapport à (x,v), *on obtient la borne*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(f^\varepsilon(t,x,v))^2}{M(v)\exp(-\frac{q}{\theta}[\varepsilon\,\overline{\phi}(\overline{x}) + \phi_3(x_3)]}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(f^{\mathrm{in}}(x,v))^2}{M(v)\exp(-\frac{q}{\theta}[\varepsilon\,\overline{\phi}(\overline{x}) + \phi_3(x_3)])}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x$$

qui implique l'estimation uniforme

$$\|f^\varepsilon\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\right)} \leq \exp\left(\frac{|q|\,(\|\overline{\phi}\|_{L^\infty} + \|\phi_3\|_{L^\infty})}{\theta}\right)\|f^{\mathrm{in}}\|_{L^2\left(M^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)},$$

pour $0 < \varepsilon \leq 1$.

4.2 Gyromoyenne du noyau de Fokker–Planck

Les techniques de calculs de moyennes nous permettent de traiter de nombreux opérateurs de collision différents. On peut traiter par exemple le noyau de Fokker–Planck

$$Q_{FP}(f) = \frac{\theta}{m\tau}\mathrm{div}_v\left(\nabla_v f + \frac{m}{\theta}vf\right) = \frac{\theta}{m\tau}\mathrm{div}_v\left\{M\nabla_v\left(\frac{f}{M}\right)\right\}.$$

4.2.1 Propriétés de Q_{FP}

Comme Q_{FP} est une divergence, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_{FP}(f)(v)\mathrm{d}v = 0.$$

Ce noyau vérifie également l'inégalité d'entropie, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_{FP}(f)(v)\ln\left(\frac{f}{M}\right)\mathrm{d}v = -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\theta}{m\tau}M\nabla_v\left(\frac{f}{M}\right)\cdot\nabla_v\ln\left(\frac{f}{M}\right)\mathrm{d}v$$
$$= -\frac{\theta}{m\tau}\int_{\mathbb{R}^3} f\left|\nabla_v\ln\left(\frac{f}{M}\right)\right|^2\mathrm{d}v$$
$$\leq 0.$$

Dans le cas homogène en espace, $f = f(t,v)$ l'équation étant

$$\partial_t f = Q_{FP}(f),$$

les calculs précédents permettent de conclure que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} Q_{FP}(f)\mathrm{d}v = 0,$$

c'est-à-dire que le noyau Q_{FP} vérifie la conservation de la masse totale.

Le bilan d'entropie s'effectue de la manière suivante. On introduit la fonction convexe $\varphi(s) = s\ln s - s + 1$, $\varphi :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$. Cette fonction admet un minimum en $s = 1$, ainsi $\varphi(s) \geq \varphi(1) = 0$. On calcule

$$\begin{aligned}\partial_t\left\{M\varphi\left(\frac{f}{M}\right)\right\} &= M\varphi'\left(\frac{f}{M}\right)\\ &= M\ln\left(\frac{f}{M}\right)\partial_t\left(\frac{f}{M}\right)\\ &= \ln\left(\frac{f}{M}\right)\partial_t f.\end{aligned}$$

Si on multiplie $\partial_t f = Q_{FP}(f)$ par $\ln\left(\frac{f}{M}\right)$ on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^3} M\varphi\left(\frac{f}{M}\right)\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}^3}\ln\left(\frac{f}{M}\right)\partial_t f\mathrm{d}v\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\ln\left(\frac{f}{M}\right)Q_{FP}(f)\mathrm{d}v\\ &= -\frac{\theta}{m\tau}\int_{\mathbb{R}^3} f\left|\nabla_v\ln\left(\frac{f}{M}\right)\right|^2\mathrm{d}v\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} M\varphi\left(\frac{f(t)}{M}\right)\mathrm{d}v$$

est décroissante en temps.

4.2.2 Calcul de la moyenne de Q_{FP}

Théorème 4.14

Le modèle limite quand $\varepsilon \searrow 0$ de (4.14), (4.15) où $Q = Q_{FP}$ pour $(t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est donné par

$$\partial_t f + \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B} \cdot \nabla_{\overline{x}} f + v_3 \partial_{x_3} f + \frac{q}{m} \langle E_3 \rangle \, \partial_{v_3} f = \langle Q_{FP} \rangle \, f, \tag{4.24}$$

$$f(0,x,v) = \left\langle f^{\mathrm{in}} \right\rangle (x,v), \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{4.25}$$

où la moyenne de l'opérateur Fokker–Planck et la matrice de diffusion $\mathcal{L}$ s'écrivent

$$\langle Q_{FP} \rangle \, f(x,v) = \frac{\theta}{m\tau} \mathrm{div}_{\omega_c x, v} \left\{ M \mathcal{L} \nabla_{\omega_c x, v} \left(\frac{f}{M} \right) \right\},$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2(I_3 - e_3 \otimes e_3) & -E \\ E & I_3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve.

Le noyau de Fokker–Planck est un opérateur différentiel du second ordre. On va donc appliquer deux fois la proposition 3.19. Pour tout $f \in \ker \mathcal{T}$, si on prend $\xi_v = M \nabla_v (f/M)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{div}_v \left(M \nabla_v \left(\frac{f}{M} \right) \right) \right\rangle \qquad (4.26) \\ &= \mathrm{div}_{\omega_c \overline{x}} \left\{ \left\langle M^{\perp} \nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \right\rangle + \left\langle M \nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} - \left\langle M \nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\} \\ &+ \mathrm{div}_{\overline{v}} \left\{ \left\langle M \nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} + \left\langle M \nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\} + \partial_{v_3} \left\langle M \partial_{v_3} \left(\frac{f}{M} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

La proposition 3.18 nous donne que ∂_{v_3} commute avec $\langle \cdot \rangle$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \partial_{v_3} \left\langle M \partial_{v_3} \left(\frac{f}{M} \right) \right\rangle &= \partial_{v_3} \left\{ M \left\langle \partial_{v_3} \left(\frac{f}{M} \right) \right\rangle \right\} \\ &= \partial_{v_3} \left\{ M \partial_{v_3} \left\langle \frac{f}{M} \right\rangle \right\} \\ &= \partial_{v_3} \left\{ M \partial_{v_3} \left(\frac{f}{M} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer les moyennes

$$\left\langle M \, {}^{\perp}\nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \right\rangle, \quad \left\langle M \, \nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle \text{ et } \left\langle M \, \nabla_{\overline{v}} \left(\frac{f}{M} \right) \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle.$$

Ces moyennes se calculent facilement avec la proposition 3.19, en observant que

$$\partial_{v_1}\left(\frac{f}{M}\right) = \mathrm{div}_v\left(\frac{f}{M},0,0\right),\ \ \partial_{v_2}\left(\frac{f}{M}\right) = \mathrm{div}_v\left(0,\frac{f}{M},0\right),$$

$$\nabla_{\overline{v}}\left(\frac{f}{M}\right)\cdot{}^{\perp}\overline{v} = \mathrm{div}_{\overline{v}}\left(\frac{f}{M}{}^{\perp}\overline{v}\right),\ \ \nabla_{\overline{v}}\left(\frac{f}{M}\right)\cdot\overline{v} = \mathrm{div}_{\overline{v}}\left(\frac{f}{M}\overline{v}\right) - 2\frac{f}{M}.$$

On obtient

$$\left\langle M\,{}^{\perp}\nabla_{\overline{v}}\left(\frac{f}{M}\right)\right\rangle = M\,\nabla_{\omega_c\overline{x}}\left(\frac{f}{M}\right), \tag{4.27}$$

$$\left\langle M\,\nabla_{\overline{v}}\left(\frac{f}{M}\right)\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle = M\,\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{({}^{\perp}\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\cdot\nabla_{\omega_c x,v}\left(\frac{f}{M}\right), \tag{4.28}$$

$$\left\langle M\,\nabla_{\overline{v}}\left(\frac{f}{M}\right)\cdot\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle = -M\,\left(\frac{({}^{\perp}\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\cdot\nabla_{\omega_c x,v}\left(\frac{f}{M}\right), \tag{4.29}$$

et notre conclusion suit en combinant (4.26), (4.27), (4.28) et (4.29).

La matrice de diffusion $\mathcal{L}$ est positive et pour tout $\xi = (\xi_x,\xi_v)\in\mathbb{R}^6$ on a

$$\mathcal{L}\xi\cdot\xi = |\xi_{\overline{x}}|^2 + |\xi_{\overline{x}} - {}^{\perp}\xi_{\overline{v}}|^2 + (\xi_{v_3})^2 \geq 0$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $\xi_{\overline{x}} = \xi_{\overline{v}} = (0,0)$ et $\xi_{v_3} = 0$.

■

Remarque 4.15. *On remarque que l'opérateur de Fokker–Planck n'a pas de dérivée par rapport à x_3 car la matrice de diffusion $\mathcal{L}$ a seulement des entrées nulles dans les troisièmes lignes et colonnes. Calculer la moyenne de l'opérateur de Fokker–Planck mène à de la diffusion en vitesse mais aussi selon les coordonnées perpendiculaires en position.*

4.3 Gyromoyenne du noyau de Fokker–Planck–Landau

Dans cette section nous nous concentrons sur le noyau de Fokker–Planck–Landau que l'on peut trouver dans [25, 35, 36, 34], et que nous avons étudié dans [19]. Le taux de changement de la densité f_s correspond à une population de particule chargées de l'espèce s causé par la collision avec des particules chargées de l'espèce s'. Il s'écrit

$$\begin{aligned}Q_{FPL}(f_s,f_{s'}) =& \frac{1}{m_s}\mathrm{div}_v\int_{\mathbb{R}^3}\mu_{ss'}^2\sigma_{ss'}(|v-v'|)|v-v'|^3\\ &\times S(v-v')\left(\frac{1}{m_s}f_{s'}(v')(\nabla_v f_s)(v) - \frac{1}{m_{s'}}f_s(v)(\nabla_{v'}f_{s'})(v')\right)\,\mathrm{d}v'\end{aligned}$$

où $\mu_{ss'} = \frac{m_s m_{s'}}{m_s + m_{s'}}$ est la masse réduite du couple $\{m_s, m_{s'}\}$, $\sigma_{ss'} = \sigma_{s's} > 0$ est la section de collision entre les espèces $\{s, s'\}$ et la matrice $S(w) = \left(I - \frac{w \otimes w}{|w|^2}\right)$ correspond à la projection orthogonale sur le plan orthogonal à w. Comme la masse d'un électron est beaucoup plus petite que la masse d'un ion, on ne va considérer que les collisions entre les ions, dont la fonction de distribution est notée f^ε et satisfait l'équation

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\overline{v} \cdot \nabla_{\overline{x}} + \omega_c{}^{\perp}\overline{v} \cdot \nabla_{\overline{v}}) f^\varepsilon + v_3 \partial_{x_3} f^\varepsilon + \frac{q}{m} E \cdot \nabla_v f^\varepsilon = Q_{FPL}(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \quad (4.30)$$

avec $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et où $q > 0$ est la charge d'un ion et m est la masse d'un ion. Comme dans le cas du noyau de relaxation, le modèle limite vient en calculant la moyenne du noyau de collision Q_{FPL}. Les calculs sont cependant plus délicats. On réalisera donc ici uniquement des calculs formels.

4.3.1 Propriétés de Q_{FPL}

Le noyau de collision Fokker–Planck–Landau entre les ions s'écrit

$$Q_{FPL}(f,f) = \frac{1}{4}\mathrm{div}_v \int_{\mathbb{R}^3} \sigma_{ii}(|v-v'|)|v-v'|^3 S(v-v')\big(f(v')(\nabla_v f)(v) - f(v)(\nabla_{v'} f)(v')\big)\mathrm{d}v',$$

et vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 4.16

On a la conservation de la masse, du moment, et de l'énergie cinétique.

$$\int_{\mathbb{R}^3} m Q_{FPL}(f,f)\ \mathrm{d}v = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} m v Q_{FPL}(f,f)\ \mathrm{d}v = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} m \frac{|v|^2}{2} Q_{FPL}(f,f)\ \mathrm{d}v = 0.$$

De plus, la production d'entropie $D := -\int_{\mathbb{R}^3}(1 + \ln f) Q_{FPL}(f,f)\ \mathrm{d}v$ est positive

$$D = \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|)|v-v'| f(v) \times f(v') \left|(v-v') \wedge (\nabla_v \ln f(v) - \nabla_{v'} \ln f(v'))\right|^2\ \mathrm{d}v'\mathrm{d}v \geq 0.$$

Preuve.

Si on observe que $A_{ii}(v,v') + A_{ii}(v',v) = 0$, où

$$A_{ii}(v,v') = \sigma_{ii}(|v-v'|)|v-v'|^3 S(v-v')(f(v')\nabla_v f(v) - f(v)\nabla_{v'} f(v'))$$

et $S(v-v')(v-v') = 0$, alors toutes ces propriétés se démontrent facilement par intégration par parties.

■

Avec la notation $\sigma(|v-v'|) = \frac{1}{4}\sigma_{ii}(|v-v'|)|v-v'|^3$ le noyau de collision devient

$$Q_{FPL}(f,f)(v) = \mathrm{div}_v \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|)S(v-v')\big(f(v')(\nabla_v f)(v) - f(v)(\nabla_{v'} f)(v')\big)\,\mathrm{d}v'.$$

4.3.2 Calculs préliminaires

L'opérateur de Fokker–Planck–Landau combine convolution et opérateurs différentiels en v. Sa moyenne peut donc être déterminée en étudiant les propriétés de commutation entre convolution et dérivation par rapport à la moyenne. Nous allons tout d'abord appliquer la formule de commutation entre divergence et moyenne. Ensuite, nous chercherons les commutations entre convolution et moyenne. Par souci de clarté, on scindera Q_{FPL} en ses parties de gain et perte : $Q^{\pm}_{FPL}$. Nous introduisons les notations suivantes, pour toute fonction g, et pour tout vecteur w_1, w_2

$$\langle g \rangle_{\sigma S} := \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} g(x,v')\sigma(|v-v'|)S(v-v')\,\mathrm{d}v' \right\rangle,$$

$$\langle g, w_1 \rangle_{\sigma S} := \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} g(x,v')\sigma(|v-v'|)S(v-v')w_1\,\mathrm{d}v' \right\rangle,$$

$$\langle g, w_1, w_2 \rangle_{\sigma S} := \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} g(x,v')\sigma(|v-v'|)S(v-v') : w_1 \otimes w_2\,\mathrm{d}v' \right\rangle.$$

Nous allons à présent établir une formule utile en nous basant sur la proposition 4.2. Pour toute matrice orthogonale $\mathcal{O} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on considère l'application $(v,v') \to S({}^t\mathcal{O}v - {}^t\mathcal{O}v')$. On voit facilement que

$$S({}^t\mathcal{O}v - {}^t\mathcal{O}v') = {}^t\mathcal{O}S(v-v')\mathcal{O}.$$

On remarque également que pour toute matrice orthogonale $\mathcal{O} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{O}e_3 = e_3$ on a $({}^t\overline{\mathcal{O}v},0) = {}^t\mathcal{O}(\overline{v},0)$ et $({}^{\perp}\overline{{}^t\mathcal{O}v},0) = {}^t\mathcal{O}({}^{\perp}\overline{v},0)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.

Lemme 4.17

Les applications suivantes sont laissées invariantes par toute rotation autour de e_3, ce qui signifie qu'elles satisfont (4.6)

$$S(v-v') : (\overline{v},0) \otimes (\overline{v},0), \quad S(v-v') : (\overline{v},0) \otimes ({}^{\perp}\overline{v},0),$$

$$S(v-v') : ({}^{\perp}\overline{v},0) \otimes ({}^{\perp}\overline{v},0),$$

$$S : (\overline{v'},0) \otimes (\overline{v},0),\ S : (\overline{v'},0) \otimes ({}^{\perp}\overline{v},0),\ S : ({}^{\perp}\overline{v'},0) \otimes (\overline{v},0),\ S : ({}^{\perp}\overline{v'},0) \otimes ({}^{\perp}\overline{v},0).$$

Preuve.

Pour toute rotation $\mathcal{O}$ autour de e_3 on a

$$\begin{aligned} S({}^t\mathcal{O}v - {}^t\mathcal{O}v') : (\overline{{}^t\mathcal{O}v}, 0) \otimes (\overline{{}^t\mathcal{O}v}, 0) &= {}^t\mathcal{O}S(v - v')\mathcal{O} : {}^t\mathcal{O}(\overline{v}, 0) \otimes {}^t\mathcal{O}(\overline{v}, 0) \\ &= S(v - v') : (\overline{v}, 0) \otimes (\overline{v}, 0). \end{aligned}$$

Les autres invariances se démontrent de façon similaire.

■

La proposition 4.2 s'applique donc à toutes les fonctions citées précédemment et on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.18

Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $|r - r'| < |z| < r + r'$ on note par $\varphi \in]0, \pi[$ l'angle satisfaisant $r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\varphi = |z|^2$. Alors pour toute fonction $f \in \ker \mathcal{T}$ on a, en notant $z = (\omega_c \overline{x} + {}^\perp\overline{v}) - (\omega_c \overline{x'} + {}^\perp\overline{v'})$

1.
$$\begin{aligned} \langle f, (\overline{v}, 0), (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S} =& \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\,) f(\overline{x'}, x_3, v') \\ & \times \chi(|\overline{v}|, |\overline{v'}|, z) \left\{ r^2 - \frac{r^2 (r - r'\cos\varphi)^2}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \right\} \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

2.
$$\left\langle f, (\overline{v}, 0), ({}^\perp\overline{v}, 0) \right\rangle_{\sigma S} = \left\langle f, ({}^\perp\overline{v}, 0), (\overline{v}, 0) \right\rangle_{\sigma S} = 0.$$

3.
$$\begin{aligned} \left\langle f, ({}^\perp\overline{v}, 0), ({}^\perp\overline{v}, 0) \right\rangle_{\sigma S} =& \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\,) f(\overline{x'}, x_3, v') \\ & \times \chi(|\overline{v}|, |\overline{v'}|, z) \left\{ r^2 - \frac{r^2 (r')^2 \sin^2\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \right\} \\ & \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} \left\langle f, (\overline{v'}, 0), (\overline{v}, 0) \right\rangle_{\sigma S} =& \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\,) f(\overline{x'}, x_3, v') \\ & \times \chi(|\overline{v}|, |\overline{v'}|, z) \Big\{ rr'\cos\varphi \\ & - \frac{rr'(r\cos\varphi - r')(r - r'\cos\varphi)}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \Big\} \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

5.

$$\Big\langle f,(\overline{v'},0),({}^{\perp}\overline{v},0)\Big\rangle_{\sigma S}=\Big\langle f,({}^{\perp}\overline{v'},0),(\overline{v},0)\Big\rangle_{\sigma S}=0.$$

6.

$$\begin{aligned}\Big\langle f,({}^{\perp}\overline{v'},0),({}^{\perp}\overline{v},0)\Big\rangle_{\sigma S}=&\omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sigma(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\,)f(\overline{x'},x_3,v')\\&\times\chi(|\overline{v}|,|\overline{v'}|,z)\left\{rr'\cos\varphi-\frac{r^2(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\}\\&\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.\end{aligned}$$

Preuve.

Il suffit de calculer les fonctions $\tilde{C},\mathcal{C}$ définies dans la proposition 4.2. Pour chacun des points on a

1.

$$\begin{aligned}C(v,v')&=\sigma(|v-v'|)S(v-v'):(\overline{v},0)\otimes(\overline{v},0)\\&=\sigma(|v-v'|)\left\{|\overline{v}|^2-\frac{[(\overline{v}-\overline{v'})\cdot\overline{v}]^2}{|v-v'|^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi)=\sigma\left(\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos\varphi+(v_3-v_3')^2}\right)\left\{r^2-\frac{(r^2-rr'\cos\varphi)^2}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\},$$

$$\mathcal{C}(r,v_3,r',v_3',z)=\chi(r,r',z)\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left\{r^2-\frac{r^2(r-r'\cos\varphi)^2}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\}.$$

2.

$$\begin{aligned}C(v,v')&=\sigma(|v-v'|)S(v-v'):(\overline{v},0)\otimes({}^{\perp}\overline{v},0)\\&=-\sigma(|v-v'|)\frac{[(\overline{v}-\overline{v'})\cdot\overline{v}]\;[(\overline{v}-\overline{v'})\cdot{}^{\perp}\overline{v}]}{|v-v'|^2},\end{aligned}$$

$$\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi)=-\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\frac{(r^2-rr'\cos\varphi)rr'\sin\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}$$

$$\mathcal{C}=0.$$

3.

$$\begin{aligned}C(v,v')&=\sigma(|v-v'|)S(v-v'):({}^{\perp}\overline{v},0)\otimes({}^{\perp}\overline{v},0)\\&=\sigma(|v-v'|)\left\{|\overline{v}|^2-\frac{(\overline{v'}\cdot{}^{\perp}\overline{v})^2}{|v-v'|^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi)=\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left\{r^2-\frac{r^2(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\},$$

$$\mathcal{C}(r,v_3,r',v_3',z)=\chi(r,r',z)\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left\{r^2-\frac{r^2(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\}.$$

4.

$$\begin{aligned}C(v,v')&=\sigma(|v-v'|)S(v-v'):(\overline{v'},0)\otimes(\overline{v},0)\\&=\sigma(|v-v'|)\left\{\overline{v'}\cdot\overline{v}-\frac{[(\overline{v}-\overline{v'})\cdot\overline{v'}]\ [(\overline{v}-\overline{v'})\cdot\overline{v}]}{|v-v'|^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi)=\sigma\left\{rr'\cos\varphi-\frac{(rr'\cos\varphi-(r')^2)(r^2-rr'\cos\varphi)}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\},$$

$$\mathcal{C}(r,v_3,r',v_3',z)=\chi(r,r',z)\sigma\left\{rr'\cos\varphi-\frac{rr'(r\cos\varphi-r')(r-r'\cos\varphi)}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\}.$$

5.

$$\begin{aligned}C(v,v')&=\sigma(|v-v'|)S(v-v'):(\overline{v'},0)\otimes({}^{\perp}\overline{v},0)\\&=\sigma(|v-v'|)\left\{\overline{v'}\cdot{}^{\perp}\overline{v}-\frac{[(\overline{v}-\overline{v'})\cdot\overline{v'}]\ [(\overline{v}-\overline{v'})\cdot{}^{\perp}\overline{v}]}{|v-v'|^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi)=\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left\{-rr'\sin\varphi-\frac{(rr'\cos\varphi-(r')^2)rr'\sin\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\},$$

$$\mathcal{C}(r,v_3,r',v_3',z)=0.$$

6.

$$\begin{aligned}C(v,v')&=\sigma(|v-v'|)S(v-v'):({}^{\perp}\overline{v'},0)\otimes({}^{\perp}\overline{v},0)\\&=\sigma(|v-v'|)\left\{\overline{v}\cdot\overline{v'}-\frac{[(\overline{v}-\overline{v'})\cdot{}^{\perp}\overline{v'}]\ [(\overline{v}-\overline{v'})\cdot{}^{\perp}\overline{v}]}{|v-v'|^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\tilde{C}(r,v_3,r',v_3',\varphi)=\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left\{rr'\cos\varphi-\frac{r^2(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\},$$

$$\mathcal{C}(r,v_3,r',v_3',z)=\chi(r,r',z)\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left\{rr'\cos\varphi-\frac{r^2(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right\}.$$

■

On doit aussi calculer les moyennes

$$\langle f,(\overline{v},0)\rangle_{\sigma S},\ \left\langle f,({}^{\perp}\overline{v},0)\right\rangle_{\sigma S},\ \left\langle f,(\overline{v'},0)\right\rangle_{\sigma S},\ \left\langle f,({}^{\perp}\overline{v'},0)\right\rangle_{\sigma S}. \tag{4.31}$$

Remarquons que les fonctions $\sigma S(v-v')(\overline{v},0)$, $\sigma S(v-v')({}^{\perp}\overline{v},0)$, $\sigma S(v-v')(\overline{v'},0)$ et $\sigma S(v-v')({}^{\perp}\overline{v'},0)$ s'écrivent

$$D(v,v')=(\tilde{D}\ \overline{v}+\tilde{D}'\ \overline{v'},\tilde{D}_3\ v_3+\tilde{D}_3'\ v_3')$$

pour des fonctions scalaires $\tilde{D}$, $\tilde{D}'$, $\tilde{D}_3$, $\tilde{D}_3'$ qui dépendent de $|\overline{v}|$, v_3, $|\overline{v'}|$, v_3' et φ, l'angle entre $(\overline{v},0)$ et $(\overline{v'},0)$. En réalisant les mêmes étapes que dans la démonstration de la preuve 4.2 on obtient la proposition suivante (voir annexe A pour les détails de la démonstration).

Proposition 4.19

Soit $\tilde{D} = \tilde{D}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v'_3, \varphi)$ et $\tilde{D}' = \tilde{D}'(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v'_3, \varphi)$ deux fonctions, et

$$D(v, v') = \tilde{D}\ \overline{v} + \tilde{D}'\ \overline{v'}, \quad D_3(v, v') = \tilde{D}\ v_3 + \tilde{D}'\ v'_3.$$

Alors pour tout $f \in \ker \mathcal{T}$ on a

1.
$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} D(v, v') f(x, v')\ \mathrm{d}v' \right\rangle = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{D}(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v'_3, (\omega_c \overline{x} +^{\perp} \overline{v}) - (\omega_c \overline{x'} +^{\perp} \overline{v'}) f(\overline{x'}, x_3, v')\ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2,$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(r, v_3, r', v'_3, z) = &\frac{\begin{pmatrix} z_2 & z_1 \\ -z_1 & z_2 \end{pmatrix}}{2|z|}[\tilde{D}(r, v_3, r', v'_3, \varphi) r e^{-i\psi} \\ &+ \tilde{D}(r, v_3, r', v'_3, -\varphi) r e^{i\psi} \\ &+ \tilde{D}'(r, v_3, r', v'_3, \varphi) r' e^{i(\varphi - \psi)} \\ &+ \tilde{D}'(r, v_3, r', v'_3, -\varphi) r' e^{-i(\varphi - \psi)}] \times \chi(r, r', z).\end{aligned}$$

2.
$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} D_3(v, v') f(x, v')\ \mathrm{d}v' \right\rangle = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{D}_3(|\overline{v}|, v_3, |\overline{v'}|, v'_3, (\omega_c \overline{x} +^{\perp} \overline{v}) - (\omega_c \overline{x'} +^{\perp} \overline{v'}) f(\overline{x'}, x_3, v')\ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2,$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3(r, v_3, r', v'_3, z) = &\frac{1}{2}[(\tilde{D}(r, v_3, r', v'_3, \varphi) + \tilde{D}(r, v_3, r', v'_3, -\varphi)) v_3 \\ &+ (\tilde{D}'(r, v_3, r', v'_3, \varphi) + \tilde{D}'(r, v_3, r', v'_3, -\varphi)) v'_3] \chi(r, r', z).\end{aligned}$$

Les angles $\varphi,\ \psi\ \in]0, \pi[$ sont tels que $|z|^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\varphi$, $(r')^2 = r^2 + |z|^2 + 2r|z| \cos\psi$.

Voyons maintenant ce que l'on obtient dans les cas des coefficients pairs/impairs $\tilde{D}, \tilde{D}'$.

Proposition 4.20

Reprenons les mêmes notations que dans la proposition 4.19 et supposons que les fonctions $\tilde{D}$, $\tilde{D}'$ sont paires par rapport à φ. Alors on a

1.
$$\mathcal{D}(r, v_3, r', v_3', z) = [(\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}'(\varphi))\, r\cos\psi + |z|\tilde{D}'(\varphi)]\chi(r, r', z)\frac{{}^{\perp}z}{|z|}.$$

2.
$$\mathcal{D}_3(r, v_3, r', v_3', z) = [(\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}'(\varphi))\, v_3 + \tilde{D}'(\varphi)(v_3' - v_3)]\chi(r, r', z).$$

Preuve.

1. On a immédiatement

$$\frac{1}{2}[\tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi)\, re^{-i\psi} + \tilde{D}(r, v_3, r', v_3', -\varphi)\, re^{i\psi}] = \tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi)\, r(\cos\psi, 0)$$

et

$$\frac{1}{2}[\tilde{D}'(r, v_3, r', v_3', \varphi)r'e^{i(\varphi-\psi)} + \tilde{D}'(r, v_3, r', v_3', -\varphi)r'e^{-i(\varphi-\psi)}] = \tilde{D}'r'(\cos(\psi-\varphi), 0).$$

Considérons à présent le triangle de sommets $O = (0,0)$, $A = (r, 0)$, $A' = r'e^{i\varphi}$ de $\mathbb{R}^2$. Les définitions pour φ, ψ assurent que $|z| = |AA'|$ et que ψ est le supplémentaire de l'angle opposé à OA'. Si on applique le théorème du cosinus par rapport à l'angle opposé à OA on obtient

$$r^2 = (r')^2 + |z|^2 - 2r'|z|\cos(\psi - \varphi). \tag{4.32}$$

En combinant avec la définition de ψ on a

$$0 = 2|z|^2 - 2r'|z|\cos(\psi - \varphi) + 2r|z|\cos\psi,$$

ce qui implique que

$$r\cos\psi - r'\cos(\psi - \varphi) + |z| = 0. \tag{4.33}$$

Enfin, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(r, v_3, r', v_3', z) &= [\tilde{D}(\varphi)\, r\cos\psi + \tilde{D}'(\varphi)\, r'\cos(\psi - \varphi)]\chi(r, r', z)\frac{{}^{\perp}z}{|z|} \\ &= [(\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}'(\varphi))\, r\cos\psi + \tilde{D}'(\varphi)(r'\cos(\psi - \varphi) - r\cos\psi)]\chi(r, r', z)\frac{{}^{\perp}z}{|z|} \\ &= [(\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}'(\varphi))\, r\cos\psi + |z|\tilde{D}'(\varphi)]\chi(r, r', z)\frac{{}^{\perp}z}{|z|}.\end{aligned}$$

2. Cette assertion est immédiate si on observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3(r, v_3, r', v_3', z) &= (\tilde{D}(\varphi)\ v_3 + \tilde{D}'(\varphi)\ v_3')\chi(r, r', z) \\ &= [(\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}'(\varphi))\ v_3 + \tilde{D}'(\varphi)(v_3' - v_3)]\chi(r, r', z).\end{aligned}$$

■

Proposition 4.21

Reprenons les mêmes notations que dans la proposition 4.19 et supposons que les fonctions $\tilde{D}$, $\tilde{D}'$ sont impaires par rapport à φ. Alors on a

1. $$\mathcal{D}(r, v_3, r', v_3', z) = -[\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}'(\varphi)]\ r \sin\psi\ \chi(r, r', z)\ \frac{z}{|z|}.$$

2. $$\mathcal{D}_3(r, v_3, r', v_3', z) = 0.$$

Preuve.

1. On a

$$\frac{1}{2}[\tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi) r e^{-i\psi} + \tilde{D}(r, v_3, r', v_3', -\varphi) r e^{i\psi}] = -(0, \tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi) r \sin\psi)$$

et

$$\frac{1}{2}[\tilde{D}'(r, v_3, r', v_3', \varphi) r' e^{i(\varphi-\psi)} + \tilde{D}'(r, v_3, r', v_3', -\varphi) r' e^{-i(\varphi-\psi)}] = -(0, \tilde{D}' r' \sin(\psi - \varphi)).$$

Le théorème du sinus appliqué aux angles $O = (0,0)$, $A = (r, 0)$, $A' = r' e^{i\varphi}$ implique que

$$r \sin\psi = r' \sin(\psi - \varphi).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(r, v_3, r', v_3', z) &= -[\tilde{D}(\varphi)\ r \sin\psi + \tilde{D}'(\varphi)\ r' \sin(\psi - \varphi)]\ \chi(r, r', z) \frac{z}{|z|} \\ &= -[\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}'(\varphi)]\ r \sin\psi\ \chi(r, r', z)\ \frac{z}{|z|}.\end{aligned}$$

2. On a que $\tilde{D}(\varphi) + \tilde{D}(-\varphi) = \tilde{D}'(\varphi) + \tilde{D}'(-\varphi) = 0$ et donc $\mathcal{D}_3 = 0$.

■

Les moyennes de la ligne (4.31) viennent directement des propositions 4.20 et 4.21.

Corollaire 4.22

En utilisant les mêmes notations que dans la proposition 4.19, on a pour toute fonction $f \in \ker \mathcal{T}$

1.

$$\langle f, (\overline{v}, 0)\rangle_{\sigma S} = -\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \left(\frac{(v_3 - v_3')^2}{|z|^2} \, {}^{\perp}z, v_3 - v_3' \right) \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'.$$

2.

$$\left\langle f, (\overline{v'}, 0)\right\rangle_{\sigma S} = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \left(\frac{(v_3 - v_3')^2}{|z|^2} \, {}^{\perp}z, v_3 - v_3' \right) \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'.$$

3.

$$\left\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0)\right\rangle_{\sigma S} = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2} (z, 0) \ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'.$$

4.

$$\left\langle f, ({}^{\perp}\overline{v'}, 0)\right\rangle_{\sigma S} = -\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2} (z, 0) \ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'.$$

Preuve.

1. On considère la fonction $D(v, v') = \sigma(|v - v'|)S(v - v')(\overline{v}, 0) = (\tilde{D}\ \overline{v} + \tilde{D}'\ \overline{v'}, \tilde{D}'(v_3' - v_3))$ où

$$\tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi) = \sigma\left(1 - \frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi + (v_3 - v_3')^2}\right),$$

$$\tilde{D}'(r, v_3, r', v_3', \varphi) = \sigma \frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi + (v_3 - v_3')^2}.$$

La proposition (4.20) et l'identité $r\cos\psi = -\frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{|z|}$ nous donnent

$$\begin{aligned}\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{D}\ \overline{v} + \tilde{D}'\ \overline{v'}) f(x, v')\ \mathrm{d}v' \right\rangle &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x_1', x_2', x_3, v')\chi \\ &\times \left(r\cos\psi + |z| \frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \right) \frac{{}^{\perp}z}{|z|} \ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \\ &= -\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x_1', x_2', x_3, v')\chi \\ &\times \frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \frac{(v_3 - v_3')^2}{|z|} \frac{{}^{\perp}z}{|z|} \ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'\end{aligned}$$

ainsi que

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{D}'(v_3' - v_3) f(x, v')\, \mathrm{d}v' \right\rangle = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x_1', x_2', x_3, v')\chi \times \frac{r^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}(v_3' - v_3)\, \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2',$$

ce qui justifie la première affirmation.
2. On prend $D(v, v') = \sigma(|v - v'|)S(v - v')(\overline{v'}, 0) = (\tilde{D}\,\overline{v} + \tilde{D}'\,\overline{v'}, \tilde{D}(v_3 - v_3'))$ où

$$\tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi) = \sigma \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi + (v_3 - v_3')^2},$$

$$\tilde{D}'(r, v_3, r', v_3', \varphi) = \sigma\left(1 - \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi + (v_3 - v_3')^2}\right).$$

Les équations (4.32) et (4.33) indiquent que

$$r\cos\psi + |z| = r'\cos(\psi - \varphi) = \frac{(r')^2 + |z|^2 - r^2}{2|z|} = \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{|z|}$$

et dans ce cas on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{D}\overline{v} + \tilde{D}'\overline{v'}) f(x, v')\, \mathrm{d}v' \right\rangle &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x_1', x_2', x_3, v')\chi \\ &\quad \times \left[r\cos\psi + |z|\left(1 - \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\right)\right]\frac{{}^{\perp}z}{|z|}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2' \\ &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x_1', x_2', x_3, v')\chi \\ &\quad \times \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}\frac{(v_3 - v_3')^2}{|z|}\frac{{}^{\perp}z}{|z|}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\end{aligned}$$

et

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{D}(v_3 - v_3') f(x, v')\, \mathrm{d}v' \right\rangle = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x_1', x_2', x_3, v')\chi \times \frac{(r')^2 - rr'\cos\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}(v_3 - v_3')\, \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2',$$

ce qui justifie le second point.

3. On prend $D(v, v') = -\sigma(|v - v'|)\frac{(v-v')\otimes(v-v')}{|v-v'|^2}({}^{\perp}\overline{v}, 0) = (\tilde{D}\,\overline{v} + \tilde{D}'\,\overline{v'}, \tilde{D}v_3 + \tilde{D}'v_3')$, où

$$\tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi) = -\sigma\frac{rr'\sin\varphi}{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi + (v_3 - v_3')^2} = -\tilde{D}'.$$

La proposition 4.21 nous permet de déduire que $\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} D(v, v') f(x, v')\, \mathrm{d}v' \right\rangle = 0$. Ainsi

$$\left\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \right\rangle_{\sigma S} = \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v - v'|)({}^{\perp}\overline{v}, 0) f(x, v')\, \mathrm{d}v' \right\rangle.$$

En appliquant à présent la proposition 4.20 avec $\tilde{D} = \sigma$, $\tilde{D}' = 0$ on obtient

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|) f(x,v') \overline{v} \, \mathrm{d}v' \right\rangle = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \, r \cos\psi \frac{{}^{\perp}z}{|z|} \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2',$$

et enfin

$$\begin{aligned} \left\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \right\rangle_{\sigma S} &= -\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \, r \cos\psi \frac{(z,0)}{|z|} \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \\ &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{r^2 - rr' \cos\varphi}{|z|^2} (z,0) \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

4. Comme précédemment, la proposition 4.21 nous donne

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|) f(x,v') \frac{(v-v') \otimes (v-v')}{|v-v'|^2} ({}^{\perp}\overline{v'}, 0) \, \mathrm{d}v' \right\rangle = 0,$$

et par la proposition 4.20 on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|) f(x,v') \overline{v'} \, \mathrm{d}v' \right\rangle &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \, (r\cos\psi + |z|) \frac{{}^{\perp}z}{|z|} \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \\ &= \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \, \frac{(r')^2 - rr' \cos\varphi}{|z|^2} \, {}^{\perp}z \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\left\langle f, ({}^{\perp}\overline{v'}, 0) \right\rangle_{\sigma S} = -\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{(r')^2 - rr' \cos\varphi}{|z|^2} \, (z,0) \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'.$$

■

La dernière moyenne dont nous aurons besoin est

$$\langle f \rangle_{\sigma S} = \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v') \sigma(|v-v'|) S(v-v') \, \mathrm{d}v' \right\rangle.$$

Des calculs similaires à ceux effectués dans les preuves des propositions 4.2 et 4.19 nous conduisent à la proposition suivante, dont les détails de la preuve sont en annexe A.

Proposition 4.23

Pour toute fonction $f \in \ker \mathcal{T}$ on a

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\sigma S} = &\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma \left(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \right) f(\overline{x'}, x_3, v') \\ &\times \chi(|\overline{v}|, |\overline{v'}|, z) S\left(({}^{\perp}z, v_3' - v_3) \right) \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'. \end{aligned}$$

4.3.3 Calcul de la moyenne de Q_{FPL}

Ces calculs préliminaires effectués, nous pouvons à présent déterminer la moyenne du noyau Fokker–Planck–Landau. Pour des raisons de clarté nous allons encore traiter séparément les parties gain et perte du noyau. Rappelons que la partie gain du noyau de Fokker–Planck–Landau apparaît comme une diffusion de la vitesse, où la matrice de diffusion est une convolution en vitesse :

$$Q^+_{FPL}(f,f) = \mathrm{div}_v \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|) S(v-v') f(v') \, \mathrm{d}v' \, \nabla_v f(v) \right\}.$$

Le noyau de Fokker–Planck–Landau moyenné va garder la même structure. Cependant nous devrons considérer la diffusion et la convolution à la fois en vitesse et dans les directions perpendiculaires en espace, comme nous l'avons déjà observé dans le cas du noyau de relaxation, et comme nous l'avons expliqué dans la remarque 4.4. La preuve est donnée dans l'annexe B.

