

# THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE  
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE – COMTÉ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ  
DE FRANCHE – COMTÉ

Spécialité : Sciences pour l'Ingénieur

Comparaison entre diverses approches  
de la modélisation du comportement  
thermomécanique des alliages  
à mémoire de forme

par

Elie GIBEAU

Soutenue le 17 décembre 2009 devant la commission d'examen :

Rapporteurs	<b>André CHRYSOCHOOS</b>	Professeur, Université Montpellier II
	<b>Etienne PATOOR</b>	Professeur, ENSAM de Metz
Examineurs	<b>Olivier COUSSY</b>	Directeur de Recherche, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
Directeur de Thèse	<b>Christian LEXCELLENT</b>	Professeur, ENSMM
Co-directeurs de Thèse	<b>Lamine BOUBAKAR</b>	Professeur, Université de Franche-Comté
	<b>Mohamed Rachid LAYDI</b>	Maître de Conférences HDR, ENSMM



# Remerciements

J'adresse mes remerciements sincères à Monsieur André Chrysochoos pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire et pour m'avoir permis de mieux appréhender mon travail.

Je remercie Monsieur Etienne Patoor d'avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire et pour sa relecture méticuleuse.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Olivier Coussy de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie Monsieur Mohamed Rachid Laydi pour ses conseils, sa bonne humeur qui ont accompagnés nos séances de travail communes depuis ma place d'étudiant à celle de docteur.

Je remercie chaleureusement Monsieur Lamine Boubakar autant pour toutes les (précieuses) connaissances qu'il m'a transmises mais aussi pour tous les bons moments passés ensemble. Nous retiendrons particulièrement quelques fous rires mais surtout une sombre histoire d'eau gazeuse au cours de laquelle l'artiste MoufMouf fut redécouvert pour notre plus grand plaisir. Et pour bien encore d'autres choses, encore merci Lamine, tu restes, pour moi et pour beaucoup, comme un exemple dans le monde de l'enseignement et de la recherche.

Je remercie mon directeur de thèse, Monsieur Christian L'excellent pour les (très) nombreux conseils, pour tout l'accompagnement et sa disponibilité au quotidien durant ces 3 ans de thèse. Ce fut par ailleurs une grande fierté pour moi de travailler avec un des grands des AMF. Au-delà de tout l'apprentissage scientifique auquel j'ai pu accéder, je te remercie Christian (comme quoi des fois j'arrive à te tutoyer) pour tous les bons moments qui n'ont pas été que professionnels mais bien de sympathie qui restent et resteront de très bons souvenirs pour moi de ces années de recherche.

Je remercie l'ensemble du personnel du Département de Mécanique Appliquée pour leur sympathie et leur bonne humeur. Je fais un clin d'oeil particulier à celles et ceux avec qui il m'a été donné la possibilité de travailler en recherche ou en enseignement :

- 
- Vincent Placet, mon compagnon d’infortune aérienne pragoise qui a aussi connu la grande joie de voir une éprouvette d’AMF asperger d’huile une machine de traction. Plus sérieusement, merci pour ta bonne humeur quotidienne et inégalée dans ce laboratoire.
  - Frédérique Trivaudey, M. Namah, Jérôme Chambert, Frédéric Thiébaud pour l’ensemble des cours que j’ai pu donner avec votre aide.
  - Germain et Virginie, eux aussi habitants de la planète AMF durant quelques années.

Ces remerciements seraient totalement incomplets si je ne citais mes collègues ou plutôt amis du 43H, comme l’a dit un grand scientifique : "‘un certain fluide circule dans ce bureau"’. Par ordre chronologique de remise du diplôme de Docteur :

- Wallas! Merci pour tes conseils et paroles toujours sages et avisés, tes délires qui me font encore rire et tes coups de main jamais inutiles. Je te souhaite sincèrement une grande carrière parce que tu la mérites (même si t’en as "rien f\*\* lààà").
- Steeve. Merci pour toutes ces années autant à l’ENSMM que dans notre bureau préféré et merci de m’épauler à introduire "mouif" dans notre belle langue française.
- Cyrille, "aaaah yesss", je me sens en mesure d’écrire une pleine page sur le nombre de private jokes que nous avons entre nous mais il reste tellement de pause café que je vais les garder pour ces futurs moments. Merci pour tous les moments d’aide et les coups de pouce -pourtant nombreux sur la dernière ligne droite- et surtout pour ta bonne humeur infailible. Je crois qu’une 6 et deux grandes 10 parleront aussi bien que moi un de ces soirs, tu me diras ce que tu racontes.
- Piou, merci pour ces années durant lesquels nous avons partagé notre travail ardu rendu à la Nation. Après ta gentillesse et ta joie de vivre, je retiendrai aussi toutes tes expressions et tes commentaires rugbytiques, je terminerai donc en ponctuant d’un "En avant Guingamp!".
- Guillaume, merci pour tes tribulations d’un Français en Chine. Un futur pilier du 43H nous a rejoint.
- Xiang-Ji, mon voisin de bureau. Merci pour ta patience et de me supporter (ainsi que d’autres) au quotidien, merci pour ta gentillesse et tes conseils de vieux loups.
- Edouard, merci pour ton calme et ta sérénité au milieu de ce bureau si... enjoué je dirais.
- Raph làààààà, compagnon de conférence et voisin durant trois ans. Bien des choses pour lesquelles te remercier mais pour ne pas tomber dans la pathos je te remercierais pour le "‘Mais ça a qu’à bruler là!"’. On se comprend.

Je tiens aussi remercier mes amis de partout ailleurs, aussi bien BaTMaN (gné), Pierlo (v\*\*\*e) pour leurs mails enflammés que mes potes Limougeauds (mention spéciale à Delannoy) pour leurs nouvelles du pays qui, quelque part, me réchauffent un peu le coeur. Je fais aussi un clin d’oeil particulier à Milou, notre pharmacienne/grande soeur de chic et de choc, change rien Milou! Et bien entendu une pensée pour tous mes potes de l’ENSMM que je revoyais à chaque coin de couloir dans mes souvenirs (Jean-Seb, Joe, Jim, Nico, Cauchy, Yoh’ et tant d’autres). Et une pensée pour

---

tous mes amis bisontins qui m'ont accompagné de leur amitié durant ces années de thèse (Tof', Audrouille, Melbe, Cindyyyy, Marie et tous les autres).

Je remercie enfin et porte une énorme pensée à mes parents. Merci pour tout, comme on dit "sans vous rien de tout cela n'aurait été possible" et "nous avançons, nous progressons!". Je vous dédicace ce mémoire même s'il contient plein de "formules compliquées".



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introduction aux alliages à mémoire de forme</b>	<b>1</b>
1.1 Les alliages à mémoire de forme : des alliages à transition de phase . . . . .	2
1.1.1 La transition de phase martensitique . . . . .	2
1.1.2 La martensite auto-accommodante et la martensite orientée . . . . .	2
1.2 Propriétés thermomécaniques des AMF . . . . .	3
1.2.1 Effet pseudo-élastique . . . . .	3
1.2.2 Effet mémoire simple sens . . . . .	4
1.2.3 Effet mémoire double sens . . . . .	5
1.2.4 Effet caoutchoutique . . . . .	6
1.3 Les grandes familles d'AMF . . . . .	6
1.3.1 Les Nickel Titane . . . . .	6
1.3.2 Les AMF à base cuivre . . . . .	7
1.3.3 Autres familles . . . . .	7
1.4 Exemples et domaines d'application des AMF . . . . .	8
1.4.1 Utilisations aéronautiques et spatiales . . . . .	8
1.4.2 Utilisations médicales . . . . .	9
1.4.3 Autre utilisation : la lunetterie . . . . .	11
1.5 Etat de l'art de la modélisation . . . . .	11
1.5.1 Modèles micro(macro)scopiques . . . . .	12
1.5.2 Modèles macroscopiques . . . . .	16
1.6 Bilan et conclusion . . . . .	28
<b>2 Surfaces critères de transformation de phase</b>	<b>33</b>
2.1 Surface de début de transformation de phase dans l'espace des contraintes . . . . .	34
2.1.1 Critère de limite élastique . . . . .	34
2.1.2 Critère de début de transformation des AMF . . . . .	39
2.1.3 Une condition nécessaire de convexité . . . . .	42
2.2 Surface des déformations de transformation associées à la formation de martensite	44
2.2.1 Définition du tenseur des déformations associées à la formation de martensite	44

2.2.2	Espace des déformations . . . . .	45
2.2.3	Représentation de l'espace des déformations de transformation . . . . .	45
2.3	Dualité liant les contraintes aux déformations de transformation associées à la formation de martensite . . . . .	47
2.3.1	Introduction . . . . .	47
2.3.2	Passage de l'espace des contraintes à celui des déformations de transformation . . . . .	48
2.3.3	Dualité liant les deux espaces étudiés . . . . .	50
2.3.4	Applications . . . . .	51
2.4	Conclusion . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Modèle macroscopique basé sur la détermination de la surface de début de transformation de phase</b> . . . . .	<b>59</b>
3.1	Description du modèle . . . . .	60
3.1.1	Introduction . . . . .	60
3.1.2	Potentiels thermodynamiques . . . . .	60
3.1.3	Dissipation intrinsèque et inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	65
3.1.4	Cinétiques des transformations de phase . . . . .	67
3.1.5	Paramètres du modèle . . . . .	69
3.1.6	Identification de la fonction de correction . . . . .	70
3.2	Essais Expérimentaux . . . . .	72
3.2.1	Présentation du roundrobin - MAFESMA . . . . .	72
3.2.2	Description des essais expérimentaux . . . . .	73
3.2.3	Tests en traction simple isothermes sous plusieurs températures . . . . .	74
3.2.4	Chargements thermiques sous contraintes constantes . . . . .	75
3.2.5	Tests en torsion isothermes sous diverses températures . . . . .	75
3.2.6	Tests en torsion isothermes sous diverses températures et diverses pré-contraintes . . . . .	76
3.3	Identification des paramètres du modèle . . . . .	77
3.3.1	Paramètres matériaux classiques . . . . .	77
3.3.2	Paramètres caractéristiques du modèle . . . . .	78
3.3.3	Paramètres des cinétiques . . . . .	83
3.4	Confrontation : expérience / simulation . . . . .	83
3.4.1	Essais isothermes en traction simple . . . . .	83
3.4.2	Essais en chargement thermique sous contraintes constantes . . . . .	83
3.4.3	Essais en torsion pure . . . . .	85
3.4.4	Essais en traction - torsion . . . . .	88
3.5	Conclusion . . . . .	88

<b>4</b>	<b>Modèle inspiré de la micro mécanique de Sadjadpour et Bhattacharya</b>	<b>91</b>
4.1	Description du modèle . . . . .	92
4.1.1	Choix des variables internes . . . . .	92
4.1.2	Lois d'équilibre . . . . .	94
4.1.3	Cadre thermodynamique . . . . .	94
4.1.4	Cinétiques du modèle . . . . .	96
4.1.5	Evolution de la température . . . . .	100
4.2	Mises en oeuvre du modèle . . . . .	102
4.2.1	Application du modèle de Sadjadpour et Bhattacharya au Roundrobin . . .	102
4.2.2	Autres simulations issues du modèle étudié . . . . .	109
4.3	Conclusion . . . . .	114
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>117</b>



# Introduction générale

Pour débiter, on ne peut parler de l'Histoire de l'humanité sans y associer les découvertes scientifiques faites par les Hommes. En effet, depuis les temps les plus anciens jusqu'à nos jours, la science occupe une place prépondérante dans la construction des civilisations, les plus grandes d'entre elles telles que les civilisations chinoise, arabe, grecque et d'autres brillent et brilleront encore de leurs découvertes passées et présentes.

Un domaine reste commun pour toutes les études menées jusqu'à présent : celui de la science des matériaux. Quel que soit le domaine exploré, une problématique se pose inmanquablement, en quelle matière allons-nous réaliser l'objet ? Et par là même, pouvons-nous trouver un meilleur matériau, plus adéquat ? L'Histoire associera ces questions au parcours de l'humanité, ne serait-ce qu'en parlant de nos ancêtres de l'âge de pierre, de bronze, de fer, etc... et ce, jusqu'à notre ère moderne.

Aujourd'hui, le choix d'un matériau ne se fait jamais de manière anodine, une connaissance de ses caractéristiques est toujours requise. Au cours des siècles, l'Homme a découvert et s'est imposé des critères dont les valeurs fournissent les renseignements nécessaires à l'utilisation souhaitée du matériau : prenons simplement en exemple la masse volumique ou encore le module d'élasticité. Dans sa quête de savoir, l'humanité a ainsi pu dénombrer, classifier et bien entendu... créer et utiliser des matériaux.

Parmi ces créations, qu'on ne retrouve pas dans la nature, on peut citer toutes les matières plastiques, qui ouvrent un panel infini de possibilités, mais aussi les céramiques. Cependant nous nous pencherons ici, sur les matériaux métalliques qui allient une grande résistance mécanique, une facilité relative de fabrication, un moindre coût, etc... Ils sont aujourd'hui employés partout et leurs propriétés ainsi que leurs comportements ont fait et font encore l'objet de bien des études. Dans ce champ immense de métaux de toutes sortes, on distingue une classe de matériaux peu communs. En effet, certains alliages présentent des propriétés bien spécifiques et les recherches ont eu tôt fait de trouver comment les exploiter. Ces comportements atypiques mais surtout leurs emplois judicieux ont valu à ces matériaux la dénomination de matériaux dits "intelligents".

L'objet de l'étude de cette thèse, porte sur un de ces matériaux fonctionnels : les alliages à mémoire de forme. Depuis leur découverte en 1951, avec un alliage de Au-Cd ([Chang and Read \(1951\)](#)), jusqu'à nos jours, les mécanismes de fonctionnement ainsi que leur description ont porté

sur nombre de recherches et de publications.

Les AMF ont fait l'objet d'une grande recherche depuis des années. On trouve ainsi une grande partie expérimentale portant aussi bien sur le comportement de ces alliages face à toutes sortes de chargements thermo-mécaniques, que des observations in situ selon différents procédés.

Une partie de la communauté scientifique intéressée par le domaine des AMF porte aussi ses efforts sur l'aspect de la modélisation du comportement des AMF. Les caractéristiques des AMF se révélant nombreuses, on trouve bien des enjeux quant à leur modélisation. A ce jour aucun modèle ne parvient à tous les prendre en compte. Les effets sur lesquels les dernières études ont porté sont, entre autres, les chargements multi-axiaux proportionnels ou non, la prise en compte de la taille de l'hystérésis lors d'une charge-décharge thermo-mécanique, la distinction des différentes propriétés élastiques entre l'austénite et la martensite, etc...Chacun en vient alors à travailler son approche de la modélisation suivant l'échelle d'étude (microscopique, mésoscopique, macroscopique) mais aussi suivant d'autres paramètres.

On propose dans les travaux de recherche de ce mémoire d'aborder le problème de la modélisation des AMF via l'identification des surfaces de transformation de phase. Cette approche originale est faite tout d'abord par une étude précise des surfaces de début et de fin de transformation de phase, un outil de passage de l'une à l'autre sera d'ailleurs développé. On se penchera aussi sur deux modélisations parmi les nombreuses existantes, chacune d'elles emploiera une des surfaces de transformation permettant une bonne prise en compte des chargements multi-axiaux. Le couplage thermo-mécanique mais aussi la distinction entre les modules d'élasticité austénitique et martensitique seront intégrés afin d'étendre le champ d'étude de deux modèles étudiés.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous porterons nos efforts sur une description des divers comportements spécifiques des alliages à mémoire de forme (AMF), mais nous parlerons aussi des alliages d'AMF les plus couramment utilisés; enfin, nous présenterons quelques exemples d'utilisation qui couvrent des domaines aussi vastes que variés de la médecine à l'aéronautique.

Nous explorerons ensuite, par une bibliographie, choisie les modélisations thermomécaniques construites jusqu'à ce jour pour décrire le comportement atypique des AMF. Chaque "école" apporte sa vision et sa manière de faire sur ce point, on retrouve ainsi des modèles tous performants mais dont aucun encore ne parvient à décrire complètement l'ensemble des effets des AMF. Les modèles présentés seront choisis, d'une part, en fonction de leurs performances en modélisation et d'autre part pour leur reconnaissance dans le monde de la modélisation des AMF.

Parmi certaines modélisations, on retrouve la notion de début de transformation de phase, c'est-à-dire à partir de quand sortons-nous du domaine d'étude de l'élasticité classique pour rentrer dans celui particulier des AMF.

Nous discuterons, dans le deuxième chapitre, de la manière de décrire ces débuts de transformation via, entre autres, d'une analogie avec la limite du domaine élastoplastique. On arrivera à l'idée

---

d'une surface, décrite dans l'espace des contraintes, à la forme particulière et étudiée à l'intérieure de laquelle on aura un comportement élastique d'une phase austénitique et en-dehors de laquelle une transformation martensitique aura lieu, conférant aux AMF de nombreux effets.

On présentera ensuite une autre surface, celle de la fin de la transformation martensitique. Elle aura la particularité d'être décrite dans l'espace des déformations de transformation associées à la martensite.

Enfin, une étude théorique dressera la dualité reliant les deux surfaces présentées précédemment. On verra alors le moyen de passer de l'une à l'autre mathématiquement et nous validerons ces passages par des exemples expérimentaux.

Dans le troisième chapitre, nous décrirons le modèle développé par [Lexcellent et al. \(2006\)](#). L'originalité de ce modèle est basée sur une étude de la surface de début de transformation de phase. Il a été amélioré puis implémenté afin de tester ses potentialités.

Nous ferons une utilisation pratique sur un set expérimental. Ce dernier a été réalisé par l'équipe pragoise du Pr. Sittner dans le cadre d'une comparaison des différents modèles existants : chacun devant simuler les mêmes expériences. Nous verrons alors en détail la phase d'identification des paramètres de notre modèle ainsi que les résultats obtenus.

Dans le dernier chapitre, nous présenterons un dernier modèle issu des recherches de [Sadjadpour and Bhattacharya \(2007a\)](#). On se basera ici sur la seconde surface mise en jeu dans notre travail : la surface de fin de transformation martensitique. Après une description du modèle, nous nous emploierons à le mettre pour la première fois en oeuvre sur des essais expérimentaux. Par un souci pratique et de cohérence nous prendrons le set expérimental utilisé dans le chapitre 3.

L'ensemble de cette étude permet de poser le doigt sur l'aspect des modélisations des AMF basées sur des surfaces de début et de fin de transformation et sur le lien intrinsèque existant entre elles.



# Chapitre 1

## Introduction aux alliages à mémoire de forme

## 1.1 Les alliages à mémoire de forme : des alliages à transition de phase

### 1.1.1 La transition de phase martensitique

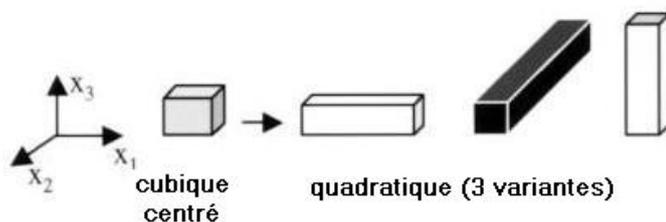
Les alliages à mémoire de forme font partie de la famille des matériaux à transformation de phase. Parmi les transformations de phase existantes, celle des AMF est la transformation martensitique. Cette dernière est une transformation de phase du premier ordre, c'est-à-dire qu'on peut observer une co-existence de plusieurs phases ainsi que des interfaces entre les phases.

Elle est aussi sans diffusion, les atomes se déplaçant sur de courtes distances (1/10 de l'échelle inter-atomique) coopérativement, elle est alors dite displacive.

### 1.1.2 La martensite auto-accommodante et la martensite orientée

La martensite est une phase qui apparaît à basse température et/ou sous contrainte. Selon que le chargement appliqué est thermique ou mécanique, on observe un type différent de martensite : respectivement la martensite auto-accommodante  $M_T$  et la martensite orientée  $M_\sigma$ . La phase mère commune à ces deux types de martensites est la phase austénitique, elle apparaît pour des gammes de hautes températures et de faibles contraintes. C'est le passage entre les trois phases qui crée les propriétés si particulières des AMF.

Une approche cristallographique permet de mieux appréhender la physique sous-jacente à ces transformations. L'austénite présente une configuration cristallographique très ordonnée contrairement au réseau cristallin de la martensite. Un chargement thermomécanique crée des variantes de martensite : lors du passage de la phase austénitique à la phase martensitique une baisse de symétrie dans le réseau cristallin se produit et laisse plusieurs possibilités d'arrangement des variantes de martensite (jusqu'à 12 possibilités de variantes) comme le montre la figure 1.1.