Proposition 4.24

Pour toute fonction $f = f(x,v)$ satisfaisant la contraine $\mathcal{T} f = 0$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle Q^+_{FPL}(f,f) \right\rangle =& \mathrm{div}_{\omega_c x, v} \{ \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \,) f(x_1', x_2', x_3, v') \\ & \times \chi(|\overline{v}|, |\overline{v'}|, z) A^+ \nabla_{\omega_c x, v} f(x,v) \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \} \end{aligned} \tag{4.34}$$

avec $\mathrm{div}_{\omega_c x} = \frac{1}{\omega_c} \mathrm{div}_x$, $\nabla_{\omega_c x} = \frac{1}{\omega_c} \nabla_x$ et

$$\begin{aligned} A^+(r, v_3, r', v_3', z) =& \frac{(r')^2 \sin^2\varphi \, (v_3 - v_3')^2}{|z|^2 [|z|^2 + (v_3 - v_3')^2]} \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{(^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right)^{\otimes 2} \\ & + \left[\frac{r - r' \cos\varphi}{|z|} \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{(^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) + \left(\frac{(^\perp z, 0)}{|z|}, 0 \right) \right]^{\otimes 2} \\ & + \frac{(r')^2 \sin^2\varphi}{|z|^2} \left(\frac{(^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, - \frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right)^{\otimes 2} \\ & + \left[\frac{(r' \cos\varphi - r)(v_3 - v_3')}{|z| \sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \left(\frac{(^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, - \frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\left((v_3 - v_3') \frac{(z,0)}{|z|}, -|z| e_3 \right)}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \right]^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

où $z = (\omega_c \overline{x} + {}^\perp \overline{v}) - (\omega_c \overline{x}' + {}^\perp \overline{v}')$ et pour tout $r, r' \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{R}^2$ tels que $|r - r'| < |z| < r + r'$, l'angle $\varphi \in]0, \pi[$ est donné par $|z|^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\varphi$.

Remarque 4.25. *Il est évident que A^+ est symétrique et positif. Notons également que les vecteurs $(e_3,0)$ et $\big((z,0),(-^\perp z, v_3-v_3')\big)$ sont orthogonaux sur*

$$\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right),\ \left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right),\ \left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right),\ \frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}$$

ce qui signifie que

$$A^+(e_3,0)=A^+(\ (z,0),(-^\perp z,v_3-v_3')\ )=0.$$

En réalité, pour tout $z\neq 0$ on a

$$\ker A^+(r,v_3,r',v_3',z)=\mathrm{vect}\{(e_3,0),\ \ (\ (z,0),(-^\perp z,v_3-v_3')\ )\}.$$

Un résultat similaire peut être démontré pour la partie perte Q^-_{FPL}, dont la démonstration se trouve dans l'annexe B.

Proposition 4.26

Pour toute fonction $f=f(x,v)$ satisfaisant la contrainte $\mathcal{T}f=0$ on a

$$\begin{aligned}\big\langle Q^-_{FPL}(f,f)\big\rangle &= \mathrm{div}_{\omega_c x,v}\{\omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sigma(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\ )f(x,v)\ \chi(|\overline{v}|,|\overline{v'}|,z)\\ &\quad\times A^-\nabla_{\omega_c x',v'}f(x_1',x_2',x_3,v')\ \mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\}\end{aligned}\tag{4.35}$$

avec

$$\begin{aligned}A^-(r,v_3,r',v_3',z)&=\frac{rr'\sin^2\varphi(v_3-v_3')^2}{|z|^2[|z|^2+(v_3-v_3')^2]}\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},\frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&+\left[\frac{r-r'\cos\varphi}{|z|}\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)+\left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right)\right]\\
&\otimes\left[\frac{r\cos\varphi-r'}{|z|}\left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},\frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)+\left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right)\right]\\
&+\frac{rr'\sin^2\varphi}{|z|^2}\left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\left(\frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&+\left[\frac{(r'\cos\varphi-r)(v_3-v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)+\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\right]\\
&\otimes\left[\frac{(r'-r\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\left(\frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)+\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\right]\end{aligned}$$

où $z=(\omega_c\overline{x}+{}^\perp\overline{v})-(\omega_c\overline{x}'+{}^\perp\overline{v}')$ et pour tout $r,r'\in\mathbb{R}_+$,$z\in\mathbb{R}^2$ tel que $|r-r'|<|z|<r+r'$, l'angle $\varphi\in]0,\pi[$ est donné par $|z|^2=r^2+(r')^2-2rr'\cos\varphi$.

Pour tout $\overline{x} = (x_1, x_2), \overline{x'} = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$, $v, v' \in \mathbb{R}^3$, on introduit les champs

$$\xi^1(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') = \{\sigma\chi\}^{1/2} \frac{r' \sin\varphi\ (v_3 - v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right), \tag{4.36}$$

$$\xi^2(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') = \{\sigma\chi\}^{1/2} \left[\frac{r - r'\cos\varphi}{|z|} \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) + \left(\frac{({}^{\perp}z, 0)}{|z|}, 0 \right) \right], \tag{4.37}$$

$$\xi^3(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') = \{\sigma\chi\}^{1/2} \frac{r' \sin\varphi}{|z|} \left(\frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right), \tag{4.38}$$

$$\frac{\xi^4(\overline{x}, v, \overline{x'}, v')}{\{\sigma\chi\}^{1/2}} = \frac{(r'\cos\varphi - r)(v_3 - v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \left(\frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) + \frac{\left((v_3 - v_3') \frac{(z,0)}{|z|}, -|z| e_3 \right)}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}}, \tag{4.39}$$

où $r = |\overline{v}|$, $r' = |\overline{v'}|$, $z = (\omega_c \overline{x} + {}^{\perp}\overline{v}) - (\omega_c \overline{x}' + {}^{\perp}\overline{v}')$, $\sigma = \sigma\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}$, $\chi = \chi(r, r', z)$ et $\varphi \in]0, \pi[$ est donné par $|z|^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi$, $|r - r'| < |z| < r + r'$. Les propositions 4.24 et 4.26 nous permettent d'obtenir la formule de représentation suivante.

Proposition 4.27

Soit une fonction $f = f(x, v)$ satisfaisant la contrainte $\mathcal{T} f = 0$. Alors l'opérateur Fokker–Planck–Landau moyenné s'écrit

$$\begin{aligned} \omega_c^{-2} \langle Q_{FPL}(f, f) \rangle (x, v) = \operatorname{div}_{\omega_c x, v} \Bigg\{ & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{4} f(\overline{x'}, x_3, v') \xi^i(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') \\ & \otimes \xi^i(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') \nabla_{\omega_c x, v} f(x, v)\ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \Bigg\} \\ - \operatorname{div}_{\omega_c x, v} \Bigg\{ & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{4} f(x, v) \xi^i(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') \\ & \otimes \varepsilon_i \xi^i(\overline{x'}, v', \overline{x}, v) \nabla_{\omega_c x', v'} f(\overline{x'}, x_3, v')\ \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$.

Preuve.

La proposition 4.24 nous apprend que

$$\omega_c^{-2}\left\langle Q_{FPL}^{+}(f,f)\right\rangle(x,v)= \tag{4.41}$$
$$\operatorname{div}_{\omega_c x,v}\left\{\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{4} f(\overline{x'},x_3,v')(\xi^i)^{\otimes 2}(\overline{x},v,\overline{x'},v')\nabla_{\omega_c x,v}f(x,v)\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\right\}.$$

Remarquons que $\chi(r',r,-z)=\chi(r,r',z)$. Ainsi la permutation $(\overline{x},v)\longleftrightarrow(\overline{x'},v')$ mène à

$$\begin{aligned}
\xi^1(\overline{x'},v',\overline{x},v) &= \{\sigma\chi\}^{1/2}\frac{r\sin\varphi\,(v_3'-v_3)}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},\frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right),\\
\xi^2(\overline{x'},v',\overline{x},v) &= \{\sigma\chi\}^{1/2}\left[\frac{r'-r\cos\varphi}{|z|}\left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},\frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)-\left(\frac{({}^{\perp}z,0)}{|z|},0\right)\right],\\
\xi^3(\overline{x'},v',\overline{x},v) &= \{\sigma\chi\}^{1/2}\frac{r\sin\varphi}{|z|}\left(\frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right),\\
\frac{\xi^4(\overline{x'},v',\overline{x},v)}{\{\sigma\chi\}^{1/2}} &= \frac{(r\cos\varphi-r')(v_3'-v_3)}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\left(\frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&\qquad+\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}},
\end{aligned}$$

où $z=(\omega_c\overline{x}+{}^{\perp}\overline{v})-(\omega_c\overline{x}'+{}^{\perp}\overline{v}')$. La proposition 4.26 nous donne

$$\begin{aligned}
\omega_c^{-2}\left\langle Q_{FPL}^{-}(f,f)\right\rangle(x,v) =&\operatorname{div}_{\omega_c x,v}\left\{\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{4} f(x,v)\xi^i(\overline{x},v,\overline{x'},v')\right. \qquad (4.42)\\
&\left.\otimes\,\varepsilon_i\xi^i(\overline{x'},v',\overline{x},v)\nabla_{\omega_c x',v'}f(\overline{x'},x_3,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\right\}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en combinant (4.41) et (4.42).

■

Proposition 4.28

Soit une fonction $f = f(x,v)$ satisfaisant la contrainte $\mathcal{T}f = 0$. Alors les propriétés suivantes sont vraies pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\,(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} v\,\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\,(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v|^2}{2}\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\,(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\ln f\,\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\,(x,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \leq 0.$$

Preuve.

La conservation de la masse, la troisième composante de la quantité de mouvement, c'est-à-dire dans la direction parallèle v_3, et l'énergie cinétique pour l'opérateur moyenné de Fokker–Planck–Landau viennent des propriétés correspondantes du noyau de Fokker–Planck–Landau . En fait, comme $1, v_3, \frac{|v|^2}{2}$ appartiennent au noyau de $\mathcal{T}$, la remarque 3.14 nous permet d'écrire pour tout x_3,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(1, v_3, \frac{|v|^2}{2}\right)\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(1, v_3, \frac{|v|^2}{2}\right)Q_{FPL}(f,f)\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= (0,0,0).\end{aligned}$$

De la même façon, comme $\ln f \in \ker\mathcal{T}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\ln f\,\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\ln f\;Q_{FPL}(f,f)\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \qquad (4.43)\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\sigma(|v-v'|)f(x,v)f(x,v')\\ &\times\frac{|(v-v')\wedge(\nabla_v\ln f-\nabla_{v'}\ln f)|^2}{|v-v'|^2}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Pour conclure, observons que $\langle v_1\rangle = \langle v_2\rangle = 0$, $\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle \in \ker\mathcal{T}$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}(v_1,v_2)\,\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = (0,0).$$

■

On établit à présent formellement le modèle limite pour ce noyau, dont nous attendons que la moyenne soit

$$\begin{aligned}\langle Q_{FPL}\rangle(f,f) : &= \langle Q_{FPL}(f,f)\rangle(x,v)\\ &= \operatorname{div}_{\omega_c x,v}\left\{\omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sigma\chi f(\overline{x'},x_3,v')A^+\nabla_{\omega_c x,v}f(x,v)\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\right\}\\ &- \operatorname{div}_{\omega_c x,v}\left\{\omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sigma\chi f(x,v)A^-\nabla_{\omega_c x',v'}f(\overline{x'},x_3,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\right\}\end{aligned} \tag{4.44}$$

avec $z=\omega_c\overline{x}+{}^\perp\overline{v}-(\omega_c\overline{x'}+{}^\perp\overline{v'})$, $\sigma=\sigma(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\,)$, $\chi=\chi(|\overline{v}|,|\overline{v'}|,z)$ et

$$\sigma\chi A^+(r,v_3,r',v_3',z)=\sum_{i=1}^4\xi^i(\overline{x},v,\overline{x'},v')\otimes\xi^i(\overline{x},v,\overline{x'},v')$$

$$\sigma\chi A^-(r,v_3,r',v_3',z)=\sum_{i=1}^4\varepsilon_i\xi^i(\overline{x},v,\overline{x'},v')\otimes\xi^i(\overline{x'},v',\overline{x},v)$$

où les champs de vecteurs $(\xi^i)_{1\le i\le 4}$ on été introduits dans (4.36)-(4.37)-(4.38)-(4.39).

Théorème 4.29

Soit $f^{\mathrm{in}}\ge 0$, $(1+|\ln f^{\mathrm{in}}|)f^{\mathrm{in}}\in L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$. Notons f^ε la solution de (4.14)-(4.15) avec $Q=Q_{FPL}$ pour tout $\varepsilon>0$. Alors la limite $f=\lim_{\varepsilon\searrow 0}f^\varepsilon$ satisfait

$$\partial_t f+\frac{\left\langle{}^\perp\overline{E}\right\rangle}{B}\cdot\nabla_{\overline{x}}f+v_3\partial_{x_3}f+\frac{q}{m}\langle E_3\rangle\partial_{v_3}f=\langle Q_{FPL}\rangle(f,f), \qquad (t,x,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \tag{4.45}$$

$$f(0,x,v)=\left\langle f^{\mathrm{in}}\right\rangle(x,v),\quad (x,v)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \tag{4.46}$$

où l'opérateur moyenné de Fokker–Planck–Landau est donné par (4.44).

Preuve.

Si on injecte la décomposition $f^\varepsilon=f+\varepsilon f^1+\varepsilon^2 f^2+\ldots$ dans l'équation (4.30), on obtient

$$\left(\partial_t+v_3\partial_{x_3}+\frac{q}{m}E\cdot\nabla_v+\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{T}\right)(f+\varepsilon f^1+\ldots)=Q_{FPL}(f,f) + \varepsilon(Q_{FPL}(f,f^1)+Q_{FPL}(f^1,f))+\ldots$$

ce qui implique que

$$\mathcal{T}f=0,\quad \partial_t f+v_3\partial_{x_3}f+\frac{q}{m}E\cdot\nabla_v f+\mathcal{T}f^1=Q_{FPL}(f,f).$$

Si on applique l'opérateur de moyenne, alors les propositions 3.21 et 4.27 donnent que f satisfait

$$\partial_t f + \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B} \cdot \nabla_{\overline{x}} f + v_3 \partial_{x_3} f + \frac{q}{m} \langle E_3 \rangle \, \partial_{v_3} f = \langle Q_{FPL} \rangle \, (f, f).$$

■

Comme pour l'opérateur de relaxation de Boltzmann, nous cherchons à étendre l'opérateur moyenné de Fokker–Planck–Landau à l'espace entier des densités $f = f(x, v)$, et non plus seulement celles dans le noyau de $\mathcal{T}$. Une possibilité est de considérer l'extension $\langle Q_{FPL} \rangle$ obtenue par l'équation (4.40), c'est-à-dire que pour tout f

$$\begin{aligned}\omega_c^{-2} \langle Q_{FPL} \rangle \, (f, f) =& \operatorname{div}_{\omega_c x, v} \Bigg\{ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{4} f(\overline{x'}, x_3, v') \xi^i(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') \\ & \otimes \xi^i(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') \nabla_{\omega_c x, v} f(x, v) \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \Bigg\} \\ & - \operatorname{div}_{\omega_c x, v} \Bigg\{ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{4} f(x, v) \xi^i(\overline{x}, v, \overline{x'}, v') \\ & \otimes \varepsilon_i \xi^i(\overline{x'}, v', \overline{x}, v) \nabla_{\omega_c x', v'} f(\overline{x'}, x_3, v') \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Cette extension satisfait alors toujours les conservations de la masse, de la quantité de mouvement dans la direction parallèle et de l'énergie cinétique. De plus, il diminue l'entropie $f \ln f$ globalement en $(\overline{x}, v)$.

Proposition 4.30

Considérons deux fonctions $f = f(x, v)$, $\varphi = \varphi(x, v)$. Pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle Q_{FPL} \rangle \, (f, f) \varphi \, \mathrm{d}v \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = -\frac{\omega_c^2}{2} \sum_{i=1}^{4} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} f f' \\ \times (\xi^i \cdot \nabla \ln f - \varepsilon_i (\xi^i)' \nabla' \ln f') (\xi^i \cdot \nabla \varphi - \varepsilon_i (\xi^i)' \nabla' \varphi') \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \, \mathrm{d}v \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{4.48}$$

où

$$\begin{gathered} f = f(x, v), \; f' = f'(x_1', x_2', x_3, v'), \\ \nabla \varphi = \nabla_{\omega_c x, v} \varphi(x, v), \; \nabla' \varphi' = \nabla_{\omega_c x', v'} \varphi(x_1', x_2', x_3, v') \\ \xi^i = \xi^i(x_1, x_2, v, x_1', x_2', v'), \quad (\xi^i)' = \xi^i(x_1', x_2', v', x_1, x_2, v). \end{gathered}$$

En particulier, l'opérateur Fokker–Planck–Landau moyenné satisfait les conservation de la masse, de la quantité de mouvement dans la direction parallèle et de l'énergie (globalement en (x_1, x_2, v))

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(1, v_3, \frac{|v|^2}{2}\right)\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = (0,0,0)$$

et diminue l'entropie $f\ln f$ (globalement en (x_1, x_2, v))

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\ln f\,\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \le 0.$$

Preuve.

Pour tout $1 \le i \le 4$ on a $\xi^i \cdot (e_3, 0) = 0$ et ainsi l'opérateur $\mathrm{div}_{\omega_c x, v}$ agit seulement sur (x_1, x_2, v). Donc, pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$ fixé, on peut réaliser l'intégration par parties par rapport à (x_1, x_2, v) :

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\sum_{i=1}^{4}\omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} ff' \tag{4.49}$$
$$\times\left\{(\xi^i\cdot\nabla\varphi)(\xi^i\cdot\nabla\ln f) - \varepsilon_i(\xi^i\cdot\nabla\varphi)((\xi^i)'\cdot\nabla'\ln f')\right\}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

On réalise le changement de variables $(x_1', x_2', v') \leftrightarrow (x_1, x_2, v)$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\sum_{i=1}^{4}\omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} ff' \tag{4.50}$$
$$\times\left\{((\xi^i)'\cdot\nabla'\varphi')((\xi^i)'\cdot\nabla'\ln f') - \varepsilon_i((\xi^i)'\cdot\nabla'\varphi')(\xi^i\cdot\nabla\ln f)\right\}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.$$

En combinant (4.49), (4.50) le théorème de Fubini nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\langle Q_{FPL}\rangle(f,f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\frac{\omega_c^2}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} ff'T^i\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

où

$$T^i = \left(\xi^i\cdot\nabla\varphi - \varepsilon_i(\xi^i)'\cdot\nabla'\varphi'\right)\,\left(\xi^i\cdot\nabla\ln f - \varepsilon_i(\xi^i)'\cdot\nabla'\ln f'\right),\quad 1\le i\le 4.$$

La forme de divergence de $\langle Q_{FPL}\rangle$ garantit la conservation de la masse, et (4.48) appliquée à $\varphi = \ln f$ assure que l'entropie $f\ln f$ diminue.

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\ln f\,\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\frac{\omega_c^2}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} ff'$$
$$\times\left(\xi^i\cdot\nabla\ln f - \varepsilon_i(\xi^i)'\cdot\nabla'\ln f'\right)^2\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \le 0,\ x_3\in\mathbb{R}.$$

Il reste à montrer la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement dans la direction parallèle. Avec la formule (4.48), il suffit de vérifier que

$$\xi^i \cdot \nabla \frac{|v|^2}{2} - \varepsilon_i (\xi^i)' \cdot \nabla' \frac{|v'|^2}{2} = 0, \;\; 1 \leq i \leq 4.$$

La condition ci-dessus est satisfaite trivialement pour $i \in \{1,2\}$. Pour $i = 3$, on a

$$\xi^3 \cdot \nabla \frac{|v|^2}{2} - \varepsilon_3 (\xi^3)' \cdot \nabla' \frac{|v'|^2}{2} = -\{\sigma\chi\}^{1/2} \frac{r' \sin\varphi}{|z|} r + \{\sigma\chi\}^{1/2} \frac{r \sin\varphi}{|z|} r' = 0.$$

Enfin, quand $i = 4$ on a

$$\begin{aligned}
&\xi^4 \cdot \nabla \frac{|v|^2}{2} - \varepsilon_4 (\xi^4)' \cdot \nabla' \frac{|v'|^2}{2} \\
&\quad = \{\sigma\chi\}^{1/2} \left\{ - \frac{(r'\cos\varphi - r)(v_3 - v_3')r + |z|^2 v_3}{|z| \sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} + \frac{(r\cos\varphi - r')(v_3' - v_3)r' + |z|^2 v_3'}{|z| \sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \right\} \\
&\quad = \{\sigma\chi\}^{1/2} \frac{v_3 - v_3'}{|z| \sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \left[r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi - |z|^2 \right] \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

On remarque également que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$ on a

$$\xi^i \cdot \nabla v_3 - \varepsilon_i (\xi^i)' \cdot \nabla' v_3' = 0,$$

ce qui signifie que $\langle Q_{FPL} \rangle$ satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} v_3 \langle Q_{FPL} \rangle (f,f) \, \mathrm{d}v \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = 0.$$

■

Remarque 4.31. *La formule* (4.48) *nous permet de déduire que les fonctions régulières positives f qui satisfont $\langle Q_{FPL} \rangle (f,f) = 0$ sont celles qui satisfont*

$$\xi^i \cdot \nabla \ln f - \varepsilon_i (\xi^i)' \cdot \nabla' \ln f' = 0, \;\; i \in \{1,2,3,4\}. \tag{4.51}$$

En particulier (4.51) *est vraie pour toute Maxwellienne f qui appartient à* $\ker \mathcal{T}$ *comme dans ce cas*

$$\langle Q_{FPL} \rangle (f,f) = \langle Q_{FPL}(f,f) \rangle = \langle 0 \rangle = 0.$$

On en déduit que

$$\xi^i \cdot \nabla \varphi - \varepsilon_i (\xi^i)' \cdot \nabla' \varphi' = 0, \;\; i \in \{1,2,3,4\} \tag{4.52}$$

pour toute fonction $\varphi(x,v) = \alpha(x)|v|^2 + \beta(x) \cdot v + \gamma(x)$ qui satisfait $\mathcal{T}\varphi = 0$. En particulier ceci est vrai pour les fonctions

$$x_1 + \frac{v_2}{\omega_c}, \; x_2 - \frac{v_1}{\omega_c}, \; x_3, \; v_3, \; |\overline{x}|^2 + 2\overline{x} \cdot \frac{{}^\perp\overline{v}}{\omega_c} = \left| \overline{x} + \frac{{}^\perp\overline{v}}{\omega_c} \right|^2 - \frac{|\overline{v}|^2}{\omega_c^2}.$$

On peut remarquer que $\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}$ *est le centre du cercle obtenu en projetant le cercle de Larmor* $\mathscr{C}_{x,v}$ *sur* (x_1', x_2') *et* $|\overline{x}|^2 + 2\overline{x} \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}$ *est la puissance de l'origine* $(0,0)$ *par rapport au même cercle. On obtient, par les équations* (4.48) *et* (4.52) *les conservations*

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right)\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = (0,0)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\overline{x}|^2 + 2\overline{x}\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right)\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0,$$

pour toute fonction régulière f.

Les identités précédentes nous permettent d'établir les conservations de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie totale, du centre et de la puissance du cercle de Larmor pour des solutions régulières de (4.45)-(4.46) couplée avec l'équation de Poisson pour le champ électrique :

$$E = -\nabla_x\varphi,\ \ \varepsilon_0\,\mathrm{div}_x E(t,x) = q\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v =: \rho(t,x),\ \ (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3. \tag{4.53}$$

Théorème 4.32

Supposons que (f,E) est une solution régulière de

$$\partial_t f + \frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\cdot\nabla_{\overline{x}} f + v_3\partial_{x_3} f + \frac{q}{m}\langle E_3\rangle\,\partial_{v_3} f = \langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f),\ \ \mathcal{T}f = 0,$$
$$(t,x,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$$

$$\varepsilon_0\,\mathrm{div}_x E(t,x) = q\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v,\ \ E = -\nabla_x\phi,\ \ (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3.$$

Alors on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0,\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\overline{x}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0,\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} vf\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|E|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} m\frac{|v|^2}{2}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right\} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|\overline{x}|^2}{2} + \overline{x}\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right) f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

Preuve.

La conservation de la masse vient par la formulation conservative de l'équation de Vlasov qui s'écrit

$$\partial_t f + \mathrm{div}_{\overline{x}}\left\{f\frac{\left\langle {}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\right\} + \partial_{x_3}\{fv_3\} + \frac{q}{m}\partial_{v_3}\{f\langle E_3\rangle\} = \langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f). \tag{4.54}$$

Si on multiplie (4.54) par v et qu'on intègre par rapport à (x, v) on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} vf \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{q}{m}f\,\langle E_3\rangle\, e_3\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0,$$

car pour les fonctions de $\ker\mathcal{T}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} v\,\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} v\,\langle Q_{FPL}(f,f)\rangle\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\langle v\rangle\, Q_{FPL}(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(0,0,v_3)Q_{FPL}(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ &= 0.\end{aligned}$$

En utilisant l'équation de Poisson et l'identité

$$\mathrm{div}_x E\; E = \mathrm{div}_x(E\otimes E) - \frac{1}{2},\nabla_x|E|^2 \tag{4.55}$$

on obtient, en prenant en compte que $f\in\ker\mathcal{T}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{q}{m}f\,\langle E_3\rangle\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x &= \frac{q}{m}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} fE_3\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon_0}{m}\int_{\mathbb{R}^3} E_3\,\mathrm{div}_x E\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\varepsilon_0}{m}\int_{\mathbb{R}^3}\left\{\mathrm{div}_x(E_3E) - \frac{1}{2}\partial_{x_3}|E|^2\right\}\,\mathrm{d}x\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} vf\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

En multipliant (4.54) par $\frac{m|v|^2}{2}$ et en intégrant par rapport à (x, v) on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{m|v|^2}{2}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} qfv_3\,\langle E_3\rangle\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

Par l'équation de continuité

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}v + \mathrm{div}_{\overline{x}}\int_{\mathbb{R}^3} f\frac{\left\langle{}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\,\mathrm{d}v + \partial_{x_3}\int_{\mathbb{R}^3} fv_3\,\mathrm{d}v = 0$$

on a

$$\begin{aligned}-q\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} fv_3\,\langle E_3\rangle\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x &= -q\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} fv_3E_3\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = q\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} fv_3\partial_{x_3}\phi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ &= -q\int_{\mathbb{R}^3}\phi\,\partial_{x_3}\int_{\mathbb{R}^3} fv_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\phi\left\{\partial_t\rho + q\,\mathrm{div}_{\overline{x}}\int_{\mathbb{R}^3} f\frac{\left\langle{}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\,\mathrm{d}v\right\}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\phi\,\partial_t(\varepsilon_0\mathrm{div}_x E)\,\mathrm{d}x - q\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_x\phi\cdot\frac{\left\langle{}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_x\phi\cdot\partial_t(\varepsilon_0E)\,\mathrm{d}x + q\int_{\mathbb{R}^3}\langle E\rangle\cdot\frac{\left\langle{}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}f\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|E|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|E|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}m\frac{|v|^2}{2}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right\}=0.$$

La remarque 4.31 nous indique que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\overline{x}\,\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right)\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\,\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\&=0\end{aligned}$$

et ainsi, en multipliant (4.54) par $\overline{x}$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\overline{x}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\frac{\left\langle{}^{\perp}\overline{E}\right\rangle}{B}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x=0.$$

L'équation de Poisson nous donne

$$\begin{aligned}q\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\left\langle\overline{E}\right\rangle\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x&=q\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\overline{E}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x=\int\rho\overline{E}=\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{div}_x E\overline{E}\,\mathrm{d}x\\&=\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{div}_x(\overline{E}\otimes E)-\frac{1}{2}\nabla_{\overline{x}}|E|^2\right)\,\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

et de cette façon $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\overline{x}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x=0$. En particulier le centre moyen du cercle de Larmor est laissé invariant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x}\right\}=0.$$

La remarque 4.31 nous indique que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\omega_c^2|\overline{x}|^2+2\omega_c\overline{x}\cdot{}^{\perp}\overline{v}\right)\langle Q_{FPL}\rangle\,(f,f)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x=0$$

et pour tout $\psi(x)\in C_c^1(\mathbb{R}^3)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\psi(x)\,\mathrm{div}_{\overline{x}}\int_{\mathbb{R}^3}f\overline{v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x&=-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\,\overline{v}\cdot\nabla_{\overline{x}}\psi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}f\,\mathcal{T}\psi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\psi\,\mathcal{T}f\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\mathrm{div}_{\overline{x}} \int_{\mathbb{R}^3} f\overline{v}\, \mathrm{d}v = 0$. Ainsi on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|\overline{x}|^2}{2}+\overline{x}\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right) f\, \mathrm{d}v\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f\frac{\langle {}^{\perp}\overline{E}\rangle}{B}\cdot\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right)\, \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f\frac{{}^{\perp}\overline{E}}{B}\cdot\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}\right)\, \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f\frac{\overline{E}}{B}\cdot {}^{\perp}\overline{x}\, \mathrm{d}v\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi(x)}{B\omega_c}\mathrm{div}_{\overline{x}}\int_{\mathbb{R}^3} f\overline{v}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{qB}\int_{\mathbb{R}^3} {}^{\perp}\overline{x}\cdot\overline{E}\, \mathrm{div}_x E\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{qB}\int_{\mathbb{R}^3} {}^{\perp}\overline{x}\cdot\left(\mathrm{div}_x(\overline{E}\otimes E)-\frac{1}{2}\nabla_{\overline{x}}|E|^2\right)\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{qB}\int_{\mathbb{R}^3}\left\{x_2\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}(E_1E_j)-x_1\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}(E_2E_j)\right\}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\varepsilon_0}{qB}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{3}\left\{\frac{\partial x_2}{\partial x_j}E_1E_j-\frac{\partial x_1}{\partial x_j}E_2E_j\right\}\, \mathrm{d}x \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que la moyenne de la puissance du cercle de Larmor (par rapport à l'origine) est laissée invariante.

■

4.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous nous sommes placés dans le cas du régime du rayon de Larmor fini, et nous avons cherché à dériver le modèle lorsque les collisions sont prises en compte. Nous y avons réalisé différentes études, qui correspondent à différents noyaux de collisions. Après avoir calculé la gyromoyenne de l'opérateur de relaxation de Boltzmann, afin de comprendre comment calculer la moyenne d'une convolution, et la moyenne de l'opérateur de Fokker–Planck, nous nous sommes intéressés à l'opérateur de Fokker–Planck–Landau. L'opérateur de Fokker–Planck–Landau joue un rôle majeur en physique des plasmas. Nous avons montré que lorsqu'on le moyenne, le nouveau opérateur de collision conserve les propriétés physiques usuelles. La moyenne permet donc de conserver la masse, la quantité de mouvement dans la direction parallèle et l'énergie. On retrouve également une dissipation de l'entropie. Le noyau de Fokker–Planck–Landau moyenné garde la même structure que le noyau non moyenné. Cependant nous avons du considérer la diffusion et la convolution à la fois en vitesse et dans les directions perpendiculaires en espace. Ces résultats sont cohérents avec les résultats expérimentaux connus aujourd'hui. Nous avons aussi démontré un théorème de H.

Nous avons ainsi réalisé des calculs exacts d'opérateurs moyennés. Il est alors possible, à l'aide du théorème de H de caractériser les équilibres de Q_{FPL}, et voir

si les linéarisations à partir d'une Maxwellienne qui sont réalisées aujourd'hui sont réalistes, et si non, d'évaluer l'erreur commise.

À partir de là, il sera possible d'apporter une caractérisation complète de l'équilibre gyrocinétique. On pourrait alors envisager la construction de nouveaux modèles gyro-fluides. Des simulations numériques prenant en compte ces noyaux de collisions sont à envisager.

chapitre 5

Simulations numériques par des schémas micro-macro

Comme dans le chapitre 3 à la section 3.3 et avec les notations déjà utilisées précédemment, nous étudions l'équation de Vlasov sous la forme

$$\varepsilon\partial_t f^\varepsilon + \left(v\cdot\nabla_x + \frac{q}{m}E(x)\cdot\nabla_v\right) f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon}\,{}^\perp v\cdot\nabla_v f^\varepsilon = 0,\quad (t,x,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \tag{5.1}$$

où $\omega_c = qB/m$, et $B^\varepsilon = (0,0,B/\varepsilon)$ avec la condition initiale

$$f^\varepsilon(0,x,v) = f_\varepsilon^{\text{in}}(x,v),\quad (x,v)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2. \tag{5.2}$$

Après avoir calculé les différents champs utilisés, on démontrera dans le théorème 5.6 que la densité limite $f = \lim_{\varepsilon\searrow 0} f^\varepsilon$ satisfait toujours une équation de type Vlasov. Quand ε est très petit, on peut motiver l'approximation de la solution de (5.1)–(5.2) par la solution du modèle limite, qui, nous le verrons dans le théorème 5.6, est donnée par

$$\partial_t f + \left(\frac{{}^\perp E}{B} - \frac{|v|^2}{2\omega_c}\,\frac{{}^\perp\nabla_x B}{B}\right)\cdot\nabla_x f + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^\perp E}{B}\cdot\frac{\nabla_x B}{B}\right) v\cdot\nabla_v f = 0, \qquad (t,x,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \tag{5.3}$$

$$f(0,\cdot,\cdot) = \text{Proj}_{\ker\mathcal{T}} f^{\text{in}}. \tag{5.4}$$

Nous nous servirons pour ceci du fait que le modèle limite ne dépend pas de ε et on peut alors utiliser des schémas numériques standards explicites pour le résoudre. Pour résoudre (5.1)–(5.2) au contraire, il était impossible de recourir à des méthodes explicites à Δt fixé quand ε devient petit, car la contrainte CFL impose que $\Delta t\sim\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

En réalité, remplacer f^ε par f signifie que nous négligeons toutes les corrections d'ordre $\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots$ dans le développement de Hilbert, ce qui n'est pas raisonnable quand on souhaite obtenir des résultats pour les régimes intermédiaires avec $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star$.

Ainsi, nous cherchons à réaliser un schéma numérique qui nous permet de résoudre numériquement (5.1)–(5.2) avec les mêmes paramètres de discrétisation

(c'est-à-dire le même pas de temps, le même maillage en espace des phases, ...) pour toute valeur de ε dans l'intervalle admissible. De tels schémas numériques, qui sont qualifiés de préservant l'asymptotique, ont été introduits pour la simulation numérique de limite de diffusion pour des équations cinétiques dans [54], [55] et [53].

Nous montrerons que notre schéma capture bien le modèle limite, car il dégénère vers une discrétisation consistante avec celle du modèle limite, quand $\varepsilon \searrow 0$. Il est évident que les difficultés principales apparaissent pour des ε petits, et que dans ces cas nous savons que la fonction de densité f^ε tends vers un certain élément de $\ker \mathcal{T}$. De là vient l'idée de séparer notre inconnue f^ε en une partie dominante, qui coïncide avec la projection orthogonale sur le noyau de $\ker \mathcal{T}$ et un petit reste (c'est-à-dire de l'ordre de ε).

En prenant la projection de (5.1) sur $\ker \mathcal{T}$ et son orthogonal, on obtient un système de deux équations pour les nouvelles inconnues indépendantes $g^\varepsilon := \mathrm{Proj}_{\ker \mathcal{T}} f^\varepsilon$, $r^\varepsilon := f^\varepsilon - \mathrm{Proj}_{\ker \mathcal{T}} f^\varepsilon$. Des schémas de ce type, basés sur une décomposition partie dominante/fluctuation ont été étudiés dans les articles [9], [57] et [30]. Une nouvelle formulation, destinée aux modèles collisionnels, par exemple l'équation de Boltzmann pour les gaz raréfiés et l'équation de Landau–Fokker–Planck pour le plasma qui permet d'éviter l'inversion des opérateurs de collision à chaque pas de temps, a été développée dans l'article [56].

Plan du chapitre

5.1 Les outils mathématiques 113
5.1.1 Opérateur de moyenne associé 113
5.1.2 Dérivation du modèle limite 114
5.2 Construction du schéma micro-macro 122
5.3 Calcul analytique du terme d'ordre dominant 127
5.4 Calculs préliminaires aux simulations numériques 131
5.4.1 Passage en coordonnées polaires 131
5.4.2 Calcul de $\left\langle \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}) \right\rangle$ 132
5.4.3 Inversion de $\left(\varepsilon^2 I + \Delta t \mathcal{T}\right)$: advection linéaire avec Fourier 133
Rappel : Les séries de Fourier 133
Utilisation des séries de Fourier : résolution de l'équation d'advection 134
Résolution exacte en temps 134
Résolution approchée en temps 134
5.5 Discrétisation et algorithmes 135
5.5.1 Discrétisation en espace 135
Schéma centré et méthode de Lax-Richtmyer 135
Discretisation des opérateurs calculés en section 5.3 136

5.5.2 Algorithmes . . . 138
Schéma à une étape . . . 138
Schéma à deux étapes . . . 138
5.6 Résultats numériques . . . 139
5.6.1 Validation de l'ordre de notre schéma . . . 139
5.6.2 Validation en limite Vlasov-Poisson : amortissement Landau et instabilité double faisceau . . . 140
Test 1 : Amortissement Landau . . . 141
Test 2 : instabilité double faisceau . . . 142
5.6.3 Résultats numériques en limite centre-guide . . . 143
Comportement asymptotique sur le cas de l'instabilité double faisceau . . . 143
Cas test de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . 145
5.7 Conclusions et perspectives . . . 147

5.1 Les outils mathématiques

5.1.1 Opérateur de moyenne associé

Nous avons développé au chapitre 3 un opérateur de moyenne utile à l'étude de notre modèle. Cet opérateur est appliqué à notre cas précis à la section 3.3 du chapitre 3. On résume ici les points importants de cette section. Dans ce cas on étudie le flot associé à

$$\mathcal{T} f = \mathrm{div}_v(f \omega_c(x)\, {}^{\perp} v).$$

Les caractéristiques du flot sont donc les solutions de

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \omega_c(X(s;x,v))\, {}^{\perp} V(s;x,v), \quad (X,V)(0;x,v) = (x,v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \tag{5.5}$$

Des calculs simples donnent

$$X(s;x,v) = x, \quad V(s;x,v) = \mathcal{R}(-\omega_c s) v, \tag{5.6}$$

où $\mathcal{R}(\theta)$ est la rotation d'angle θ

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $\{\psi_1 = x_1, \psi_2 = x_2, \psi_3 = |v|\}$ est une famille d'invariants indépendants du flot. Les trajectoires sont périodiques, de période $T_c(x) = 2\pi/\omega_c(x)$

pour tout $(x,v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et l'opérateur de moyenne a la forme

$$\begin{aligned} \langle u \rangle (x,v) &= \frac{1}{T_c(x)} \int_0^{T_c(x)} u(X(s;x,v), V(s;x,v))\, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, \mathcal{R}(\alpha)v)\, \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. On a l'inégalité de Poincaré.

Proposition 5.1

On suppose que $\inf_{x\in\mathbb{R}^2} B(x) > 0$.
Alors $\mathcal{T}$ restreint à $\ker \langle\cdot\rangle$ est une bijection sur $\ker \langle\cdot\rangle$. Son inverse, notée $\mathcal{T}^{-1}$, appartient à $\mathcal{L}(\ker \langle\cdot\rangle, \ker \langle\cdot\rangle)$ et on a l'inégalité de Poincaré

$$\|u\| \leq \frac{2\pi}{|\omega_0|} \|\mathcal{T}u\|, \quad \omega_0 = \frac{q}{m} \inf_{x\in\mathbb{R}^2} B(x) \neq 0 \tag{5.7}$$

pour tout $u \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \cap \ker \langle\cdot\rangle$.

5.1.2 Dérivation du modèle limite

Une décomposition de Hilbert formelle $f^\varepsilon = f + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2 + ...$ donne à partir de l'équation (5.1) le système suivant

$$\mathcal{T} f = 0, \tag{5.8}$$

$$a(x,v) \cdot \nabla_{x,v} f + \mathcal{T} f^1 = 0, \tag{5.9}$$

$$\partial_t f + a(x,v) \cdot \nabla_{x,v} f^1 + \mathcal{T} f^2 = 0, \tag{5.10}$$

où $a(x,v) \cdot \nabla_{x,v} = v \cdot \nabla_x + q/mE \cdot \nabla_v$. On étudie le modèle satisfait par la densité dominante f. Pour cela on doit éliminer f^1, f^2 de l'équation (5.10). La contrainte (5.8) dit qu'à tout temps t la fonction $f(t)$ dépend uniquement des invariants x_1, x_2, $|v|$

$$\exists\, g = g(t,x,r) \ \text{ tel que } f(t,x,v) = g(t,x,r = |v|).$$

Pour de telles densités on a alors

$$\langle a \cdot \nabla_{x,v} f \rangle = \langle v \rangle \cdot \nabla_x g(t,x,|v|) + \frac{q}{m} E(x) \cdot \frac{\langle v \rangle}{|v|} \partial_r g(t,x,|v|) = 0 \tag{5.11}$$

car $\langle v \rangle = 0$. Dans ce cas la contrainte (5.9) s'écrit

$$\mathcal{T}(f^1 - \left\langle f^1 \right\rangle) = -a(x,v) \cdot \nabla_{x,v} f$$

et ainsi

$$f^1 - \left\langle f^1 \right\rangle = -\mathcal{T}^{-1}(a(x,v)\cdot\nabla_{x,v} f). \tag{5.12}$$

Nous allons construire un champ de vecteur régulier de divergence nulle $\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v}$ qui satisfait $a\cdot\nabla_{x,v} = [\mathcal{T}, \mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v}]$ et qui est une application de $\mathrm{D}(\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v})\cap\ker\mathcal{T}$ dans le sous espace des fonctions de moyenne nulle. Supposons pour le moment qu'un tel champ de vecteur existe, et voyons comment nous pouvons l'utiliser.

Proposition 5.2

Pour toute fonction $f \in \mathrm{D}(a\cdot\nabla_{x,v})\cap\mathrm{D}(\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v})\cap\ker\mathcal{T}$ on a

$$\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \text{ et } \mathcal{T}^{-1}(a\cdot\nabla_{x,v} f) = \mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f.$$

Preuve.

Considérons une suite de fonctions régulières $(f_n)_n$ telle que les convergences suivantes aient lieu dans $L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ fortement

$$\lim_{n\to+\infty} a\cdot\nabla_{x,v} f_n = a\cdot\nabla_{x,v} f,\quad \lim_{n\to+\infty}\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f_n = \mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f,\quad \lim_{n\to+\infty}\mathcal{T} f_n = 0.$$

Par la définition du champ de vecteurs $\mathcal{B}$ on a

$$a\cdot\nabla_{x,v} f_n = \mathcal{T}(\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f_n) - \mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{T} f_n).$$

En passant à la limite pour $n\to+\infty$ on déduit que $\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f\in\mathrm{D}(\mathcal{T})$ et que $a\cdot\nabla_{x,v} f = \mathcal{T}(\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f)$. Comme nous savons que $\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v}$ est une application du noyau de $\mathcal{T}$ sur les fonctions de moyenne nulle, on déduit que

$$\mathcal{T}^{-1}(a\cdot\nabla_{x,v} f) = \mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f$$

ce qui signifie que l'unique solution de moyenne nulle de $\mathcal{T}u = a\cdot\nabla_{x,v} f$ est donnée par $u = \mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f$.

■

En combinant l'équation (5.11) avec la proposition 5.2 on montre que la contrainte (5.9) revient à la relation entre la partie de moyenne nulle de la densité f^1 et la densité dominante f

$$f^1 - \left\langle f^1 \right\rangle = -\mathcal{T}^{-1}(a\cdot\nabla_{x,v} f) = -\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v} f. \tag{5.13}$$

À partir de cette équation, on peut éliminer f^1 et f^2 dans (5.10) et on obtient le modèle limite pour f. Rappelons que sous les hypothèses de la propriété 5.1 nous avons

$$\mathrm{Im}\mathcal{T} = \overline{\mathrm{Im}\mathcal{T}} = \ker\langle\cdot\rangle.$$

Ainsi (5.10) est équivalent à $\left\langle \partial_t f + a\cdot\nabla_{x,v} f^1\right\rangle = 0$. En prenant en compte que $\langle\partial_t f\rangle = \partial_t\langle f\rangle = \partial_t f$ et que $\left\langle a\cdot\nabla_{x,v}\left\langle f^1\right\rangle\right\rangle = 0$ (cf. (5.11)) on a

$$\partial_t f + \left\langle a\cdot\nabla_{x,v}\left(f^1 - \left\langle f^1\right\rangle\right)\right\rangle = 0.$$

En utilisant à présent (5.13) on obtient

$$\partial_t f - \langle a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle = 0 \tag{5.14}$$

qui est, au moins dans cette forme, loin d'une équation de type Vlasov comme on souhaite en traiter une, c'est-à-dire de type (5.1).

En réalisant quelques calculs, nous verrons que le terme du second ordre $a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)$ est réduit par calcul de la moyenne à un opérateur du premier ordre et finalement le modèle limite reste une équation de type Vlasov.

Proposition 5.3

Il existe un champ de vecteurs de divergence nulle $\mathcal{C}$ tel que pour toute fonction régulière $f \in \ker \mathcal{T}$

$$-\langle a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle = \mathrm{div}_{x,v}(f\mathcal{C}).$$

Les coordonnées de $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_x, \mathcal{C}_v) \in \mathbb{R}^4$ sont données par

$$\mathcal{C}_x = \langle \mathcal{B}_v \rangle , \quad \mathcal{C}_v = \left\langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} \frac{q}{m} \left(E \cdot \frac{v}{|v|} \right) \right\rangle \frac{v}{|v|}.$$

Preuve.

À l'aide de la formule $a \cdot \nabla_{x,v} = [\mathcal{T}, \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}]$, on a

$$\begin{aligned} -\langle a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle &= -\langle \mathcal{T}\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle + \langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{T}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f))\rangle \\ &= \langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}(a \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle , \end{aligned} \tag{5.15}$$

car $\mathrm{Im}\mathcal{T} \subset \ker \langle \cdot \rangle$ et $\mathcal{T}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f) = a \cdot \nabla_{x,v} f$. Ainsi, il ne reste pas de terme du second ordre dans l'expression de $\langle a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle$

$$-\langle a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle = \frac{1}{2} \langle [\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}, a \cdot \nabla_{x,v}] f\rangle = \langle \xi \cdot \nabla_{x,v} f\rangle ,$$

où 2ξ est la parenthèse de Poisson entre les champs de vecteurs $\mathcal{B}$ et a. Comme $\mathrm{div}_{x,v} a = \mathrm{div}_{x,v} \mathcal{B} = 0$, on a

$$\mathrm{div}_{x,v} \xi = \frac{1}{2} \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}(\mathrm{div}_{x,v} a) - \frac{1}{2} a \cdot \nabla_{x,v}(\mathrm{div}_{x,v} \mathcal{B}) = 0$$

et donc, par la proposition 3.25, on obtient

$$\begin{aligned} -\langle a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} f)\rangle &= \langle \mathrm{div}_{x,v}(f\xi)\rangle \\ &= \mathrm{div}_x \langle f\xi_x\rangle + \mathrm{div}_v \left\{ \left\langle f\xi_v \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle \frac{v}{|v|} \right\} \\ &= \mathrm{div}_x (f \langle \xi_x\rangle) + \mathrm{div}_v \left\{ f \left\langle \xi_v \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle \frac{v}{|v|} \right\} \\ &= \mathrm{div}_{x,v}(f\mathcal{C}), \end{aligned} \tag{5.16}$$

où $\mathcal{C} = \left(\langle \xi_x \rangle , \left\langle \xi_v \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle \frac{v}{|v|} \right)$. Il reste alors à calculer explicitement les coordonnées du champ de vecteur $\mathcal{C}$. En utilisant (5.15) avec la fonction $\psi_i = x_i, i \in \{1,2\}$, on obtient

$$\langle \xi_{x_i} \rangle = \langle \xi \cdot \nabla_{x,v} \psi_i \rangle = \frac{1}{2} \langle [\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}, a \cdot \nabla_{x,v}] \psi_i \rangle = \langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} (a \cdot \nabla_{x,v} \psi_i) \rangle = \langle \mathcal{B}_{v_i} \rangle .$$

De la même façon, en utilisant l'invariant $\psi_3 = |v|$, on déduit

$$\begin{aligned} \left\langle \xi_v \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle &= \langle \xi \cdot \nabla_{x,v} \psi_3 \rangle = \frac{1}{2} \langle [\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}, a \cdot \nabla_{x,v}] \psi_3 \rangle = \langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} (a \cdot \nabla_{x,v} \psi_3) \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} \frac{q}{m} \left(E \cdot \frac{v}{|v|} \right) \right\rangle . \end{aligned}$$

En fait, en prenant $f = 1 \in \ker \mathcal{T}$ dans (5.16) on obtient $\mathrm{div}_{x,v} \mathcal{C} = 0$.

■

Des calculs directs nous donnent l'expression suivante pour le champ de vecteurs $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \left(-\frac{{}^{\perp} v}{\omega_c}, \frac{{}^{\perp} E}{B} - \left(\frac{\nabla_x B}{B} \cdot \frac{v}{\omega_c} \right) {}^{\perp} v \right) , \tag{5.17}$$

et la formule pour le champ de vecteur $\mathcal{C}$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5.4

Supposons que le champ électrique dérive d'un potentiel, *i.e.* $\mathrm{div}_x \, {}^{\perp} E = 0$. Alors le champ de vecteur $\mathcal{C}$ s'écrit

$$\mathcal{C} = \left(\frac{{}^{\perp} E}{B} - \frac{|v|^2}{2\omega_c} \frac{{}^{\perp} \nabla_x B}{B}, \frac{1}{2} \left(\frac{{}^{\perp} E}{B} \cdot \frac{\nabla_x B}{B} \right) v \right) . \tag{5.18}$$

Preuve.

On a

$$\mathcal{B}_x = -\frac{{}^{\perp} v}{\omega_c} \text{ et } \mathcal{B}_v = \frac{{}^{\perp} E}{B} - \frac{{}^{\perp} v \otimes v}{B \omega_c} \nabla_x B.$$

On utilise les formules

$$\langle v \otimes v \rangle = \frac{|v|^2}{2} Id, \quad \left\langle {}^{\perp} v \otimes v \right\rangle = \frac{|v|^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi on obtient

$$\mathcal{C}_x = \langle \mathcal{B}_v \rangle = \frac{{}^{\perp} E}{B} - \frac{|v|^2}{2B\omega_c} {}^{\perp} \nabla_x B = v_{\wedge} + v_{\mathrm{GD}},$$

où $v_{\wedge} = {}^{\perp} E / B$ est la dérive électrique de champs croisés et v_{GD} est la dérive de gradient magnétique remises à l'échelle 1 (les vraies dérives étant $v_{\wedge}^{\varepsilon} = \varepsilon v_{\wedge}$

et $v^\varepsilon_{\mathrm{GD}} = \varepsilon v_{\mathrm{GD}}$, voir [50]). Il reste à déterminer $\mathcal{C}_v$ et pour cela on doit calculer $\left\langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} \left(E \cdot \frac{v}{|v|} \right) \right\rangle$. On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} \left(E \cdot \frac{v}{|v|} \right) &= (\mathcal{B}_x \cdot \nabla_x) E \cdot \frac{v}{|v|} + E \cdot (\mathcal{B}_v \cdot \nabla_v) \left(\frac{v}{|v|} \right) \\
&= \left(\partial_x E \, \mathcal{B}_x, \frac{v}{|v|} \right) + \left(E, \partial_v \left(\frac{v}{|v|} \right) \mathcal{B}_v \right) \\
&= -{}^t\partial_x E : \frac{{}^\perp v \otimes v}{\omega_c |v|} - \frac{E \otimes \nabla_x B}{B \omega_c} : \frac{{}^\perp v \otimes v}{|v|} - \frac{v \otimes v}{|v|^3} : \frac{{}^\perp E \otimes E}{B}.
\end{aligned}$$

Si on calcule la moyenne, alors on obtient

$$\left\langle \mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} \left(E \cdot \frac{v}{|v|} \right) \right\rangle = \frac{1}{2\omega_c} \left({}^\perp E \cdot \frac{\nabla_x B}{B} \right)$$

et enfin

$$\mathcal{C}_v = \frac{1}{2} \left(\frac{{}^\perp E}{B} \cdot \frac{\nabla_x B}{B} \right) v.$$

■

Proposition 5.5

L'opérateur $\mathcal{C} \cdot \nabla_{x,v}$ laisse invariant les sous-espaces $\ker \mathcal{T}$ et $\ker \langle \cdot \rangle$.

Preuve.

Remarquons que $\mathcal{C}$ est une combinaison linéaire des champs de vecteurs b^1, b^2 et b^3 (où $b^1 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{x_1}$, $b^2 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{x_2}$, $b^3 \cdot \nabla_{x,v} = \frac{v}{|v|} \cdot \nabla_v$, voir remarque 3.24) avec des coefficients dans $\ker \mathcal{T}$

$$\mathcal{C} = \left(\frac{E_2}{B} - \frac{|v|^2}{2\omega_c} \frac{\partial_{x_2} B}{B} \right) b^1 - \left(\frac{E_1}{B} - \frac{|v|^2}{2\omega_c} \frac{\partial_{x_1} B}{B} \right) b^2 + \frac{|v|}{2} \, \frac{{}^\perp E \cdot \nabla_x B}{B^2} b^3.$$

Le fait que $\ker \mathcal{T}$ est laissé invariant par $\mathcal{C} \cdot \nabla_{x,v}$ suit par la même propriété de $b^i \cdot \nabla_{x,v}$, $i \in \{1,2,3\}$. En utilisant les propriétés de commutation entre $b^i \cdot \nabla_{x,v}$ et l'opérateur de moyenne pour $i \in \{1,2,3\}$, on en déduit que $\ker \mathcal{T}$ est également laissé invariant par $\mathcal{C} \cdot \nabla_{x,v}$.

■

Ces arguments nous permettent d'établir le résultat de convergence faible suivant.

Théorème 5.6

Supposons que le champ électromagnétique satisfait les hypothèses

$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2), \ \ \mathrm{div}_x\, {}^{\perp}E = 0, \ \ B \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2), \ \ \inf_{x\in\mathbb{R}^2} B(x) > 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on note par f^ε l'unique solution faible de l'équation de Vlasov (5.1) à laquelle on ajoute la condition initiale $f^{\mathrm{in}}_\varepsilon$. Si la famille $(f^{\mathrm{in}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ quand $\varepsilon \searrow 0$ vers une fonction f^{in} (qui n'est pas nécessairement dans $\ker\mathcal{T}$), alors la famille $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement $\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2))$ quand $\varepsilon \searrow 0$ vers l'unique solution faible f du problème (5.19)-(5.20) :

$$\partial_t f + \left(\frac{{}^{\perp}E}{B} - \frac{|v|^2}{2\omega_c}\,\frac{{}^{\perp}\nabla_x B}{B}\right)\cdot\nabla_x f + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^{\perp}E}{B}\cdot\frac{\nabla_x B}{B}\right) v\cdot\nabla_v f = 0, \qquad (t,x,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \tag{5.19}$$

$$f(0,\cdot,\cdot) = \mathrm{Proj}_{\ker\mathcal{T}} f^{\mathrm{in}}. \tag{5.20}$$

Preuve.

Nous savons que la norme L^2 est préservée en temps

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}(f^\varepsilon(t,x,v))^2\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

De plus, comme $(f^{\mathrm{in}}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$, on a

$$\sup_{\varepsilon>0}\|f^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2))} = \sup_{\varepsilon>0}\|f^{\mathrm{in}}_\varepsilon\| < +\infty.$$

Après avoir extrait une suite $(\varepsilon_k)_k$ vérifiant $\lim_{k\to+\infty}\varepsilon_k = 0$, on peut supposer que $(f^{\varepsilon_k})_k$ converge faiblement $\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2))$ vers une fonction f de l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2))$. En multipliant par ε_k la formulation faible de (5.1) pour f^{ε_k}, on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,v)\mathcal{T}\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\varepsilon_k}(t,x,v)\mathcal{T}\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

pour tout $\varphi\in C^1_c(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$. On déduit que $f(t)\in\ker\mathcal{T}$, $t\in\mathbb{R}_+$. On considère à présent dans la formulation faible de (5.1) des fonctions tests de la forme $\eta(t)\varphi(x,v)$ où $\eta\in C^1_c(\mathbb{R}_+)$ et $\varphi\in C^1_c(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)\cap\ker\mathcal{T}$.

$$-\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\eta'f^{\varepsilon_k}\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \eta(0)\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\mathrm{in}}_{\varepsilon_k}\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x - \frac{1}{\varepsilon_k}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\eta f^{\varepsilon_k}\,a\cdot\nabla_{x,v}\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{5.21}$$

Comme $\mathcal{T}\varphi = 0$, l'équation (5.11) nous indique que $\langle a \cdot \nabla_{x,v}\varphi \rangle = 0$ et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \langle f^{\varepsilon_k}(t) \rangle \, a \cdot \nabla_{x,v}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\varepsilon_k}(t,x,v) \, \langle a \cdot \nabla_{x,v}\varphi \rangle \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

L'équation (5.21) peut s'écrire

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta'(t) f^{\varepsilon_k}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \;&-\; \eta(0)\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\mathrm{in}}_{\varepsilon_k}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t)\frac{f^{\varepsilon_k} - \langle f^{\varepsilon_k}\rangle}{\varepsilon_k} a \cdot \nabla_{x,v}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.22}$$

On souhaite passer à la limite dans (5.22) quand $k \to +\infty$. En fait, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta'(t) f^{\varepsilon_k}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta'(t) f\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{5.23}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\mathrm{in}}_{\varepsilon_k}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\mathrm{in}}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \left\langle f^{\mathrm{in}} \right\rangle \varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x. \tag{5.24}$$

Pour le traitement du terme dans le membre de droite de (5.22) on introduit ψ l'unique fonction régulière de moyenne nulle solution de

$$\mathcal{T}\psi = -a \cdot \nabla_{x,v}\varphi.$$

En fait, l'équation ci dessus a une seule solution de moyenne nulle, par la proposition 5.1 comme le membre de droite a une moyenne nulle. De plus, cette solution est donnée par $\psi = -\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v}\varphi$ (cf. proposition 5.2). On utilise encore une fois la formulation faible (5.1) avec la fonction test $\eta(t)\psi(x,v)$

$$\begin{aligned} &-\varepsilon_k \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta' f^{\varepsilon_k}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \varepsilon_k\eta(0)\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\mathrm{in}}_{\varepsilon_k}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta f^{\varepsilon_k} a \cdot \nabla_{x,v}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta\frac{f^{\varepsilon_k} - \langle f^{\varepsilon_k}\rangle}{\varepsilon_k}\mathcal{T}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui amène

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t)\frac{f^{\varepsilon_k} - \langle f^{\varepsilon_k}\rangle}{\varepsilon_k} a \cdot \nabla_{x,v}\varphi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t)\frac{f^{\varepsilon_k} - \langle f^{\varepsilon_k}\rangle}{\varepsilon_k}\mathcal{T}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\qquad = -\varepsilon_k \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta' f^{\varepsilon_k}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \varepsilon_k\eta(0)\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{\mathrm{in}}_{\varepsilon_k}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &\qquad\quad -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta f^{\varepsilon_k} a \cdot \nabla_{x,v}\psi \, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $k \to +\infty$ on obtient

$$
\begin{aligned}
-\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t)\frac{f^{\varepsilon_k} - \langle f^{\varepsilon_k}\rangle}{\varepsilon_k} a\cdot\nabla_{x,v}\varphi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t & \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t) f a\cdot\nabla_{x,v}\psi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t) f a\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v}\varphi) \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t) f \left\langle a\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{B}\cdot\nabla_{x,v}\varphi)\right\rangle \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta(t) f \mathrm{div}_{x,v}(\varphi\mathcal{C}) \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à la proposition 5.3. En combinant (5.22), (5.23), (5.24) et (5.25) on déduit que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f\partial_t(\eta\varphi) \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left\langle f^{\mathrm{in}}\right\rangle (\eta\varphi)(0,x,v) \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x \qquad (5.26)\\
+ \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f\mathrm{div}_{x,v}(\eta\varphi\mathcal{C}) \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

pour toute fonction $\eta \in C^1_c(\mathbb{R}_+)$ et $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2) \cap \ker \mathcal{T}$. Comme on sait déjà que $f(t) \in \ker\mathcal{T}$, $t \in \mathbb{R}_+$, la formule précédente reste vraie pour toute fonction test régulière de moyenne nulle $\psi(x,v)$. En fait, on a

$$
\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f\partial_t(\eta\psi) \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left\langle f^{\mathrm{in}}\right\rangle \eta(0)\psi(x,v) \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0
$$

et

$$
\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f\eta(t)\, \mathcal{C}\cdot\nabla_{x,v}\psi \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0
$$

car la proposition 5.5 nous indique que $\langle \mathcal{C}\cdot\nabla_{x,v}\psi\rangle = 0$. On en déduit que (5.26) est vraie pour toute fonction test régulière, ce qui signifie que f est une solution faible du problème de Vlasov

$$
\partial_t f + \mathcal{C}\cdot\nabla_{x,v} f = 0, \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \qquad (5.27)
$$

$$
f(0,x,v) = \left\langle f^{\mathrm{in}}\right\rangle (x,v), \quad (x,v) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2. \qquad (5.28)
$$

Par unicité de la solution faible de (5.27)-(5.28) (qui coïncide avec la solution obtenue par la méthode des caractéristiques), on obtient que toute la famille $(f^\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement $\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2))$ vers f.

■

Remarque 5.7. *L'équation $\partial_t f + \mathcal{C}\cdot\nabla_{x,v} f = 0$ propage la contrainte $\mathcal{T}f = 0$. Pour le vérifier, remarquons que $[\mathcal{T}, \mathcal{C}\cdot\nabla_{x,v}] = -({}^\perp E\cdot\nabla_x B)/B^2\ \mathcal{T}$. $\mathcal{T}f$ est solution du problème*

$$
\partial_t(\mathcal{T}f) + \mathcal{C}\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{T}f) - \frac{{}^\perp E\cdot\nabla_x B}{B^2}\,\mathcal{T}f = 0, \quad \mathcal{T}f|_{t=0} = \mathcal{T}\left\langle f^{\mathrm{in}}\right\rangle = 0
$$

et ainsi, par unicité de la solution faible on déduit que $\mathcal{T} f = 0$. Le point important est que $\mathcal{C} \cdot \nabla_{x,v}$ laisse invariant $\ker \mathcal{T}$ *(car le commutateur $[\mathcal{T}, \mathcal{C} \cdot \nabla_{x,v}]$ est parallèle à $\mathcal{T}$) et que dans ce cas, les translations le long du flot de $\mathcal{C}$ laissent également invariant* $\ker \mathcal{T}$*. Ainsi, à tout temps t, $f(t)$ appartient à* $\ker \mathcal{T}$*, comme translation de la condition initiale $\left\langle f^{\text{in}} \right\rangle \in \ker \mathcal{T}$ le long du flot de $\mathcal{C}$.*

5.2 Construction du schéma micro-macro

On se concentre sur la résolution de

$$\varepsilon \partial_t f^\varepsilon + \left(v \cdot \nabla_x + \frac{q}{m} E(x) \cdot \nabla_v \right) f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon} {}^\perp v \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \tag{5.29}$$

avec la condition initiale

$$f^\varepsilon(0, x, v) = f^{\text{in}}(x, v), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \tag{5.30}$$

Nous l'avons déjà remarqué, quand ε devient petit, l'équation de transport

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon^2} {}^\perp v \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0 \tag{5.31}$$

où $a = (v, q/mE)$, est dominée par l'advection $\frac{\omega_c}{\varepsilon^2} {}^\perp v \cdot \nabla_v = -\frac{\omega_c}{\varepsilon^2} \partial_\theta$, où θ est l'angle polaire de la vitesse $v \in \mathbb{R}^2$. On remarque que la contrainte CFL standard mène à un pas de temps Δt de l'ordre de ε^2. Ainsi quand ε est petit, il n'est pas raisonnable d'utiliser un schéma numérique explicite. Nous allons utiliser des schémas implicites. Il est cependant impossible d'utiliser simplement un schéma implicite pour toute l'équation, qui contient un terme en $1/\varepsilon^2$, $\frac{\omega_c}{\varepsilon^2} {}^\perp v \cdot \nabla_v f^\varepsilon$, et des termes en $1/\varepsilon$. Pour utiliser un schéma implicite pour le terme en $1/\varepsilon^2$, il faut pouvoir fixer la moyenne de notre équation. Cependant celle-ci contient encore un $1/\varepsilon$ devant tout les termes de transports. Nous cherchons donc un schéma qui permet de respecter cette contrainte, en traitant par exemple à part la moyenne de la fonction. De plus, nous cherchons des schémas numériques qui sont consistants avec le modèle continu pour toute valeur positive de ε et qui dégénèrent vers une discrétisation consistante de

$$\partial_t f + \left(\frac{{}^\perp E}{B} - \frac{|v|^2}{2\omega_c} \frac{{}^\perp \nabla_x B}{B} \right) \cdot \nabla_x f + \frac{1}{2} \left(\frac{{}^\perp E}{B} \cdot \frac{\nabla_x B}{B} \right) v \cdot \nabla_v f = 0, (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \tag{5.32}$$

avec

$$f(0, \cdot, \cdot) = \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle \tag{5.33}$$

quand $\varepsilon \searrow 0$ et avec un pas de temps qui reste inchangé. Rappelons que la limite quand $\varepsilon \searrow 0$ de $(f^\varepsilon)_\varepsilon$ est dans le noyau de $\mathcal{T}$. Ceci implique que pour des petits $\varepsilon > 0$, la partie dominante de f^ε est donnée par sa moyenne $\langle f^\varepsilon \rangle$. En fait, en notant $r^\varepsilon = f^\varepsilon - \langle f^\varepsilon \rangle$ on a

$$\langle r^\varepsilon \rangle = \langle f^\varepsilon - \langle f^\varepsilon \rangle \rangle = 0, \quad \mathcal{T} r^\varepsilon = \mathcal{T} f^\varepsilon = -\varepsilon^2 \partial_t f^\varepsilon - \varepsilon a \cdot \nabla_{x,v} f^\varepsilon.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \searrow 0$ on obtient, au moins formellement,

$$\left\langle \lim_{\varepsilon \searrow 0} r^\varepsilon \right\rangle = 0, \quad \mathcal{T}(\lim_{\varepsilon \searrow 0} r^\varepsilon) = 0$$

ce qui signifie que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} r^\varepsilon = 0. \tag{5.34}$$

En se basant sur la décomposition $f^\varepsilon = \langle f^\varepsilon \rangle + r^\varepsilon$ dans $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, on va tenter de remplacer (5.31) par un système pour les inconnues $\langle f^\varepsilon \rangle, r^\varepsilon$. On va réaliser ceci en prenant la projection orthogonale de (5.31) sur $\ker \mathcal{T}$ et son orthogonal. Comme la projection orthogonale sur $\ker \mathcal{T}$ coïncide avec la moyenne et que $a \cdot \nabla_{x,v}$ est une application de $\ker \mathcal{T}$ sur l'ensemble des fonctions de moyennes nulles, on obtient

$$\partial_t \langle f^\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \rangle = 0 \tag{5.35}$$

et

$$\partial_t r^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} \langle f^\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{T} r^\varepsilon = 0. \tag{5.36}$$

Ainsi on peut remplacer (5.31) par le système équivalent

$$\partial_t g^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \rangle = 0, \tag{5.37}$$

$$\partial_t r^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} g^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{T} r^\varepsilon = 0. \tag{5.38}$$

Nous prenons, comme conditions initiales

$$g^\varepsilon|_{t=0} = \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle, \quad r^\varepsilon|_{t=0} = f^{\text{in}} - \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle. \tag{5.39}$$

Remarque 5.8. *On voit facilement que $g^\varepsilon = \langle f^\varepsilon \rangle$ et $r^\varepsilon = f^\varepsilon - \langle f^\varepsilon \rangle$. En fait, en appliquant l'opérateur $\mathcal{T}$ à* (5.37) *on obtient $\partial_t \mathcal{T} g^\varepsilon = 0$ et ainsi $\mathcal{T} g^\varepsilon(t) = \mathcal{T} g^\varepsilon(0) = \mathcal{T} \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle = 0$, ce qui signifie que $g^\varepsilon(t) \in \ker \mathcal{T}, t \in \mathbb{R}_+$. En appliquant à présent l'opérateur de moyenne à* (5.38)*, on déduit que $\partial_t \langle r^\varepsilon \rangle = 0$, car $\langle a \cdot \nabla_{x,v} g^\varepsilon(t) \rangle = 0, t \in \mathbb{R}_+$ et ainsi $\langle r^\varepsilon(t) \rangle = \langle r^\varepsilon(0) \rangle = \left\langle f^{\text{in}} - \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle \right\rangle = 0$. En sommant* (5.37) *et* (5.38) *on obtient*

$$\partial_t (g^\varepsilon + r^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} (g^\varepsilon + r^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{T} (g^\varepsilon + r^\varepsilon) = 0,$$

$$(g^\varepsilon + r^\varepsilon)|_{t=0} = f^{\text{in}}.$$

Ainsi $g^\varepsilon + r^\varepsilon$ et f^ε résolvent le même problème, et l'unicité de la solution nous donne $g^\varepsilon + r^\varepsilon = f^\varepsilon$. Comme on sait déjà que $\mathcal{T} g^\varepsilon = 0$ et $\langle r^\varepsilon \rangle = 0$ on déduit que

$$g^\varepsilon = \langle g^\varepsilon + r^\varepsilon \rangle = \langle f^\varepsilon \rangle, \quad r^\varepsilon = f^\varepsilon - g^\varepsilon = f^\varepsilon - \langle f^\varepsilon \rangle.$$

On propose à présent un schéma numérique pour le système (5.37), (5.38), (5.39). Pour le moment on regarde uniquement la discrétisation en temps. On choisit un pas de temps $\Delta t > 0$ et on note par $t^n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}$, un maillage uniforme de $\mathbb{R}_+$. On considère le schéma en temps implicite

$$\frac{r^{\varepsilon,n+1} - r^{\varepsilon,n}}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} - \frac{1}{\varepsilon} \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} \rangle + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{T} r^{\varepsilon,n+1} = 0, n \in \mathbb{N} \tag{5.40}$$

$$r^{\varepsilon,0} = f^{\text{in}} - \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle. \tag{5.41}$$

On rappelle ici le résultat suivant.

Proposition 5.9

Pour tout $\lambda > 0$ et $w \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, l'équation $\lambda u + \mathcal{T} u = w$ a une unique solution u. L'application $w \to (\lambda I + \mathcal{T})^{-1} w = u$ est linéaire et continue sur $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ et

$$\|(\lambda I + \mathcal{T})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq \frac{1}{\lambda}, \ \ \lambda > 0.$$

De plus, sous l'hypothèse $\inf_{x \in \mathbb{R}^2} B(x) > 0$, si $w \in \ker \langle \cdot \rangle$, alors $\|(\lambda I + \mathcal{T})^{-1} w\| \leq \|\mathcal{T}^{-1} w\|, \ \ \lambda > 0$, ce qui veut dire que

$$\sup_{\lambda > 0} \|(\lambda I + \mathcal{T})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle, \langle\cdot\rangle)} \leq \|\mathcal{T}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle, \langle\cdot\rangle)} \leq \frac{2\pi}{|\omega_0|}, \omega_0 = \frac{q}{m} \inf_{x \in \mathbb{R}^2} B(x) \neq 0.$$

Preuve.

Remarquons que la solution de $\lambda u_\lambda + \mathcal{T} u_\lambda = w$ est donnée par

$$u_\lambda(x,v) = \int_{\mathbb{R}_-} e^{\lambda s} \, w(X(s;x,v), V(s;x,v)) \, \mathrm{d}s, \tag{5.42}$$

où $(X,V)(s;x,v)$ est le flot associé à l'opérateur du premier ordre $\mathcal{T}$. Ainsi on obtient

$$\|u_\lambda\| \leq \int_{\mathbb{R}_-} e^{\lambda s} \, \|w((X,V)(s;\cdot,\cdot))\| \, \mathrm{d}s = \|w\| \int_{\mathbb{R}_-} e^{\lambda s} \, \mathrm{d}s = \frac{\|w\|}{\lambda}, \ \ \lambda > 0$$

ce qui signifie que $\|(\lambda I + \mathcal{T})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq 1/\lambda, \ \lambda > 0$. On considère maintenant que $w \in \ker \langle \cdot \rangle$. Immédiatement, on a $u_\lambda \in \ker \langle \cdot \rangle$ comme

$$\lambda \langle u_\lambda \rangle = \langle w - \mathcal{T} u_\lambda \rangle = \langle w \rangle - \langle \mathcal{T} u_\lambda \rangle = 0.$$

Si on note par u_0 l'unique solution de moyenne nulle de $\mathcal{T} u = w$ (voir proposition 5.1) on a

$$\lambda u_\lambda + \mathcal{T}(u_\lambda - u_0) = 0.$$

En multipliant par $u_\lambda - u_0$, on obtient $\lambda(u_\lambda, u_\lambda - u_0) = 0$, et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on arrive à

$$\|u_\lambda\| \leq \|u_0\| = \|\mathcal{T}^{-1} w\| \leq \|\mathcal{T}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle, \ker\langle\cdot\rangle)} \|w\|.$$

Finalement, pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\|(\lambda I + \mathcal{T})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle,\ker\langle\cdot\rangle)} \leq \|\mathcal{T}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ker\langle\cdot\rangle,\ker\langle\cdot\rangle)} \leq \frac{2\pi}{|\omega_0|}.$$

Notons que $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ vers u_0, alors que $\lambda \searrow 0$. En fait, il est facile de voir que $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ converge faiblement vers u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, quand $\lambda \searrow 0$. En effet, on voit que la convergence est forte, grâce à l'inégalité $\limsup_{\lambda\searrow 0} \|u_\lambda\| \leq \|u_0\|$.

■

La proposition 5.9 nous permet de résoudre (5.40) pour $r^{\varepsilon,n+1}$, uniformément par rapport à ε, Δt, car on a besoin d'inverser $\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}$ seulement sur les fonctions de moyenne non nulle. La discrétisation en temps (5.40) permet de calculer $r^{\varepsilon,n+1}$ de manière unique :

$$r^{\varepsilon,n+1} = \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}\right)^{-1} \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} r^{\varepsilon,n} - \varepsilon a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} - \varepsilon a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} + \varepsilon \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} \rangle\right). \tag{5.43}$$

On doit doit également trouver une discrétisation pour (5.37). On complète notre schéma par

$$\frac{g^{\varepsilon,n+1} - g^{\varepsilon,n}}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n+1} \right\rangle = 0, \tag{5.44}$$

$$g^{\varepsilon,0} = \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle. \tag{5.45}$$

Le choix de t^{n+1} au lieu de t^n comme évolution en temps pour le terme $\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \rangle$ sera clarifié dans la proposition suivante. La raison est qu'avec ce choix, le schéma numérique dégénère en une discrétisation consistante de (5.19) quand $\varepsilon \searrow 0$. Autrement dit, notre schéma numérique capture bien le modèle limite de (5.31) quand $\varepsilon \searrow 0$, pour un pas en temps qui ne dépend pas de $\varepsilon > 0$. Pour des raisons de simplicité, on va se contenter d'énoncer un résultat formel. Cependant, les propriétés de notre schéma numérique vont être mises en évidence par des simulations numériques.

Théorème 5.10

Supposons que le champ électromagnétique satisfait les hypothèses

$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2), \quad \text{div}_x{}^\perp E = 0, \quad B \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2), \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^2} B(x) > 0$$

et que les conditions initiales $(f_\varepsilon^{\text{in}})_\varepsilon$ convergent faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ quand $\varepsilon \searrow 0$ vers une fonction f^{in} (pas nécessairement dans $\ker \mathcal{T}$). Alors, le schéma numérique (5.40), (5.41), (5.44), (5.45) reste consistant avec le modèle limite (5.19),(5.20) quand $\varepsilon \searrow 0$.

Preuve.

On voit facilement que $\langle r^{\varepsilon,n}\rangle = 0, \mathcal{T} g^{\varepsilon,n} = 0, n \in \mathbb{N}$. En fait, pour $n = 0$, on a

$$\left\langle r^{\varepsilon,0}\right\rangle = \left\langle f_\varepsilon^{\text{in}} - \left\langle f_\varepsilon^{\text{in}}\right\rangle\right\rangle = 0, \;\; \mathcal{T} g^{\varepsilon,0} = \mathcal{T}\left\langle f_\varepsilon^{\text{in}}\right\rangle = 0.$$

Supposons maintenant que $\left\langle r^{\varepsilon,k}\right\rangle = 0$ et que $\mathcal{T} g^{\varepsilon,k} = 0$, pour $k \in \mathbb{N}$. En calculant la moyenne de (5.40) on obtient

$$\frac{\left\langle r^{\varepsilon,k+1}\right\rangle}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon}\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,k}\right\rangle = 0.$$

Comme $\mathcal{T} g^{\varepsilon,k} = 0$, on sait que $\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,k}\right\rangle = 0$ (cf. (5.11)) et donc $\left\langle r^{\varepsilon,k+1}\right\rangle = 0$. En appliquant l'opérateur $\mathcal{T}$ dans (5.44), on a que $\mathcal{T} g^{\varepsilon,k+1} = \mathcal{T} g^{\varepsilon,k} = 0$. On réalise exactement les mêmes étapes que celles dans le cas continu (voir théorème 5.6). En multipliant (5.40) par ε on obtient

$$\mathcal{T}\left(\frac{r^{\varepsilon,n+1}}{\varepsilon}\right) = -a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} - \varepsilon \frac{r^{\varepsilon,n+1} - r^{\varepsilon,n}}{\Delta t} - a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} + \left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n}\right\rangle.$$

Et comme le membre de droite a une moyenne nulle

$$\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}\right\rangle = 0, \;\; \left\langle r^{\varepsilon,n+1} - r^{\varepsilon,n}\right\rangle = 0, \;\; \left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} - \left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n}\right\rangle\right\rangle = 0,$$

on peut résoudre pour $r^{\varepsilon,n+1}/\varepsilon$

$$\frac{r^{\varepsilon,n+1}}{\varepsilon} = -\mathcal{T}^{-1}(a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}) - \frac{\varepsilon}{\Delta t}\mathcal{T}^{-1}(r^{\varepsilon,n+1} - r^{\varepsilon,n}) - \mathcal{T}^{-1}(a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} - \left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n}\right\rangle).$$

L'égalité (5.43), qui est une conséquence de (5.40), établit au moins formellement que $r^{\varepsilon,n} = O(\varepsilon), n \geq 1$, avec la proposition 5.9. La proposition 5.2 nous permet d'obtenir

$$\frac{r^{\varepsilon,n+1}}{\varepsilon} = -\mathcal{T}^{-1}(a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}) + O(\varepsilon) = -\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} + O(\varepsilon), \;\; n \geq 1.$$

Si on applique à présent la proposition 5.3 on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n+1}\right\rangle &= -\left\langle a \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n})\right\rangle + O(\varepsilon) \\
&= \text{div}_{x,v}(g^{\varepsilon,n}\mathcal{C}) + O(\varepsilon) \\
&= \mathcal{C} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} + O(\varepsilon). \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

Notons que le membre de gauche de (5.46) coïncide avec le second terme dans le membre de gauche de (5.44). C'est pourquoi il faut évaluer $\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon}\right\rangle/\varepsilon$ au temps t^{n+1} au lieu de t^n, quand on cherche une discrétisation en temps de (5.37). Finalement, on obtient

$$\frac{g^{\varepsilon,n+1} - g^{\varepsilon,n}}{\Delta t} + \mathcal{C} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} + O(\varepsilon) = 0, \;\; g^{\varepsilon,0} = \left\langle f_\varepsilon^{\text{in}}\right\rangle \rightharpoonup \left\langle f^{\text{in}}\right\rangle,$$

qui est consistant avec (5.19), (5.20) quand $\varepsilon \searrow 0$.