**FIG. 1.1** – Représentation de la baisse de symétrie dans la structure cristallographique d'un AMF (*Slutsker and Roytburd (2002)*)

La figure 1.2 présente les trois dispositions possibles prises par le réseau cristallin d'un alliage à mémoire de forme lors de la transformation de phase. La martensite créée lors d'un refroidissement depuis la phase austénitique présente des variantes de martensite disposées de façon à conserver

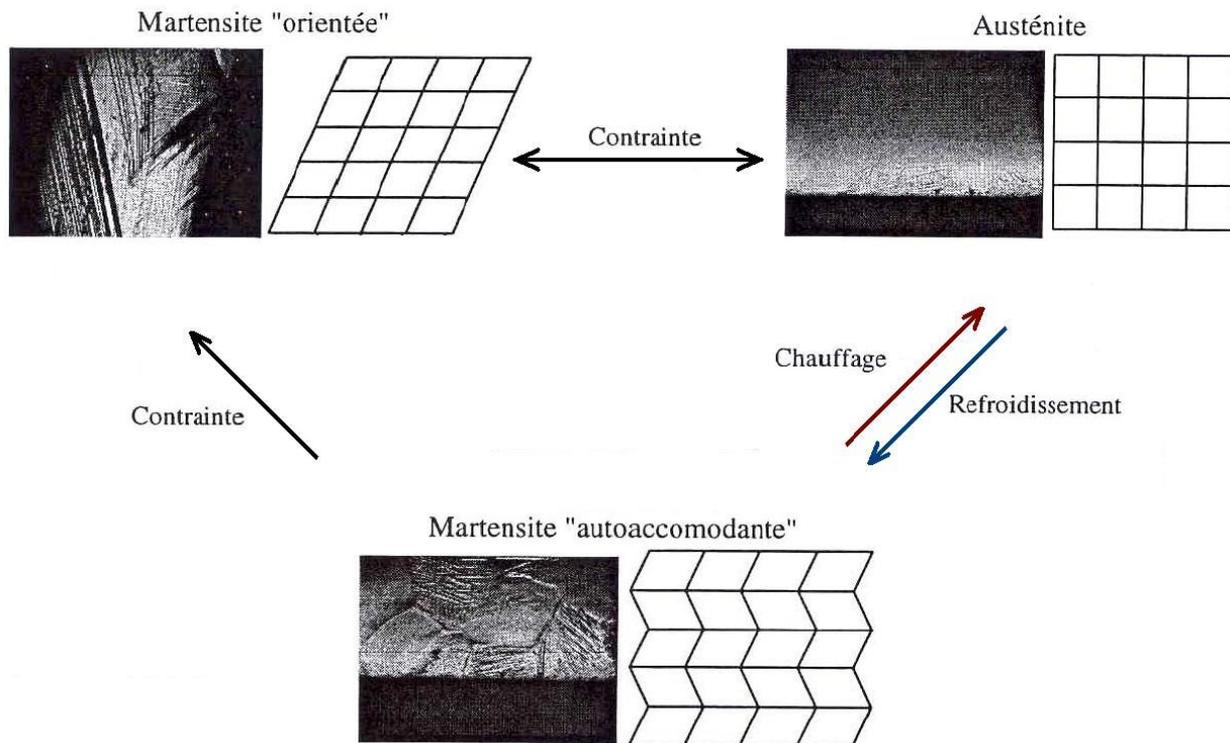


FIG. 1.2 – Structure et photographie d'AMF (Rejzner (2000))

la forme du matériau, d'où le nom de martensite auto-accommodante  $M_T$  (figure 1.4). On mesure quatre températures à l'état libre de contrainte (cf figure 1.3) :

- $M_s^0$  la température de début de transformation martensitique
- $M_f^0$  la température de fin de transformation martensitique (en-dessous de cette température la martensite reste stable)
- $A_s^0$  la température de début de transformation austénitique
- $A_f^0$  la température de fin de transformation austénitique

La martensite induite par de fortes contraintes contient différentes variantes de martensite ayant toutes idéalement la même orientation suivant la contrainte appliquée (en réalité on note une orientation privilégiée). On la nomme alors martensite orientée  $M_\sigma$ .

## 1.2 Propriétés thermomécaniques des AMF

Plusieurs effets propres aux AMF apparaissent grâce aux transformations du réseau cristallin en fonction de la température et du champ de contraintes que subit le matériau.

### 1.2.1 Effet pseudo-élastique

L'effet le plus connu est la pseudo-élasticité aussi appelé super-élasticité. Il apparaît pour de hautes températures avec l'application de contraintes. Ces dernières transforment la phase mère

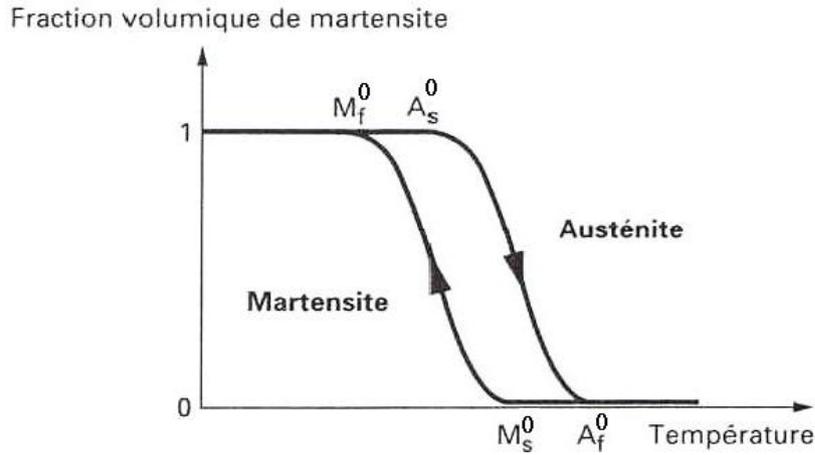


FIG. 1.3 – Températures d’activation de transformation à l’état libre de contrainte

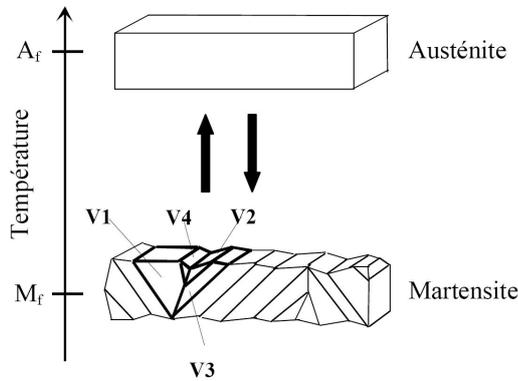


FIG. 1.4 – Formation des variantes de martensites auto-accomodantes (Khelifaoui (2000))

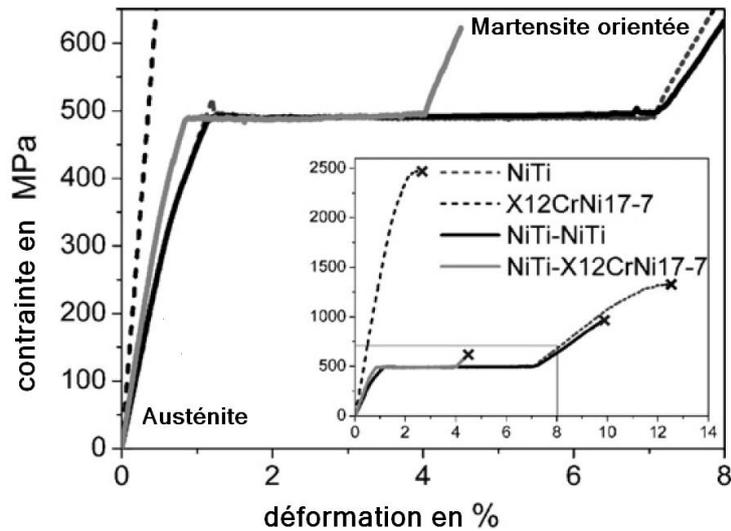
austénitique en de la martensite orientée. Cette transformation a la propriété d’être réversible mécaniquement et induit une déformation de transformation apparaissant sur la figure 1.5 sous la forme d’un plateau entre les parties élastiques de l’austénite d’une part et de la martensite orientée d’autre part. Ce phénomène amène à des déformations totales pouvant aller jusqu’à dix pour cent dans le cas de certains monocristaux.

### 1.2.2 Effet mémoire simple sens

Une autre application des propriétés des AMF est l’effet mémoire simple sens (EMSS). Il se déroule à la suite de plusieurs étapes :

- dans un premier temps (1) on refroidit à une température inférieure à  $M_f^0$  la phase mère austénitique pour obtenir de la martensite auto-accomodante  $M_T$
- ensuite on procède à une ré-orientation des variantes de martensite via l’application (2) ( $M_T \rightarrow M_\sigma$ ) puis le relâchement (3) de contraintes à une température constante  $T < M_f^0$ ,
- Le matériau reste alors dans la forme que l’on a modelée selon le champ de contraintes.

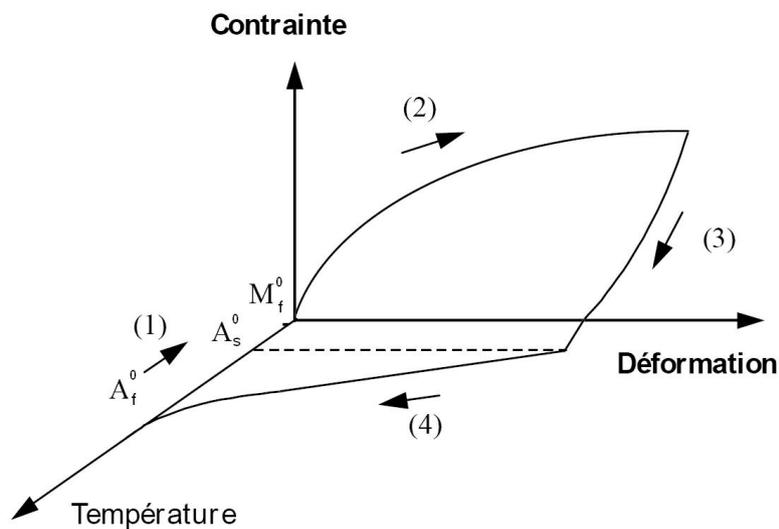
Enfin on réchauffe l’échantillon à une température  $T > A_f^0$ (4), faisant ré-apparaître la phase austénitique et faisant alors retrouver au matériau sa forme première comme on le voit sur la figure



**FIG. 1.5** – Courbes de contraintes-déformations de fils en NiTi, avec ou sans ajout de chrome (*Gugel et al. (2008)*)

### 1.6 ( $M_\sigma \rightarrow A$ ).

En bref, cet effet permet de retrouver la forme initiale d'une pièce par réchauffement tout en ayant une forme intermédiaire différente et stable.



**FIG. 1.6** – Effet mémoire de forme simple sens

### 1.2.3 Effet mémoire double sens

L'effet mémoire double sens (EMDS) est le passage réversible d'une forme haute température à une forme basse température sous contrainte.

L'EMDS doit être précédé d'une éducation de l'AMF. Cette dernière consiste en un cyclage en température à contrainte constante ou en contrainte à température constante. Durant cette éducation, des défauts de structures (dislocations...) conduisent à des contraintes internes et favorisent alors la martensite orientée.

Un AMF soumis à ce traitement peut alors passer de sa forme austénitique à celle de la martensite orientée sous contrainte nulle par simple changement de température. On a alors une forme pour chaque phase en mémoire.

### 1.2.4 Effet caoutchoutique

L'AMF est mis à température  $T < M_f^0$ , c'est-à-dire à l'état de martensite auto-accommodante puis soumis à une contrainte. Ceci provoque une ré-orientation des variantes de martensite et crée de la martensite orientée. Une fois la contrainte relâchée, on observe dans l'échantillon une déformation résiduelle  $\varepsilon_r$  permanente due à la création de martensite orientée.

Si une contrainte est de nouveau appliquée, l'austénite se transforme en martensite orientée selon un chemin de charge-décharge présentant une pente plus faible que la pente élastique initiale. On appelle cette réduction de pente, illustrée figure 1.7, l'effet caoutchoutique.