■

On remarque aussi que (5.43) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{r^{\varepsilon,n+1}}{\varepsilon} = &- \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}\right)^{-1} (a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}) \\ &- \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}\right)^{-1} (a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} - \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} \rangle) + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}\right)^{-1} r^{\varepsilon,n}\end{aligned} \tag{5.47}$$

et ainsi, on s'attend à ce que que le terme d'ordre dominant dans la formule pour $\frac{r^{\varepsilon,n+1}}{\varepsilon}$ soit

$$- \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}\right)^{-1} (a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}).$$

Lorsque l'on calcule la discrétisation de ce terme d'ordre dominant, il est possible de faire d'importantes erreurs numériques. Nous présentons dans la suite une façon d'éviter de telles erreurs.

5.3 Calcul analytique du terme d'ordre dominant

Dans le but d'éviter les erreurs numériques que l'on obtient par discrétisation du terme dominant de notre schéma, c'est-à-dire

$$- \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}\right)^{-1} (a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}).$$

nous le calculons analytiquement, en suivant le résultat de la proposition 5.2.

Proposition 5.11

1. Pour tout $\lambda > 0$ il y a un champ de vecteurs réguliers à divergence nulle $\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}$ satisfaisant

$$a \cdot \nabla_{x,v} = [\mathcal{T}, \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}] + \lambda \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}, \tag{5.48}$$

de $\mathrm{D}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}) \cap \ker \mathcal{T}$ sur le sous-espace des fonctions de moyenne nulle. Ce champ est donné par

$$\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} = \frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}} \cdot \nabla_x + \frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}} {}^t\mathcal{O}_\lambda E \cdot \nabla_v + \left(\frac{{}^\perp v \otimes v}{\lambda^2+\omega_c^2} {}^t\mathcal{O}_\lambda {}^2 \nabla_x \omega_c \right) \cdot \nabla_v \tag{5.49}$$

avec

$$\mathcal{O}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}} & -\frac{\omega_c}{\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}} \\ \frac{\omega_c}{\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}} \end{pmatrix}.$$

2. Pour toute fonction $f \in \mathrm{D}(a \cdot \nabla_{x,v}) \cap \mathrm{D}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}) \cap \ker \mathcal{T}$ on a

$$\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \text{ et } (\lambda I + \mathcal{T})^{-1}(a \cdot \nabla_{x,v} f) = \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f.$$

Preuve.

1. On considère la base de champ de vecteurs $b^0 \cdot \nabla_{x,v}, b^1 \cdot \nabla_{x,v}, b^2 \cdot \nabla_{x,v}, b^3 \cdot \nabla_{x,v}$ dont on rappelle les expressions :

$$b^0 \cdot \nabla_{x,v} = {}^\perp v \cdot \nabla_v, \quad b^1 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{x_1}, \quad b^2 \cdot \nabla_{x,v} = \partial_{x_2}, \quad b^3 \cdot \nabla_{x,v} = \frac{v}{|v|} \nabla_v,$$

et on cherche $\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} = \sum_{i=0}^3 \beta_j b^j \cdot \nabla_{x,v}$, où β_j sont des coefficients de moyenne nulle à déterminer. Ces coefficients viennent des égalités

$$a \cdot \nabla_{x,v} \psi_i = \mathcal{T}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} \psi_i) - \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{T}\psi_i) + \lambda \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} \psi_i,$$

où $\psi_1 = x_1, \psi_2 = x_2, \psi_3 = |v|$ et $\psi_0 = -\theta(v)$, avec $v = |v|(\cos\theta(v), \sin\theta(v))$ (si ψ_0 n'est pas bien défini, son gradient l'est, car $\nabla_{x,v}\psi_0 = (0, {}^\perp v/|v|^2)$). Comme ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont laissés invariants par $\mathcal{T}$, les coefficients $\beta_i = \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} \psi_i$ s'obtiennent en résolvant

$$\mathcal{T}\beta_i + \lambda\beta_i = \mathcal{T}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}\psi_i) - \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{T}\psi_i) + \lambda \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}\psi_i = a \cdot \nabla_{x,v}\psi_i,$$

$$\langle \beta_i \rangle = 0, \quad 1 \le i \le 3$$

dont la solution est donnée par (cf. proposition 5.9)

$$\beta_i = \int_{\mathbb{R}_-} e^{\lambda s} (a \cdot \nabla_{x,v}\psi_i)(x, \mathcal{R}(-\omega_c s)v) \, \mathrm{d}s.$$

Pour le coefficient β_0, observons que $\mathcal{T}\psi_0 = \omega_c$, et utilisons

$$\mathcal{T}\beta_0 + \lambda\beta_0 = a \cdot \nabla_{x,v}\psi_0 + \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}\omega_c, \quad \langle \beta_0 \rangle = 0.$$

On obtient

$$(\beta_1, \beta_2) = \frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_c^2}}, \quad \beta_3 = \frac{q}{m\sqrt{\lambda^2 + \omega_c^2}} E \cdot \mathcal{O}_\lambda \frac{v}{|v|},$$

$$\beta_0 = \left({}^t\mathcal{O}_\lambda {}^2 \frac{\nabla_x \omega_c}{\lambda^2 + \omega_c^2} - \frac{q}{m\sqrt{\lambda^2 + \omega_c^2}} {}^t\mathcal{O}_\lambda \frac{{}^\perp E}{|v|^2} \right) \cdot v,$$

et (5.49) suit. En prenant la divergence dans (5.48) on obtient

$$\mathcal{T}(\mathrm{div}_{x,v}\mathcal{B}^\lambda) + \lambda \mathrm{div}_{x,v}\mathcal{B}^\lambda = \mathrm{div}_{x,v} a = 0,$$

et ainsi $\mathrm{div}_{x,v}\mathcal{B}^\lambda = 0$. Il reste à prouver que $\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}$ est une application de $\mathrm{D}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}) \cap \ker \mathcal{T}$ sur le sous espace des fonctions de moyenne nulle. C'est une conséquence du fait que les $(b^i \cdot \nabla_{x,v})_{0 \le i \le 3}$ laissent invariant $\ker \mathcal{T}$ et que $\langle \beta_i \rangle = 0, 0 \le i \le 3$.
2. Pour tout $f \in \mathrm{D}(a \cdot \nabla_{x,v}) \cap \mathrm{D}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}) \cap \ker \mathcal{T}$ on a

$$a \cdot \nabla_{x,v} f = \mathcal{T}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f) + \lambda \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f$$

et ainsi

$$\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f \in \mathrm{D}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad (\lambda I + \mathcal{T})^{-1}(a \cdot \nabla_{x,v} f) = \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f.$$

■

La proposition 5.11 indique que le terme dominant dans le membre de droite de (5.47) s'écrit

$$-\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T}\right)^{-1} (a \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}) = -\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}$$

avec $\lambda_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{\Delta t}$, qui génère le terme dominant suivant dans $\frac{1}{\varepsilon} \left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n+1} \right\rangle$, apparaissant dans (5.44)

$$-\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}) \right\rangle.$$

L'évaluation du terme ci dessus nécessite beaucoup d'approximations comme on a besoin de calculer la discrétisation de deux opérateurs de transports et une moyenne. En suivant la proposition 5.3 on calcule exactement de tels termes (voir annexe C pour les détails de la preuve).

Proposition 5.12

Pour tout $\lambda > 0$ il existe un champ de vecteurs de divergence nulle $\mathcal{C}^\lambda$ tel que pour toute fonction régulière $f \in \ker \mathcal{T}$

$$-\left\langle (a - \lambda \mathcal{B}^\lambda) \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f) \right\rangle = \operatorname{div}_{x,v}(f \mathcal{C}^\lambda).$$

Les coordonnées de $\mathcal{C}^\lambda = (\mathcal{C}_x^\lambda, \mathcal{C}_v^\lambda)$ sont données par

$$\mathcal{C}_x^\lambda = \left\langle \xi_x^\lambda \right\rangle, \quad \mathcal{C}_v^\lambda = \left\langle \xi_v^\lambda \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle \frac{v}{|v|}, \quad \xi^\lambda = \frac{1}{2}[\mathcal{B}^\lambda, a].$$

Si le champ électrique dérive d'un potentiel, alors le champ de vecteur $\mathcal{C}^\lambda$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} = &\left[\frac{\omega_c^2}{\lambda^2 + \omega_c^2} \frac{{}^\perp E}{B} + \frac{|v|^2}{2} {}^\perp \nabla_x \left(\frac{\omega_c}{\lambda^2 + \omega_c^2} \right) \right] \cdot \nabla_x \\ &- \frac{1}{2} \frac{{}^\perp E}{B} \cdot \nabla_x \left(\frac{\omega_c}{\lambda^2 + \omega_c^2} \right) \omega_c v \cdot \nabla_v. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Remarque 5.13. *On voit facilement que $\mathcal{C}^\lambda$ est une perturbation régulière de $\mathcal{C}$*

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \mathcal{C}^\lambda = \left(\frac{{}^\perp E}{B} - \frac{|v|^2}{2\omega_c} \frac{{}^\perp \nabla_x B}{B}, \frac{1}{2} \left(\frac{{}^\perp E}{B} \cdot \frac{\nabla_x B}{B} \right) v \right) = \mathcal{C}.$$

En combinant les propositions 5.11 et 5.12, le schéma numérique (5.40), (5.41), (5.44), (5.45) devient

$$\frac{r^{\varepsilon,n+1}}{\varepsilon} = -\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} - \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T} \right)^{-1} (a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} - \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n} \rangle) + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T} \right)^{-1} r^{\varepsilon,n}, \tag{5.51}$$

$$\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T} \right) h^{\varepsilon,n} = -\left(a \cdot \nabla_{x,v} \left(\frac{r^{\varepsilon,n}}{\varepsilon} \right) - \left\langle a \cdot \nabla_{x,v} \left(\frac{r^{\varepsilon,n}}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right) + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \left(\frac{r^{\varepsilon,n}}{\varepsilon} \right), \tag{5.52}$$

$$\frac{g^{\varepsilon,n+1} - g^{\varepsilon,n}}{\Delta t} + \mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n} - \lambda_\varepsilon \left\langle \mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} g^{\varepsilon,n}) \right\rangle + \varepsilon \langle a \cdot \nabla_{x,v} h^{\varepsilon,n} \rangle = 0, \tag{5.53}$$

avec $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 / \Delta t$ et

$$r^{\varepsilon,0} = f^{\text{in}} - \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle, \quad g^{\varepsilon,0} = \left\langle f^{\text{in}} \right\rangle. \tag{5.54}$$

Par (5.51) on a $r^{\varepsilon,n+1} = O(\varepsilon)$, $n \geq 0$, comme $\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} I + \mathcal{T} \right)^{-1}$ est uniformément borné sur le sous espace des fonctions de moyennes nulles.

Remarque 5.14. *On voit clairement que, quand* $\varepsilon \searrow 0$, (5.53) *reste consistante avec* (5.19) *comme*

$$\mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} \to \mathcal{C}^{\lambda} \cdot \nabla_{x,v} \quad et \quad \lambda_\varepsilon \left\langle \mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon} \cdot \nabla_{x,v}) \right\rangle \to 0.$$

5.4 Calculs préliminaires aux simulations numériques

Les résultats précédents ont été donnés en coordonnées cartésiennes. Or comme $\mathcal{T} f = -\omega_c \partial_\theta f$ avec θ l'angle en vitesse, il parait plus aisé pour la réalisation des simulations numériques de passer en coordonnées polaires. Nous réalisons des tests dans le cas d'un champ magnétique constant, avec $\omega_c = 1$, on obtient alors pour le champ $\mathcal{C}^\lambda$ l'expression suivante :

$$\mathcal{C}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} = \left[\frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{{}^\perp E}{B} \right] \cdot \nabla_x. \tag{5.55}$$

Afin de faire un maximum de calculs analytiques avant de réaliser notre algorithme, nous réécrivons les calculs précédents sous une forme plus proche de celle dont nous aurons besoin.

5.4.1 Passage en coordonnées polaires

Passer en coordonnées polaires simplifie l'opérateur $\mathcal{T}$. Celui-ci devient en effet une simple dérivation par rapport à l'angle en vitesse. Ainsi, le schéma micro-macro (5.37)-(5.38) devient

$$\begin{cases} \partial_t g^\varepsilon & + \frac{1}{\varepsilon} \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \rangle = 0, \\ \partial_t r^\varepsilon & + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} g^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \rangle - \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\theta r^\varepsilon = 0. \end{cases}$$

Détaillons l'expression de $a \cdot \nabla_{x,v}$ en coordonnées polaires. Si $f^\varepsilon(t,x,v) = F^\varepsilon(t,x,|v|,\theta)$, où $v_1 = |v| \cos\theta$ et $v_2 = |v| \sin\theta$, on a

$$\nabla_x f^\varepsilon = \nabla_x F^\varepsilon,$$

$$\partial_{|v|} F^\varepsilon = \partial_{v_1} f^\varepsilon \cos\theta + \partial_{v_2} f^\varepsilon \sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \nabla_v f^\varepsilon$$

et

$$\partial_\theta F^\varepsilon = \partial_{v_1} f^\varepsilon (-|v| \sin\theta) + \partial_{v_2} f^\varepsilon (|v| \cos\theta) = \begin{pmatrix} -|v| \sin\theta \\ |v| \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \nabla_v f^\varepsilon.$$

Ainsi

$$\nabla_{|v|,\theta} F^\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -|v| \sin\theta & |v| \cos\theta \end{pmatrix} \nabla_v f^\varepsilon$$

ce qui donne

$$\nabla_v f^\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{|v|} \sin\theta \\ \sin\theta & \frac{1}{|v|} \cos\theta \end{pmatrix} \nabla_{|v|,\theta} F^\varepsilon. \tag{5.56}$$

De cette façon, on peut écrire

$$a \cdot \nabla_{x,v} = |v| \cos\theta \partial_x + |v| \sin\theta \partial_y + E_{|v|}\partial_{|v|} + \frac{E_\theta}{|v|}\partial_\theta.$$

L'égalité (5.56) nous donne les expression suivante pour $E_{|v|}$ et E_θ :

$$E_{|v|} = E_1 \cos\theta + E_2 \sin\theta, \tag{5.57}$$

$$E_\theta = -E_1 \sin\theta + E_2 \cos\theta. \tag{5.58}$$

Cependant on voit apparaître un facteur $\frac{1}{|v|}$, qui est singulier en l'origine. Pour traiter ce problème numériquement, sur un maillage $x \in [x_{\min}, x_{\max}], y \in [y_{\min}, y_{\max}]$, $|v| \in [|v|_{\min}, |v|_{\max}], \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ si on note $f^n_{i,j,k,l} = f\big(t^n, x_{min} + i\Delta x, y_{min} + j\Delta y, |v|_{min} + k\Delta|v|, \theta_{min} + l\Delta\theta\big)$, alors $f^n_{i,j,k,l}$ est défini pour $i,j,k,l \in [0,N]$ avec $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/N$, $\Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/N$, $\Delta|v| = (|v|_{\max})/N$ et $\Delta\theta = (\Delta\theta_{\max} - \Delta\theta_{\min})/N$. On prend alors $|v|_{min} = \frac{\Delta|v|}{2}$. On prend des conditions périodiques aux bords pour x, y, et θ, et on pose que $f^n_{i,j,-k,l} = f^n_{i,j,k-1,lpi}$, pour $i,j,k \in \mathbb{N}$ et lpi l'indice de $\theta_{min} + l\Delta\theta + \pi$, c'est-à-dire $lpi = l + \pi/\Delta\theta$ ($\pi/\Delta\theta \in \mathbb{N}$).

Pour les fonctions que l'on considérera, il est légitime de prendre $f = 0$ pour $|v|$ grand.

5.4.2 Calcul de $\left\langle \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v})\right\rangle$

Nous aurons besoin de calculer l'opérateur $\left\langle \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v})\right\rangle$. Avant de commencer les calculs on observe que cet opérateur intervient uniquement sur g, c'est-à-dire qu'il est appliqué à une fonction qui ne dépend pas de θ. On obtient alors la proposition suivante, dont la preuve se trouve en annexe D. On notera $|v|$ le rayon en vitesse et donc $\partial_{|v|}$ la dérivée correspondante, pour ne pas confondre avec la fonction r^ε de la décomposition micro-macro.

Proposition 5.15

Pour toute fonction régulière $f(x,v) = F(x,|v|)$ et tout $\lambda > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f)\right\rangle =& \frac{|v|^2}{2(\lambda^2+1)}\Delta_x f \\ &+ \frac{q|v|}{2m(\lambda^2+1)}\mathrm{div}_x\left(E\partial_{|v|}f\right) \\ &+ \frac{q}{2m(\lambda^2+1)}\left[E\cdot\partial_{|v|}(|v|\nabla_x f) + E\cdot\nabla_x f\right] \\ &+ \frac{q^2}{2m^2(\lambda^2+1)}\left(\partial^2_{|v|}f + \frac{\partial_{|v|}f}{|v|}\right)|E|^2.\end{aligned}$$

5.4.3 Inversion de $\left(\varepsilon^2 I + \Delta t \mathcal{T}\right)$: advection linéaire avec Fourier

On a vu dans les sections précédentes que l'on aura besoin d'inverser l'opérateur $\left(\varepsilon^2 I + \Delta t \mathcal{T}\right)$. Il est possible de réaliser cette inversion en calculant exactement la matrice inverse de l'opérateur. En effet cette matrice est tridiagonale si on utilise pour la discrétisation de l'opérateur par un schéma *upwind* par exemple, et l'inverse peut se calculer analytiquement. Cependant, pour les simulations, cette méthode est très imprécise. C'est pourquoi on utilise les séries de Fourier.

Les séries de Fourier sont aujourd'hui un outil fondamental dans l'étude des équations aux dérivées partielles, voir par exemple [51]. On peut construire à l'aide des fonctions exponentielles des "bases" de vecteurs propres pour les opérateurs différentiels linéaires associés aux équations. À l'aide de ces bases, on pourra diagonaliser ces opérateurs, et ainsi se ramener à une équation différentielle ordinaire, plus simple à résoudre.

Rappel : Les séries de Fourier

L'algorithme dont nous nous servons pour faire nos transformées de Fourier, est l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). On donne ici quelques pistes pour le comprendre. Pour plus de détail, le lecteur pourra se référer à [51]. Les coefficients de Fourier d'une fonction périodique f de période T sont donnés par l'intégrale

$$c_\kappa = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}\kappa x}{T}} \mathrm{d}x,\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

On voit facilement que la somme de Riemann

$$C_\kappa^m = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(\frac{jT}{m}) e^{-2\pi \mathrm{i}\kappa j/m}, 0 \leq \kappa \leq m-1$$

est une approximation de c_κ qui devient arbitrairement bonne quand $m \to \infty$.

Définition 5.16

La **transformée de Fourier discrète** à m points est l'application TF_m qui à $x \in \mathbb{R}^m$ associe $\hat{x} \in \mathbb{C}^m$ défini par

$$\hat{x}_\kappa = \sum_{j=0}^{m-1} x_j e^{-2\pi i \kappa j/m}, 0 \leq \kappa \leq m-1.$$

Remarque 5.17. *De la même façon, on obtient que la transformée de Fourier discrète inverse est l'application TFi_m qui à $\hat{x} \in \mathbb{C}^m$ associe $x \in \mathbb{C}^m$ par*

$$x_j = \frac{1}{m}\sum_{\kappa=0}^{m-1} \hat{x}_\kappa e^{2\pi i j \kappa/m}, 0 \leq j \leq m-1.$$

Pour calculer la transformée de Fourier discrète de façon plus aisée, il est possible d'échantillonner la fonction f en un nombre de points qui est une puissance de 2, c'est-à-dire en posant $m = 2^n$. On peut alors interpréter notre transformée de Fourier discrète comme une multiplication de matrices. La FFT consiste en un choix de factorisation astucieux. Ainsi notre problème de multiplication de matrices, qui initialement aurait un nombre d'opérations de $m^2 = 2^{2n}$, a un nombre d'opérations de $(2n-2)2^n$.

Utilisation des séries de Fourier : résolution de l'équation d'advection

On souhaite écrire un schéma numérique pour l'équation

$$\partial_t f + a\partial_x f = 0,\ a > 0, x \in \mathbb{R},$$

et f est à présent une fonction 2π-périodique. À partir d'une discrétisation $x_i = i\Delta x$, $i = 0, \dots, N-1$ et $\Delta x = 2\pi/N$, on note $f_i^n = f(t^n, x_i)$. On note $\hat{f}_\kappa$ la transformée de Fourier discrète de f_i. On effectue une transformée de Fourier discrète de l'équation pour obtenir

$$\partial_t \hat{f}_\kappa + a\mathrm{i}\kappa\hat{f}_\kappa = 0.$$

On doit à présent utiliser une méthode d'intégration en temps pour cette équation différentielle ordinaire.

Résolution exacte en temps

On peut résoudre cette équation différentielle ordinaire exactement en temps. On a alors

$$\widehat{f}_\kappa^{n+1} = \exp(-a\mathrm{i}\kappa\Delta t)\widehat{f}_\kappa^n = (\cos(a\kappa\Delta t) - \mathrm{i}\sin(a\kappa\Delta t))\,\widehat{f}_\kappa^n,$$

On obtient

$$\mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^{n+1}) = \cos(a\kappa\Delta t)\mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^n) + \sin(a\kappa\Delta t)\mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^n)$$

et

$$\mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^{n+1}) = \cos(a\kappa\Delta t)\mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^n) - \sin(a\kappa\Delta t)\mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^n).$$

Résolution approchée en temps

Il est également possible de faire un schéma en temps pour obtenir avec Euler explicite

$$\widehat{f}_\kappa^{n+1} = \widehat{f}_\kappa^n(1 - a\mathrm{i}\kappa\Delta t),$$

ou avec Euler implicite

$$\widehat{f}_\kappa^{n+1} = \widehat{f}_\kappa^n - a\mathrm{i}\kappa\Delta t\widehat{f}_\kappa^{n+1}.$$

Dans le premier cas, le cas Euler explicite, on a

$$\mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^{n+1}) = \mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^n) + a\kappa\Delta t\mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^n)$$

et

$$\mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^{n+1}) = \mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^n) - a\kappa\Delta t\mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^n).$$

On remarque qu'en faisant un développement limité de la méthode exacte, on retrouve bien ce schéma jusqu'aux termes d'ordre Δt. Ce cas Euler explicite est inconditionnellement instable car

$$|1 - ai\kappa\Delta t|^2 = 1 + \Delta t^2 a^2 k^2 > 1.$$

Dans le second cas, c'est-à-dire Euler implicite, on a $z = (1 + ai\kappa\Delta t)^{-1} = 1/(1 + a^2\kappa^2\Delta t^2) - ia\kappa\Delta t/(1 + a^2\kappa^2\Delta t^2)$ =Re(z)+ iIm(z) et

$$\mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^{n+1}) = \mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^{n})\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^{n})\mathrm{Im}(z)$$

et

$$\mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^{n+1}) = \mathrm{Im}(\widehat{f}_\kappa^{n})\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(\widehat{f}_\kappa^{n})\mathrm{Im}(z).$$

Là aussi, on remarque qu'en faisant un développement limité de la méthode exacte, on retrouve bien ce schéma jusqu'aux termes d'ordre Δt. De plus, ce cas est inconditionnellement stable car $|z| < 1$.

5.5 Discrétisation et algorithmes

On souhaite à présent écrire un schéma numérique pour l'équation de Vlasov (5.1), avec $B(x)$ constant, et donc $\omega_c(x)$ constant. On prend plus exactement $\omega_c(x) = q = m = 1$ pour simplifier les expressions. Le modèle micro-macro satisfait par g^ε et r^ε, avec $f^\varepsilon = g^\varepsilon + r^\varepsilon$, $g^\varepsilon = \langle f^\varepsilon \rangle$ et $r^\varepsilon = f^\varepsilon - \langle f \rangle$ pour cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t r^\varepsilon & + \frac{1}{\varepsilon}\Big((I - \langle\cdot\rangle)a \cdot \nabla_{x,v}(r^\varepsilon + g^\varepsilon)\Big) - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\theta r = 0, \\ \partial_t g^\varepsilon & + \frac{1}{\varepsilon}\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^\varepsilon \right\rangle = 0. \end{cases} \tag{5.59}$$

Comme expliqué à la section 5.2, on choisit le schéma en temps suivant

$$\begin{cases} \frac{r^{\varepsilon,n+1} - r^{\varepsilon,n}}{\Delta t} & + \frac{1}{\varepsilon}\Big((I - \langle\cdot\rangle)a \cdot \nabla_{x,v}(r^{\varepsilon,n} + g^{\varepsilon,n})\Big) - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\theta r^{\varepsilon,n+1} = 0, \\ \frac{g^{\varepsilon,n+1} - g^{\varepsilon,n}}{\Delta t} & + \frac{1}{\varepsilon}\left\langle a \cdot \nabla_{x,v} r^{\varepsilon,n+1} \right\rangle = 0. \end{cases}$$

5.5.1 Discrétisation en espace

Schéma centré et méthode de Lax-Richtmyer

Pour utiliser la méthode de Lax-Ritchtmyer, que l'on trouve par exemple dans [74], on choisit pour le transport un schéma centré d'ordre 2 en espace. On introduit pour toute fonction f le flux

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j,k,l}(f^n) = \quad & (|v|\cos\theta)(f^n_{i+1,j,k,l} - f^n_{i-1,j,k,l})/(2\Delta x) \\ & + (|v|\sin\theta)(f^n_{i,j+1,k,l} - f^n_{i,j-1,k,l})/(2\Delta y) \\ & + (E_{|v|})_{i,j,l}(f^n_{i,j,k+1,l} - f^n_{i,j,k-1,l})/(2\Delta|v|) \\ & + \frac{(E_\theta)_{i,j,l}}{|v|}(f^n_{i,j,k,l+1} - f^n_{i,j,k,l-1})/(2\Delta\theta), \end{aligned} \tag{5.60}$$

où, d'après (5.57)-(5.58)

$$(E_{|v|})_{i,j,l} = (E_1)_{i,j}\cos\theta_l + (E_2)_{i,j}\sin\theta_l,$$

$$(E_\theta)_{i,j,l} = -(E_1)_{i,j}\sin\theta_l + (E_2)_{i,j}\cos\theta_l.$$

On introduit la moyenne suivante

$$\begin{aligned}\bar{f}^n_{i,j,k,l} =& \frac{1}{8}(f^n_{i+1,j,k,l} + f^n_{i-1,j,k,l} + f^n_{i,j+1,k,l} + f^n_{i,j-1,k,l} \\ &+ f^n_{i,j,k+1,l} + f^n_{i,j,k-1,l} + f^n_{i,j,k,l+1} + f^n_{i,j,k,l-1}).\end{aligned} \tag{5.61}$$

Discretisation des opérateurs calculés en section 5.3

Dans la section suivante, où nous présentons en détail l'algorithme utilisé, nous aurons besoin des discrétisations de $\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}$, $\mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}$ ainsi que de la discrétisation de l'opérateur calculé à la section 5.4.2, qui ne seront appliqués qu'à la fonction $g^\varepsilon(x,y,|v|)$ pour laquelle il n'y a pas de dérivée en θ.

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,y,|v|}g^{\varepsilon,n}\right)_{i,j,k,l} =& \frac{1}{\lambda_\varepsilon^2+1}\Bigg[(\lambda_\varepsilon|v|_k\cos\theta_l - |v|_k\sin\theta_l)\left(\frac{g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right) \\ &+ (|v|_k\cos\theta_l + \lambda_\varepsilon|v|_k\sin\theta_l)\left(\frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right) \\ &+ \big((\lambda_\varepsilon(E_1)_{i,j}+(E_2)_{i,j})\cos\theta_l + (-(E_1)_{i,j}+\lambda_\varepsilon(E_2)_{i,j})\sin\theta_l\big) \\ &\times\left(\frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j,k-1}}{2\Delta|v|}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{5.62}$$

Pour la suite, on opte pour des formes conservatives, ce qui donne

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,y,|v|}g^{\varepsilon,n}\right)_{i,j,k,l} =& \frac{1}{\lambda_\varepsilon^2+1}\Bigg[\frac{(E_2)_{i+1,j}g_{i+1,j,k}-(E_2)_{i-1,j}g_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\ &- \frac{(E_1)_{i+1,j}g_{i,j+1,k}-(E_1)_{i-1,j}g_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\Bigg].\end{aligned} \tag{5.63}$$

Détaillons à présent la discrétisation du terme calculé à la section 5.4.2.

$$\partial^2_{|v|}g^{\varepsilon,n} = \frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j,k+2}-2g^{\varepsilon,n}_{i,j,k}+g^{\varepsilon,n}_{i,j,k-2}}{4(\Delta|v|)^2},$$

$$\partial_{|v|}g^{\varepsilon,n} = \frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j,k+}-g^{\varepsilon,n}_{i,j,k-1}}{2\Delta|v|},$$

$$\Delta_x g^{\varepsilon,n} = \frac{g^{\varepsilon,n}_{i+2,j,k}-2g^{\varepsilon,n}_{i,j,k}+g^{\varepsilon,n}_{i-2,j,k}}{4(\Delta x)^2} + \frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j+2,k}-2g^{\varepsilon,n}_{i,j,k}+g^{\varepsilon,n}_{i,j-2,k}}{4(\Delta y)^2},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_x(E\partial_{|v|}g^{\varepsilon,n}) =&\frac{(E_1)_{i+1,j}\left(g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k-1}\right)-(E_2)_{i-1,j}\left(g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k-1}\right)}{4\Delta x\Delta|v|}\\ &+\frac{(E_2)_{i,j+1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k-1}\right)-(E_2)_{i,j-1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k-1}\right)}{4\Delta y\Delta|v|},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\cdot\partial_{|v|}(|v|\nabla_x g^{\varepsilon,n}) =&(E_1)_{i,j}\frac{|v|_{k+1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k+1}\right)-|v|_{k-1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k-1}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k-1}\right)}{4\Delta x\Delta|v|}\\ &+(E_2)_{i,j}\frac{|v|_{k+1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k+1}\right)-|v|_{k-1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k-1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k-1}\right)}{4\Delta y\Delta|v|},\end{aligned}$$

et

$$E\cdot\nabla_x g^{\varepsilon,n}=(E_1)_{i,j}\left(\frac{g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right)+(E_2)_{i,j}\left(\frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right).$$

On obtient donc comme discrétisation

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,y,|v|,\theta}\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,y,|v|}g^{\varepsilon,n}\right\rangle_{i,j,k,l}=\\ &\quad\frac{|v|_k^2}{2(\lambda_\varepsilon^2+1)}\left[\frac{g^{\varepsilon,n}_{i+2,j,k}-2g^{\varepsilon,n}_{i,j,k}+g^{\varepsilon,n}_{i-2,j,k}}{4(\Delta x)^2}+\frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j+2,k}-2g^{\varepsilon,n}_{i,j,k}+g^{\varepsilon,n}_{i,j-2,k}}{4(\Delta y)^2}\right]\\ &\quad+\frac{1}{2(\lambda_\varepsilon^2+1)}\left[(E_1)_{i,j}\left(\frac{g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right)+(E_2)_{i,j}\left(\frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right)\right]\\ &\quad+\frac{|v|_k}{2(\lambda_\varepsilon^2+1)}\left[\frac{(E_1)_{i+1,j}\left(g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k-1}\right)-(E_1)_{i-1,j}\left(g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k-1}\right)}{4\Delta x\Delta|v|}\right]\\ &\quad+\frac{|v|_k}{2(\lambda_\varepsilon^2+1)}\left[\frac{(E_2)_{i,j+1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k-1}\right)-(E_2)_{i,j-1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k-1}\right)}{4\Delta y\Delta|v|}\right]\\ &\quad+\frac{(E_1)_{i,j}}{2(\lambda_\varepsilon^2+1)}\left[\frac{|v|_{k+1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k+1}\right)-|v|_{k-1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i+1,j,k-1}-g^{\varepsilon,n}_{i-1,j,k-1}\right)}{4\Delta x\Delta|v|}\right]\\ &\quad+\frac{(E_2)_{i,j}}{2(\lambda_\varepsilon^2+1)}\left[\frac{|v|_{k+1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k+1}\right)-|v|_{k-1}\left(g^{\varepsilon,n}_{i,j+1,k-1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j-1,k-1}\right)}{4\Delta y\Delta|v|}\right]\\ &\quad+\frac{(E_1)_{i,j}^2+(E_2)_{i,j}^2}{2}\left[\frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j,k+2}-2g^{\varepsilon,n}_{i,j,k}+g^{\varepsilon,n}_{i,j,k-2}}{4(\Delta|v|)^2}\right]\\ &\quad+\frac{(E_1)_{i,j}^2+(E_2)_{i,j}^2}{2|v|_k}\left[\frac{g^{\varepsilon,n}_{i,j,k+1}-g^{\varepsilon,n}_{i,j,k-1}}{2\Delta|v|}\right]\end{aligned}\tag{5.64}$$

où $\lambda_\varepsilon=\varepsilon^2/\Delta t$.

5.5.2 Algorithmes

Schéma à une étape

Pour ce schéma, on utilise la discrétisation en espace présentée à la section précédente, c'est-à-dire le flux (5.60) avec la moyenne (5.61). On introduit la fonction $\tilde{h}^{n,\varepsilon}$

$$\left(I+\frac{\Delta t}{\varepsilon^2}\mathcal{T}\right)\tilde{h}^{\varepsilon,n+1}=-\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left(a\cdot\nabla_{x,v}r^{\varepsilon,n}-\langle a\cdot\nabla_{x,v}r^{\varepsilon,n}\rangle\right)+r^{\varepsilon,n}. \tag{5.65}$$

On obtient l'algorithme suivant.

Listing 5.1 – Algorithme du schéma à une étape en temps

1 Calculer $\left(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n}\right)_{i,j,k,l}$ avec (5.62).
Calculer $(\Phi(r^n))_{i,j,k,l}$ avec (5.60) et $\langle\Phi(r^n)\rangle_{i,j,k,l}$.
Calculer $\left(\mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n}\right)_{i,j,k,l}$ d'après (5.63).
Calculer $\left\langle\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n})\right\rangle_{i,j,k,l}$ d'après (5.64).
Calculer $\bar{r}^{\varepsilon,n}$ et $\bar{g}^{\varepsilon,n}$ avec (5.61).
6 À l'aide de Fourier, assembler
$r^{\varepsilon,n+1}_{i,j,k,l}=\left(I+\frac{\Delta t}{\varepsilon^2}\mathcal{T}\right)^{-1}\left[\bar{r}^{\varepsilon,n}_{i,j,k,l}-\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left((\Phi(r^{\varepsilon,n}))_{i,j,k,l}-\langle\Phi(r^{\varepsilon,n})\rangle_{i,j,k,l}\right)\right]-\varepsilon\left(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n}\right)_{i,j,k,l}$.
Calculer $h^{\varepsilon,n+1}_{i,j,k,l}$ à partir des calculs de $r^{\varepsilon,n+1}_{i,j,k,l}$, et selon la définition 5.65 puis $g^{\varepsilon,n+1}_{i,j,k,l}$ avec
$g^{\varepsilon,n+1}_{i,j,k}-\bar{g}^{\varepsilon,n}_{i,j,k}+\Delta t\left(\mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n}\right)_{i,j,k,l}-\varepsilon^2\left\langle\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n})\right\rangle_{i,j,k,l}$
11 $+\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left\langle a\cdot\nabla_{x,v}\tilde{h}^{\varepsilon,n}\right\rangle_{i,j,k,l}=0.$

Remarque 5.18. *Détaillons l'avant dernier point. Pour une fonction discrétisée $f=f_{i,j,k,l}$, on note $\widehat{f}_{(i,j,k)\kappa}$ le κ-ième mode de sa transformée de Fourier discrète en l, à i,j et k fixés. On effectue alors une transformée de Fourier en l (la coordonnée en θ) de l'équation à la ligne (7) de l'algorithme 5.1 qui devient*

$$\widehat{r^{\varepsilon,n+1}}_{(i,j,k)\kappa}=\left(1-\frac{\Delta t}{\varepsilon^2}\mathrm{i}\kappa\right)^{-1}\left[\widehat{\bar{r}^{\varepsilon,n}}_{(i,j,k)\kappa}-\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left(\widehat{\Phi(r^{\varepsilon,n})}_{(i,j,k)\kappa}-\left\langle\widehat{\Phi(r^{\varepsilon,n})}_{(i,j,k)\kappa}\right\rangle\right)\right]$$
$$-\varepsilon\widehat{\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n}}_{(i,j,k)\kappa}.$$

Cela revient simplement à une multiplication de nombres complexes, comme expliqué à la section 5.4.3.

Schéma à deux étapes

Ce schéma nécessite l'utilisation du flux (5.60) avec la moyenne adéquate. Il consiste simplement à réaliser les étapes de l'algorithme 5.1 décrites dans la partie précédente sur un pas de temps $\Delta t/2$, étape de prédiction, puis à recommencer les mêmes étapes en calculant le flux ϕ sur les $g^{\varepsilon,n+1/2}_{i,j,k,l}$ et $r^{\varepsilon,n+1/2}_{i,j,k,l}$ ainsi calculées, étape de correction. On obtient alors un schéma du type suivant .