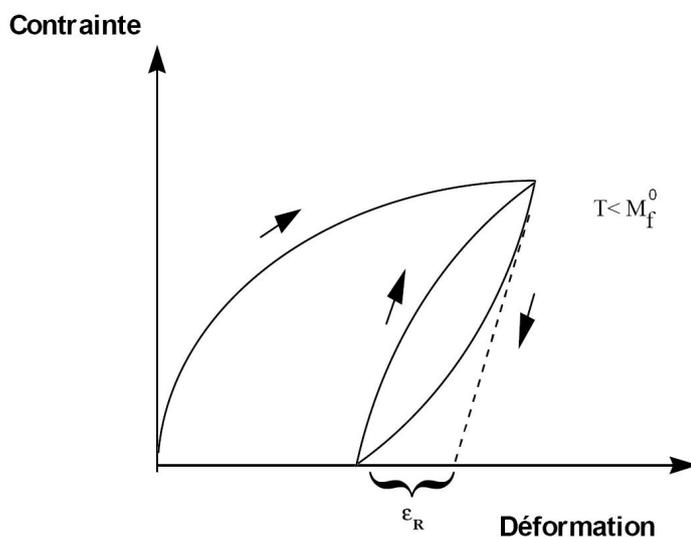


FIG. 1.7 – Effet caoutchoutique

## 1.3 Les grandes familles d'AMF

### 1.3.1 Les Nickel Titane

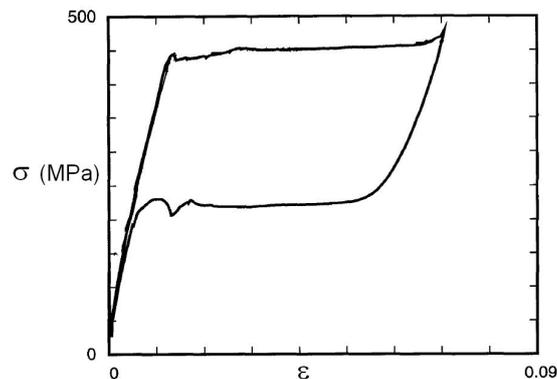
En 1962 [Buehler et al. \(1963\)](#) découvrirent au Naval Ordnance Laboratory (NOL) un alliage de nickel-titane qui présente le même effet mémoire de forme découvert par [Chang and Read \(1951\)](#)

sur un lingot d'or-cadmium. Ils s'en aperçurent en ajustant la température de transformation de phase entre 0°C et 100°C avec le pourcentage de nickel. Ce groupe d'alliage reçu alors l'appellation nitiNOL d'après les symboles de ses constituants ainsi que l'abréviation de l'institut. Cette famille des alliages à mémoire de forme en NiTi est un mélange quasi-équiatomique de Nickel et de Titane. C'est un des AMF sur lequel le plus d'études ont portées. On trouve en effet de nombreuses investigations expérimentales sur cet alliage telles que les travaux en chargements en torsion de [Grabe and Bruhns \(2008\)](#) ou encore de [Q.P. Sun \(2002\)](#) ou sur la fatigue de [Tobushi et al. \(1997\)](#).

En première approche, les particularités des NiTi sont :

- une plus grande déformation macroscopique totale, pouvant aller jusqu'à 10%,
- la présence marquée d'un plateau lors des essais de traction, figure 1.8.

De plus, ce matériau se révèle être bio-compatible. Son champ d'applications s'en trouve agrandi comme détaillé par la suite. Son principal point faible est que sa mise en oeuvre, outre d'être peu aisée, comme l'usinage, présente des coûts élevés.



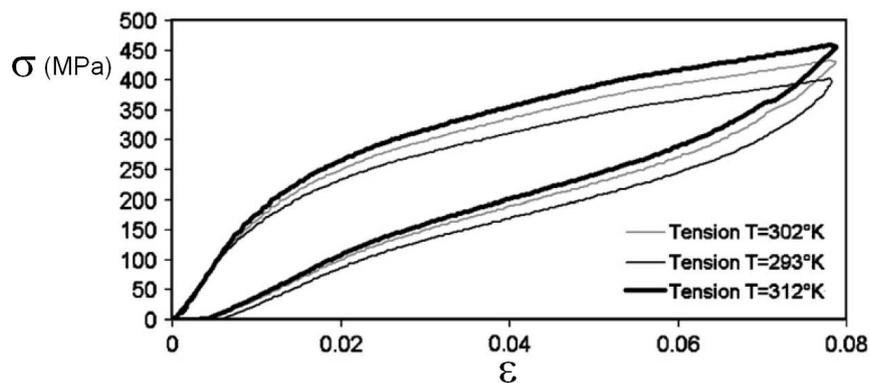
**FIG. 1.8** – Courbe dans l'espace contrainte-déformation d'un AMF en NiTi en traction ([Shield et al. \(1997\)](#))

### 1.3.2 Les AMF à base cuivre

Ces alliages sont à base principale de cuivre. On peut citer entre autres le CuAlBe, le CuAlNi, etc... Leurs courbes dans l'espace contrainte-déformation ont l'allure donnée dans la figure 1.9. Ces AMF présentent des dispositions moins grandes en déformation que les alliages à base de NiTi mais leur moindre coût les rend plus attrayants au niveau industriel. Cependant, ils offrent une résistance moindre pour des températures élevées ou des chargements cycliques.

### 1.3.3 Autres familles

Les deux familles présentées précédemment sont certes les plus utilisées mais ne sont pas les seules. Il existe de nombreux autres alliages à mémoire de forme possédant chacun leurs particularités. Par exemple, les AMF magnétiques qui, outre leurs propriétés de transformations réversibles,



**FIG. 1.9** – Courbes de traction isotherme dans l'espace contrainte-déformation d'un AMF en CuAlBe (Vieille et al. (2007))

possèdent des caractéristiques magnétiques. Les lecteurs intéressés pourront se rapporter aux travaux de Ullakko et al. (1997) et de Likhachev et al. (2004).

Les AMF magnétiques sont principalement utilisés pour des actionneurs en raison de leur partie contrôle qui offre un bon compromis entre les déformations possibles et les vitesses de réponse. On trouve divers exemples dans les travaux de Gauthier et al. (2008) ou Liang et al. (2006).

Une autre classe importante d'AMF est l'ensemble des AMF ayant une haute température de transformation. Ils sont développés pour des applications, telles que l'aérospatiale, ayant des plages de températures allant de 100°C à 1100°C. Pour aller plus loin on peut lire les travaux de Firstov et al. (2004).

Les AMF à haute température de transformation les plus performants en terme de température sont ceux à base de ruthérium (RuNb, RuTa) pouvant être fonctionnels jusqu'à des températures de 1400 K comme le montrent les travaux de Chastaing et al. (2008).

## 1.4 Exemples et domaines d'application des AMF

### 1.4.1 Utilisations aéronautiques et spatiales

#### Applications spatiales

L'industrie spatiale cherche sans cesse de nouvelles solutions de moins en moins coûteuses en masse et en argent pour de meilleures performances. Le choix des AMF se montre avantageux pour les propriétés de l'effet mémoire. Elles peuvent être déclenchées par une absorption de radiations thermiques (comme les radiations solaires), ce qui supprime tout un pannel de systèmes embarqués tels que : des actionneurs solaires (figure 1.10), des contrôles de positionnements améliorés, l'ouverture et la fermeture de portes extérieures, le déploiement spatial d'appendices ou encore le contrôle vibratoire de grandes structures spatiales.

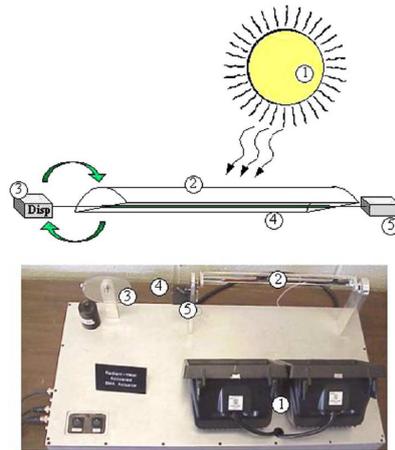


FIG. 1.10 – Exemple d'actionneur en AMF par une activation solaire (Hull et al. (2004))

### Chevrons d'avion : des réducteurs de bruit

Face à la pollution sonore des avions, les ingénieurs font intervenir les AMF et leur effet mémoire simple sens dans la structure externe même des réacteurs. Les AMF utilisés permettent alors de contrôler la déflexions des chevrons à la sortie des réacteurs. La réduction de bruit est alors contrôlée selon la phase de vol (atterrissage, vol, décollage). Les premiers AMF étaient du type Nickel Titane, aujourd'hui la tendance se dirige vers l'emploi des AMF à haute température de transformation (Hartl et al. (2006)).



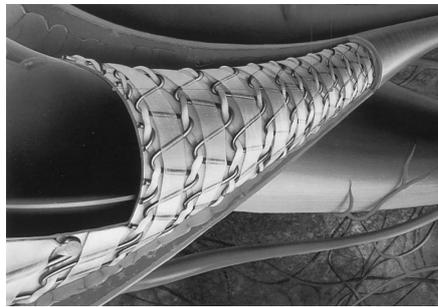
FIG. 1.11 – Chevron à géométrie variable de Boeing, test en vol (J.H. Mabe (2006))

## 1.4.2 Utilisations médicales

### Stents

Un stent est une pièce chirurgicale permettant de maintenir une artère ouverte. Il se présente sous la forme d'un tube à treillis métallique (figure 1.12). Le stent est usiné et traité de façon à avoir un diamètre légèrement supérieur à celui de l'artère pour éviter toute obstruction. Il est ensuite

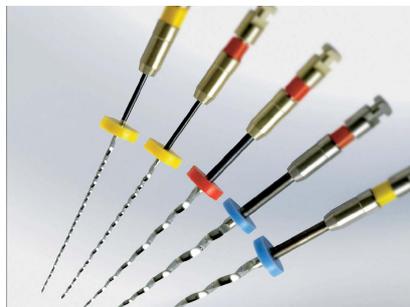
placé dans l'artère et doit accompagner ses mouvements tout en offrant une bonne résistance à la fatigue (Duerig et al. (1999)). C'est donc l'effet pseudo-élastique des AMF qui est exploité dans ce cadre.



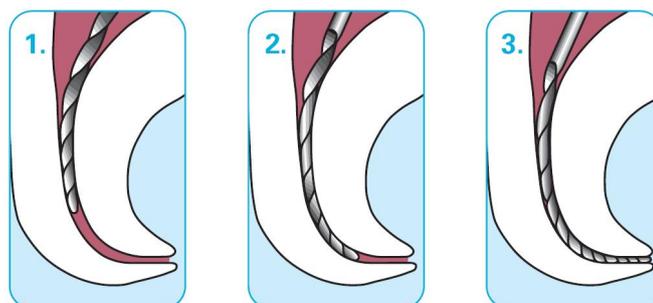
**FIG. 1.12** – *Stent HemoBahn en Nitinol prévenant les risques d'anévrisme, de resténose ou d'angioplastie*

### Endodontie

Une autre utilisation médicale des AMF a aussi lieu pour l'endodontie. Il s'agit de la médecine dentaire relative à l'intérieur de la dent. Pour ce type de soin les chirurgiens dentistes se servent de limes endodontiques (figure 1.13) qui doivent pouvoir glisser le long du canal radiculaire comme sur la figure 1.14. L'effet pseudo-élastique et l'effet caoutchoutique des AMF interviennent pour cette application. Les études menées actuellement sur les limes endodontiques portent principalement sur la fatigue et la rupture des limes.



**FIG. 1.13** – *Lime en Nickel-Titane en endodontie*



**FIG. 1.14** – *Utilisation d'une lime en Nickel-Titane en endodontie*

### Agrafes pour fractures

Les agrafes pour fractures sont utilisées en chirurgie pour garder en contact les deux parties fracturées d'un os (figure 1.15). Les AMF sont utilisés alors pour leur effet mémoire simple sens ainsi que pour leur bio-compatibilité. Après un refroidissement depuis la phase austénitique vers la phase martensitique, on ouvre légèrement l'agrafe à température ambiante où la martensite reste stable. On fixe l'agrafe sur les os puis, à la température corporelle, elle retrouve sa forme initiale austénitique (figure 1.16). L'alliage utilisé est en NiTi pour offrir une excellente bio-compatibilité qui est renforcée par un revêtement d'une couche de phosphate de calcium.



FIG. 1.15 – Agrafe pour fracture Memoclip

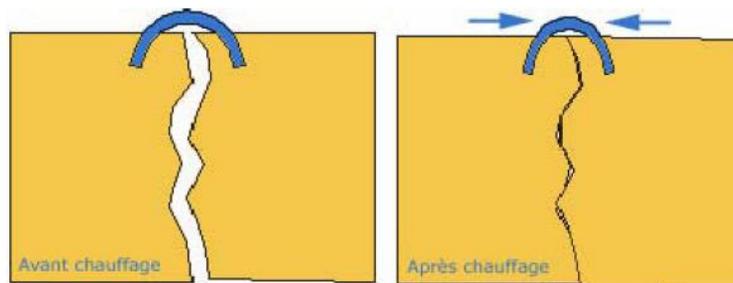


FIG. 1.16 – Principe de fonctionnement d'une agrafe pour fracture en AMF

#### 1.4.3 Autre utilisation : la lunetterie

Les fabricants de montures de lunettes s'intéressent et exploitent les propriétés de la pseudo-élasticité des AMF. Ils produisent ainsi des montures ultra-flexibles, donc quasiment incassables, ce qui est une qualité recherchée dans la lunetterie. La figure 1.17 montre une paire de lunettes totalement déformée qui reprendra sa forme initiale une fois libre de contraintes.

## 1.5 Etat de l'art de la modélisation

Les AMF suscitent de nombreux intérêts, tant du point de vue scientifique qu'industriel. Un des aspects motivant les deux points de vue est la modélisation des alliages à mémoire de forme. Au



**FIG. 1.17** – Lunettes de la marque *Aspex - Série EasyTwist* (monocristaux de  $CuAlBe$ )

sein de cette description du comportement, différentes approches existent allant du microscopique au macroscopique. Il existe une floraison de modèles. Donc nous ne pouvons que faire des choix de description. Ici nous nous limiterons aux modèles à variables internes récents qu'ils soient inspirés par la micromécanique ou non.

Seuls deux modèles seront mis à l'épreuve réellement, c'est-à-dire leur pouvoir de prédiction confronté à l'expérience, à savoir le modèle de Sadjadpour et Bhattacharya pour son élégance et sa simplicité apparente et le nôtre bien évidemment. Ceci sera développé dans les chapitres 3 et 4.

### 1.5.1 Modèles micro(macro)scopiques

Afin de décrire le comportement des AMF, une première approche consiste à observer ce qui se produit physiquement au niveau microscopique : au niveau du grain et d'amat de grains. Suite à ces observations, des lois de comportement en sont déduites au niveau microscopique et une homogénéisation les étend au niveau macroscopique.

Une telle modélisation est donc qualifiée de micro-macroscopique. On choisit ici de décrire le dernier modèle en date développé par l'équipe du Pr. Patoor à Metz, ce modèle trouve ses fondements dans [Patoor et al. \(1988\)](#), [Patoor et al. \(1996\)](#).

On peut citer d'autres modèles micro-macroscopiques : [Sun and Hwang \(1993a\)](#), [Sun and Hwang \(1993b\)](#), [Huang et al. \(2000\)](#). Une documentation plus exhaustive peut être trouvée dans les "publications-références" que sont [Patoor et al. \(2006\)](#) et [Lagoudas et al. \(2006\)](#).

*Modèle de Chemisky et al.*

On choisit le modèle utilisé dans la thèse de [Chemisky \(2009\)](#) en 2009. C'est un modèle macroscopique basé sur des analyses microscopique et mésoscopique.

Une décomposition particulière de la déformation totale d'un volume élémentaire représentatif (VER) :

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^\alpha + E_{ij}^T + E_{ij}^{twin} \quad (1.1)$$

où :

- $E_{ij}^e$  et  $E_{ij}^\alpha$  sont respectivement les déformations élastiques et thermiques. Ce sont les autres déformations qui marquent la différence avec les autres modèles.
- $E_{ij}^T$  représente la déformation de transformation de phase, on l'exprime en fonction de la fraction volumique de martensite notée  $f$ .

$$E_{ij}^T = f \bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (1.2)$$

On borne la déformation de transformation par une valeur de saturation, avec  $J'_2$  et  $J'_3$  le deuxième et troisième invariant du tenseur des déformations moyennes de transformation -  $K_\varepsilon$ ,  $\beta$  et  $n$  sont des paramètres à déterminer.

$$|\bar{\varepsilon}_{ij}^T| \leq \varepsilon_{SAT}^T = K_\varepsilon \left( 1 + \beta \frac{J'_3}{J_2^{3/2}} \right)^{1/n} \quad (1.3)$$

On introduit un ratio  $\eta_\varepsilon$  permettant de distinguer les déformations de transformation issues de la phase mère ou bien de martensite formée accommodée. On définit alors la déformation maximale lors d'un trajet thermomécanique quelconque en fonction de  $\varepsilon_{SAT}^T$  :

$$\varepsilon_{MAX}^T = \varepsilon_{SAT}^T \cdot \left( 1 - \frac{f^{FA}}{f} \eta_\varepsilon \right) \quad (1.4)$$

- $E_{ij}^{twin}$  est la déformation résultante de l'auto-accommodation préalable des mâcles lors de la réorientation. On associe à ce type de martensite une fraction volumique de martensite  $f^{FA}$  qui est considérée comme un paramètre du modèle.

$$E_{ij}^{twin} = f^{FA} \bar{\varepsilon}_{ij}^{twin} \quad (1.5)$$

Contrairement à la déformation de transformation,  $\bar{\varepsilon}_{ij}^{twin}$  peut avoir une valeur limite mais pour une contrainte telle que les déformations plastiques ne peuvent plus être négligées (la déformation plastique intervenant alors).

On définit  $f^{FA}$  en tenant compte de l'histoire de la transformation martensitique, c'est-à-dire de la déformation de transformation de la martensite au moment où elle apparaît ( $\varepsilon_{eq}^T$  est la déformation de transformation au sens de von Mises) :

$$\dot{f}^{FA} = \dot{f} \frac{\varepsilon_{SAT}^T - \varepsilon_{eq}^T}{\varepsilon_{SAT}^T} \quad \text{si } \dot{f} > 0 \quad (1.6)$$

$$f^{FA} = f \times C^{te} \quad \text{si } \dot{f} \leq 0 \quad (1.7)$$

$f$ ,  $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$  et  $\bar{\varepsilon}_{ij}^{twin}$  sont choisies comme variables internes malgré une difficulté certaine dûe au couplage fort.

On utilise la variation de l'énergie libre de Gibbs (équation 1.8) comportant les parties chimique, mécanique et thermique classiques :

$$\Delta G = G^{biphasee} - G^{austenite} = -\Delta T S^A + f(\Delta U - T\Delta S) - \Sigma_{ij} E_{ij} + C_v \left[ (T - T_0) - T \log \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] + G^{int} \quad (1.8)$$

Le terme  $G^{int}$  correspond à une énergie élastique stockée dans le matériau transformé lors d'une transformation de phase ou d'une ré-orientation des variantes de martensite. Elle est décrite de manière précise suivant une décomposition avec un terme pour chaque échelle :

$$G^{int} = G_1^{int} + G_2^{int} + G_3^{int} + G_4^{int} \quad (1.9)$$

– un terme lié au champ de contraintes macroscopiques ( $\Sigma$ ) à l'échelle du VER :

$$G_1^{int} = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} \quad (1.10)$$

– un terme associé au champ de contraintes locales hétérogènes induit par les incompatibilités intergranulaires et intragranulaires liées à la déformation de transformation des grains :

$$G_2^{int} = \frac{1}{2} f H_\varepsilon \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (1.11)$$

– un terme induisant les compatibilités intervariantes :

$$G_3^{int} = \frac{1}{2} H_f f^2 \quad (1.12)$$

– un terme associé au champ de contraintes locales hétérogènes liées à la mobilité des interfaces intermacles :

$$G_4^{int} = \frac{1}{2} f^{FA} H_{twin} \bar{\varepsilon}_{ij}^{twin} \bar{\varepsilon}_{ij}^{twin} \quad (1.13)$$

En calculant l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient les forces thermodynamiques associées à chacune des variables internes. On introduit alors les termes  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  permettant de tenir compte des conditions sur les variables internes - respectivement  $f \geq 0$ ,  $f \leq 1$  et  $|\bar{\varepsilon}_{ij}^T| \leq \varepsilon_{MAX}^T$ .

– la force thermodynamique de transformation liée à  $f$  :

$$F_f = \Sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^T - B(T - T_0) - \frac{1}{2} H_\varepsilon^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T - H_f f - \lambda_0 - \lambda_1 \quad (1.14)$$

– la force thermodynamique d'orientation liée à  $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$  :

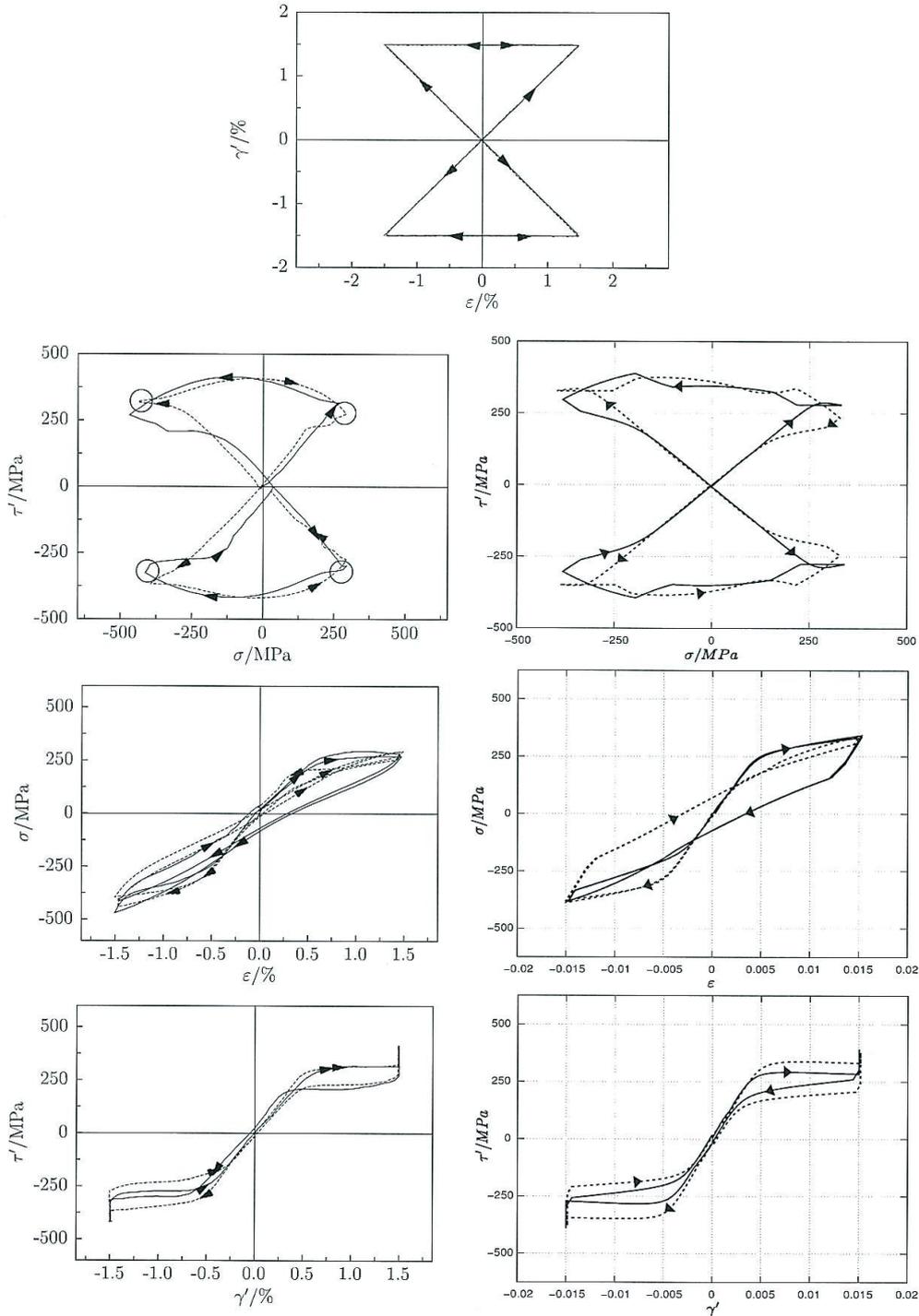
$$F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^T} = dev(\Sigma_{ij}) - f H_\varepsilon^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T - \lambda_2 \quad (1.15)$$