Étape 1 : prédiction.

$$\begin{cases} r_{i,j,k,l}^{\varepsilon,n+1/2} = \left(I + \frac{\Delta t}{2\varepsilon^2}\mathcal{T}\right)^{-1}\left[\bar{r}_{i,j,k,l}^{\varepsilon,n} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon}\left((\Phi(r^{\varepsilon,n}))_{i,j,k,l} - \langle\Phi(r^{\varepsilon,n})\rangle_{i,j,k,l}\right)\right] \\ \qquad\qquad -\varepsilon(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n})_{i,j,k,l}, \\ g_{i,j,k}^{\varepsilon,n+1/2} - \bar{g}_{i,j,k}^{\varepsilon,n} + \frac{\Delta t}{2}(\mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n})_{i,j,k,l} \\ \qquad -\varepsilon^2\left\langle\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n})\right\rangle_{i,j,k,l} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon}\left\langle a\cdot\nabla_{x,v}\tilde{h}^{\varepsilon,n}\right\rangle_{i,j,k,l} = 0. \end{cases}$$

Étape 2 : correction.

$$\begin{cases} r_{i,j,k,l}^{\varepsilon,n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2}\mathcal{T}\right)^{-1}\left[r_{i,j,k,l}^{n} - \frac{\Delta t}{\varepsilon}\left(\Phi(r^{\varepsilon,n+1/2})_{i,j,k,l} - \left\langle\Phi(r^{\varepsilon,n+1/2})\right\rangle_{i,j,k,l}\right)\right] \\ \qquad\qquad -\varepsilon(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n+1/2})_{i,j,k,l}, \\ g_{i,j,k}^{\varepsilon,n+1} - g_{i,j,k}^{\varepsilon,n} + \Delta t(\mathcal{C}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n+1/2})_{i,j,k,l} - \varepsilon^2\left\langle\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{B}^{\lambda_\varepsilon}\cdot\nabla_{x,v}g^{\varepsilon,n+1/2})\right\rangle_{i,j,k,l} \\ \qquad\qquad + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\left\langle a\cdot\nabla_{x,v}\tilde{h}^{\varepsilon,n+1/2}\right\rangle_{i,j,k,l} = 0. \end{cases}$$

Remarque 5.19. *En réalité, le schéma de Lax-Ritchmyer nécessite une étape de correction différente : pour le terme raide on devrait prendre la valeur* $\frac{\Delta t}{\varepsilon^2}\mathcal{T}\frac{r^{\varepsilon,n+1}+r^{\varepsilon,n}}{2}$*, cependant le schéma perdrait son caractère de préservant l'asymptotique quelque soit la condition initiale, c'est pourquoi nous avons fait cette modification. Cependant, alors que le schéma d'origine est d'ordre* 2 *en temps, nous obtenons un schéma d'ordre* 1*.*

5.6 Résultats numériques

5.6.1 Validation de l'ordre de notre schéma

Pour valider le schéma de la section 5.5.2, on utilise une fonction initiale pour laquelle on peut calculer analytiquement la solution de l'équation. On considère un champ électrique nul. Si on prend comme fonction initiale

$$f^{\text{in}}(x,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right)(1+v_1)$$

alors la solution du problème formé par (5.59) et les fonctions initiales

$$\begin{cases} g^{\text{in}}(x,v) = \left\langle f^{\text{in}}(x,v)\right\rangle \\ r^{\text{in}}(x,v) = f^{\text{in}}(x,v) - \left\langle f^{\text{in}}(x,v)\right\rangle \end{cases}$$

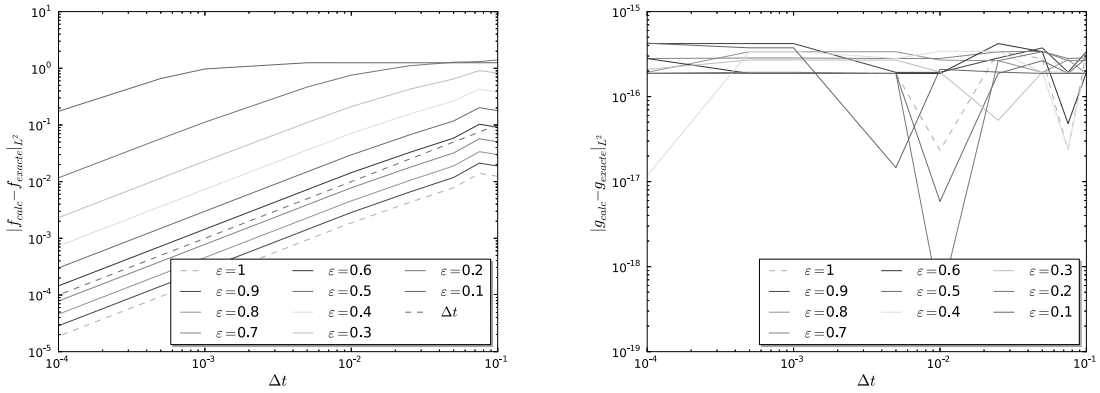
sera donnée par

$$f^{\varepsilon}(t,x,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right)(1+V_1^{\varepsilon}(0;t,x,v))$$

avec

$$V_1^{\varepsilon}(0;t,x,v) = \cos\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon^2}t\right)v_1 - \sin\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon^2}t\right)v_2.$$

Il est alors possible de vérifier que notre méthode est d'ordre 1 en temps. La solution étant homogène en espace et l'algorithme de la transformée de Fourier rapide permettant d'avoir une très bonne précision avec très peu de points. On choisit 8 points pour $x, y \in [0, 2\pi]$ et $|v| \in [\Delta|v|/2, 5]$ (où $\Delta|v| = |v|_{max}/N_{|v|}$, c'est-à-dire $\Delta|v| = 5/8$ dans ce cas). On choisit 16 points en $\theta \in [0, 2\pi]$, l'angle en vitesse, et on va jusqu'à un temps final de 0.3, les simulations numériques confirment l'ordre de la méthode, voir fig. 5.1.



(a) Erreur de la méthode en norme L^2 (b) Erreur de la méthode sur la moyenne

FIGURE 5.1 – Erreur de la méthode à deux étapes

Remarque 5.20. *L'erreur n'est cependant pas bonne pour des ε trop petits. En effet, il est difficile de capturer les oscillations de petite période de la fonction exacte lorsque $\varepsilon \searrow 0$, mais notre modèle capture très bien la moyenne (voir fig. 5.1(b)). C'est pourquoi il est intéressant de réaliser la décomposition micro-macro.*

Remarque 5.21. *On obtient des courbes similaires pour le schéma à une étape de la section 5.5.2.*

5.6.2 Validation en limite Vlasov-Poisson : amortissement Landau et instabilité double faisceau

Dans cette section, nous présentons deux cas tests classiques en physique des plasmas, dans le cas où le champ magnétique devient nul et on considère une limite de type Vlasov-Poisson. Il ne s'agit pas de confinement magnétique, ce qui est notre but dans le reste de ce chapitre, mais cela permet de valider notre algorithme sur des cas tests connus. Nous avons cependant eu besoin de faire une légère modification sur notre code. En effet, notre code permet de résoudre l'équation de Vlasov en régime centre-guide c'est-à-dire l'équation

$$\varepsilon \partial_t f^\varepsilon + \left(v \cdot \nabla_x + \frac{q}{m} E(x) \cdot \nabla_v \right) f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon} {}^\perp v \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \tag{5.66}$$

Pour pouvoir résoudre l'équation de Vlasov en limite Vlasov-Poisson et pouvoir faire varier le champ magnétique seul, nous scinderons simplement ε en deux : ε_t et ε_B de la façon suivante

$$\varepsilon_t \partial_t f^\varepsilon + \left(v \cdot \nabla_x + \frac{q}{m} E(x) \cdot \nabla_v \right) f^\varepsilon + \frac{\omega_c}{\varepsilon_B} {}^\perp v \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \tag{5.67}$$

Ainsi, lorsque $\varepsilon_t = 1$ et $\varepsilon_B \to +\infty$, notre modèle se rapproche du modèle limite Vlasov-Poisson.

Nous comparerons donc nos résultats à un code pour Vlasov-Poisson, utilisant le même schéma de Lax-Richtmyer.

Pour ce régime, nous couplons notre modèle à une résolution de l'équation de Poisson écrite de la façon suivante :

$$\Delta \phi = \rho - 1,$$

avec $\int_x \int_y \phi(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Cette équation elliptique en deux dimensions est résolue à l'aide des séries de Fourier. Nous nous concentrerons sur la représentation de la norme L^2 du champ électrique au cours du temps :

$$\epsilon(t) = \sqrt{\int_0^L \int_0^L |E(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \text{ sur une période } [0, L].$$

Dans chacun des cas suivant on prend $x \in [0, 2\pi/k_x]$, $y \in [0, 2\pi]$, $|v| \in [\Delta|v|/2, 7]$ (où $\Delta|v| = |v|_{\max}/N_{|v|}$ c'est-à-dire $\Delta|v| = 7/16$ dans notre cas) et $\theta \in [0, 2\pi]$, avec k_x un paramètre réel. Nous utilisons 16 points dans chacune des directions.

Test 1 : Amortissement Landau

La fonction de distribution initiale correspondante à ce premier test classique s'écrit

$$f(x, y, |v|, \theta, 0) = (1 + \alpha \cos(k_x x)) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|v|^2}{2}}, \tag{5.68}$$

où α est un paramètre réel. Cette fonction initiale est en réalité une perturbation d'un équilibre Maxwellien de type $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|v|^2}{2}}$. Nous représentons en fig. 5.2 l'évolution de l'énergie électrique en échelle logarithmique. La théorie de Landau en l'absence de collision indique que cette quantité présente des oscillations dont l'amplitude décroît linéairement. On représente le résultat obtenu avec notre schéma avec un champ magnétique qui tend vers 0 ($\varepsilon_B \longrightarrow +\infty$ sur les images), et comparons avec la limite dans ce cas : Vlasov-Poisson. On réalise nos tests avec le schéma à deux étapes présenté à la section 5.5.2. On prend un temps final $t = 20$, avec un pas de temps $\Delta t = 0.01$. On prend $x \in [0, 2\pi/k_x]$, $y \in [0, 2\pi]$, $|v| \in [\Delta|v|/2, 7]$ (où $\Delta|v| = |v|_{\max}/N_{|v|}$ c'est-à-dire $\Delta|v| = 7/16$ dans notre cas) et $\theta \in [0, 2\pi]$, avec k_x un paramètre réel. Nous utilisons 16 points dans chacune des directions. On choisit $k_x = 0.4$, $\alpha = 0.001$.

Les résultats que nous obtenons sont en accord avec la théorie de Landau en absence de collision, et le modèle se rapproche du modèle Vlasov-Poisson, voir fig. 5.2.

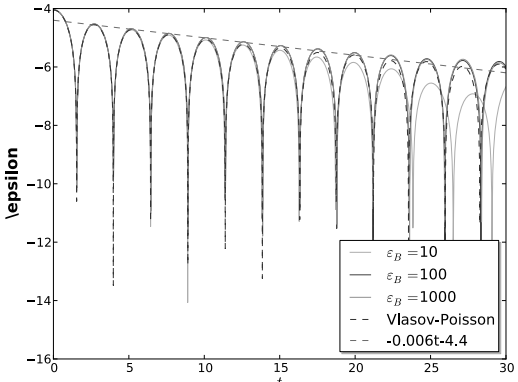


FIGURE 5.2 – Norme L^2 du champ électrique en échelle logarithmique

Test 2 : instabilité double faisceau

On considère pour ce test deux faisceaux de particules qui se rencontrent et dont la vitesse moyenne est opposée. Selon leurs vitesses de déplacement, la solution peut devenir stable ou instable. Nous regardons deux Maxwelliennes en vitesse, légèrement perturbées en x, et qui ont comme vitesse moyenne respective v_0 et $-v_0$. La fonction de répartition initiale est donc

$$f(x,y,|v|,\theta,0) = \frac{1}{4\pi}\left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}}\right)(1+\alpha\cos(k_x x))\,. \tag{5.69}$$

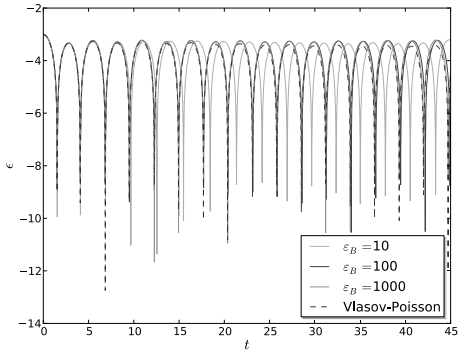
Nous choisissons $k_x = 0.2$ et $\alpha = 0.001$. On prend $x \in [0, 2\pi/k_x]$, $y \in [0, 2\pi]$, $|v| \in [\Delta|v|/2, 7]$ (où $\Delta|v| = |v|_{\max}/N_{|v|}$ c'est-à-dire $\Delta|v| = 7/16$ dans notre cas) et $\theta \in [0, 2\pi]$, avec k_x un paramètre réel. Nous utilisons 16 points dans chacune des directions. Nous représentons en fig. 5.3 la norme L^2 du champ électrique en échelle logarithmique, pour des vitesses moyennes de 1.3, 2.4 et 3, on obtient des résultats cohérents : en fonction de la valeur de v_0 il y a ou non instabilité. On compare à nouveau avec les résultats obtenus par un modèle Vlasov-Poisson.

Remarque 5.22. *Pour ces deux tests, on observe que les résultats sont indépendants de l'orientation de la condition initiale. En effet nos deux fonctions initiales sont de type*

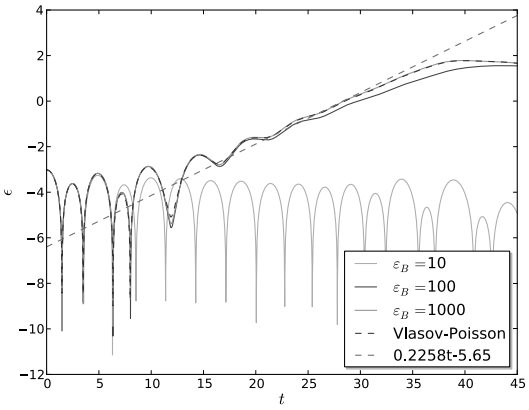
$$f(x,y,|v|,\theta,0) = \frac{1}{C(2\pi)} f_M(v)\,(1+\alpha\cos(k_x x))$$

où C et f_M sont les fonctions correspondantes au test. Alors les résultats sont aussi bien cohérents en prenant une fonction de type

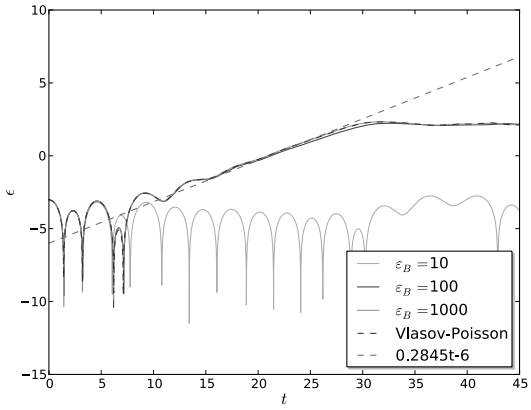
$$f(x,y,|v|,\theta,0) = \frac{1}{C(2\pi)} f_M(v)\,\big(1+\alpha\cos(k_y y)\big)\,. \tag{5.70}$$



(a) Cas $v_0 = 1.3$



(b) Cas $v_0 = 2.4$



(c) Cas $v_0 = 3$

FIGURE 5.3 – Norme L^2 du champ électrique en échelle logarithmique pour le cas de l'instabilité double faisceau 1D

5.6.3 Résultats numériques en limite centre-guide

Nous présentons ici quelques tests en limite centre-guide, c'est-à-dire où l'on compare notre schéma au modèle limite. On couple également notre équation avec l'équation de Poisson, résolue à l'aide des séries de Fourier.

Comportement asymptotique sur le cas de l'instabilité double faisceau

Dans un premier temps, on reprend la fonction initiale adaptée au cas test de l'instabilité double faisceau. Nous voulons en effet d'abord observer que notre schéma capture bien le fait que dans le cas limite, la solution devient radiale en vitesse. Ainsi la condition initiale est de la forme

$$f(x,y,|v|,\theta,0) = \frac{1}{4\pi}\left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}}\right)(1+\alpha\cos(k_x x))\,.$$

On reprend le même maillage et les mêmes paramètres que pour le cas test de l'instabilité double faisceau, c'est-à-dire $k_x = 0.2$ et $\alpha = 0.001$. On prend $x \in [0,2\pi/k_x]$, $y \in [0,2\pi]$, $|v| \in [\Delta|v|/2,7]$ (où $\Delta|v| = |v|_{\max}/N_{|v|}$ c'est-à-dire $\Delta|v| = 7/16$ dans notre cas) et $\theta \in [0,2\pi]$, 16 points dans les deux directions en espace, et 16 points dans les deux directions en vitesse. On prend $v_0 = 3$ et $\Delta t = 0,01$. La

fonction initiale est représentée fig. 5.4. On remarque que la fonction de répartition devient très rapidement radiale en vitesse lorsque $\varepsilon \searrow 0$ (fig. 5.5).

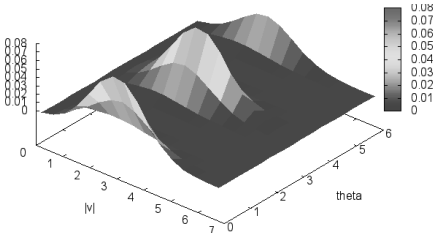
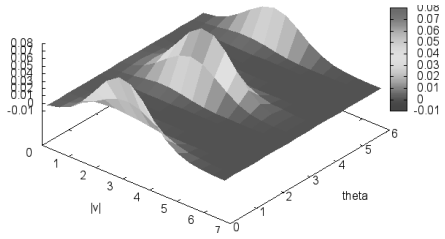
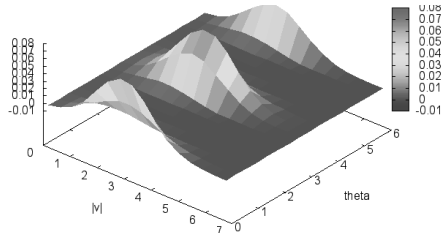


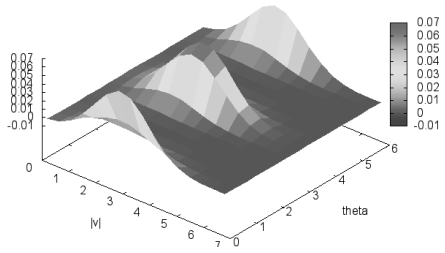
FIGURE 5.4 – Allure de la fonction initiale dans l'espace des phases



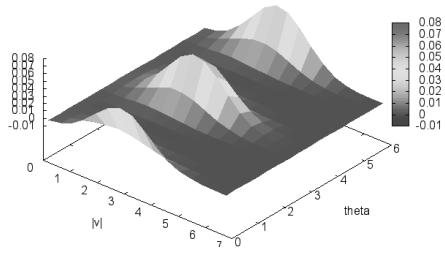
(a) $\varepsilon = 1, t = 0.04$



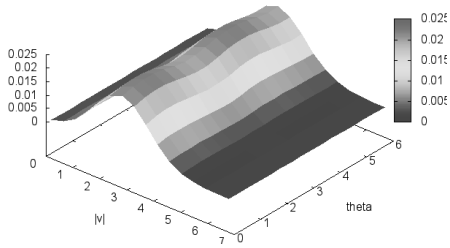
(b) $\varepsilon = 1, t = 0.07$



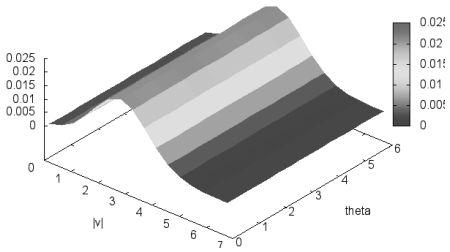
(c) $\varepsilon = 0.5, t = 0.04$



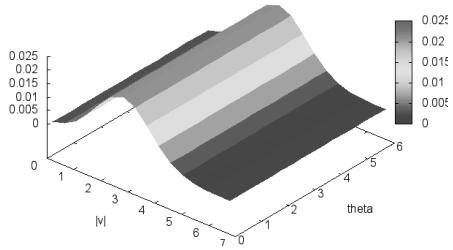
(d) $\varepsilon = 0.5, t = 0.07$



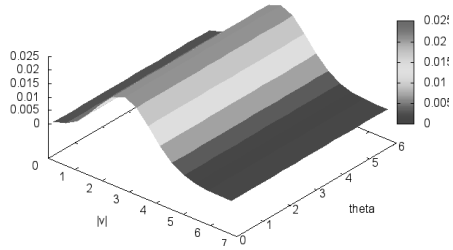
(e) $\varepsilon = 0.1, t = 0.04$



(f) $\varepsilon = 0.1, t = 0.07$



(g) $\varepsilon = 10^{-5}, t = 0.04$

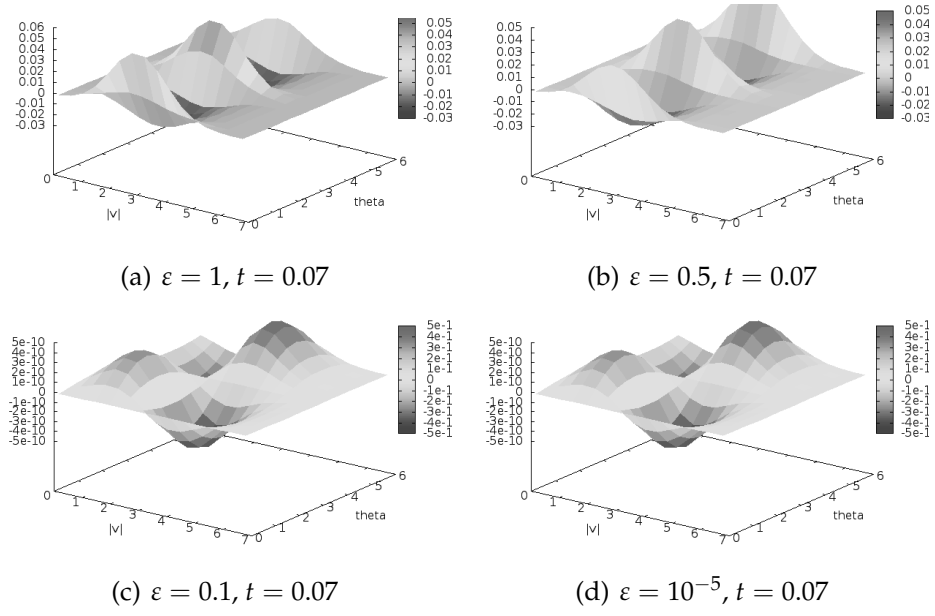


(h) $\varepsilon = 10^{-5}, t = 0.07$

FIGURE 5.5 – Allure de f^ε pour différents ε à $t = 0.04$ et $t = 0.07$.

Remarque 5.23. *On peut observer que la fonction devient radiale quelque soit la condition initiale. En effet, ce cas test montre qu'il n'est pas nécessaire de prendre une condition initiale "bien préparée".*

Remarque 5.24. *Si on observe la fonction r^ε on peut remarquer qu'elle devient petite à mesure que $\varepsilon \searrow 0$ (voir 5.6).*



(a) $\varepsilon = 1, t = 0.07$ (b) $\varepsilon = 0.5, t = 0.07$

(c) $\varepsilon = 0.1, t = 0.07$ (d) $\varepsilon = 10^{-5}, t = 0.07$

FIGURE 5.6 – Allure de r^ε pour différents ε à $t = 0.07$.

Cas test de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

On considère la fonction initiale

$$f^{\text{in}}(x, y, |v|, \theta) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{|v|^2}{2}} \left(1 + 0.1 \sin(y) + 0.05 \cos(k_x x)\right),$$

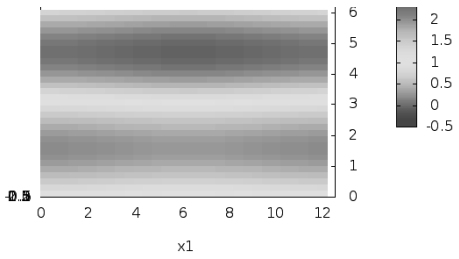
et on prend un maillage un peu plus fin que précédemment : on choisit 32 points dans chaque direction. On a $x \in [0, 2\pi/k_x]$, $y \in [0, 2\pi]$, $|v| \in [\Delta|v|, 5]$ ($\Delta|v| = |v|_{\max}/N_{|v|}$ et donc $\Delta|v| = 5/32$) et $\theta \in [0, 2\pi]$.

On montre figure 5.7 les résultats obtenus avec notre méthode, que l'on compare avec un code centre guide basé sur la même discrétisation, pour différents ε.

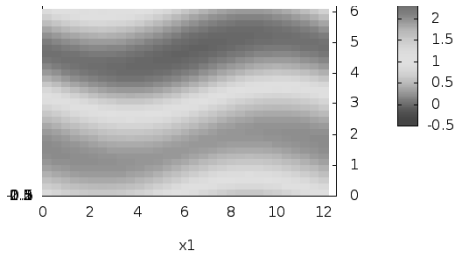
On représente figure 5.8 en bleu le logarithme du premier mode de Fourier du potentiel électrique ϕ pour différents nombres d'ondes et $\varepsilon = 0.001$. Le taux de croissance numérique γ correspond à la pente qui approche le premier mode de Fourier (en pourpre sur la figure).

Considérant plusieurs valeurs du nombre d'onde k_x il est possible de tracer la quantité γ/k_x comme une fonction de $1 - k_x$ (voir fig. 5.9).

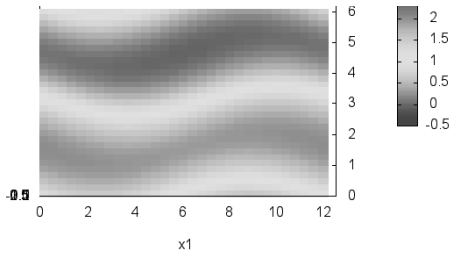
Les résultats que l'on obtient sont similaires aux travaux déjà présents dans la littérature (voir [72, 31]).



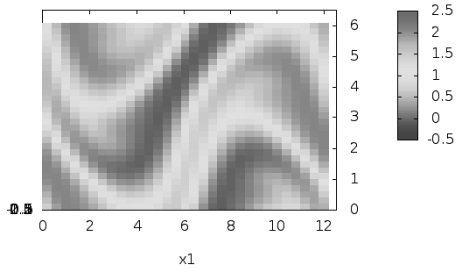
(a) Allure de f^{in} dans l'espace (x_1, x_2)



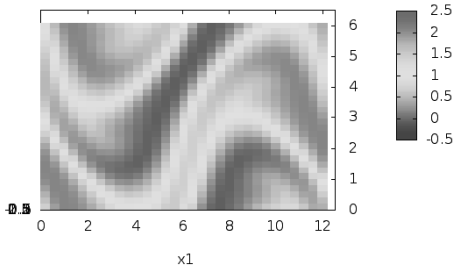
(b) $\varepsilon = 0.01$, schéma micro-macro, $t = 5$



(c) $\varepsilon = 0.01$, modèle centre-guide, $t = 5$

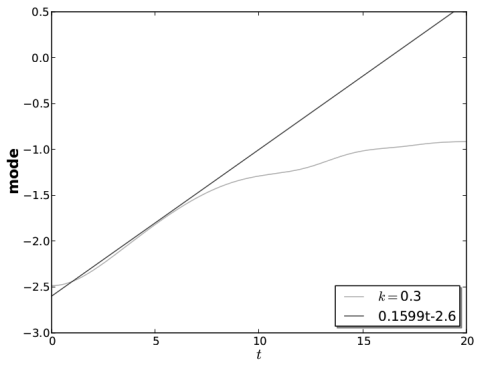


(d) $\varepsilon = 0.01$, schéma micro-macro, $t = 12.5$

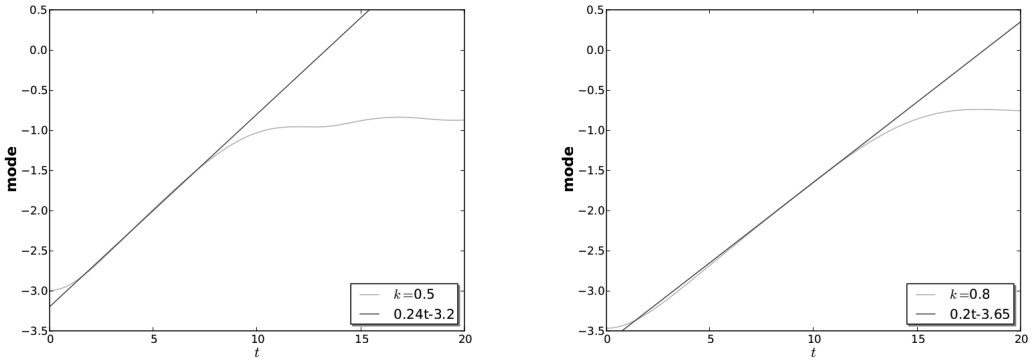


(e) $\varepsilon = 0.01$, modèle centre-guide, $t = 12.5$

FIGURE 5.7 – Allure de f^{ε} pour le schéma micro-macro avec $\varepsilon = 0.01$ et le modèle limite centre-guide à $t = 5$ et $t = 12.5$.



(a) $k = 0.3$



(b) $k = 0.5$ (c) $k = 0.8$

FIGURE 5.8 – Logarithme du premier mode de Fourier du potentiel électrique pour différents nombres d'ondes et $\varepsilon = 0.001$. Recherche du taux d'accroissement.

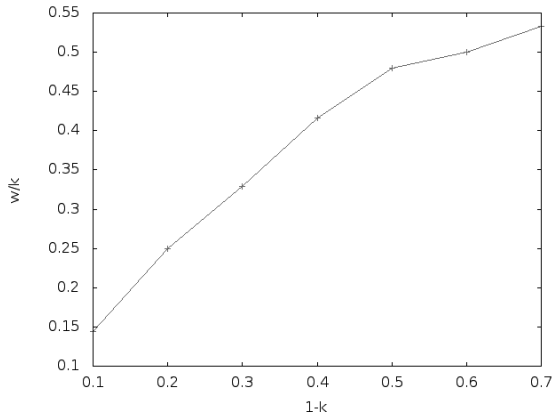


FIGURE 5.9 – Quantité ω/k_x fonction de $1 - k_x$

5.7 Conclusions et perspectives

Nous avons développé un schéma numérique micro-macro dont la discrétisation numérique suit les propriétes et résultats obtenus lors de l'étude de l'opérateur de moyenne. De ce fait, ce schéma numérique est asymptotiquement préservatif.

Ce modèle semble bien répondre à quelques cas tests standards en physique des plasmas, dans les cas les plus simples. Cependant les cas tests présentés ici sont tous dans le cas où le champ magnétique est constant ou nul. Une intégration d'un modèle moins simpliste serait souhaitable. De plus, il serait intéressant de pouvoir monter en ordre dans les schéma choisis en espace physique, ou en angle en vitesse, afin de voir si les effets sur la précision sont intéressants. D'un point de vue calcul scientifique, il serait important d'optimiser le code en séquentiel, puis de programmer un code en parallèle.

Il serait également intéressant de confronter notre modèle des cas tests plus proches de la physique, ainsi que, toujours pour se rapprocher d'une physique réaliste de notre problème, il faudra réaliser le modèle complet Vlasov-Maxwell et permettre l'utilisation d'une géométrie torique en espace physique.

De plus, il est à prévoir une intégration des collisions, à l'aide d'une adaptation des calculs réalisés au chapitre précédent.

chapitre 6

Projet CEMRACS

Vers une simulation du flux sanguin dans des géométries réalistes

Ce chapitre relate les avancées obtenues dans le cadre du projet CEMRACS ViVaBrain, réalisé pendant le CEMRACS 2012, en collaboration avec Vincent CHABANNES, Mourad ISMAIL, Gonçalo PENA, Christophe PRUD'HOMME, Marcela SZOPOS et Ranine TARABAY. Ce travail n'étant pas en relation avec le reste de la thèse, nous nous contenterons d'intégrer ici la publication qui en a résulté.

Nous nous intéressons ici à la simulation de fluides biologiques. Développer des modèles mathématiques pour la simulation de tels fluides est un sujet très actif ces dernières années (voir par exemple [39] pour des simulations de flux sanguins cardiovasculaires, ou encore [60] pour une synthèse récente des simulations du mouvement de l'air dans les poumons). Les efforts sont motivés par la complexité des phénomènes. En effet, la simulation de fluides biologiques implique plusieurs échelles (en espace et en temps) et combine plusieurs physiques différentes. Le but, à long terme, est de fournir des informations difficiles ou même impossible à obtenir *in vivo* chez des patients, et ainsi d'aider les médecins dans le diagnostique et le traitement des maladies.

Dans le contexte de telles applications, il est nécessaire de répondre à un certain nombre de questions. La génération de maillages dans des géométries complexes reste aujourd'hui un challenge. La simulation d'un flux sanguin de manière précise nécessite le choix du modèle physique le mieux adapté et un choix de conditions aux bords approprié. Enfin, la validation de ce modèle permettra la calibration et la quantification de l'incertitude. De plus, de récents développements de modèles, algorithmes et environnements de calculs, rendent possible l'utilisation d'images médicales (CT scan, IRM) comme entrée aux simulations numériques. Il est nécessaire d'avoir un cadre flexible pour inclure toutes ces données. Dans ce contexte, il faut prendre en compte pour l'erreur de discrétisation non seulement les modèles numériques, mais aussi les diverses approximations que l'on a fait pour obtenir les données en entrée (maillage, profils de vitesse, mesure de pression ou de débit).

Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'étape de simulation, en utilisant pour le moment les équations de Navier-Stokes standards pour un écoulement

fluide incompressible. Nous nous intéressons en particulier à certaines conditions aux limites pour permettre un cadre flexible par rapport au type de données en entrée (profil de vitesse, pression, débit, ...). Nous cherchons à traiter l'erreur en espace non seulement par rapport aux champs physiques (vitesse et pression) mais aussi par rapport à la géométrie. Ces simulations exigent l'utilisation de calculs haute performance et nous réalisons donc des études de scalabilité forte et faible. Il est important de noter que la précision avec laquelle le domaine physique est approché a un impact considérable sur la qualité de l'approximation numérique (voir par exemple [62]). En particulier, dans le contexte de l'approximation de flux sanguins, cela devient particulièrement pertinant comme les conditions aux bords peuvent être aussi une inconnue au problème et doivent être approchées précisément.

Dans ces buts, notre cadre de calcul est construit avec la librairie FEEL++ [66, 65] qui permet d'utiliser des méthodes de Galerkin continues ou discontinues en 1D, 2D ou 3D, d'ordre arbitraire, de manière transparente en parallèle, sur des simplex et des hypercubes. De plus, précisons que le noyau mathématique de la librairie permet de traiter un large choix de méthodes numériques, et a été réalisé de façon à ce que de nouvelles puissent être ajoutées facilement. En particulier, dans ce travail, nous utilisons et nous comparons des approximations d'ordre faible comme d'ordre élevé, y compris pour la géométrie 3D.

Dans ce chapitre, comme le sujet s'éloigne du reste de la thèse, et parce qu'il s'agit du texte de l'article tel qu'il a été publié, il sera retranscrit en anglais.

Plan du chapitre

6.1 Mathematical models and methods 151
6.1.1 Variational Formulations 151
Dirichlet-Dirichlet 153
Dirichlet-Neumann 154
Neumann-Neumann 154
Mixed boundary conditions 155
6.1.2 Discretization choices 156
6.2 HPC with Feel++ 158
6.2.1 General description 158
6.2.2 Challenges in handling complex geometries 159
6.2.3 Scalability analysis 161
Stokes model 161
Navier-Stokes model 162
6.3 Numerical results 164
6.3.1 Flow simulation on cerebrovenous system 169
6.4 Conclusion and outlook 170

6.1 Mathematical models and methods

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, denote a bounded connected domain, representing the lumen of the vessel, or system of vessels, under investigation. In the context of blood flow, it is assumed that the unsteady incompressible Navier-Stokes equations hold. They read as :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2\mathrm{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \text{ in } \Omega \times I \tag{6.1}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0, \text{ in } \Omega \times I \tag{6.2}$$

where $I = (0, T]$, $\mathbf{u}$ and p are the velocity and pressure of the fluid, respectively, ρ and μ are the density and the dynamic viscosity of the fluid, respectively, and $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ is the linear fluid deformation tensor (given by the expression $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$). These notations allow to define the stress tensor $\sigma(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})$, where $\mathbf{I}$ is the identity tensor. System (6.1), (6.2) is completed with appropriate initial and boundary conditions.

6.1.1 Variational Formulations

Our goal is to impose different kinds of boundary conditions (for both velocity and pressure) to system (6.1)-(6.2). Since these are independent of the presence of a convective term or a time derivative, in the following we focus only on the Stokes equations.

We are interested in fluid flows in different 2D and 3D geometries, mainly, (straight and curved) pipes and realistic vessels geometries. In all these cases, the domain of interest is denoted by Ω and its boundary $\partial\Omega$ is decomposed into three parts : Γ_w (where we will consider an adherence boundary condition), Γ_{in} (inlet) and Γ_{out} (outlet). Note that inlet and outlet can have several connected components, see section 6.3.1. The model (differential) problem is then written as : find $(\mathbf{u}, p)$ such that

$$-2\mu \mathrm{div}(\mathrm{D}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{0}, \text{ in } \Omega \tag{6.3}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0, \text{ in } \Omega \tag{6.4}$$

with boundary conditions that will be detailed later.To write formally a variational formulation of the problem (6.3)-(6.4), we denote by $\mathbb{V}$ and $\mathbb{M}$ the functional spaces for the velocity and pressure fields, respectively. These spaces will be fixed later according to the specific choices of boundary conditions. We will take, for the moment, $\mathbb{V} = [H^1(\Omega)]^d$ and $\mathbb{M} = L^2(\Omega)$.

Taking the scalar product of equation (6.3) by a test function $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, multiplying equation (6.4) by a test function $q \in \mathbb{M}$ and integrating the resulting equalities over Ω, we are led to the following weak formulation : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$-2\mu \int_\Omega \mathrm{div}(\mathrm{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}x = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \tag{6.5}$$

$$\int_\Omega q \mathrm{div}(\mathbf{u}) \mathrm{d}x = 0, \forall q \in \mathbb{M}. \tag{6.6}$$

We integrate by parts the first integral of equation (6.5), we obtain

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \mathrm{d}x - 2\mu \int_{\partial\Omega} \mathrm{D}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s - \int_\Omega p \mathrm{div}(\mathbf{v}) v \mathrm{d}x = \quad 0.$$

Note that, for symmetry reasons, the equality $\mathrm{D}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v})$ holds. Thus, the variational formulation of (6.3)-(6.4) can be written as : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x - 2\mu \int_{\partial\Omega} \mathrm{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s - \int_\Omega p \mathrm{div}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \tag{6.7}$$

$$\int_\Omega q \mathrm{div}(\mathbf{u}) \mathrm{d}x = 0, \forall q \in \mathbb{M}, \tag{6.8}$$

or, equivalently : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}s - \int_\Omega p \mathrm{div}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x = \quad 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \tag{6.9}$$

$$\int_\Omega q \mathrm{div}(\mathbf{u}) \mathrm{d}x = \quad 0, \quad \forall q \in \mathbb{M}. \tag{6.10}$$

We have not yet incorporated the boundary conditions in the weak formulation. To do so, we start by the common boundary condition to all our simulations which is the *no slip* condition on Γ_w

$$\mathbf{u} = 0 \text{ on } \Gamma_\omega.$$

The standard way to deal with this essential boundary condition is to choose the functional space $\mathbb{V}$ as

$$\mathbb{V} = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d | \mathbf{v} = \mathbf{0} \in \Gamma_\omega \right\}. \tag{6.11}$$

Within this functional setting for the velocity field, equations (6.9)-(6.10) are rewritten as : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}s - \int_\Omega p \mathrm{div}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x = \quad 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \tag{6.12}$$

$$\int_\Omega q \mathrm{div}(\mathbf{u}) \mathrm{d}x = \quad 0, \quad \forall q \in \mathbb{M}. \tag{6.13}$$

In the weak formulation (6.12)-(6.13), we have to take into account the boundary conditions on the inlet and outlet parts of the boundary. Recall that in this work we are interested in simulating fluid flows in straight and curved pipes and in realistic geometries of blood vessels. In all theses cases, the computational domain is only a part of the physical one. Therefore, inlets and outlets are in fact the sections that separate the computational and physical domains. Consequently, in order not to change the physics of the problem, special attention should be paid on the boundary conditions enforced at the inlets or outlets. In the following, let us consider different types of boundary conditions for the inlet and outlet sections. We start by the more classical boundary condition, the case where we know the velocity profiles at inlet and outlet (for example, Poiseuille profiles). The second case we consider is the free outlet condition. Finally, we focus on less classical boundary conditions that correspond to the case where we know only the pressure at the inlet and outlet sections. These nonstandard boundary conditions are very useful if we want to make a comparison between the simulations performed and the experimental data. Indeed, in physical experiments it is easier to impose pressure than velocity.