– la force thermodynamique d'orientation liée à  $\bar{\varepsilon}_{ij}^{twin}$  :

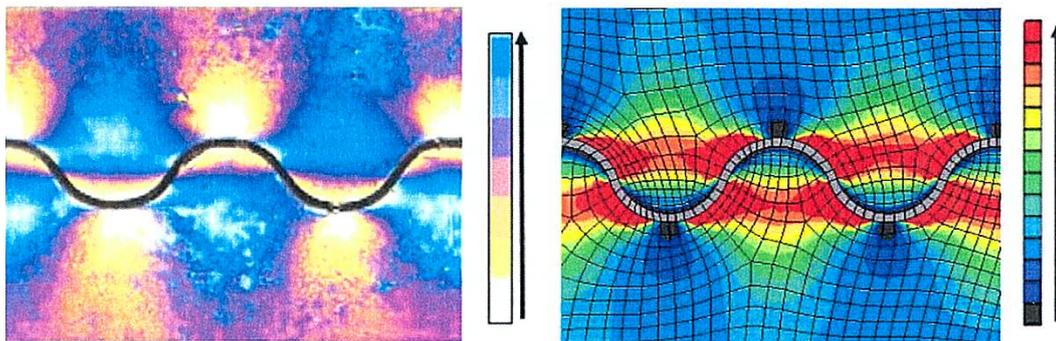
$$F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^{twin}} = dev(\Sigma_{ij}) - H_{twin} \bar{\varepsilon}_{ij}^{twin} \quad (1.16)$$

Enfin une partie non décrite ici modélise les boucles internes via l'emploi de points mémoire (Peultier et al. (2006)).

Parmi les nombreux résultats de ce modèle, nous pouvons retenir la simulation d'essais non-proportionnels (figure 1.18) et une simulation d'un fil de NiTi enrobé d'une matrice en élastomère en traction (figure 1.19).



**FIG. 1.18** – Chargement en "sablier" dans le plan des déformations axiales - déformations de cisaillement. A gauche : résultats obtenus sur des tubes de NiTi, d'après Grabe and Bruhns (2009). A droite, simulations numériques pour des chargements similaires



**FIG. 1.19** – Comparaison entre un cliché obtenu par photoélasticimétrie (à gauche) et le champ de contrainte équivalente de Tresca (à droite). En noir : 0 MPa. La couleur noire aux sommets des boucles indique des points libres de contraintes (dans l'élastomère)

### 1.5.2 Modèles macroscopiques

Une autre catégorie de description du comportement des AMF s'appuie sur des observations macroscopiques. Dans ce cas on s'intéresse à ce qui se passe au niveau de la structure interne du matériau mais on le considère comme une boîte noire dont on décrit et explique les réactions face à des sollicitations thermo-mécaniques superposées ou non.

La modélisation macroscopique des AMF compte un grand nombre de modèles différents au cours des années et il est difficile de fournir une bibliographie exhaustive des modèles existants. Dans ce manuscrit, il est choisi de dresser une liste de quelques modèles macroscopiques actuels, ceux-ci seront triés selon le choix de leurs variables internes.

#### Les variables internes

Au cours de la construction d'un modèle, un choix important est celui des variables externes ou variables d'observation et celui des variables internes. Les variables externes choisies dans quasi tous les modèles sont la température et le tenseur des contraintes ou des déformations totales ou élastiques. Il s'agit de mesures facilement contrôlables et/ou relevables.

Les variables internes vont piloter le modèle. C'est à partir de leurs variations que vont être franchis des seuils propres à chaque modèle. Et ce sont ces seuils qui détermineront dans quelle phase de transformation se situe le matériau.

Dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), parmi toutes les variables internes possibles, on peut distinguer deux grandes écoles dans lesquelles la majorité des modèles peut être classifiée. La première est celle des modèles utilisant la déformation de transformation  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  et la fraction volumique de martensite  $z$ . La seconde consiste à différencier les deux types de martensite  $M_T$  et

$M_\sigma$  par la définition d'une fraction volumique de martensite pour chacun des types.

On définit la déformation de transformation en partant de la décomposition additive de la déformation macroscopique totale en une partie élastique  $\underline{\varepsilon}^e$ , une partie thermique  $\underline{\varepsilon}^{th}$  et en une partie non-élastique  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  (formule 1.17). Cette dernière peut décrire un comportement plastique pour les matériaux classiques mais aussi une déformation induite par la transformation de phase austénite - martensite. La construction de ce tenseur est appréhendée de différentes façons selon les modélisations et introduit donc des différences entre les modèles qui l'utilise.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{th} + \underline{\varepsilon}^{tr} \quad (1.17)$$

La fraction volumique de martensite est le ratio entre le volume de martensite au sein du matériau à un instant  $t$  et le volume total du matériau (formule 1.18). Cette fraction volumique est donc toujours comprise entre 0 et 1 :

- $z = 0$  : le matériau est alors complètement austénitique
- $z = 1$  : le matériau est constitué uniquement de martensite

$$z = \frac{V_{martensite}}{V_{total}} \quad (1.18)$$

La fraction volumique de martensite totale peut être estimée par plusieurs méthodes, comme la diffraction aux rayons X, la diffraction des neutrons, la microscopie électronique à balayage ou encore la microscopie optique combinée à une analyse d'image (Zhao et al. (2001)). Ces méthodes sont applicables au cours d'essais de chargements mécaniques. Une méthode in situ de quantification de la martensite est possible par la mesure de la résistance électrique. En effet l'austénite et la martensite n'ayant pas la même résistivité, on détermine le pourcentage de martensite contenu dans l'éprouvette par des mesures des variations de la résistance électrique du matériau au cours de chargements mécaniques (voir les travaux de Vacher and Lexcelent (1991)).

La fraction volumique de martensite peut être écrite comme la formule 1.19. C'est-à-dire une partie de fraction volumique pour la martensite auto-accommodante  $z_T$  et une seconde partie de fraction volumique pour la martensite orientée  $z_\sigma$ . On observe ainsi le comportement de chacun des types de martensite au cours des chargements thermomécaniques.

$$z = \frac{V_{M_T}}{V_{total}} + \frac{V_{M_\sigma}}{V_{total}} = z_T + z_\sigma \quad (1.19)$$

## Modèles prenant des déformations comme variables internes

### *Modèle d'Auricchio*

L'équipe italienne du Pr. F. Auricchio a développé un modèle connu pour ses applications industrielles, en particulier des logiciels d'éléments finis contenant directement dans leur code une description du comportement des AMF appuyée sur ce type de modèle (ANSYS, LS-DYNA). Les travaux les plus aboutis actuellement sont présents dans la publication d'[Auricchio et al. \(2007\)](#). On propose ici de les décrire et de commenter leurs résultats.

On choisit ici la déformation macroscopique totale  $\underline{\varepsilon}$  et la température  $T$  comme variables observables. Les variables interne sont le tenseur des déformations de transformation  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  et celui des déformations non-élastiques permanentes  $\underline{q}$ .

Une énergie libre est choisie et exprimée comme un potentiel convexe (formule 1.20).

$$\Psi^{Aur}(\theta, \underline{e}, T, \underline{\varepsilon}^{tr}, \underline{q}) = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\underline{e} - \underline{\varepsilon}^{tr}\| + \beta\langle T - M_f \rangle \|\underline{\varepsilon}^{tr} - \underline{q}\| + \frac{1}{2}h\|\underline{\varepsilon}^{tr}\|^2 + \frac{1}{2}H\|\underline{q}\|^2 - A\underline{\varepsilon}^{tr} : \underline{q} + \zeta(\underline{\varepsilon}^{tr}) \quad (1.20)$$

$\theta$  est la trace du tenseur  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{e}$  sa partie déviatorique.  $K$  et  $G$  sont respectivement les modules élastiques de compression et de cisaillement,  $\beta$  est un paramètre matériau relatif à la dépendance de la contrainte seuil à la température,  $M_f$  est la température au-dessous de laquelle le matériau est uniquement en phase martensitique,  $h$  caractérise la transformation de phase et  $H$  contrôle la saturation des déformations non-élastiques permanentes.

On déduit de cette expression les parties volumétrique  $p = tr(\underline{\sigma})/3$  et déviatorique  $\underline{S}_\sigma$  du tenseur des contraintes, l'entropie  $s$  et les forces thermodynamiques  $\underline{X}$  et  $\underline{Q}$  respectivement associées aux variables internes  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  et  $\underline{q}$ .

$$p = \frac{\partial \Psi^{Aur}}{\partial \theta} = K\theta, \quad (1.21)$$

$$\underline{S}_\sigma = \frac{\partial \Psi^{Aur}}{\partial \underline{e}} = 2G(\underline{e} - \underline{\varepsilon}^{tr}), \quad (1.22)$$

$$s = -\frac{\partial \Psi^{Aur}}{\partial T} = -\beta\|\underline{\varepsilon}^{tr} - \underline{q}\| \frac{\langle T - M_f \rangle}{T - M_f}, \quad (1.23)$$

$$\underline{X} = -\frac{\partial \Psi^{Aur}}{\partial \underline{\varepsilon}^{tr}} = \underline{S}_\sigma - \beta\langle T - M_f \rangle \frac{\underline{\varepsilon}^{tr} - \underline{q}}{\|\underline{\varepsilon}^{tr} - \underline{q}\|} - h\underline{\varepsilon}^{tr} + A\underline{q} - \bar{\zeta} \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\|\underline{\varepsilon}^{tr}\|}, \quad (1.24)$$

$$\underline{Q} = -\frac{\partial \Psi^{Aur}}{\partial \underline{q}} = \beta\langle T - M_f \rangle \frac{\underline{\varepsilon}^{tr} - \underline{q}}{\|\underline{\varepsilon}^{tr} - \underline{q}\|} - H\underline{q} + A\underline{\varepsilon}^{tr}. \quad (1.25)$$

Avec  $\bar{\zeta}$  défini tel que ( $\varepsilon_L$  est un paramètre matériau signalant le maximum atteignable de  $\|\underline{\varepsilon}^{tr}\|$ ) :

$$\begin{cases} \bar{\zeta} = 0 & \text{si } \|\underline{\varepsilon}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \bar{\zeta} > 0 & \text{si } \|\underline{\varepsilon}^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (1.26)$$

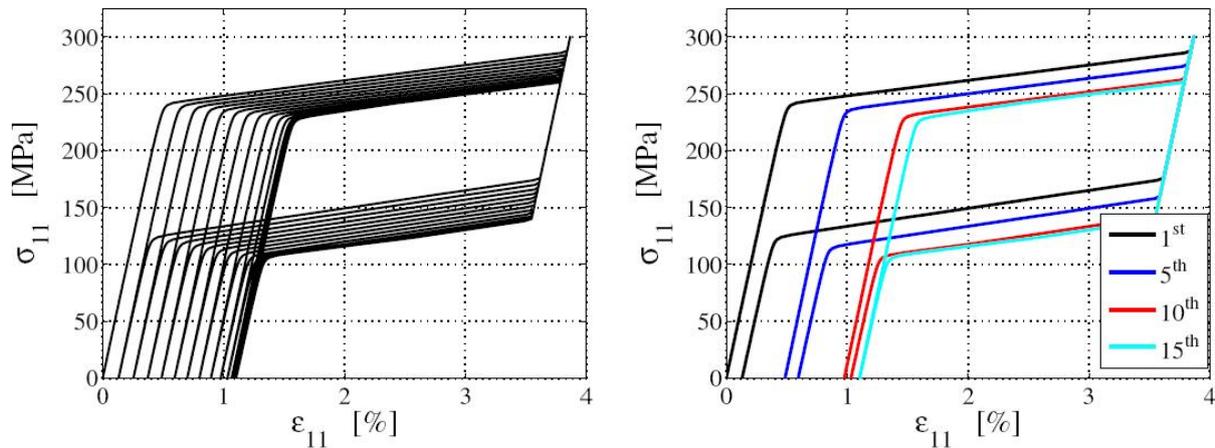
Il faut noter que, bien que la construction du modèle s'appuie sur une formulation thermodynamique cohérente, les auteurs projettent de la vérifier en vérifiant que la dissipation intrinsèque est positive avec les expressions 1.21, 1.22, 1.23, 1.24 et 1.25.

A l'instar de nombreuses modélisations, un critère de transformation  $F$  est adopté sous forme d'une surface (analogue à la terminologie de la plasticité) définie :

$$F(\underline{X}, \underline{Q}) = \|\underline{X}\| + \kappa \|\underline{Q}\| - R, \quad (1.27)$$

où  $\kappa$  est un paramètre matériau et  $R$  le rayon du domaine élastique. On ne tient donc pas compte ici de la dissymétrie traction/compression intrinsèque aux AMF. Cependant, une modélisation 1D d'Auricchio et al. (2009) commence à rectifier ce manquement, un développement 3D est actuellement en cours.

Des simulations ont été faites sous Matlab pour éprouver le modèle. Les figures 1.20, 1.21 et 1.22 présentent des simulations uniaxiales cycliques faisant apparaître une déformation résiduelle mais aussi des essais non-proportionnels.



**FIG. 1.20** – Tests uniaxiaux dans le plan des contraintes axiales -déformations axiales : 10 cycles en traction (gauche) et 10 cycles en traction suivis de 15 cycles en compression (droite) ( $H = 1.5 \times 10^4$  MPa,  $A = 0$  MPa,  $\kappa = 2\%$ ,  $T = 298K$ ). (Auricchio et al. (2007))

*Modèle de Bouvet et al.*

Le Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan (LMT-Cachan) a développé conjointement au Département de Mécanique Appliquée de Besançon un modèle durant la thèse de C. Bouvet (Bouvet et al. (2004)). Ce modèle a été repris dans les travaux de Saint-Sulpice et al. (2009), c'est cette dernière version qui va être décrite ici.

Le modèle présenté ici s'attache particulièrement aux effets de mémoire, de ré-orientation martensitique et de cyclage. Pour ce dernier, la quasi-totalité des modélisations font intervenir une

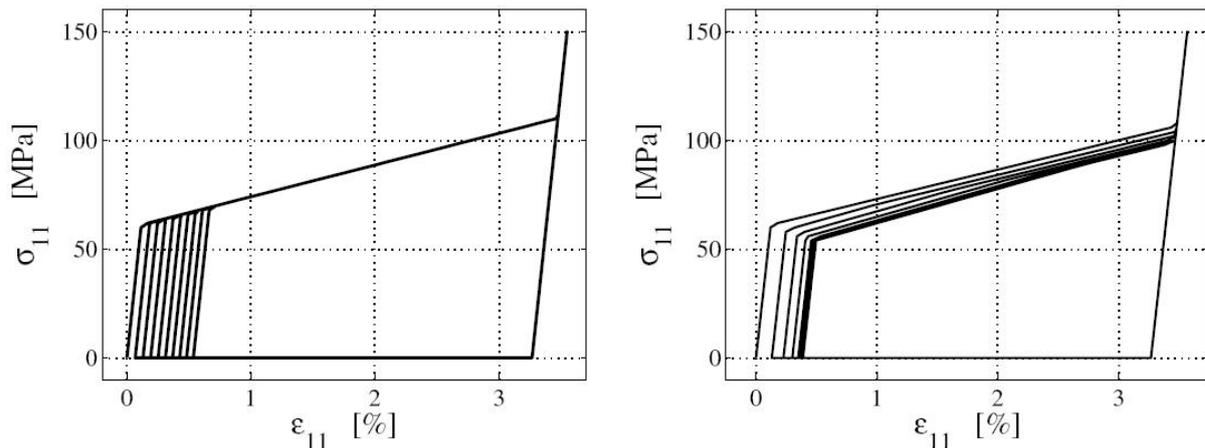


FIG. 1.21 – Courbes dans l'espace des déformations-contraintes illustrant l'effet pseudoélastique

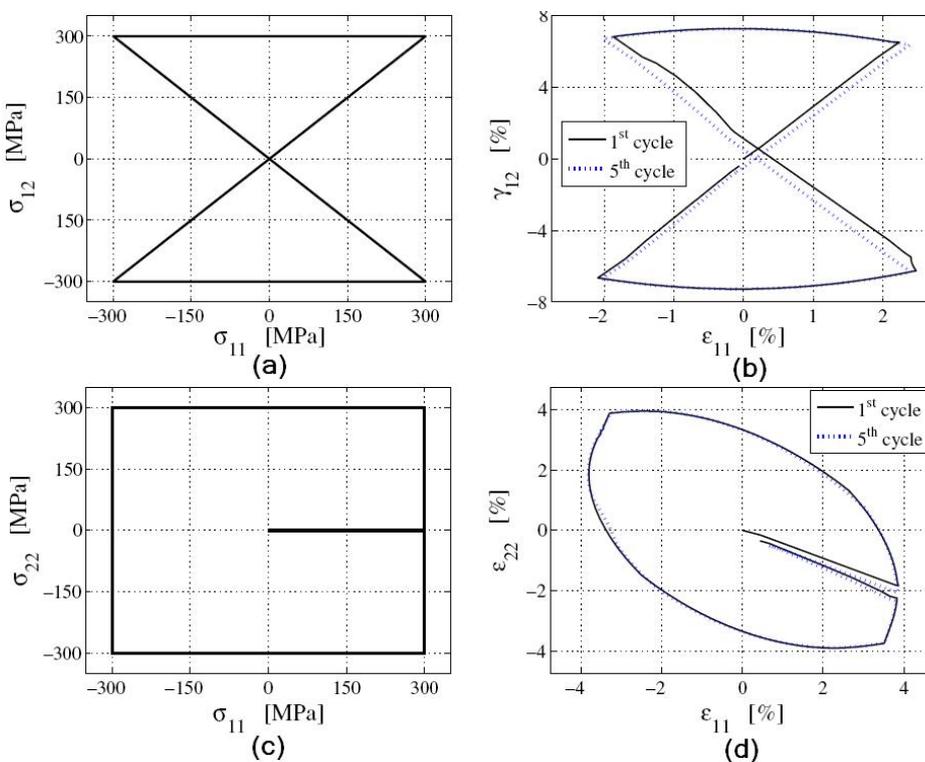


FIG. 1.22 – Tests bi-axiaux carrés non-proportionnaux : dans le plan des contraintes (a) et des déformations (b). Tests bi-axiaux en forme de sablier non-proportionnaux : dans le plan des contraintes (c) et des déformations (d). ( $H = 1.5 \times 10^4$  MPa,  $A = 4.10^3$  MPa,  $\kappa = 10\%$ ,  $T = 298K$ )

variable interne associée ( $q$  dans le modèle précédent par exemple) afin de tenir compte des déformations résiduelles dues au cyclage. Un des points forts ici, réside dans le non-ajout de cette variable interne.

Pour ce faire, dans un premier temps on décompose classiquement la déformation macroscopique totale en une déformation élastique et une déformation de transformation de phase  $\underline{\varepsilon}^{tr}$ .

On définit une relation entre la fraction volumique de matensite et le tenseur des déformations de transformation de phase. Cette relation a été démontré expérimentalement dans les travaux de [Taillard et al. \(2008\)](#) :

$$z = \frac{\varepsilon_{eq}^{tr}}{\gamma} \quad (1.28)$$

Avec :

$$\varepsilon_{eq}^{tr} = \overline{\varepsilon^{tr}} \frac{g(y_\varepsilon)}{g(-1)} \quad (1.29)$$

où  $\overline{\varepsilon^{tr}}$  est la déformation de transformation de phase exprimée au sens de von Mises,  $y_\varepsilon$  est l'expression du troisième invariant du tenseur  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  et  $g$  représente une fonction de correction de la forme de la surface de charge avec  $a_B$  un paramètre matériau (plus de détails au chapitre suivant) :

$$g(y) = \cos \left( \frac{\cos^{-1}(1 - a_B(1 - y))}{3} \right) \quad (1.30)$$

Le modèle aborde les déclenchements des transformations de phase directe et inverse par un moyen original :

– une surface de charge pour la transformation directe  $A \longrightarrow M$  caractérisée par :

$$f_1 = \sigma_{eq} - (R(z) + \sigma_0^t) \leq 0 \quad (1.31)$$

$$\sigma_{eq} = \overline{\sigma} g(y) \quad (1.32)$$

où  $\sigma_{eq}$  est une contrainte équivalente pour les AMF isotropes permettant de tenir compte de la dissymétrie traction-compression.  $R(z)$  représente la taille des surfaces de charge et  $\sigma_0^t$  est la limite d'élasticité en traction pure.