Dirichlet-Dirichlet boundary conditions

Let us suppose that we know the velocity profiles at the inlets and outlets and that they are described by two functions $\mathbf{u}_{in} \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{in})]^d$ and $\mathbf{u}_{out} \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{out})]^d$ such that

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} \text{ on } \Gamma_{in} \tag{6.14}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{out} \text{ on } \Gamma_{out}. \tag{6.15}$$

In this case, in order to have a well posed problem, it is sufficient to choose

$$\mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d | \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_w, \, \mathbf{v} = \mathbf{u}_{in} \text{ on } \Gamma_{in}, \, \mathbf{v} = \mathbf{u}_{out} \text{ on } \Gamma_{out}\} \tag{6.16}$$

and $\mathbb{M} = L^2_0(\Omega)$, where $L^2_0(\Omega)$ denotes the set of functions in $L^2(\Omega)$ with zero mean value. With this choice of functional spaces, problem (6.12)-(6.13) becomes : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x - \int_\Omega p \mathrm{div}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1_0(\Omega)]^d, \tag{6.17}$$

$$\int_\Omega q \mathrm{div}\mathbf{u} \mathrm{d}x = 0, \quad \forall q \in L^2_0(\Omega). \tag{6.18}$$

The additionnal restriction of zero mean value to $L^2_0(\Omega)$ allows to uniquely define the pressure in $\mathbb{M}$ and may be integrated in the variational formulation (6.17)-(6.18) by adding a suitable Lagrange multiplier. The final variational formulation, with the Lagrange multiplier, reads as : find

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x - \int_\Omega p \mathrm{div}\mathbf{v} \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1_0(\Omega)]^d, \tag{6.19}$$

$$\int_\Omega (q \mathrm{div}\mathbf{u} + \zeta q) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall q \in \mathbb{M}, \tag{6.20}$$

$$\int_\Omega p\xi \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{6.21}$$

Dirichlet-Neumann boundary conditions

The previous Dirichlet-Dirichlet boundary conditions does not correspond to the most common real situation because, in general, we do not know exactly the velocity profile at the outlet sections, even if we assume that we know it at the inlets. Indeed, it is difficult to predict the velocity profile at outlets since it depends also on the channel geometry or the number of outlets sections in a vessel network, for example. Therefore, we can consider the so called *free outlet* conditions. These boundary conditions can be formalized as

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} \quad \text{on } \Gamma_{in}, \tag{6.22}$$
$$\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_{out}. \tag{6.23}$$

In this case, we retrieve the same variational formulation as in (6.17)-(6.18), but taking

$$\mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d | \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_w, \, \mathbf{v} = \mathbf{u}_{in} \text{ on } \Gamma_{in}\} \text{ and } \mathbb{M} = L^2_0(\Omega). \tag{6.24}$$

It appears that this choice of boundary conditions is not in agreement with our problem since the velocity field is not necessary orthogonal to the outlet section. See [60] for some studies on these boundary conditions in the framework of human lung modeling and some numerical experiments showing this defect or [71] for some numerical examples in the case of blood flow simulation.

Neumann-Neumann boundary conditions

Boundary conditions involving the pressure and the strain tensor : To overcome the difficulties related to the free outlet boundary conditions, we assume now that we know the exact value of the normal stress tensor at inlets and outlets. Due to the definition of the stress tensor, it is sufficient to know both the pressure and the velocity at inlets and outlets to enforce such boundary conditions. They read as

$$\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = \sigma_{in}\mathbf{n} = -p_{in}\mathbf{n} + 2\mu \mathrm{D}(\mathbf{u}_{in})\mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_{in}, \tag{6.25}$$
$$\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = \sigma_{out}\mathbf{n} = -p_{out}\mathbf{n} + 2\mu \mathrm{D}(\mathbf{u}_{out})\mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_{out}. \tag{6.26}$$

The corresponding variational formulation is then written as : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v}) \mathrm{d}x - \int_\Omega p \mathrm{div}\mathbf{v} \mathrm{d}x = \int_{\Gamma_{in}} \sigma_{in}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}s + \int_{\Gamma_{out}} \sigma_{out}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}s, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \tag{6.27}$$

$$\int_\Omega q \mathrm{div}\mathbf{u} \mathrm{d}x = 0, \quad \forall q \in \mathbb{M}, \tag{6.28}$$

where

$$\mathbb{M} = L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d | \, \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_w\}. \tag{6.29}$$

Boundary conditions involving the pressure without the strain tensor : It is obvious that in the most common situation, the normal stress tensor is not known at inlets and outlets. However, in some physical experiments we have direct access to the pressure at inlets and outlets because it is imposed by the experience. Therefore, we suppose that we have two functions $p_{in} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{in})$ and $p_{out} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{out})$ such that

$$\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = -p_{in}\mathbf{n} \text{ on } \Gamma_{in}, \tag{6.30}$$

$$\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = -p_{out}\mathbf{n} \text{ on } \Gamma_{out}. \tag{6.31}$$

The corresponding variational formulation is : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v})\mathrm{d}x - \int_\Omega p\mathrm{div}\mathbf{v}\, dx = -\int_{\Gamma_{in}} p_{in}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_{out}} p_{out}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}s, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \tag{6.32}$$

$$\int_\Omega q\mathrm{div}\mathbf{u}\, dx = 0, \quad \forall q \in \mathbf{M} \tag{6.33}$$

where $\mathbb{M} = L^2(\Omega)$ and $\mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d | \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_w\}$.

The variational formulation (6.32)-(6.33) gives an appropriate framework for imposing boundary conditions on the pressure. However, this option may only make sense if the stress tensor is diagonal at inlets and outlets, meaning that the computational domain Ω is separated by inlets and outlets from a perfect gas-like media at pressure p_{in} and p_{out}. However, this is obviously not the case for blood flow simulations, where Ω is the computational domain, corresponding to a part of the circulatory system and this is why this formulation cannot be used formulation in our case. For example, the formulation (6.32)-(6.33) can not even recover the Poiseuille flow in a straight pipe !

Mixed boundary conditions

To overcome the problems related to the previous variational formulations, especially the one given by equations (6.32)-(6.33), we introduce in this section an additional boundary condition for the velocity on inlets and outlets. These non-standard boundary conditions involving the pressure have been studied, from a theoretical point of view, in [29] for the first time and recently in [2]. More precisely, we impose $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (or $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$ where $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ stands for the unit tangent vector) on $\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$. The new variational formulation is then written as : find $(\mathbf{u}, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v})\mathrm{d}x - \int_\Omega p\mathrm{div}\mathbf{v}\mathrm{d}x = -\int_{\Gamma_{in}} p_{in}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_{out}} p_{out}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}s, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \tag{6.34}$$

$$\int_\Omega q\mathrm{n}\mathbf{u}\mathrm{d}x = 0, \quad \forall q \in \mathbb{M}, \tag{6.35}$$

where

$$\mathbb{M} = L^2(\Omega) \quad \text{and} \quad \mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d | \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_w, \, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}\}. \tag{6.36}$$

This formulation allows to impose the pressure on inlets and outlets while, at the same time, enforcing the velocity field to be parallel to the outward normal vector at inlets and outlets.

From the numerical point of view, the constraints $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ on $\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ (or $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$ on $\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$) can be taken into account by using Lagrange multipliers or penalty techniques. In the case of Lagrange multipliers, the problem reads as : find $(\mathbf{u}, p, \lambda_{in}, \lambda_{out}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{M} \times \Lambda_{in} \times \Lambda_{out}$ such that

$$2\mu \int_\Omega \mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\mathbf{v})\mathrm{d}x - \int_\Omega p\mathrm{div}\mathbf{v}\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_{in}} \lambda_{in} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{n}\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_{out}} \lambda_{out} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{n}\mathrm{d}s = -\int_{\Gamma_{in}} p_{in}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_{out}} p_{out}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\mathrm{d}s, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \tag{6.37}$$

$$\int_\Omega q\mathrm{div}\mathbf{u}\mathrm{d}x = 0, \quad \forall q \in \mathbb{M}, \tag{6.38}$$

$$\int_{\Gamma_{in}} \eta_{in} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{n}\mathrm{d}s = 0, \quad \forall \eta_{in} \in \Lambda_{in}, \tag{6.39}$$

$$\int_{\Gamma_{out}} \eta_{out} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{n}\mathrm{d}s = 0, \quad \forall \eta_{out} \in \Lambda_{out}, \tag{6.40}$$

where $\mathbb{M} = L^2(\Omega)$, $\mathbb{V} = \{\overline{v} \in [H^1(\Omega)]^d | \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_w\}$, $\Lambda_{in} = [H^{-\frac{1}{2}}\Gamma_{in}]^d$ and $\Lambda_{out} = [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{out}]^d$.

6.1.2 Discretization choices

We introduce in the sequel the discretization strategy, following the framework presented in [27]. Let δ be a discretization parameter. We define $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) a reference elementary convex, *e.g.* a simplex or a hypercube. We denote by $\mathcal{T}_\delta$ a finite collection of nonempty, disjoint open simplices or hypercubes $\mathcal{T}_\delta \equiv \mathcal{T}_{h,k} = \{K = \varphi^{geo}_{K,k}(\hat{K}))\}$ forming a partition of Ω such that $h = max_{K \in \mathcal{T}_\delta} h_K$, with h_K denoting the diameter of the element $K \in \tau_\delta$ and $\varphi^{geo}_{K,k}$ is the polynomial of degree k that maps $\hat{K}$ to K which is also called the geometric transformation. The partition $\mathcal{T}_\delta$ induces a discretization of Ω, denoted Ω_δ, defined as the union of the closure of all elements in this partition. Note that if Ω is a polyhedral domain then $\Omega_\delta = \Omega$. Following these notations, we denote $\Gamma_{in,\delta}$, $\Gamma_{out,\delta}$, $\Gamma_{\omega,\delta}$ the discretization of Γ_{in}, Γ_{out}, Γ_ω respectively.

We say that a hyperplanar closed subset F of $\overline{\Omega_\delta}$ is a *mesh face* if it has positive $(d-1)$-dimensional measure and if either there exist K_1, $K_2 \in \mathcal{T}_\delta$ such that $F = \partial K_1 \cap \partial K_2$ (in this case F is called an *internal face*) or there exists $K \in \mathcal{T}_\delta$ such that $F = \partial K \cap \partial \Omega_\delta$ (and F is called a *boundary face*). Internal faces are collected in the set $\mathcal{F}^i_\delta$, boundary faces in $\mathcal{F}^b_\delta$ and we let $\mathcal{F}_\delta := \mathcal{F}^i_\delta \cup \mathcal{F}^b_\delta$. For all $F \in \mathcal{F}_\delta$, we define $\mathcal{T}_F := \{K \in \mathcal{T}_\delta | F \subset \partial K\}$. For every interface $F \in \mathcal{F}^i_\delta$ we introduce two associated normals to the elements in $\mathcal{T}_F$ and we have $\mathbf{n}_{K_1,F} = -\mathbf{n}_{K_2,F}$, where $\mathbf{n}_{K_i,F}$, $i \in \{1, 2\}$, denotes the unit normal to F pointing out of $K_i \in \mathcal{T}_F$. On a boundary face $F \in \mathcal{F}^b_\delta$, $\mathbf{n}_F = \mathbf{n}_{K,F}$ denotes the unit normal pointing out of Ω_δ.

Without loss of generality we suppose from now on that we work with simplicial elements. Given a positive integer N, we denote by $\mathbb{P}^N(\hat{K})$ and $\mathbb{P}^N(K)$ the

spaces of polynomials of total degree less or equal than N defined in $\hat{K}$ and K respectively. We define $P_c^N(\Omega_\delta \equiv \Omega_{(h,k)})$ and $[P_c^N(\Omega_\delta \equiv \Omega_{(h,k)})]^d$ with $k \geqslant 1$:

$$P_c^N(\Omega_\delta) = \{v \in C^0(\Omega_\delta) |\ v \circ \varphi_{K,k}^{geo} \in \mathbb{P}^N(\hat{K})\ \forall K \in \mathcal{T}_\delta\}, \quad [P_c^N(\Omega_\delta)]^d = \prod_1^d P_c^N(\Omega_\delta). \tag{6.41}$$

We choose the generalized Taylor-Hood finite element for the velocity-pressure discretization, that is to say we look for the velocity in $[P_c^{N+1}(\Omega_{(h,k_{geo})})]^d$ and the pressure in $P_c^N(\Omega_{(h,k_{geo})})$. We shall use from now on the notation $\mathbb{P}_{N+1}\mathbb{P}_N\mathbb{G}_{kgeo}$ to specify exactly the discretization spaces used for the velocity, pressure and geometry, respectively. The resulting approximate velocity and pressure fields are denoted by $\mathbf{u}_\delta$ and p_δ respectively. Regarding the formulation (6.37)-(6.40) in section 6.1.1, we follow the same discretization process as previously for velocity, pressure and geometry. Denote $\Gamma_\delta = \Gamma_{in,\delta} \cup \Gamma_{out,\delta}$ and we look for the discrete Lagrange multiplier in

$$[P_c^N(\Gamma_\delta)]^d = \prod_1^d P_c^N(\Gamma_\delta), \text{ where } P_c^N(\Gamma_\delta) = \{v \in C^0(\Gamma_\delta) | v \circ \varphi_{F,k}^{geo} \in \mathbb{P}^N(\hat{N}) \forall F \in \mathcal{F}_\delta^b \cap \Gamma_\delta\}, \tag{6.42}$$

$\hat{F} \subset \mathbb{R}^d$ is a reference elementary convex of topological dimension $d-2$ (*i.e.* corresponding to a face of $\hat{K}$) and $\phi_{F,k}^{geo}$ is the polynomial of degree k_{geo} that maps $\hat{F}$ to F. A natural choice for the polynomial degree of the Lagrange multipliers is to take $N + k_{geo}$ where N is the velocity polynomial order in order to ensure that (6.39)-(6.40) are satisfied exactly. This will require further analysis. However the code, see 6.1, and some promising initial numerical results, see 6.1, are already available.

Listing 6.1 – FEEL++ code to implement the mixed boundary conditions description in section 6.1.1 using Lagrange multipliers

```
Environment env( _argc=argc,, _argv=argv,
        _desc=feel_options(),
        _about=about(   _name="poiseuille",
        _author="Feel++ Consortium",
        _email = "feelpp-devel@feelpp.org"));
auto mesh = Cylinder<1>();
auto Vh = Pch<2,Vectorial>(_mesh,mesh); //velocity
auto Qh = Pch<1>(mesh);//pressure
auto Lmesh = merge(mesh->trace(markedfaces(mesh,"inlet")),
        mesh->trace(markedfaces(mesh,"outlet"));
auto Lh = Pch<2,Vectorial>(_mesh=Lmesj); //Larage mult.
auto Xh = Vh*Qh*Lh;
auto U  = Xh-> element();
auto u = U.element<0>();
auto p = U.element<1>();
auto l = U.element<2>();

auto a = form2(_trial=Wh, _test=Xh);
a = integrate(_range=elements(mesh),
        _expr=sym(gradt())*trans(sym(grad(u))) );
a+=integrate(_range=elements(mesh),
```

```
        _expr=-div(u)*idt(p)-divt(u)*id(p));
a+=integrate(_range=marketfaces(mesh,{"inlet","outlet"}),
        _expr=-trans(cross(idt(u),N()))*id(1)-trans(cross(id(u),N
            ()))*idt(1);
auto l = form1(_test=Vh);
l = integrate(_range=markedfaces(mesh,"inlet"),
        _expr=-trans(p_in*N())*id(v));
l+= integrate(_range=markedfaces(mesh,"outlet"),
        _expr=-trans(p_ou*N())*id(v));
a+=on(_range=markedfaces(mesh,"wall"),_rhs=1,_element=u,_expr=zero
    <3,1>());
a.solve(_rhs=1,_solution=U);
```

Figure 6.1 displays the results of the above code using the Stokes mixed boundary condition formulation of section 6.1.1.

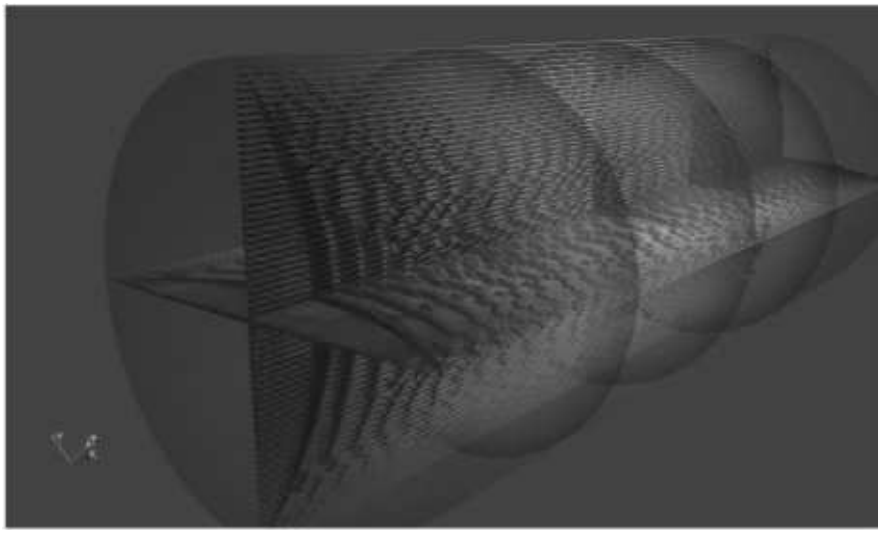


FIGURE 6.1 – Streamlines, velocity, arrows and pressure isosurfaces of a Poiseuille flow in a cylinder using mixed boundary conditions

6.2 HPC with Feel++

6.2.1 General description

In order to perform our numerical experiments, we use the FEEL++ library, *Finite Element Embedded Language in* C++, see [65], [67], which provides a clear and easy interface to solve complex PDE systems. It aims at bringing the scientific community a tool for the implementation of advanced numerical methods and high performance computing. Some recent applications of FEEL++ to multiphysics problems in blood flow context can be found in the literature, see *e.g.* [27, 38, 62].

FEEL++ relies on a so-called *domain specific embedded language* (DSEL) designed to closely match the Galerkin mathematical framework. In computer science, DS(E)Ls are used to partition complexity and, in our case, the DSEL splits low

level mathematics and computer science on one side (leaving the FEEL++ developer to enhance them) and high level mathematics as well as physical applications to the other side (left to the FEEL++ user). This allows FEEL++ to be used for teaching purposes, solving complex problems with multiple physics and scales or rapid prototyping of new methods, schemes or algorithms.

The DSEL on FEEL++ provides access to powerful, yet with a simple and seamless interface, tools such as interpolation or the clear translation of a wide range of variational formulations into the variational embedded language. Combined with this robust engine lie also state of the art arbitrary order finite elements — including handling high order geometrical approximations, — high order quadrature formulas and robust nodal configuration sets. The tools at the user's disposal grant the flexibility to implement numerical methods that cover a large combination of choices from meshes, function spaces or quadrature points using the same integrated language and control at each stage of the solution process of the numerical approximations.

To illustrate, 6.1 displays the full code to implement the formulations described in section 6.1.1. It shows the power th the DSEL to write this complex and non-standard mathematical formulation in a very compact and expressive way.

In this paper, we use recent developments which allow to operate on large-scale parallel infrastructures. The general strategy used is *parallel data* framework using MPI and thanks to DSEL the MPI communications are seamless to the user : (*i)* we start with automatic mesh partitioning using GMSH [44] (Chaco/Metis) — adding information about ghost cells with communication between neighbor partition ;— (*ii)* the FEEL++ parallel data structures such as meshes, (elements of) function spaces — create a parallel degrees of freedom table with local and global views ; — (*iii)* and finally we use the library PETSC [5, 6, 7] which provides access to a Krylov subspace solvers(KSP) coupled with PETSC preconditioners such as Block-Jacobi, ASM, GASM.

Remarque 6.1. *The last preconditioner is an additive variant of the Schwarz alternating method for the case of many subregions, see [73]. For each sub-preconditioners (in the subdomains),* PETSC *allows to choose a wide range of sequential preconditioners such as LU, ILU, JACOBI, ML. Moreover, the precondioners ASM or GASM can be used with or without an algebraic overlap. Other parallel preconditioners are available in* PETSC *but not used here. In particular we would like to mention the* MUMPS *direct parallel solver [1]. We use it both as solver and preconditioner for iterative solves.* FIELDSPLIT *preconditioners are also of notice for the applications we have : they allow to exploit the structure of block matrix.*

From now on, we shall denote GASM1 (resp GASM2) for a preconditioner GASM with an overlap of size 1 (respectively, 2). A complete description of the FEEL++ high performance framework — with blood flow applications — is available in the thesis [26].

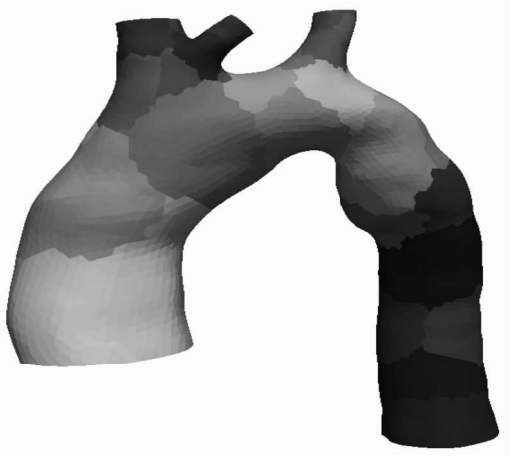
6.2.2 Challenges in handling complex geometries

Geometries that describe blood flow are complex with three-dimensional structures, often asymmetric and presenting a variable pattern. From medical images,

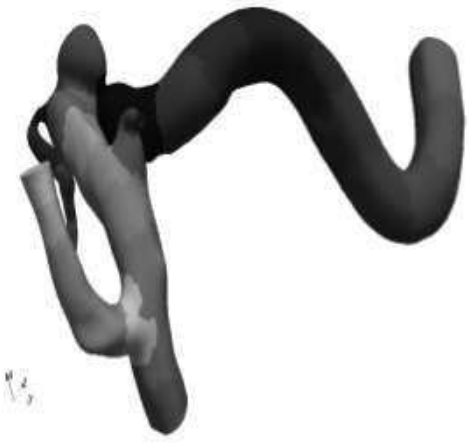
a complex process can be developed to build computational meshes, this being the objective of many research and development projects. Figure 6.2(b) shows a computational mesh obtained through this process from MRA images. Other realistic meshes can be found on GMSH [44] website, see for example figures 6.2(b) and 6.2(c) that display an aorta and an artery with an aneurysm. The mesh generation was done using GMSH [58].



(a) A mesh partition (32 partitions) of the cerebrovenous system



(b) Mesh partitioning of an aorta



(c) Mesh partitioning of an artery with an aneurysm

FIGURE 6.2 – Realistic meshes of an aorta and an artery with aneurysm.

Once we have the computational meshes, they are partitioned, see section 6.2.1 and the blood flow computation is distributed using MPI. One of the crucial points is to check if our strategy is robust and scalable over a large number of processors.

6.2.3 Scalability analysis

We now turn to a scalability analysis applied to problems in fluid mechanics using FEEL++. We propose here to study two configurations : *(i)* a Stokes model with a simple geometry (a cylinder), *(ii)* a Navier-Stokes model with complex and realistic geometry (an aorta) presented in figure 6.2(b) in order to check the strong scalability — increase processing units for a fixed size problem — and weak scalability — increase processing units along with the problem size. — Each test will measure *(i)* the assembly CPU time for matrices and vectors as well as the necessary MPI communications, *(ii)* the linear and/or non-linear algebraic system CPU time.

Regarding the strong scalability, the problem size stays fixed while the number of processing elements increases from$N^{\text{core}} = N^{\text{core}}_{\text{min}}, \dots, N^{\text{core}}_{\text{max}}$ and we are interested in the *speed-up* $= t_{N^{\text{core}}_{\text{min}}}/t_{N^{\text{core}}}$ obtained with N^{core} cores where $t_{N^{\text{core}}_{\text{min}}}$ is the elapsed wall-clock time with $N^{\text{core}}_{\text{min}}$ cores and $t_{N^{\text{core}}}$ the elapsed wall-clock time with N^{core} processors.

As to the weak scalability, the problem size increases with the number of processing units such that the problem size assigned to each processing element remains constant throughout all computations and we measure the *efficiency* $= 100(t_{N^{\text{core}}_{\text{min}}}/t_{N^{\text{core}}})$.

Stokes model

To perform the scalability test, we consider a cylinder of length L_C and radius 0.5. We impose Dirichlet-Neumann boundary conditions, *i.e.*, a parabolic known velocity profile at the inlet and a zero normal stres at the outlet, see section 6.1.1

(a) Strong scalability settings

MESH	TETRAHEDRONS	DOF
M8	111,475	530,275
M9	151,443	712,545
M10	210,526	980,105

(b) Weak scalability settings

N^{core}	L_c	DOF (M4)	DOF (M5)	DOF(M6)
32	16	297,372	398,181	563,574
16	8	146,094	197,262	290,423
8	4	77,255	105,296	148,027
4	2	39,834	56,075	75,005
2	1	23,950	31,971	41,869
1	0.5	15,705	19,207	26,523

TABLE 6.1 – Configurations used for the stong scalability with the Stokes model and approximation spaces $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$.

The scalability tests of Stokes model were made using the $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$ approximation spaces. The different configurations used are displayed in table 6.0(a) for the strong scalability and in table 6.0(b) for the weak scalability. Figure 6.3 displays all the results obtained. We use several meshes associated to a characteristic mesh size which we denote M4,M5,M6, etc. The larger the index, the finer the mesh. We also compare two parallel preconditioners GASM1 and GASM2. Both precondtioners use a direct subsolver (LU with MUMPS) within the subdomains.

The figures 6.3(a) and 6.3(b) display the elapsed wall-clock CPU time to solve linear system for strong and weak scalability. We see that the preconditioner GASM1 is more efficient than GASM2 for each scalability test. Figure 6.3(c) plots the number of solver iterations associated to the strong scalability test : the preconditioner GASM2 reduces the number of iteration which is due to the overlap. However in both cases, the number of iterations increases significantly as we increase the number of cores. A similar behaviour for weak scalability is observed in figure 6.3(c). In particular when using 32 cores the number of solver iterations increases a lot and we have slow convergence. Figures 6.3(e) and 6.3(f) the assembly time of the algebraic structures. The performances are perfect with for both scalability tests up to 16 processors and it deteriorates at 32 cores as the communication become dominant. We note however that the speed-up is improving with the finest meshes.

To conclude the overall — the sum of assembly and solves times — measured speed-up is very good, even above an ideal speed-up, see figure 6.3(g). As to weak scalability, see figure 6.3(h), performance decreases with increasing the number of cores which is explained by the strong increase in the number of iterations.

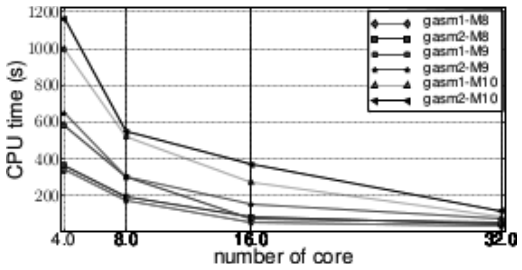
Navier-Stokes model

We now turn to the strong scalability test for our Navier-Stokes strategy on a realistic geometry — an aorta, — see figure 6.2(b). The formulation of this nonlinear model is described with equations (6.1)-(6.2). Regarding the problem setting, we have a nonzero value of normal stress tensor at the inlet, a zero normal stress is set on the four outlets and we impose a no-slip condition on the wall, see section 6.1.1. We measure the computational time only during the first time step.

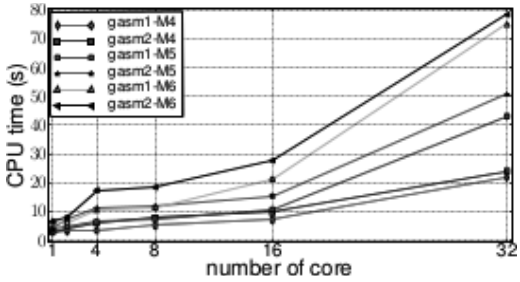
MESH	TETRAHEDRONS	DOF
M2	42,744	199,371
M3	109,997	497,525
M4	223,120	989,237

TABLE 6.2 – Configurations used for the Navier-Stokes model with $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$ approximations.

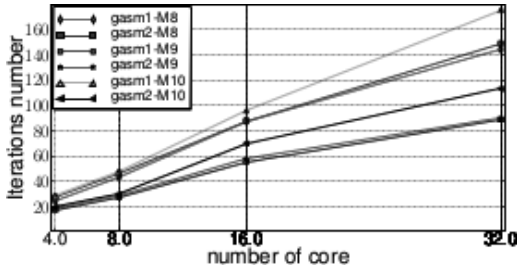
The strong scalability tests are obtained using $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$ approximations. The number of mesh elements and degrees of freedom are reported in table 6.2 and the scalability results in figure 6.4. The speed-up for assembly of the algebraic



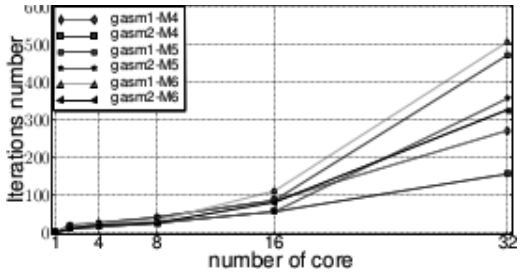
(a) CPU time to solve the algebraic system (strong scalability)



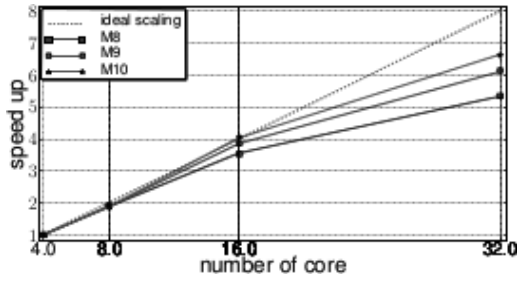
(b) CPU time to solve the algebraic system (weak scalability)



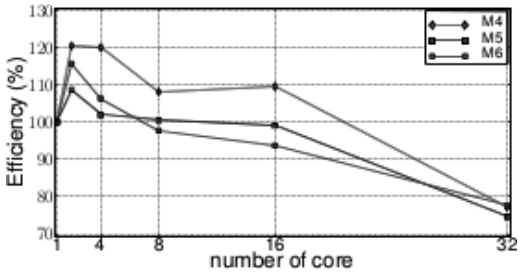
(c) Number of iteration solver (strong scalability)



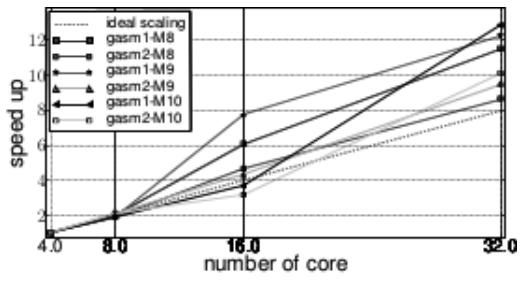
(d) Number of iteration solver (weak scalability)



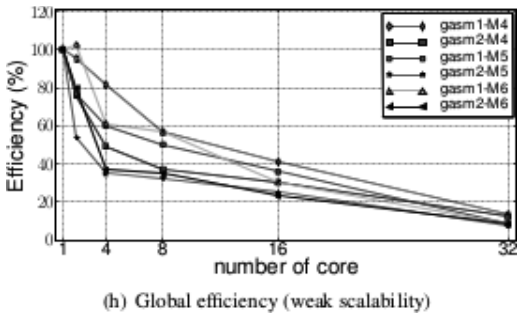
(e) Assembly speed-up (strong scalability)



(f) Assembly efficiency (weak scalability)



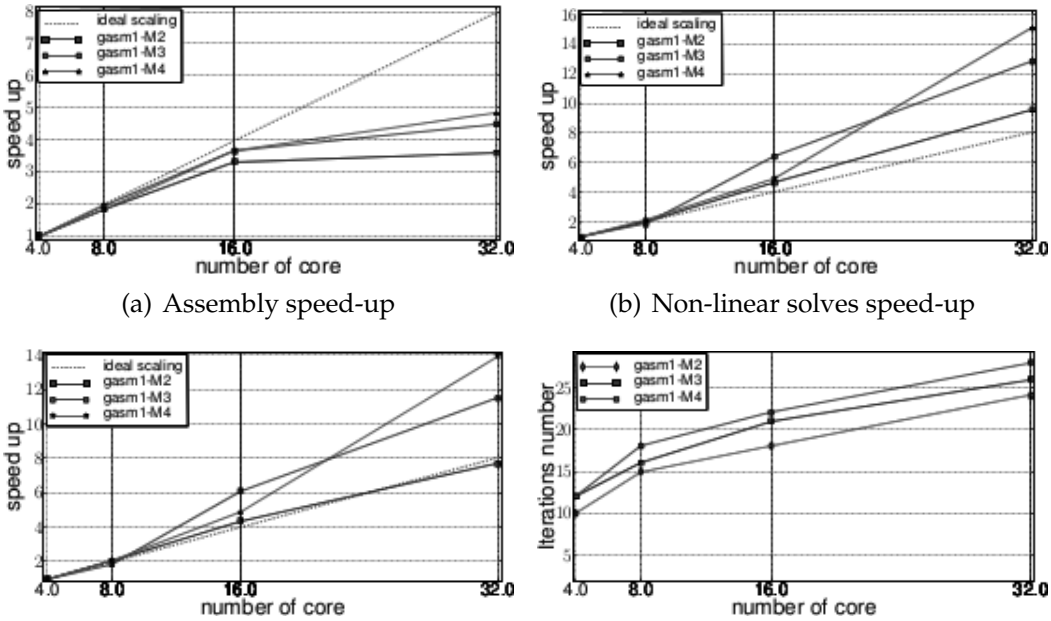
(g) Global speed-up (strong scalability)



(h) Global efficiency (weak scalability)

FIGURE 6.3 – Results for the scalability tests with Stokes model.

structures is ideal up to 16 processors but at 32 cores performance stagnates because communications become dominant compared to the cost of local assembly. Indeed we note that speed-up improves with the finest meshes, *i.e.* the local assembly cost is still important. As to the speed-up of the solver strategy, it is excellent, see figure 6.4(b). Indeed the number of iterations of the linear solves remains relatively low, see figure 6.4(d). Also note that scalability of this application is dominated by the solver, see figure 6.4(d), and not by assembly : we obtain overall an excellent global strong scalability.



(a) Assembly speed-up

(b) Non-linear solves speed-up

(c) Speed-up for assembly+solver

(d) Number of iteration of first linear solver

FIGURE 6.4 – Results for the scalability tests with Navier-Stokes model.

6.3 Numerical results

In this section we verify that the various formulations (presented in section 6.1 after discretization) converge with the proper rates. We check with a simple 3D Poiseuille flow in a cylinder with a base of radius $r = 1$ and lenght $L = 5$ centered at $(2.5, 0, 0)$, see figure 6.5. The exact solution for this benchmark is

$$\mathbf{u}_{ex} = \left(\frac{(p_{in} - p_{out})r^2}{4\mu L}(1 - \frac{y^2 + z^2}{r^2}), 0, 0 \right), \quad p_{ex} = \frac{p_{in} - p_{out}}{L}x + p_{in}. \tag{6.43}$$

We note that the discrete geometry Ω_δ will be different from the exact one Ω. Hence the geometry approximation will play a crucial role in the verification process. To measure the geometric approximation error, not only do we measure the error in the standard $L^2(\Omega_\delta)$ and $H^1(\Omega_\delta)$ norms but also the applied forces by integrating the stress tensor on one of the curved boundaries, here Γ_{in}. That is to say, we compute

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma_{in}} \sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} ds. \tag{6.44}$$

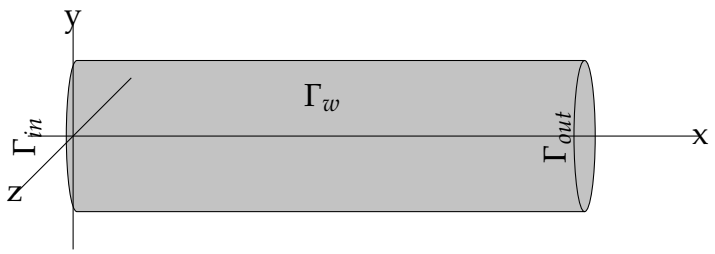
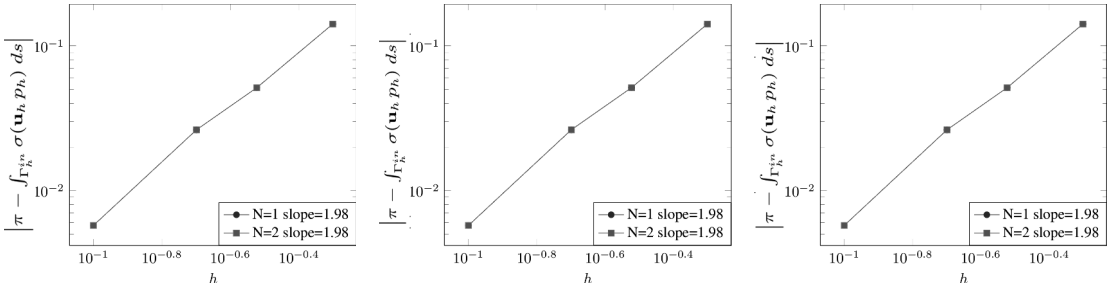


FIGURE 6.5 – Geometry for convergence rates verification Ω

Thanks to (6.43), we can compute by hand the exact counterpart $\mathbf{F}_{ex} = \int_{\Gamma_{in}} \sigma(\mathbf{u}_{ex}, p_e x)\mathbf{n}\, ds$ and hence $\|\mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}\|_2$ is measured. This is the simplest way to take properly into account the error in the geometry as well as in velocity and pressure. Indeed we have otherwise only access to $L^2(\Omega_\delta)$ and $H^1(\Omega_\delta)$ norms and not $L^2(\Omega)$ and $H^1(\Omega)$.

We start first with the standard finite element approximations using first order geometry, namely $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$ and $\mathbb{P}_3\mathbb{P}_2\mathbb{G}_1$, applied to the Dirichlet-Dirichlet (see Section 6.1.1), Dirichlet-Neumann (see Section 6.1.1) and Neumann- Neumann (see Section 6.1.1). The results are displayed in Table 6.3 and are quite interesting : even though the geometry is not properly approximated, velocity and pressure error norms are 0 up to machine precision in all cases. This can be explained by the facts that *(i)* the exact velocity is quadratic and the exact pressure linear, see (6.43), *(ii)* the geometric transformation is first order and all volume and surface numerical integrals are computed exactely thanks to FEEL ++, hence the only possible solution in the velocity and pressure spaces are the exact velocity and exact pressure respectively which we see in the $L^2(\Omega_\delta)$ and $H^1(\Omega_\delta)$ error norms. These results are however somewhat deceptive as they are not taking into account the geometrical approximation as mentioned above. Indeed if we now look at the error in $\|\mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}_\delta\|$ it displays only an order 2 convergence rate with respect to h – as expected when using order 1 geometry – not withstanding the polynomial order of the velocity and pressure, see Table 6.3 and Figure 6.6.

In order to improve the approximation properties of $\mathbf{F}_\delta$, we now turn to the second order geometry approximation. The results are displayed in Table 6.4. Again, the results are interesting : even though the exact velocity and pressure are quadratic and linear respectively the finite element approximations are not exact. First recall that, see (6.41), it is not the finite ellement approximations in the real element that are polynomial when derivatives are involved – thanks to the chain rule –. We recover however very good convergence rates and in fact we have super convergence – one order more than expected – This is due to the symmetries of the cylinder. Finally, we plot the $\mathbf{F}_\delta$ convergence in Figure 6.7 for $\mathbb{P}_{N+1}\mathbb{P}_N\mathbb{G}_1$, $N = 1, 2$ as well as $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_2$. The later case shows that increasing just the geometrical approximation improves already $\mathbf{F}_\delta$ tremendously. To summarize, to handle non linear geometries, *i.e.* $\Omega_\delta \neq \Omega$, we not only need to increase the order of approximations in velocity and pressure if we want to improve the accuracy of our simulations but we also need to increase the order of approximation of the geometry. This, of course, comes at a cost which the FEEL++ framework allows to alleviate to find a good balance between h, N and k_{geo}.



(a) Dirichlet-Dirichlet (b) Dirichlet-Neumann (c) Neumann-Neumann

FIGURE 6.6 – Output convergence using $\mathbb{P}_{N+1}\mathbb{P}_N\mathbb{G}_1$ approximation space, $N = 1, 2$.

(a) Dirichlet-Dirichlet : $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$

h	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p - p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$2.0 \cdot 10^{-16}$	$2.1 \cdot 10^{-15}$	$4.9 \cdot 10^{-16}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	
0.3	$1.2 \cdot 10^{-16}$	$3.6 \cdot 10^{-15}$	$5.5 \cdot 10^{-16}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	1.98
0.2	$3.3 \cdot 10^{-16}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$8.4 \cdot 10^{-16}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	1.65
0.1	$1.3 \cdot 10^{-16}$	$1.5 \cdot 10^{-14}$	$1.7 \cdot 10^{-15}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	2.2

(b) Dirichlet-Dirichlet : $\mathbb{P}_3\mathbb{P}_2\mathbb{G}_1$

h	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p - p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$1.5 \cdot 10^{-16}$	$8.4 \cdot 10^{-15}$	$1.1 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	
0.3	$1.8 \cdot 10^{-16}$	$4.9 \cdot 10^{-15}$	$1.2 \cdot 10^{-15}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	1.98
0.2	$1.9 \cdot 10^{-16}$	$9.2 \cdot 10^{-15}$	$1.8 \cdot 10^{-15}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	1.65
0.1	$2.1 \cdot 10^{-15}$	$4.6 \cdot 10^{-14}$	$4.3 \cdot 10^{-15}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	2.2

(c) Dirichlet-Neumann : $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$

h	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p - p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$8.1 \cdot 10^{-17}$	$2.3 \cdot 10^{-15}$	$3.9 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	
0.3	$8.4 \cdot 10^{-17}$	$1.4 \cdot 10^{-15}$	$5.1 \cdot 10^{-15}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	1.98
0.2	$1.7 \cdot 10^{-16}$	$2.0 \cdot 10^{-15}$	$8.5 \cdot 10^{-15}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	1.65
0.1	$1.6 \cdot 10^{-16}$	$3.9 \cdot 10^{-15}$	$1.7 \cdot 10^{-15}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	2.2

(d) Dirichlet-Neumann : $\mathbb{P}_3\mathbb{P}_2\mathbb{G}_1$

h	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p - p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$2.0 \cdot 10^{-16}$	$5.4 \cdot 10^{-15}$	$4.6 \cdot 10^{-16}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	
0.3	$1.8 \cdot 10^{-16}$	$6.7 \cdot 10^{-15}$	$5.5 \cdot 10^{-16}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	1.98
0.2	$1.9 \cdot 10^{-16}$	$7.1 \cdot 10^{-15}$	$8.3 \cdot 10^{-16}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	1.65
0.1	$1.7 \cdot 10^{-16}$	$1.3 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-15}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	2.2

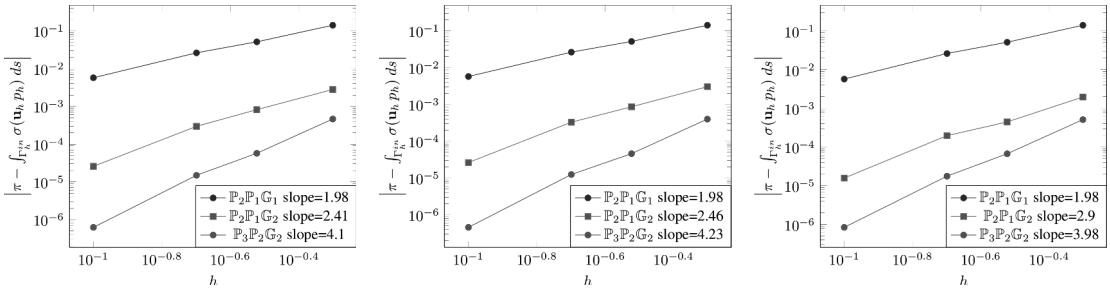
(e) Neumann-Neumann : $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$

h	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p-p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{F}_{ex}-\mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$2.3\cdot10^{-16}$	$3.2\cdot10^{-15}$	$4.6\cdot10^{-16}$	$1.4\cdot10^{-1}$	
0.3	$1.8\cdot10^{-16}$	$3.1\cdot10^{-15}$	$5.5\cdot10^{-16}$	$5.1\cdot10^{-2}$	1.98
0.2	$1.9\cdot10^{-16}$	$2.7\cdot10^{-15}$	$8.3\cdot10^{-16}$	$2.6\cdot10^{-2}$	1.65
0.1	$1.7\cdot10^{-16}$	$3.6\cdot10^{-15}$	$1.5\cdot10^{-15}$	$5.7\cdot10^{-3}$	2.2

(f) Neumann-Neumann : $\mathbb{P}_3\mathbb{P}_2\mathbb{G}_1$

h	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p-p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	$\|\mathbf{F}_{ex}-\mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$2.2\cdot10^{-16}$	$4.2\cdot10^{-15}$	$1.0\cdot10^{-15}$	$1.4\cdot10^{-1}$	
0.3	$1.8\cdot10^{-16}$	$4.5\cdot10^{-15}$	$1.3\cdot10^{-15}$	$5.1\cdot10^{-2}$	1.98
0.2	$2.0\cdot10^{-16}$	$6.3\cdot10^{-15}$	$1.8\cdot10^{-15}$	$2.6\cdot10^{-2}$	1.65
0.1	$8.0\cdot10^{-16}$	$1.8\cdot10^{-14}$	$3.9\cdot10^{-15}$	$5.7\cdot10^{-3}$	2.2

TABLE 6.3 – Dirichlet-Dirichlet, Dirichlet-Neumann and Neumann-Neumann formulations using first order geometry approximation



(a) Dirichlet-Dirichlet (b) Dirichlet-Neumann (c) Neumann-Neumann

FIGURE 6.7 – Output convergence using $\mathbb{P}_{N+1}\mathbb{P}_N\mathbb{G}_N$ approximation space, $N = 1, 2$ and $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_2$.

(a) Dirichlet-Dirichlet : $\mathbb{P}_3\mathbb{P}_2\mathbb{G}_2$

h	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p-p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	SlopeP	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	SlopeU	$\|\mathbf{F}_{ex}-\mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$6.3\cdot10^{-6}$	$5.8\cdot10^{-5}$		$2.2\cdot10^{-5}$		$4.6\cdot10^{-4}$	
0.3	$6.2\cdot10^{-7}$	$8.5\cdot10^{-6}$	3.76	$2.5\cdot10^{-6}$	4.28	$5.7\cdot10^{-5}$	4.1
0.2	$1.2\cdot10^{-7}$	$2.1\cdot10^{-6}$	3.48	$8.9\cdot10^{-7}$	2.52	$1.5\cdot10^{-5}$	3.31
0.1	$06.4\cdot10^{-9}$	$1.4\cdot10^{-7}$	3.88	$7.0\cdot10^{-8}$	3.67	$6.2\cdot10^{-7}$	4.59

(b) Dirichlet-Neumann : $\mathbb{P}_3\mathbb{P}_2\mathbb{G}_2$

h	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p-p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	SlopeP	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	SlopeU	$\|\mathbf{F}_{ex}-\mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$6.3\cdot10^{-6}$	$1.0\cdot10^{-5}$		$2.2\cdot10^{-5}$		$4.0\cdot10^{-4}$	
0.3	$6.4\cdot10^{-7}$	$1.7\cdot10^{-6}$	2.35	$2.5\cdot10^{-6}$	4.36	$4.6\cdot10^{-5}$	4.23
0.2	$1.3\cdot10^{-7}$	$3.9\cdot10^{-6}$	3.6	$8.8\cdot10^{-7}$	2.4	$1.2\cdot10^{-5}$	3.21
0.1	$6.8\cdot10^{-9}$	$2.6\cdot10^{-7}$	3.1	$7.10\cdot10^{-8}$	3.62	$4.6\cdot10^{-7}$	4.77

(c) Neumann-Neumann : $\mathbb{P}_3\mathbb{P}_2\mathbb{G}_2$

h	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	$\|p-p_\delta\|_{0,\Omega_\delta}$	SlopeP	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{1,\Omega_\delta}$	SlopeU	$\|\mathbf{F}_{ex}-\mathbf{F}_\delta\|$	Slope
0.5	$8.9\cdot10^{-6}$	$5.2\cdot10^{-5}$		$2.3\cdot10^{-4}$		$5.1\cdot10^{-4}$	
0.3	$1.1\cdot10^{-6}$	$4.3\cdot10^{-6}$	4.85	$2.4\cdot10^{-5}$	4.45	$6.7\cdot10^{-5}$	3.98
0.2	$2.3\cdot10^{-7}$	$1.3\cdot10^{-6}$	2.92	$8.9\cdot10^{-5}$	2.45	$1.8\cdot10^{-5}$	3.29
0.1	$1.2\cdot10^{-8}$	$7.0\cdot10^{-8}$	4.25	$7.1\cdot10^{-7}$	3.65	$8.4\cdot10^{-7}$	4.4

TABLE 6.4 – Dirichlet-Dirichlet, Dirichlet-Neumann and Neumann-Neumann formulations using second order geometry approximation

6.3.1 Flow simulation on cerebrovenous system

To exercise our full fledged framework, we perform now a (incompressible) Navier-Stokes simulation in a realistic geometry, the cerebrovenous system. This geometry represented in Figure 6.2(a) has 29 inlet and 2 outlets. The boundary conditions imposed in this application are not physiological : on each inlet, we impose $\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = g_{in}\mathbf{n}$ with

$$g_{in} = -0.5 \cdot 10^5 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{0.0015}\right)\right), \tag{6.45}$$

and at the outlets, we set $\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = \mathbf{0}$ which corresponds to the Neumann-Neumann formulation described in 6.1.1. Regarding the physical parameters, we take the density ρ equal to 1kg/m^3 and the dynamic viscosity μ equals $0.003\text{N} \cdot \text{s/m}^2$. The time step is $\Delta t = 10^{-5}$s and we perform a simullation up to $t = 0.003$s. The approximation used is $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$. Table 6.5 shows the number of tetrahedrons in the mesh as well as the number of degrees of freedom associated to the $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$ approximation. As a verification, we monitor the sum of the flow rates D_{in} at the

TETRAHEDRONS	DOF($\mathbf{u}_\delta$)	DOF(p_δ)	DOF(Total)
237,438	1,119,411	54,183	1,173,594

TABLE 6.5 – Number of elements and degrees of freedom using the $\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{G}_1$ approximations.

inlets and the sum of the flow rates D_{out} at the outlets. Since the fluid is incompressible, $|D_{in} + D_{out}|$ must be zero. In our simulations, this estimate varies between $1e^{-10}$ and $1e^{-13}$. The Figure 6.8 display two screenshots of a solution at time $t = 0.00151$s computed with 32 processors.



(a) Pressure field



(b) Streamlines colored with pressure

FIGURE 6.8 – Numerical solution on cerebrovenous system at time $t = 0.00151s$.

6.4 Conclusion and outlook

In this paper we have proposed a flexible framework to answer some modeling and computational issues in order to performe large-scale three-dimensional blood flow simulations in realistic geometries. In particular, we have presented different strategies to handle boundary conditions appropriate to blood flow simulation as well as their variational formulation. While this work is a preliminary step, the results obtained with respect to convergence rates for both velocity and pressure for the Stokes problem are encouraging but require further investigation, for example in the case of mixed boundary conditions. We have also obtained good scalability results indicating that the straegy considered should now be taken to the next level and tested on hundreds or thousand of processors. Finally, we displayed initial numerical results on a realistic geometry which now need to be backed up by further mathematical and bio-mechanical modeling.

annexe A

Preuve des propositions 4.19 et 4.23

Preuve (de la proposition 4.19).

On suit les mêmes étapes que celles de la démonstration de la proposition 4.2. Nous ne rentrerons pas ici dans trop de détails.

1. En utilisant les coordonnées cylindriques, on obtient

$$\begin{aligned} J :=& \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} D(v,v') f(x,v')\, \mathrm{d}v' \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}_+} D(|\overline{v}|e^{i\alpha}, v_3, r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3') \\ &\times f\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3'\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}_+} D(|\overline{v}|e^{i\alpha}, v_3, r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3') \\ &\times g\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c} - \frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c} + \frac{{}^{\perp}\{r'e^{i(\varphi+\alpha)}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \tag{A.1}$$

où l'on a utilisé dans la dernière égalité la contrainte $f \in \ker \mathcal{T}$, c'est-à-dire qu'il existe g telle que

$$f(x,v) = g\left(\overline{x} + \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v}|, v_3\right), \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

On a $r'e^{i(\varphi+\alpha)} - |\overline{v}|e^{i\alpha} = le^{i(\psi+\alpha)}$ où $l^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\varphi$, $r = |\overline{v}|$ et $(r')^2 = r^2 + l^2 + 2rl\cos\psi$. On remarque que $\psi \in]0,\pi[$ si $\varphi \in]0,\pi[$ et $\psi \in]-\pi,0[$ si $\varphi \in]-\pi,0[$. De plus, $\psi = \psi(\varphi)$ est impaire par rapport à φ, ainsi $\psi(-\varphi) = -\psi(\varphi)$. Par hypothèse on déduit que

$$D(re^{i\alpha}, v_3, r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3') = \tilde{D}(r, v_3, r', v_3', \varphi)\, re^{i\alpha} + \tilde{D}'(r, v_3, r', v_3', \varphi)\, r'e^{i(\varphi+\alpha)}$$

et donc, si on note $R(\alpha)$ la rotation d'angle α dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
J=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} R(\alpha+\psi)[\tilde{D}(r,v_3,r',v_3',\varphi)re^{-i\psi}+\tilde{D}'(r,v_3,r',v_3',\varphi)r'e^{i(\varphi-\psi)}]\\
&\times g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i(\alpha+\psi)}\}}{\omega_c},x_3,r',v_3'\right)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} R(\alpha)[\tilde{D}(r,v_3,r',v_3',\varphi)\ re^{-i\psi}+\tilde{D}'(r,v_3,r',v_3',\varphi)\ r'e^{i(\varphi-\psi)}]\\
&\times g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c},x_3,r',v_3'\right)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}$$

Si on utilise la symétrie de ψ par rapport à φ et qu'on échange φ et l, on obtient

$$\begin{aligned}
J=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{0}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} R(\alpha)[\tilde{D}(r,v_3,r',v_3',\varphi)\ re^{-i\psi}+\tilde{D}(r,v_3,r',v_3',-\varphi)\ re^{i\psi}\\
&+\tilde{D}'(r,v_3,r',v_3',\varphi)\ r'e^{i(\varphi-\psi)}+\tilde{D}'(r,v_3,r',v_3',-\varphi)\ r'e^{-i(\varphi-\psi)}]\\
&\times g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c},x_3,r',v_3'\right)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{|r-r'|}^{(r+r')}\int_{\mathbb{R}_+} R(\alpha)[\tilde{D}(r,v_3,r',v_3',\varphi)\ re^{-i\psi}+\tilde{D}(r,v_3,r',v_3',-\varphi)\ re^{i\psi}\\
&+\tilde{D}'(r,v_3,r',v_3',\varphi)\ r'e^{i(\varphi-\psi)}+\tilde{D}'(r,v_3,r',v_3',-\varphi)\ r'e^{-i(\varphi-\psi)}]\\
&\times g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c},x_3,r',v_3'\right)\frac{r'\mathrm{d}r'\ l\mathrm{d}l\ \mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{l^2-(r-r')^2}\sqrt{(r+r')^2-l^2}}.
\end{aligned}$$

On remarque que $R(\alpha)=e_1\otimes e^{-i\alpha}-e_2\otimes{}^{\perp}e^{-i\alpha}$. On a donc $\alpha'\in[0,2\pi[$

$$g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c},x_3,r',v_3'\right)=f\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\{r'e^{i\alpha'}\}}{\omega_c},x_3,r'e^{i\alpha'},v_3'\right).$$

Avec le changement de coordonnées $v'=(r'e^{i\alpha'},v_3')$ et $-z={}^{\perp}\{le^{i\alpha}\}$ on obtient

$$\begin{aligned}
J=&\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+}\{e_1\otimes e^{-i\alpha}-e_2\otimes{}^{\perp}e^{-i\alpha}\}\left[\tilde{D}(\varphi)\ re^{-i\psi}+\tilde{D}(-\varphi)\ re^{i\psi}\right.\\
&\left.+\tilde{D}'(\varphi)r'e^{i(\varphi-\psi)}+\tilde{D}'(-\varphi)r'e^{-i(\varphi-\psi)}\right]f\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\{r'e^{i\alpha'}\}}{\omega_c},x_3,r'e^{i\alpha'},v_3'\right)\\
&\times\chi(r,r',-{}^{\perp}\{le^{i\alpha}\})r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}v_3'l\mathrm{d}l\mathrm{d}\alpha\\
=&\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(|\overline{v}|,v_3,|\overline{v'}|,v_3',z)f\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{z}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\overline{v'}}{\omega_c},x_3,v'\right)\ \mathrm{d}v'\mathrm{d}z\\
=&\omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(|\overline{v}|,v_3,|\overline{v'}|,v_3',(\omega_c\overline{x}+{}^{\perp}\overline{v})-(\omega_c\overline{x'}+{}^{\perp}\overline{v'}))f(x_1',x_2',x_3,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.
\end{aligned}$$

On obtient l'affirmation 2. avec une démarche similaire.

■

Preuve (de la proposition 4.23).

Remarquons que

$$\langle f\rangle_{\sigma S} = \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v')\sigma(|v-v'|)\,\mathrm{d}v' \right\rangle I - \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v')\sigma(|v-v'|)\frac{(v-v')\otimes(v-v')}{|v-v'|^2}\,\mathrm{d}v' \right\rangle.$$

En appliquant la proposition 4.2 avec $C=1$ on obtient

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} f\sigma\,\mathrm{d}v' \right\rangle = \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f\chi\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.$$

Il reste à calculer la seconde moyenne. On utilise les coordonnées cylindriques et la contrainte $\mathcal{T}f=0$, c'est-à-dire $f(x,v)=g\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}, x_3, |\overline{v}|, v_3\right)$. On obtient

$$\begin{aligned}
K :=& \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v')\sigma(|v-v'|)\frac{(v-v')\otimes(v-v')}{|v-v'|^2}\,\mathrm{d}v' \right\rangle \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sigma(|(|\overline{v}|e^{i\alpha}-r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3-v_3')|)}{|\,(|\overline{v}|e^{i\alpha}-r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3-v_3')\,|^2}\left(|\overline{v}|e^{i\alpha}-r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3-v_3'\right)^{\otimes 2} \\
& \times f\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3'\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sigma(|(|\overline{v}|e^{i\alpha}-r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3-v_3')|)}{|\,(|\overline{v}|e^{i\alpha}-r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3-v_3')\,|^2}\left(|\overline{v}|e^{i\alpha}-r'e^{i(\varphi+\alpha)}, v_3-v_3'\right)^{\otimes 2} \\
& \times g\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{{}^{\perp}\{|\overline{v}|e^{i\alpha}\}}{\omega_c}+\frac{{}^{\perp}\{r'e^{i(\varphi+\alpha)}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}$$

On introduit l etψ tels que $r'e^{i(\varphi+\alpha)}-|\overline{v}|e^{i\alpha} = le^{i(\psi+\alpha)}$. On a les relations $l^2 = r^2+(r')^2-2rr'\cos\varphi$, $r=|\overline{v}|$ et $(r')^2 = r^2+l^2+2rl\cos\psi$. Comme l et ψ ne dépendent pas de α on a

$$\begin{aligned}
K =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sigma\left(\sqrt{l^2+(v_3-v_3')^2}\,\right)}{l^2+(v_3-v_3')^2}\left(le^{i(\alpha+\psi)}, v_3'-v_3\right)^{\otimes 2} \\
& \times g\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{{}^{\perp}\{le^{i(\alpha+\psi)}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sigma\left(\sqrt{l^2+(v_3-v_3')^2}\,\right)}{l^2+(v_3-v_3')^2}\left(le^{i\alpha}, v_3'-v_3\right)^{\otimes 2} \\
& \times g\left(\overline{x}+\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{{}^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}$$

Comme l est paire par rapport à φ on obtient, après avoir échangé φ et l,

$$\begin{aligned}
K =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sigma(\sqrt{l^2+(v_3-v_3')^2}\,)}{l^2+(v_3-v_3')^2}\left(le^{i\alpha}, v_3'-v_3\right)^{\otimes 2} \\
&\times g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha \\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{|r-r'|}^{(r+r')}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sigma(\sqrt{l^2+(v_3-v_3')^2}\,)}{l^2+(v_3-v_3')^2}\left(le^{i\alpha}, v_3'-v_3\right)^{\otimes 2} \\
&\times g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) \frac{r'\mathrm{d}r'\; l\mathrm{d}l\; \mathrm{d}v_3'\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{l^2-(r-r')^2}\,\sqrt{(r+r')^2-l^2}}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha' \in [0, 2\pi[$ on a

$$g\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}, x_3, r', v_3'\right) = f\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\{r'e^{i\alpha'}\}}{\omega_c}, x_3, r'e^{i\alpha'}, v_3'\right).$$

On réalise le changement de variables $v' = (r'e^{i\alpha'}, v_3')$ et $z = -^{\perp}\{le^{i\alpha}\}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
K=& \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sigma(\sqrt{l^2+(v_3-v_3')^2}\,)}{l^2+(v_3-v_3')^2}\left(le^{i\alpha}, v_3'-v_3\right)^{\otimes 2} \\
&\times f\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}+\frac{^{\perp}\{le^{i\alpha}\}}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\{r'e^{i\alpha'}\}}{\omega_c}, x_3, r'e^{i\alpha'}, v_3'\right) \\
&\times \chi(r, r', -^{\perp}\{le^{i\alpha}\}) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}v_3' l\mathrm{d}l\mathrm{d}\alpha \\
=& \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sigma(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\,)}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}(\,^{\perp}z, v_3'-v_3)^{\otimes 2} \\
&\times f\left(\overline{x}+\frac{^{\perp}\overline{v}}{\omega_c}-\frac{z}{\omega_c}-\frac{^{\perp}\overline{v'}}{\omega_c}, x_3, v'\right)\chi\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}z \\
=& \omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sigma(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\,) f(x_1', x_2', x_3, v')\chi \frac{(\,^{\perp}z, v_3'-v_3)^{\otimes 2}}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.
\end{aligned}$$

On obtient enfin

$$\begin{aligned}
\langle f\rangle_{\sigma S} =& \omega_c^2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3}\sigma\left(\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right) f(x_1', x_2', x_3, v') \\
&\times \chi S\Big((^{\perp}z, v_3'-v_3)\Big)\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.
\end{aligned}$$

■

annexe B

Preuve des propositions 4.24 et 4.26

Preuve (de la proposition 4.24).

Introduisons la notation

$$\xi_v(x,v) = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(|v-v'|)S(v-v')f(x,v')\nabla_v f(x,v)\,\mathrm{d}v'.$$

La proposition 3.19 nous donne que

$$\begin{aligned}\left\langle Q^+_{FPL}(f,f)\right\rangle = \langle \mathrm{div}_v\ \xi_v\rangle = \frac{1}{\omega_c}\mathrm{div}_{\overline{x}}\left\{\left\langle {}^{\perp}\xi_{\overline{v}}\right\rangle + \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} - \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\}\\ + \mathrm{div}_{\overline{v}}\left\{\left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} + \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\} + \partial_{v_3}\left\langle \xi_{v_3}\right\rangle.\end{aligned}$$

Il nous faut donc calculer $\langle \xi_{\overline{v}}\rangle$, $\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\overline{v}\rangle$, et $\left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot{}^{\perp}\overline{v}\right\rangle$. Par la proposition 3.16 on a que $\sum_{i=0}^5 b^i\otimes\nabla_{x,v}\psi_i = I$ et donc

$$\partial_{v_1} f = \sum_{i=0}^5 \partial_{v_1}\psi_i\ b^i\cdot\nabla_{x,v}f = \frac{v_2}{\omega_c|\overline{v}|^2}\ b^0\cdot\nabla_{x,v}f - \frac{1}{\omega_c}b^2\cdot\nabla_{x,v}f + \frac{v_1}{|\overline{v}|}\ b^4\cdot\nabla_{x,v}f.$$

De la même façon on obtient

$$\partial_{v_2} f = \sum_{i=0}^5 \partial_{v_2}\psi_i\ b^i\cdot\nabla_{x,v}f = -\frac{v_1}{\omega_c|\overline{v}|^2}\ b^0\cdot\nabla_{x,v}f + \frac{1}{\omega_c}b^1\cdot\nabla_{x,v}f + \frac{v_2}{|\overline{v}|}\ b^4\cdot\nabla_{x,v}f,$$

qui implique que

$$\nabla_v f = b^0\cdot\nabla_{x,v}f\ \frac{({}^{\perp}\overline{v},0)}{\omega_c|\overline{v}|^2} + \left(-\frac{{}^{\perp}\nabla_{\overline{x}}f}{\omega_c},\partial_{v_3}f\right) + b^4\cdot\nabla_{x,v}f\ \frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}.$$

En prenant en compte que toutes les dérivées $b^i \cdot \nabla_{x,v}, 0 \leq i \leq 5$ laissent invariant $\ker \mathcal{T}$, comme cela a été démontré à la proposition 3.16, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \xi_v \rangle &= \left\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \right\rangle_{\sigma S} \frac{b^0 \cdot \nabla_{x,v} f}{\omega_c |\overline{v}|^2} + \langle f \rangle_{\sigma S} \left(-\frac{{}^{\perp}\nabla_{\overline{x}} f}{\omega_c}, \partial_{v_3} f \right) + \langle f, (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S} \frac{b^4 \cdot \nabla_{x,v} f}{|\overline{v}|} \\ &= \left\{ \frac{\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) - \frac{\langle f, (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|} \right. \\ &\qquad \left. \otimes \left(\frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \right\} \nabla_{\omega_c x, v} f - \langle f \rangle_{\sigma S} (E, -e_3 \otimes e_3) \nabla_{\omega_c x, v} f\end{aligned}$$

où les lignes de la matrice $E \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont $e_2, -e_1, 0$. De la même façon, à l'aide de l'identité $\langle f, (\overline{v}, 0), ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S} = \langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0), (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S} = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle \xi_{\overline{v}} \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle &= \left\langle \xi_v \cdot \frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right\rangle \\ &= -\frac{\langle f, (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|} \cdot \left(\frac{{}^{\perp}\nabla_{\overline{x}} f}{\omega_c}, -\partial_{v_3} f \right) + \frac{\langle f, (\overline{v}, 0), (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|^2} \, b^4 \cdot \nabla_{x,v} f \\ &= \left\{ -\frac{\langle f, (\overline{v}, 0), (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|^2} \left(\frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \right. \\ &\qquad \left. + \left(E \frac{\langle f, (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|}, e_3 \otimes e_3 \frac{\langle f, (\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|} \right) \right\} \cdot \nabla_{\omega_c x, v} f\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\left\langle \xi_{\overline{v}} \cdot \frac{{}^{\perp}\overline{v}}{|\overline{v}|} \right\rangle = \left\langle \xi_v \cdot \frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0), ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|^2} \, \frac{b^0 \cdot \nabla_{x,v} f}{\omega_c |\overline{v}|} - \frac{\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|} \cdot \left(\frac{{}^{\perp}\nabla_{\overline{x}} f}{\omega_c}, -\partial_{v_3} f \right) \\ &= \left\{ \frac{\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0), ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|^2} \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^{\perp}\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) + \left(E \frac{\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|}, 0 \right) \right\} \cdot \nabla_{\omega_c x, v} f.\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité on a pris en compte que

$$e_3 \otimes e_3 \frac{\langle f, ({}^{\perp}\overline{v}, 0) \rangle_{\sigma S}}{|\overline{v}|} = 0.$$

Il est alors facile de voir que $\langle Q^+_{FPL}(f, f) \rangle$ a la forme (4.34) avec A^+ la matrice

$$A^+ = \begin{pmatrix} A^+_{xx} & A^+_{xv} \\ A^+_{vx} & A^+_{vv} \end{pmatrix},$$

où

$$
\begin{aligned}
(A^+_{xx}, A^+_{xv}) =& \frac{r - r'\cos\varphi}{|z|}\ \frac{({}^\perp z, 0)}{|z|} \otimes \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \\
&- \frac{(r - r'\cos\varphi)(v_3 - v'_3)^2}{|z|[\ |z|^2 + (v_3 - v'_3)^2\ ]}\ \frac{(z, 0)}{|z|} \otimes \left(\frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \\
&+ \left(1 - \frac{(r')^2 \sin^2\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2} \right) \frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \\
&+ \frac{r - r'\cos\varphi}{|z|}\ \frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{({}^\perp z, 0)}{|z|}, 0 \right) \\
&+ \left(1 - \frac{(r - r'\cos\varphi)^2}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2} \right) \frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \\
&- \frac{(r - r'\cos\varphi)(v_3 - v'_3)}{|z|\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2}}\ \frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \frac{\left((v_3 - v'_3)\frac{(z,0)}{|z|}, -|z| e_3 \right)}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2}} \\
&+ ({}^t ES(\ ({}^\perp z, v'_3 - v_3)\ ) E, ES(\ ({}^\perp z, v'_3 - v_3)\ ) e_3 \otimes e_3)
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(A^+_{vx}, A^+_{vv}) =& \left(1 - \frac{(r')^2 \sin^2\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2} \right) \frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \\
&+ \frac{r - r'\cos\varphi}{|z|}\ \frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{({}^\perp z, 0)}{|z|}, 0 \right) \\
&- \left(1 - \frac{(r - r'\cos\varphi)^2}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2} \right) \frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \\
&+ \frac{(r - r'\cos\varphi)(v_3 - v'_3)}{|z|\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2}}\ \frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \otimes \frac{\left((v_3 - v'_3)\frac{(z,0)}{|z|}, -|z| e_3 \right)}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2}} \\
&+ \frac{(r - r'\cos\varphi)(v_3 - v'_3)}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2}\ e_3 \otimes \left(\frac{({}^\perp \overline{v}, 0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v}, 0)}{|\overline{v}|} \right) \\
&+ (-e_3 \otimes e_3 S(\ ({}^\perp z, v'_3 - v_3)\ ) E, e_3 \otimes e_3 S(\ ({}^\perp z, v'_3 - v_3)\ ) e_3 \otimes e_3).
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

La matrice A^+ s'écrit

$$\begin{aligned}
A^+ = &\left(1-\frac{(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)^{\otimes 2}\\
&+\left(1-\frac{(r-r'\cos\varphi)^2}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)^{\otimes 2}\\
&+\frac{r-r'\cos\varphi}{|z|}\left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right)\otimes\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\\
&+\frac{r-r'\cos\varphi}{|z|}\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right)\\
&-\frac{(r-r'\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\otimes\left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\\
&-\frac{(r-r'\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\\
&+B^+,
\end{aligned}\tag{B.3}$$

ce que l'on va noter

$$A^+ = A_1^+ + A_2^+ + A_3^+ + A_4^+ + A_5^+ + A_6^+ + B^+, \tag{B.4}$$

où

$$B^+ = \begin{pmatrix} {}^tES(\ (^\perp z, v_3'-v_3)\ )E & ES(\ (^\perp z, v_3'-v_3)\ )e_3\otimes e_3 \\ -e_3\otimes e_3 S(\ (^\perp z, v_3'-v_3)\ )E & e_3\otimes e_3 S(\ (^\perp z, v_3'-v_3)\ )e_3\otimes e_3 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que pour tout $r\in\mathbb{R}^2$, $v_3, v_3'\in\mathbb{R}$, la famille

$$\frac{(z,0)}{|z|},\quad\left(\frac{v_3-v_3'}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\frac{^\perp z}{|z|},\frac{|z|}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\right),\quad\frac{(^\perp z, v_3'-v_3)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. C'est pourquoi on a

$$S\Big((^\perp z, v_3'-v_3)\Big)=\frac{(z,0)}{|z|}\otimes\frac{(z,0)}{|z|}+\left(\frac{v_3-v_3'}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\frac{^\perp z}{|z|},\frac{|z|}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\right)^{\otimes 2},$$

ce qui implique que pour tout $\xi=(\xi_x,\xi_v)\in\mathbb{R}^6$

$$\begin{aligned}
(B^+\xi,\xi) =& S(\ (^\perp z, v_3'-v_3)\ ) : (^\perp\xi_{\overline{x}}, -\xi_{v_3})\otimes(^\perp\xi_{\overline{x}}, -\xi_{v_3})\\
=&\left[\left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right)^{\otimes 2}+\left(\frac{v_3-v_3'}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\frac{(z,0)}{|z|},\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{|z|e_3}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\right)^{\otimes 2}\right] : \xi\otimes\xi
\end{aligned}$$

et donc

$$B^+ = \left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right)^{\otimes 2} + \left(\frac{v_3-v_3'}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\frac{(z,0)}{|z|},-\frac{|z|e_3}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\right)^{\otimes 2}$$
$$=: B_1^+ + B_2^+. \tag{B.5}$$

Observons que

$$A_1^+ + A_3^+ + A_4^+ + B_1^+ = \frac{(r')^2\sin^2\varphi\,(v_3-v_3')^2}{|z|^2[\,|z|^2+(v_3-v_3')^2\,]}\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)^{\otimes 2}$$
$$+\left[\frac{r-r'\cos\varphi}{|z|}\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)+\left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|},0\right)\right]^{\otimes 2} \tag{B.6}$$

comme $(\frac{r-r'\cos\varphi}{|z|})^2 = 1-\frac{(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2}$ et

$$A_2^+ + A_5^+ + A_6^+ + B_2^+ = \frac{(r')^2\sin^2\varphi}{|z|^2}\left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)^{\otimes 2} +$$
$$\left[\frac{(r-r'\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\left(\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)-\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\right]^{\otimes 2}. \tag{B.7}$$

Notre conclusion suit en combinant (B.4), (B.5), (B.6) et (B.7).

■

Preuve (de la proposition 4.26).

On considère cette fois

$$\xi_v(x,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\sigma(|v-v'|)S(v-v')f(x,v)\nabla_{v'}f(x,v')\,\mathrm{d}v'.$$

La proposition 3.19 établit que

$$\left\langle Q_{FPL}^-(f,f)\right\rangle = \langle \mathrm{div}_v\,\xi_v\rangle = \frac{1}{\omega_c}\mathrm{div}_{\overline{x}}\left\{\left\langle {}^\perp\xi_{\overline{v}}\right\rangle + \left\langle \xi_{\overline{v}}\cdot\frac{^\perp\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} - \left\langle\xi_{\overline{v}}\cdot\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{^\perp\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\}$$
$$+\mathrm{div}_{\overline{v}}\left\{\left\langle\xi_{\overline{v}}\cdot\frac{^\perp\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{^\perp\overline{v}}{|\overline{v}|}+\left\langle\xi_{\overline{v}}\cdot\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\right\}+\partial_{v_3}\langle\xi_{v_3}\rangle$$
$$=\mathrm{div}_{\omega_c x}\left\{\langle E\xi_v\rangle+\left\langle\xi_v\cdot\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}-\left\langle\xi_v\cdot\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right\}$$
$$+\mathrm{div}_v\left\{\left\langle\xi_v\cdot\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}+\left\langle\xi_v\cdot\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right\rangle\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}+\langle e_3\otimes e_3\xi_v\rangle\right\}.$$

Comme dans la preuve de la proposition 4.24, on obtient

$$\nabla_{v'} f(x,v') = b^0 \cdot \nabla_{x,v'} f \, \frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{\omega_c |\overline{v'}|^2} + \left(-\frac{{}^{\perp}\nabla_{\overline{x}} f}{\omega_c}, \partial_{v'_3} f \right) + b^4 \cdot \nabla_{x,v'} f \, \frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\langle \xi_v \rangle =& f(x,v) \left\langle \frac{b^0 \cdot \nabla_{x,v'} f}{\omega_c |\overline{v'}|^2}, ({}^{\perp}\overline{v'},0) \right\rangle_{\sigma S} - f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{x_2} f}{\omega_c}, e_1 \right\rangle_{\sigma S} + f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{x_1} f}{\omega_c}, e_2 \right\rangle_{\sigma S} \\
&+ f(x,v) \left\langle \partial_{v'_3} f, e_3 \right\rangle_{\sigma S} + f(x,v) \left\langle \frac{b^4 \cdot \nabla_{x,v'} f}{|\overline{v'}|}, (\overline{v'},0) \right\rangle_{\sigma S} \\
=& -\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x,v) \chi \frac{r' - r\cos\varphi}{|z|} \frac{(z,0)}{|z|} \\
&\qquad \otimes \left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, \frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \nabla_{\omega_c x, v'} f \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2 \\
&- \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x,v) \chi \frac{(r' - r\cos\varphi)(v_3 - v'_3)}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2} \left(\frac{v_3 - v'_3}{|z|^2} \, {}^{\perp}z, 1 \right) \\
&\qquad \otimes \left(\frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, -\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \nabla_{\omega_c x, v'} f \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2 \\
&- \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f(x,v) \chi S(\, ({}^{\perp}z, v'_3 - v_3) \,) (E, -e_3 \otimes e_3) \nabla_{\omega_c x, v'} f \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2.
\end{aligned}$$

De la même façon, les identités

$$\left\langle \frac{b^0 \cdot \nabla_{x,v'} f}{\omega_c |\overline{v'}|^2}, ({}^{\perp}\overline{v'},0), (\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} = \left\langle \frac{b^4 \cdot \nabla_{x,v'} f}{|\overline{v'}|}, (\overline{v'},0), ({}^{\perp}\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} = 0$$

nous mènent à

$$\begin{aligned}
&\left\langle \xi_v \cdot \frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \right\rangle = -f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{x_2} f(x,v')}{\omega_c |\overline{v}|}, (\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \cdot e_1 + f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{x_1} f(x,v')}{\omega_c |\overline{v}|}, (\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \cdot e_2 \\
&+ f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{v'_3} f(x,v')}{|\overline{v}|}, (\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \cdot e_3 + f(x,v) \left\langle \frac{b^4 \cdot \nabla_{x,v'} f(x,v')}{|\overline{v}| \, |\overline{v'}|}, (\overline{v'},0), (\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \\
&= -\omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{(r' \cos\varphi - r)(v_3 - v'_3)}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2} \left(\frac{v_3 - v'_3}{|z|} \frac{(z,0)}{|z|}, -e_3 \right) \cdot \nabla_{\omega_c x, v'} f \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2 \\
&\quad - \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \left(\cos\varphi + \frac{(r - r'\cos\varphi)(r' - r\cos\varphi)}{|z|^2 + (v_3 - v'_3)^2} \right) \left(\frac{({}^{\perp}\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, -\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \\
&\quad \cdot \nabla_{\omega_c x, v'} f \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi_v \cdot \frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \right\rangle =& - f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{x_2} f(x,v')}{\omega_c|\overline{v}|}, (^\perp\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \cdot e_1 \\
&+ f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{x_1} f(x,v')}{\omega_c|\overline{v}|}, (^\perp\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \cdot e_2 \\
&+ f(x,v) \left\langle \frac{\partial_{v_3'} f(x,v')}{|\overline{v}|}, (^\perp\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \cdot e_3 \\
&+ f(x,v) \left\langle \frac{b^0 \cdot \nabla_{x,v'} f(x,v')}{\omega_c|\overline{v}|\ |\overline{v'}|^2}, (^\perp\overline{v'},0), (^\perp\overline{v},0) \right\rangle_{\sigma S} \\
=& - \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \frac{r'\cos\varphi - r}{|z|} \left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|}, 0 \right) \cdot \nabla_{\omega_c x, v'} f \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \\
&+ \omega_c^2 \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma f \chi \left(\cos\varphi - \frac{rr'\sin^2\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \right) \\
&\qquad \times \left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, \frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \cdot \nabla_{\omega_c x, v'} f \, \mathrm{d}v' \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2'.
\end{aligned}$$

$\left\langle Q_{FPL}^-(f,f) \right\rangle$ a alors la forme (4.35) avec

$$A^- = \begin{pmatrix} A_{xx}^- & A_{xv}^- \\ A_{vx}^- & A_{vv}^- \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}
(A_{xx}^-, A_{xv}^-) =& - \frac{r' - r\cos\varphi}{|z|} \ \frac{(^\perp z,0)}{|z|} \otimes \left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, \frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \\
&+ \frac{(r' - r\cos\varphi)(v_3 - v_3')^2}{|z|[\ |z|^2 + (v_3 - v_3')^2\ ]} \ \frac{(z,0)}{|z|} \otimes \left(\frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, -\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \\
&+ \left(\cos\varphi - \frac{rr'\sin^2\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \right) \frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, \frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \\
&+ \frac{r - r'\cos\varphi}{|z|} \ \frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{(^\perp z,0)}{|z|}, 0 \right) \\
&+ \left(\cos\varphi + \frac{(r - r'\cos\varphi)(r' - r\cos\varphi)}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \right) \frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{(^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, -\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \\
&- \frac{(r - r'\cos\varphi)(v_3 - v_3')}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2} \ \frac{(^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \otimes \left(\frac{v_3 - v_3'}{|z|} \ \frac{(z,0)}{|z|}, -e_3 \right) \\
&- ES(\ (^\perp z, v_3' - v_3)\ )(E, -e_3 \otimes e_3)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

et

$$
\begin{aligned}
(A^-_{vx}, A^-_{vv}) = &\left(\cos\varphi - \frac{rr'\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\otimes\left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&+\frac{r-r'\cos\varphi}{|z|}\,\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\otimes\left(\frac{({}^\perp z,0)}{|z|},0\right)\\
&-\left(\cos\varphi+\frac{(r-r'\cos\varphi)(r'-r\cos\varphi)}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\otimes\left(\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&+\frac{(r-r'\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\,\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\otimes\left(\frac{v_3-v_3'}{|z|}\,\frac{(z,0)}{|z|},-e_3\right)\\
&-\frac{(r'-r\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\,e_3\otimes\left(\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&-e_3\otimes e_3\;S(\;({}^\perp z, v_3'-v_3)\;)(E,-e_3\otimes e_3).
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

La matrice A^- s'écrit alors

$$
\begin{aligned}
A^- = &\left(\cos\varphi - \frac{rr'\sin^2\varphi}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&+\left(\cos\varphi+\frac{(r-r'\cos\varphi)(r'-r\cos\varphi)}{|z|^2+(v_3-v_3')^2}\right)\left(\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\left(\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&-\frac{r'-r\cos\varphi}{|z|}\left(\frac{({}^\perp z,0)}{|z|},0\right)\otimes\left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&+\frac{r-r'\cos\varphi}{|z|}\left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|},\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\left(\frac{({}^\perp z,0)}{|z|},0\right)\\
&+\frac{(r'-r\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\otimes\left(\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|},-\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}\right)\\
&-\frac{(r-r'\cos\varphi)(v_3-v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\left(\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|},-\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}\right)\otimes\frac{\left((v_3-v_3')\frac{(z,0)}{|z|},-|z|e_3\right)}{\sqrt{|z|^2+(v_3-v_3')^2}}\\
&+B^-,
\end{aligned}
$$

ce que nous écrirons

$$
A^- = A_1^- + A_2^- + A_3^- + A_4^- + A_5^- + A_6^- + B^-, \tag{B.10}
$$

où, comme dans (B.5)

$$B^- = \begin{pmatrix} {}^tES(\ ({}^\perp z, v_3' - v_3)\ )E & ES(\ ({}^\perp z, v_3' - v_3)\ )e_3 \otimes e_3 \\ -e_3 \otimes e_3 S(\ ({}^\perp z, v_3' - v_3)\ )E & e_3 \otimes e_3 S(\ ({}^\perp z, v_3' - v_3)\ )e_3 \otimes e_3 \end{pmatrix} \tag{B.11}$$

$$= \left(\frac{({}^\perp z, 0)}{|z|}, 0 \right)^{\otimes 2} + \left(\frac{v_3 - v_3'}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \frac{(z,0)}{|z|}, -\frac{|z| e_3}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \right)^{\otimes 2} \tag{B.12}$$

$$=: B_1^- + B_2^-.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} A_1^- + A_3^- + A_4^- + B_1^- = & \frac{rr' \sin^2\varphi\ (v_3 - v_3')^2}{|z|^2[\ |z|^2 + (v_3 - v_3')^2]} \left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \right) \otimes \left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, \frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \\ & + \left[\frac{r - r'\cos\varphi}{|z|} \left(\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|}, \frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \right) + \left(\frac{({}^\perp z,0)}{|z|}, 0 \right) \right] \\ & \otimes \left[\frac{r\cos\varphi - r'}{|z|} \left(\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, \frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) + \left(\frac{({}^\perp z,0)}{|z|}, 0 \right) \right] \end{aligned} \tag{B.13}$$

comme

$$\frac{rr' \sin^2\varphi\ (v_3 - v_3')^2}{|z|^2[\ |z|^2 + (v_3 - v_3')^2\ ]} + \frac{(r - r'\cos\varphi)(r\cos\varphi - r')}{|z|^2} = \cos\varphi - \frac{rr' \sin^2\varphi}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}$$

et

$$\begin{aligned} A_2^- + A_5^- + A_6^- + B_2^- = & \frac{rr' \sin^2\varphi}{|z|^2} \left(\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \right) \otimes \left(\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, -\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) \\ & + \left[\frac{(r - r'\cos\varphi)(v_3 - v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \left(\frac{({}^\perp\overline{v},0)}{|\overline{v}|}, -\frac{(\overline{v},0)}{|\overline{v}|} \right) - \frac{\left((v_3 - v_3')\frac{(z,0)}{|z|}, -|z| e_3 \right)}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \right] \\ & \otimes \left[\frac{(r\cos\varphi - r')(v_3 - v_3')}{|z|\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \left(\frac{({}^\perp\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|}, -\frac{(\overline{v'},0)}{|\overline{v'}|} \right) - \frac{\left((v_3 - v_3')\frac{(z,0)}{|z|}, -|z| e_3 \right)}{\sqrt{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}} \right] \end{aligned} \tag{B.14}$$

puisque

$$\begin{aligned} & \frac{rr' \sin^2\varphi}{|z|^2} + \frac{(r'\cos\varphi - r)(r' - r\cos\varphi)(v_3 - v_3')^2}{|z|^2\ [\ |z|^2 + (v_3 - v_3')^2\ ]} \\ & \qquad = \cos\varphi + \frac{(r - r'\cos\varphi)(r' - r\cos\varphi)}{|z|^2 + (v_3 - v_3')^2}. \end{aligned}$$

Notre conclusion suit en combinant (B.10), (B.11), (B.13), (B.14).

■

Preuve de la proposition 5.12

Preuve.

En utilisant la formule $a \cdot \nabla_{x,v} - \lambda \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} = [\mathcal{T}, \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}]$ on a

$$\begin{aligned} -\left\langle (a - \lambda \mathcal{B}^\lambda) \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f) \right\rangle &= -\left\langle \mathcal{T} \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{T} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f)) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} ((a - \lambda \mathcal{B}^\lambda) \cdot \nabla_{x,v} f) \right\rangle \end{aligned}$$

comme $\mathrm{Im}\mathcal{T} \subset \ker \langle \cdot \rangle$ et $\mathcal{T}(\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f) = (a - \lambda \mathcal{B}^\lambda) \cdot \nabla_{x,v} f$. Ainsi

$$\begin{aligned} -\left\langle (a - \lambda \mathcal{B}^\lambda) \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f) \right\rangle &= \frac{1}{2} \left\langle [\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}, (a - \lambda \mathcal{B}^\lambda) \cdot \nabla_{x,v}] f \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle [\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}, a \cdot \nabla_{x,v}] f \right\rangle \\ &= \left\langle \xi^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f \right\rangle \end{aligned}$$

où $2\xi^\lambda$ est la parenthèse de poisson entre les champs de vecteurs $\mathcal{B}^\lambda$ et a. Comme $\mathrm{div}_{x,v} a = \mathrm{div}_{x,v} \mathcal{B}^\lambda = 0$, on a $\mathrm{div}_{x,v} \xi^\lambda = 0$ et ainsi, avec la proposition 3.25, on obtient

$$\begin{aligned} -\left\langle (a - \lambda \mathcal{B}^\lambda) \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} f) \right\rangle &= \left\langle \mathrm{div}_{x,v} (f \xi^\lambda) \right\rangle \\ &= \mathrm{div}_x (f \left\langle \xi_x^\lambda \right\rangle) + \mathrm{div}_v \left\{ f \left\langle \xi_v^\lambda \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle \frac{v}{|v|} \right\} \\ &= \mathrm{div}_{x,v} (f \mathcal{C}^\lambda) \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}^\lambda = \left(\left\langle \xi_x^\lambda \right\rangle, \left\langle \xi_v^\lambda \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle \frac{v}{|v|} \right)$. En particulier, si on prend $f = 1 \in \ker \mathcal{T}$, on obtient $\mathrm{div}_{x,v} \mathcal{C}^\lambda = 0$.

Calcul de $\mathcal{C}_x^\lambda$

On utilise l'invariant $\psi_1 = x_1$. En prenant en compte que

$$\begin{aligned} \xi_{x_1}^\lambda = \xi^\lambda \cdot \nabla_{x,v} \psi_1 &= \frac{1}{2} [\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v}, a \cdot \nabla_{x,v}] \psi_1 \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} (a \cdot \nabla_{x,v} \psi_1) - \frac{1}{2} a \cdot \nabla_{x,v} (\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} \psi_1) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} v_1 - \frac{1}{2} a \cdot \nabla_{x,v} \mathcal{B}_{x_1}^\lambda \end{aligned}$$

On déduit, avec la proposition 3.25

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi^\lambda_{x_1} \right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{div}_{x,v}(v_1\mathcal{B}^\lambda)\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{div}_{x,v}(\mathcal{B}^\lambda_{x_1}a)\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{div}_x\left\langle v_1\mathcal{B}^\lambda_x\right\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{div}_v\left[\left\langle v_1\mathcal{B}^\lambda_v\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle\frac{v}{|v|}\right] \\
&- \frac{1}{2}\mathrm{div}_x\left\langle \mathcal{B}^\lambda_{x_1}v\right\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{div}_v\left[\left\langle \mathcal{B}^\lambda_{x_1}\frac{qE}{m}\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle\frac{v}{|v|}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\partial_{x_2}\left\langle \frac{\mathcal{O}_\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}} : {}^\perp v\otimes v\right\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{div}_v\left[\left\langle \frac{qv\otimes v}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}|v|} : ({}^t\mathcal{O}_\lambda E\otimes e_1 - E\otimes {}^t\mathcal{O}_\lambda e_1)\right\rangle\frac{v}{|v|}\right] \\
&= \frac{|v|^2}{2}\partial_{x_2}\left(\frac{\omega_c}{\lambda^2+\omega_c^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{div}_v\left(\frac{\omega_c^2}{\lambda^2+\omega_c^2}\left(\frac{{}^\perp E}{B}\right)_1 v\right) \\
&= \frac{|v|^2}{2}\partial_{x_2}\left(\frac{\omega_c}{\lambda^2+\omega_c^2}\right) + \frac{\omega_c^2}{\lambda^2+\omega_c^2}\left(\frac{{}^\perp E}{B}\right)_1.
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\left\langle \xi^\lambda_{x_2}\right\rangle = -\frac{|v|^2}{2}\partial_{x_1}\left(\frac{\omega_c}{\lambda^2+\omega_c^2}\right) + \frac{\omega_c^2}{\lambda^2+\omega_c^2}\left(\frac{{}^\perp E}{B}\right)_2$$

et ainsi

$$\mathcal{C}^\lambda_x = \left\langle \xi^\lambda_x\right\rangle = \frac{\omega_c^2}{\lambda^2+\omega_c^2}\frac{{}^\perp E}{B} + \frac{|v|^2}{2}\,{}^\perp\nabla_x\left(\frac{\omega_c}{\lambda^2+\omega_c^2}\right).$$

Calcul de $\mathcal{C}^\lambda_v$
On utilise l'invariant $\psi_3 = |v|$. En prenant en compte que

$$\begin{aligned}
\xi^\lambda_v\cdot\frac{v}{|v|} &= \xi^\lambda\cdot\nabla_{x,v}\psi_3 = \frac{1}{2}[\mathcal{B}^\lambda\cdot\nabla_{x,v}, a\cdot\nabla_{x,v}]\psi_3 \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{B}^\lambda\cdot\nabla_{x,v}(a\cdot\nabla_{x,v}\psi_3) - \frac{1}{2}a\cdot\nabla_{x,v}(\mathcal{B}^\lambda\cdot\nabla_{x,v}\psi_3) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{B}^\lambda\cdot\nabla_{x,v}\left(\frac{qE}{m}\cdot\frac{v}{|v|}\right) - \frac{1}{2}a\cdot\nabla_{x,v}\left(\frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}}{}^t\mathcal{O}_\lambda E\cdot\frac{v}{|v|}\right)
\end{aligned}$$

on déduit par la proposition 3.25

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi_v^\lambda \cdot \frac{v}{|v|} \right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{div}_{x,v}\left(\frac{qE}{m}\cdot\frac{v}{|v|}\mathcal{B}^\lambda\right)\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{div}_{x,v}\left(\frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}}\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\cdot\frac{v}{|v|}a\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{div}_x\left\langle \frac{qE}{m}\cdot\frac{v}{|v|}\frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}}\right\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{div}_v\left[\left\langle \frac{qE}{m}\cdot\frac{v}{|v|}\frac{q\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}}\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle\frac{v}{|v|}\right] \\
&- \frac{1}{2}\mathrm{div}_x\left\langle \frac{q\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}}\cdot\frac{v}{|v|}v\right\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{div}_v\left[\left\langle \frac{q\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}}\cdot\frac{v}{|v|}\frac{qE}{m}\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle\frac{v}{|v|}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{div}_x\left\langle \frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+\omega_c^2}|v|}[\mathcal{O}_\lambda(v\otimes v)E - (v\otimes v)\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E]\right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{div}_x\left(\frac{q}{m}\frac{\omega_c}{\lambda^2+\omega_c^2}|v|\,{}^\perp E\right).
\end{aligned}$$

Enfin

$$\mathcal{C}_v^\lambda = \left\langle \xi_v^\lambda\cdot\frac{v}{|v|}\right\rangle\frac{v}{|v|} = -\frac{1}{2}\frac{q}{m}\left({}^\perp E\cdot\nabla_x\left(\frac{\omega_c}{\lambda^2+\omega_c^2}\right)\right)v$$

et (5.49) suit.

■

annexe D

Preuve de la proposition 5.15

Preuve (de la proposition 5.15).

Notons

$$\mathcal{B}^\lambda \cdot \nabla_{x,v} = \alpha \cdot \nabla_x + \beta \cdot \nabla_v.$$

Alors pour $f(x,v) = F(x,|v|)$ on doit calculer

$$\langle \alpha \cdot \nabla_x (\alpha \cdot \nabla_x f) \rangle , \langle \alpha \cdot \nabla_x (\beta \cdot \nabla_v f) \rangle , \langle \beta \cdot \nabla_v (\alpha \cdot \nabla_x f) \rangle , \langle \beta \cdot \nabla_v (\beta \cdot \nabla_v f) \rangle .$$

1. On a

$$\alpha \cdot \nabla_x (\alpha \cdot \nabla_x f) = \frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\sqrt{\lambda^2+1}} \cdot \nabla_x \left(\frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\sqrt{\lambda^2+1}} \cdot \nabla_x F \right).$$

On voit facilement que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_\lambda v \otimes \mathcal{O}_\lambda v \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{(\lambda v_1 - v_2)^2}{\lambda^2+1} & \frac{(\lambda v_1 - v_2)(v_1 + \lambda v_2)}{\lambda^2+1} \\ \frac{(v_1+\lambda v_2)(\lambda v_1 - v_2)}{\lambda^2+1} & \frac{(v_1+\lambda v_2)^2}{\lambda^2+1} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 \frac{|v|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}}{\lambda^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2 \frac{|v|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}}{\lambda^2+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{|v|^2}{2} I \end{aligned} \tag{D.1}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \langle \alpha \cdot \nabla_x (\alpha \cdot \nabla_x f) \rangle &= \frac{\nabla_x^2 F : \langle \mathcal{O}_\lambda v \otimes \mathcal{O}_\lambda v \rangle}{\lambda^2+1} \\ &= \frac{\nabla_x^2 F : \frac{|v|^2}{2} I}{\lambda^2+1} \\ &= \frac{|v|^2}{2(\lambda^2+1)} \Delta_x F \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \nabla_x(\beta \cdot \nabla_v f) =& \frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\sqrt{\lambda^2+1}} \cdot \nabla_x \left(\frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+1}} \partial_{|v|F}\, {}^t\mathcal{O}_\lambda E \cdot \frac{v}{|v|} \right) \\
=& \frac{q}{m} \frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\lambda^2+1} \cdot \left\{ \nabla_x \partial_{|v|F} \left({}^t\mathcal{O}_\lambda E \cdot \frac{v}{|v|} \right) + \partial_{|v|F}\, {}^t\partial_x ({}^t\mathcal{O}_\lambda E) \frac{v}{|v|} \right\} \\
=& \frac{q}{m} \frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\lambda^2+1} \cdot \left\{ \nabla_x \partial_{|v|F} \left({}^t\mathcal{O}_\lambda E \cdot \frac{v}{|v|} \right) + \partial_{|v|F}\, {}^t\partial_x E \mathcal{O}_\lambda \frac{v}{|v|} \right\} \\
=& \frac{q}{m(\lambda^2+1)} \frac{\mathcal{O}_\lambda v \otimes v : \nabla_x \partial_{|v|F} \otimes {}^t\mathcal{O}_\lambda E}{|v|} \\
&+ \frac{q\partial_{|v|F}}{m(\lambda^2+1)} \left(\partial_x E : \frac{\mathcal{O}_\lambda v \otimes \mathcal{O}_\lambda v}{|v|} \right).
\end{aligned}$$

Des calculs simples montrent que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}_\lambda v \otimes v \rangle &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda \frac{|v|^2}{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} & -\frac{\frac{|v|^2}{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ \frac{\frac{|v|^2}{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} & \frac{\lambda \frac{|v|^2}{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{|v|^2}{2} \mathcal{O}_\lambda
\end{aligned}$$

et en utilisant (D.1) on en déduit que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \cdot \nabla_x(\beta \cdot \nabla_v f) \rangle &= \frac{q}{m(\lambda^2+1)} \frac{|v|}{2} \mathcal{O}_\lambda : \nabla_x \partial_{|v|F} \otimes {}^t\mathcal{O}_\lambda E + \frac{q\partial_{|v|F}}{m(\lambda^2+1)} \partial_x E : \frac{|v|}{2} I \\
&= \frac{q}{m(\lambda^2+1)} \frac{|v|}{2} \mathcal{O}_\lambda\, {}^t\mathcal{O}_\lambda : \nabla_x \partial_{|v|F} \otimes E + \frac{q\partial_{|v|F}}{m(\lambda^2+1)} \frac{|v|}{2} \mathrm{div}_x E \\
&= \frac{q}{m(\lambda^2+1)} \frac{|v|}{2} \left[\nabla_x \partial_{|v|F} \cdot E + \partial_{|v|F} \mathrm{div}_x E \right] \\
&= \frac{q}{m(\lambda^2+1)} \frac{|v|}{2} \mathrm{div}_x (\partial_{|v|F} E)
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\beta \cdot \nabla_v (\alpha \cdot \nabla_x f) &= \frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+1}}\, {}^t\mathcal{O}_\lambda E \cdot \nabla_v \left(\frac{\mathcal{O}_\lambda v}{\sqrt{\lambda^2+1}} \cdot \nabla_x F \right) \\
&= \frac{q}{m(\lambda^2+1)}\, {}^t\mathcal{O}_\lambda E \cdot \left[{}^t\mathcal{O}_\lambda \nabla_x F + {}^t\partial_v (\nabla_x F) \mathcal{O}_\lambda v \right] \\
&= \frac{q}{m(\lambda^2+1)}\, {}^t\mathcal{O}_\lambda E \cdot \left[{}^t\mathcal{O}_\lambda \nabla_x F + \frac{v}{|v|} \otimes \nabla_x \partial_{|v|F} \mathcal{O}_\lambda v \right] \\
&= \frac{q}{m(\lambda^2+1)} \left[(E \cdot \nabla_x F) + {}^t\mathcal{O}_\lambda E \otimes \nabla_x \partial_{|v|F} : \frac{v}{|v|} \otimes \mathcal{O}_\lambda v \right].
\end{aligned}$$

En prenant la moyenne on obtient

$$\begin{aligned}\langle \beta \cdot \nabla_v (\alpha \cdot \nabla_x f)\rangle &= \frac{q}{m(\lambda^2+1)}\left[(E\cdot\nabla_x F) + {}^t\mathcal{O}_\lambda E \otimes \nabla_x \partial_{|v|}F : \frac{|v|}{2}\,{}^t\mathcal{O}_\lambda\right]\\ &= \frac{q}{m(\lambda^2+1)}\left[(E\cdot\nabla_x F) + \frac{|v|}{2}\mathcal{O}_\lambda\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\cdot\nabla_x\partial_{|v|}F\right]\\ &= \frac{q}{m(\lambda^2+1)}\left[(E\cdot\nabla_x F) + \frac{|v|}{2}E\cdot\nabla_x\partial_{|v|}F\right]\\ &= \frac{q}{2m(\lambda^2+1)}\left[E\cdot\partial_{|v|}(|v|\nabla_x F) + E\cdot\nabla_x F\right]\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}\beta\cdot\nabla_v(\beta\cdot\nabla_v f) &= \frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+1}}\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\cdot\nabla_v\left(\frac{q}{m\sqrt{\lambda^2+1}}\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\cdot\nabla_v F\right)\\ &= \frac{q^2}{m^2(\lambda^2+1)}\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\cdot\left(\nabla_v^2 F\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\right)\\ &= \frac{q^2}{m^2(\lambda^2+1)}\cdot\nabla_v^2 F :\, {}^t\mathcal{O}_\lambda E\otimes\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\end{aligned}$$

d'où

$$\langle\beta\cdot\nabla_v(\beta\cdot\nabla_v f)\rangle = \frac{q^2}{m^2(\lambda^2+1)}\left\langle\nabla_v^2 F\right\rangle :\, {}^t\mathcal{O}_\lambda E\otimes\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E.$$

Mais la matrice hessienne de F par rapport à v s'écrit

$$\nabla_v^2 F = \partial^2_{|v|}F\frac{v\otimes v}{|v|^2} + \frac{\partial_{|v|}F}{|v|}\left(I - \frac{v\otimes v}{|v|^2}\right)$$

et alors

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla_v^2 F\right\rangle &= \partial^2_{|v|}F\frac{\langle v\otimes v\rangle}{|v|^2} + \frac{\partial_{|v|}F}{|v|}\left(I - \frac{\langle v\otimes v\rangle}{|v|^2}\right)\\ &= \partial^2_{|v|}F\frac{I}{2} + \frac{\partial_{|v|}F}{|v|}\frac{I}{2}.\end{aligned}$$

On obtient la formule

$$\begin{aligned}\langle\beta\cdot\nabla_v(\beta\cdot\nabla_v f)\rangle &= \frac{q^2}{2m^2(\lambda^2+1)}\left(\partial^2_{|v|}F + \frac{\partial_{|v|}F}{|v|}\right)I :\, {}^t\mathcal{O}_\lambda E\otimes\,{}^t\mathcal{O}_\lambda E\\ &= \frac{q^2}{2m^2(\lambda^2+1)}\left(\partial^2_{|v|}F + \frac{\partial_{|v|}F}{|v|}\right)|E|^2\end{aligned}$$

On obtient le résultat en combinant ces calculs.

■

Bibliographie

[1] P.R. AMESTOY, A. GUERMOUCHE, J.-Y. L'EXCELLENT et S. PRALET : Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel computing*, 32(2):136–156, 2006.

[2] C. AMROUCHE et N. El H. SELOULA : Stokes equations and elliptic systems with nonstandard boundary conditions. *Comptes Rendus Mathematique*, 349(11):703–708, 2011.

[3] V. I. ARNOL'D : *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer, 1989.

[4] A. ARSENEEV : Global existence of a weak solution of the vlasov system of equations. *U.R.S.S. Comp. and Math. Phys.*, 15:131–143, 1975.

[5] S. BALAY, K. BUSCHELMAN, W.D. GROPP, D. KAUSHIK, M.G. KNEPLEY, L. Curfman MCINNES, B. F. SMITH et H. ZHANG : Petsc web page, 2001, 2004.

[6] S. BALAY, W.D. GROPP et B.F. MCINNES, L.C .and Smith : Petsc 2.0 users manual, 1996.

[7] S. BALAY, W.D. GROPP et B.F. SMITH : Modern software tools in scientific computing. *Ann Arbor, MI : Birkhauser Press*, pages 163–202, 1997.

[8] N. BEN ABDALLAH : Weak solutions of the initial-boundary value problem for the vlasov–poisson system. *Mathematical methods in the applied sciences*, 17(6):451–476, 1994.

[9] M. BENNOUNE, M. LEMOU et L. MIEUSSENS : Uniformly stable numerical schemes for the boltzmann equation preserving the compressible navier–stokes asymptotics. *Journal of Computational Physics*, 227(8):3781–3803, 2008.

[10] A. BERS et J.L. DELCROIX : *Physique des plasmas*. EDP Sciences, 1994.

[11] C.K. BIRDSALL et A.B. LANGDON : Plasma physics via computer simulation (book/disc). 1991.

[12] M. BOSTAN : Asymptotic behavior of weak solutions for the relativistic vlasov–maxwell equations with large light speed. *Journal of Differential Equations*, 227(2):444–498, 2006.

[13] M. BOSTAN : The Vlasov–Poisson system with strong external magnetic field. Finite Larmor radius regime. *Asymptotic Analysis*, 61(2):91–123, 2009.

[14] M. BOSTAN : Gyrokinetic vlasov equation in three dimensional setting. second order approximation. *Multiscale Modeling & Simulation*, 8(5):1923–1957, 2010.

[15] M. BOSTAN : Gyrokinetic vlasov equation in three dimensional setting. second order approximation. *Multiscale Modeling & Simulation*, 8(5):1923–1957, 2010.

[16] M. BOSTAN : Transport equations with disparate advection fields. application to the gyrokinetic models in plasma physics. *Journal of Differential Equations*, 249(7):1620–1663, 2010.

[17] M. BOSTAN : Transport of charged particles under fast oscillating magnetic fields. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 44(3):1415–1447, 2012.

[18] M. BOSTAN et C. CALDINI QUEIROS : Finite larmor radius approximation for collisionnal magnetic confinement. part I : The linear boltzmann equation. *Quaterly of Applied Mathematics*, 2012.

[19] M. BOSTAN et C. CALDINI QUEIROS : Finite larmor radius approximation for collisionnal magnetic confinement. part II : The fokker–planck–landau equation. *Quaterly of Applied Mathematics*, 2012.

[20] M. BOSTAN et C. NEGULESCU : Mathematical models for strongly magnetized plasmas with mass disparate particles. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 15(3):513–544, 2011.

[21] F. BOUCHUT, F. GOLSE et C. PALLARD : Classical solutions and the glassey-strauss theorem for the 3d vlasov-maxwell system. *Archive for rational mechanics and analysis*, 170(1):1–15, 2003.

[22] A. J. BRIZARD : A guiding-center fokker–planck collision operator for nonuniform magnetic fields. *Physics of plasmas*, 11:4429, 2004.

[23] A.J. BRIZARD et T.S. HAHM : Foundations of nonlinear gyrokinetic theory. *Reviews of modern physics*, 79(2):421, 2007.

[24] CEA : `http://www.http://www-fusion-magnetique.cea.fr/`. Consulté en septembre 2013.

[25] C. CERCIGNANI, R. ILLNER et M. PULVIRENTI : *The mathematical theory of dilute gases, Applied Mathematical Sciences, Vol. 106*. New York : Springer, 1994.

[26] V. CHABANNES : *Vers la simulation des écoulements sanguins*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2013.

[27] V. CHABANNES, G. PENA et C. PRUD'HOMME : High order fluid structure interaction in 2d and 3d application to blood flow in arteries. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2012.

[28] F.F. CHEN : *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. Plenum Press, New York, 1984.

[29] C CONCA, F MURAT et O PIRONNEAU : The stokes and navier-stokes equations with boundary conditions involving the pressure. *Japanese Journal of Mathematics-New Series*, 20(2):279–318, 1994.

[30] N. CROUSEILLES et M. LEMOU : An asymptotic preserving scheme based on a micro-macro decomposition for collisional vlasov equations : diffusion and high-field scaling limits. *Kinetic and related models*, 4(2):441–477, 2011.

[31] N. CROUSEILLES, M. MEHRENBERGER et E. SONNENDRÜCKER : Conservative semi-lagrangian schemes for vlasov equations. *Journal of Computational Physics*, 229(6):1927–1953, 2010.

[32] P. DEGOND et H. NEUNZERT : Local existence of solutions of the vlasov-maxwell equations and convergence to the vlasov-poisson equations for infinite light velocity. *Mathematical methods in the applied sciences*, 8(1):533–558, 1986.

[33] P. DEGOND et P.-A. RAVIART : An asymptotic analysis of the one-dimensional vlasov–poisson system : the child–langmuir law. *Asymptotic Analysis*, 4(3):187–214, 1991.

[34] L. DESVILLETTES : Plasma kinetic models : the fokker-planck-landau equation, modelling and computational methods for kinetic equations, 171-193. *Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser Boston, MA*, 2004.

[35] L. DESVILLETTES et C. VILLANI : On the spatially homogeneous landau equation for hard potentials part i : existence, uniqueness and smoothness. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(1-2):179–259, 2000.

[36] L. DESVILLETTES et C. VILLANI : On the spatially homogeneous landau equation for hard potentials part ii : H-theorem and applications. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(1-2):261–298, 2000.

[37] R. J. DIPERNA et P.-L. LIONS : Global weak solutions of vlasov-maxwell systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(6):729–757, 1989.

[38] V. DOYEUX, Y. GUYOT, V. CHABANNES, C. PRUD'HOMME et M. ISMAIL : Simulation of two-fluid flows using a finite element/level set method. application to bubbles and vesicle dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2012.

[39] L. FORMAGGIA, A. QUARTERONI et A. VENEZIANI : *Cardiovascular Mathematics : Modeling and simulation of the circulatory system*, volume 1. Springer, 2009.

[40] E. FRÉNOD et E. SONNENDRÜCKER : Homogenization of the vlasov equation and of the vlasov–poisson system with a strong external magnetic field. *Asymptotic Analysis*, 18(3):193–213, 1998.

[41] E. FRÉNOD et E. SONNENDRÜCKER : The finite larmor radius approximation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 32(6):1227–1247, 2001.

[42] E. FRÉNOD : Application of the averaging method to the gyrokinetic plasma. *Asymptotic Analysis*, 46(1):1–28, 2006.

[43] X GARBET, G DIF-PRADALIER, C NGUYEN, Y SARAZIN, V GRANDGIRARD et Ph GHENDRIH : Neoclassical equilibrium in gyrokinetic simulations. *Physics of Plasmas*, 16:062503, 2009.

[44] C. GEUZAINE et J.-F. REMACLE : Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.

[45] R. T. GLASSEY et J. SCHAEFFER : On symmetric solutions of the relativistic vlasov-poisson system. *Communications in Mathematical Physics*, 101(4):459–473, 1985.

[46] R. T. GLASSEY et W. A. STRAUSS : Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities. *Archive for rational mechanics and analysis*, 92(1):59–90, 1986.

[47] F. GOLSE, P.-L. LIONS, B. PERTHAME et R. SENTIS : Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *Journal of functional analysis*, 76(1):110–125, 1988.

[48] F. GOLSE et L. SAINT-RAYMOND : The vlasov–poisson system with strong magnetic field. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 78(8):791–817, 1999.

[49] C. GREENGARD et P.-A. RAVIART : A boundary-value problem for the stationary vlasov-poisson equations : The plane diode. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(4):473–507, 1990.

[50] R. D. HAZELTINE et J. D. MEISS : *Plasma confinement*. Dover publications, 2003.

[51] F. HUBERT et J. H. HUBBARD : *Calcul scientifique : Équations différentielles et équations aux dérivées partielles*, volume 2. Vuibert, 2006.

[52] ITER : une énergie pour notre avenir. `http://www.iter.org/fr/accueil`. Consulté en janvier 2013.

[53] S. JIN, L. PARESCHI et G. TOSCANI : Uniformly accurate diffusive relaxation schemes for multiscale transport equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(3):913–936, 2000.

[54] A. KLAR : An asymptotic-induced scheme for nonstationary transport equations in the diffusive limit. *SIAM journal on numerical analysis*, 35(3):1073–1094, 1998.

[55] A. KLAR : An asymptotic preserving numerical scheme for kinetic equations in the low mach number limit. *SIAM journal on numerical analysis*, 36(5):1507–1527, 1999.

[56] M. LEMOU : Relaxed micro–macro schemes for kinetic equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(7):455–460, 2010.

[57] M. LEMOU et L. MIEUSSENS : A new asymptotic preserving scheme based on micro-macro formulation for linear kinetic equations in the diffusion limit. *SIAM J. Sci. Comput*, 31(1):334–368, 2008.

[58] E MARCHANDISE, C GEUZAINE et JF REMACLE : Cardiovascular and lung mesh generation based on centerlines. *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, 2013.

[59] P. A MARKOWICH, C. A. RINGHOFER et C. SCHMEISER : *Semiconductor equations*, volume 19. Springer-Verlag Wien, 1990.

[60] B. MAURY : *The Respiratory System in Equations*. Springer, 2013.

[61] A. MOUTON et E. FRÉNOD : Two-dimensional finite larmor radius approximation in canonical gyrokinetic coordinates. *J. Pures Appl. Math. Adv. Appl.*, (4):135–169, 2010.

[62] G. PENA, C. PRUD'HOMME et A. QUARTERONI : High order methods for the approximation of the incompressible navier–stokes equations in a moving domain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209:197–211, 2012.

[63] F. POUPAUD : Runaway phenomena and fluid approximation under high fields in semiconductor kinetic theory. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 72(8):359–372, 1992.

[64] F. POUPAUD et C. SCHMEISER : Charge transport in semiconductors with degeneracy effects. *Mathematical methods in the applied sciences*, 14(5):301–318, 1991.

[65] C. PRUD'HOMME : Life : Overview of a unified c++ implementation of the finite and spectral element methods in 1d, 2d and 3d. *In Applied Parallel Computing. State of the Art in Scientific Computing*, pages 712–721. Springer, 2007.

[66] C. PRUD'HOMME, V. CHABANNES, V. DOYEUX, M. ISMAIL, A. SAMAKAE et G. PENA : Feel++ : A computational framework for galerkin methods and advanced numerical methods. *In ESAIM : Proceedings*, volume 38, pages 429–455. EDP Sciences, 2012.

[67] C. PRUD'HOMME, V. CHABANNES, V. DOYEUX, M. ISMAIL, A. SAMAKE et G. PENA : Feel++ : A computational framework for galerkin methods and advanced numerical methods. *In ESAIM : Proceedings*, volume 38.

[68] J.M. RAX : *Physique des plasmas-Cours et applications : Cours et applications*. Dunod, 2005.

[69] M. C. REED et B. SIMON : *Methods of modern mathematical physics : Functional analysis*, volume 1. Gulf Professional Publishing, 1980.

[70] L. SAINT-RAYMOND : Control of large velocities in the two-dimensional gyrokinetic approximation. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 81(4): 379–399, 2002.

[71] S. SALMON, S. SY et M. SZOPOS : Cerebral blood flow simulations in realistic geometries. *In ESAIM : Proceedings*, volume 35.

[72] M. M. SHOUCRI : A two-level implicit scheme for the numerical solution of the linearized vorticity equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(10):1525–1538, 1981.

[73] B. SMITH, P. BJORSTAD et W. GROPP : *Domain decomposition : parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge University Press, 2004.

[74] A. R. GOURLAY et J. L. MORRIS : A multistep formulation of the optimized lax-wendroff method for nonlinear hyperbolic systems in two space variables. *Mathematics of Computation*, 22(104):715–719, 1968.

[75] X.Q. XU et M.N. ROSENBLUTH : Numerical simulation of ion-temperature-gradient-driven modes. *Physics of Fluids B : Plasma Physics*, 3(3):627–643, 1991.

Résumé

Cette thèse porte sur les équations gyro-cinétiques et traite un développement rigoureux des limites de l'équation de Vlasov avec différents opérateurs de collision dans un champ magnétique fort, ainsi que du développement de méthodes numériques.

On commence par une étude de l'opérateur de moyenne. L'opérateur de moyenne a été développé par M. Bostan dans le cadre général d'une équation pour laquelle une partie du transport est fortement pénalisée. Puis, on applique ces résultats généraux aux deux régimes limites que nous étudions : le régime du rayon de Larmor fini et le régime centre-guide.

On s'intéresse au calcul précis et explicite de la moyenne de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau. On se place pour cela dans le cas du régime du rayon de Larmor fini. Avant de réaliser les calculs sur l'opérateur de Fokker-Planck-Landau, qui contient des convolutions et des termes de diffusion, il semble raisonnable de calculer la moyenne de l'opérateur de relaxation de Boltzmann, dont l'expression est plus simple.

On se place ensuite dans le cas du régime centre-guide et on présente un schéma numérique basé sur une décomposition micro-macro de la fonction de distribution des particules qui provient d'un travail en collaboration avec N. Crouseilles et M. Lemou. On obtient un schéma uniformément consistant avec le modèle continu, pour tout ordre du champ magnétique. Des simulations numériques, basées sur cette approche, ont été réalisées à l'aide d'un code de calcul 2D que l'on a développé durant cette thèse.

On présente ensuite un projet réalisé dans le cadre du Cemracs 2012, consacré à la modélisation des écoulements sanguins dans le réseau veineux cérébral.

Abstract

The main subject of this thesis is the gyro-kinetic equation. We present a rigourous developpement of the Vlasov equation limits with different collision operator in a strong magnetic field and numerical methods.

We start with a study of the gyro-average operator. The average operator has been introduced by M. Bostan in the case of an equation where part of the transport is highly penalised. Then we apply our results at the two approximation we study : the finite Larmor radius approximation and the guiding-center approximation.

We first focus on the precise and explicit computation of the Fokker-Planck-Landau operator average in the finite Larmor radius approximation. The Fokker-Planck-Landau operator contains convolution and diffusion terms, it is then reasonable to first compute the average of the Boltzmann relaxation operator.

We then focus on the guiding-center approximation and present a numerical scheme based on a micro-macro decomposition of the particles distribution fonction which comes from a joint work with N. Crouseilles and M. Lemou. We obtain a scheme which is uniformly consistant with the continuous model for any order of the magnetic field. Numerical simulation based on this approach are presented.

The last chapter of this thesis presents a project which was realised during the Cemracs 2012 concerning the modelisation of blood flow in cerebral veins.

Keywords : Gyro-kinetic equations, Vlasov equations, finite Larmor radius, guiding-center model, Fokker-Planck-Landau equations, Collisions, asymptotic preserving schemes, micro-macro decomposition.

AMS Classification : 35Q75, 78A35, 82D10