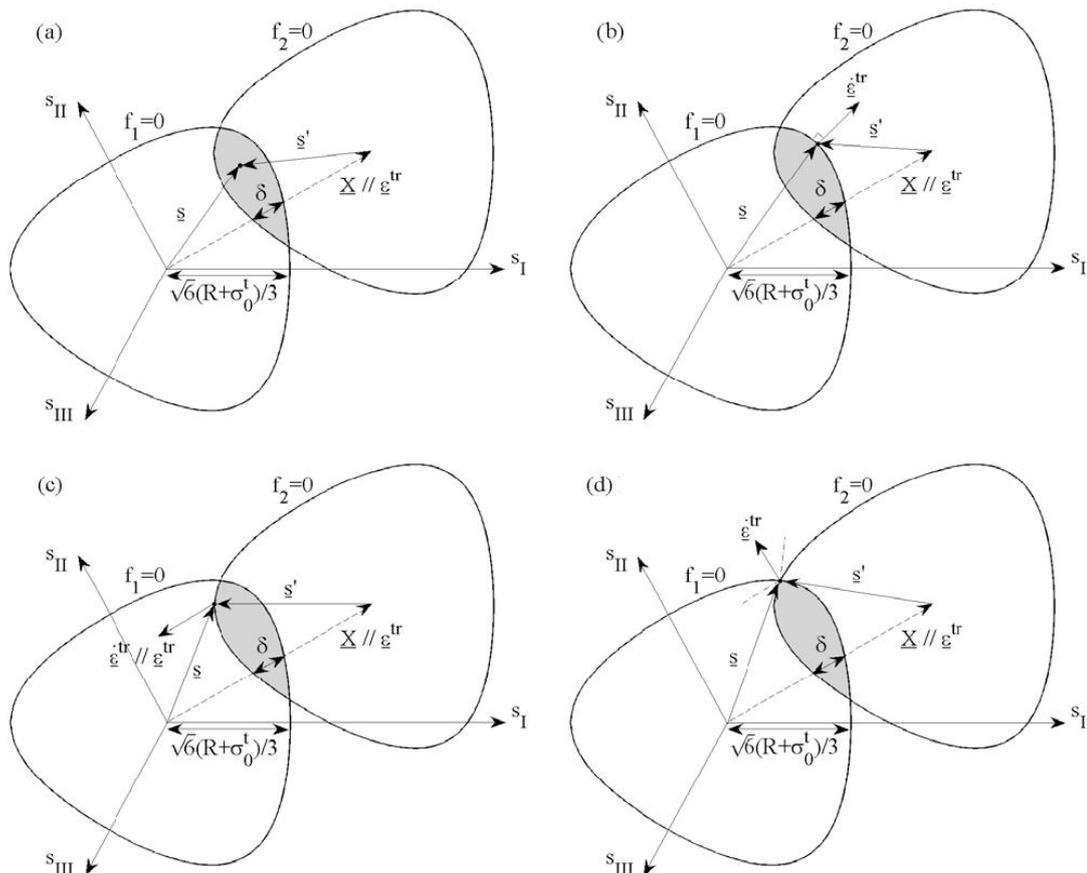
– une surface de charge pour la transformation inverse  $M \longrightarrow A$  caractérisée par :

$$f_2 = (\overline{\sigma} - \underline{X}) g(y_{\sigma-X}) - (R(z) + \sigma_0^t) \leq 0 \quad (1.33)$$

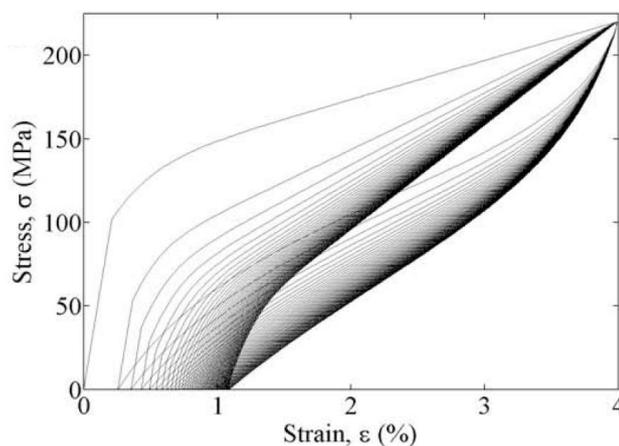
où le tenseur  $\underline{X}$  localise le centre de la surface de charge associée à la transformation inverse  $f_2$ . Il faut noter que dans l'expression du tenseur  $\underline{X}$  et de  $R(z)$  apparaissent les mécanismes permettant de prendre en compte les déformations résiduelles mais aussi les modélisations des boucles internes. On remarque que  $R$  est indépendant de la température, les variations dues à la température ne sont donc pas prises en compte.

La figure [1.23](#) illustre ces deux surfaces et les quantités mises en jeu. Les figures [1.24](#) et [1.25](#) montrent les déformations résiduelles apparaissant au cours d'un cyclage.

*Modèle de Reese*

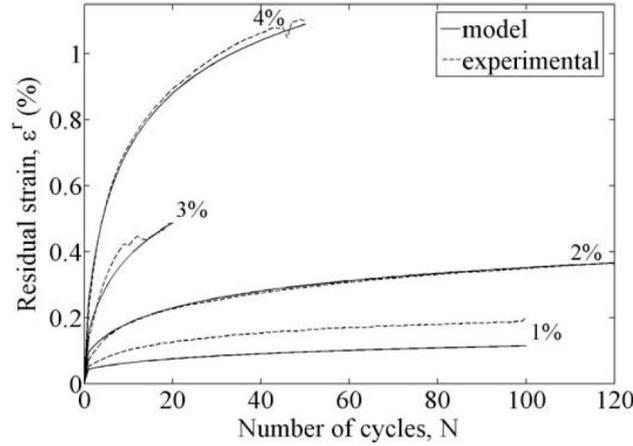


**FIG. 1.23** – Surfaces de transformation de phase directe ( $f_1 = 0$ ) et inverse ( $f_2 = 0$ ) dans l'espace déviatorique des contraintes durant : (a) l'élasticité, (b) la transformation de phase directe, (c) la transformation de phase inverse et (d) la ré-orientation.



**FIG. 1.24** – Simulation de tests de cyclage en traction : 50 cycles pour une commande en déformation de 4%

Une hypothèse courante et commune pour les modélisateurs d'AMF est celle des petites perturbations (HPP). On suppose alors que les déformations macroscopiques totales sont inférieures à quelques pour cent. Cette hypothèse est valable pour les études élastiques des matériaux métal-



**FIG. 1.25** – Comparaison entre des essais expérimentaux et les simulations correspondantes sur l'évolution de la déformation résiduelle  $\varepsilon^r$  par rapport au nombre de cycles, et ce pour 4 tests en traction (1%, 2%, 3% et 4%)

liques classiques, cependant les AMF peuvent avoir des déformations pseudo-élastiques atteignant 10%.

Bien que les modèles d'AMF développés avec l'HPP procurent des résultats corrects et prédisent convenablement le comportement de ces alliages, des modèles prenant en compte les grandes déformations ont été construits (Auricchio and Taylor (1997), Thamburaja and Anand (2001), Müller and Bruhns (2006)).

Le modèle de Reese and Christ (2008) présenté ici se base sur une modélisation connue : celle de Helm and Haupt (2003). Il a été développé pour une application précise qui est l'aspect prédictif du comportement d'un stent.

L'énergie libre de Helmholtz choisie ici se décompose en une énergie élastique  $\Psi_e$  et une énergie de tranformation  $\Psi_t$  :

$$\Psi_{tot} = \Psi_e(\underline{C}_e, z) + \Psi_t(\underline{C}_{te}). \quad (1.34)$$

$\Psi_e$  décrit l'élasticité du matériau, elle sera donc fonction de la fraction volumique de martensite pour tenir compte de l'élasticité de chaque phase. Mais aussi du tenseur  $\underline{C}_e$  défini 1.35 où  $\underline{F}_e$  est la partie élastique du tenseur du gradient des déformations  $\underline{F}$  (défini formule 1.36).  $\underline{C}_{te}$  présente la partie élastique durant la transformation.

$$\underline{C}_e = \underline{F}_e^T \underline{F}_e \quad (1.35)$$

$$\underline{F} = \underline{F}_e \underline{F}_{te}, \quad (1.36)$$

où  $\underline{F}_{te}$  représente le gradient des déformations élastiques de transformation.

L'inégalité de Clausius-Duhem utilisées ici (1.37) ne fait pas intervenir la dissipation thermique ; en effet, on ne considère pas ici les effets de la température et on fixe la température constante.

$$-\frac{\partial \Psi_e}{\partial \underline{C}_e} \cdot \dot{\underline{C}}_e - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \underline{z}} \dot{z} - \frac{\partial \Psi_t}{\partial \underline{C}_{te}} \dot{\underline{C}}_{te} + \underline{S} \cdot \frac{1}{2} \dot{\underline{C}} \geq 0 \quad (1.37)$$

où  $\underline{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

On peut alors calculer les forces thermodynamiques  $\underline{X}_{te}$  et  $\underline{z}$  respectivement associées aux variables internes  $z$  et  $\underline{C}_{te}$  :

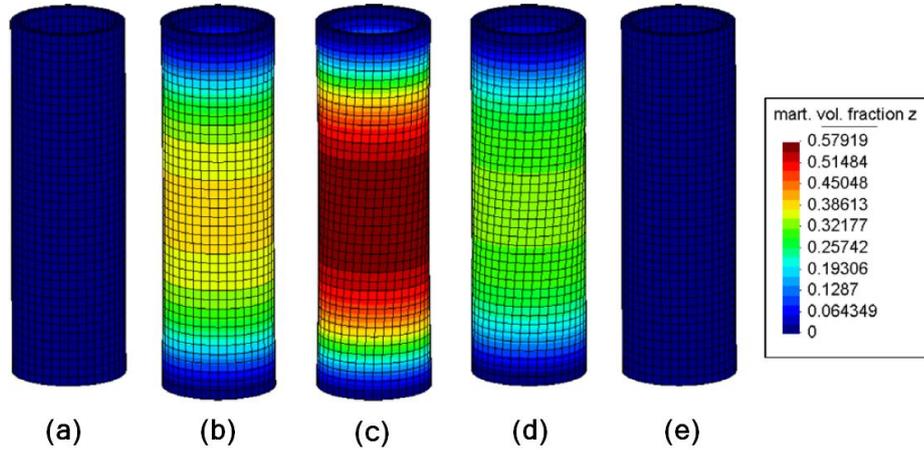
$$\underline{X}_{te} = \underline{F}_{te}^{-1} 2 \frac{\partial \Psi_t}{\partial \underline{C}_{te}} \underline{F}_{te}^{-T} \quad (1.38)$$

$$\underline{X}_z = \frac{\Delta \Psi_{tot}}{\beta} \frac{\underline{E}_t}{\|\underline{E}_t\|} \quad (1.39)$$

avec  $\underline{E}_t = \frac{1}{2} (\underline{C}_t - \underline{1})$  le tenseur des déformations de Green-Lagrange. On met ce tenseur en relation avec la fraction volumique de martensite conformément à plusieurs publications (Levitas (1998), Souza et al. (1998)) ( $\beta$  paramètre matériau incluant la largeur de la boucle d'hystérésis).

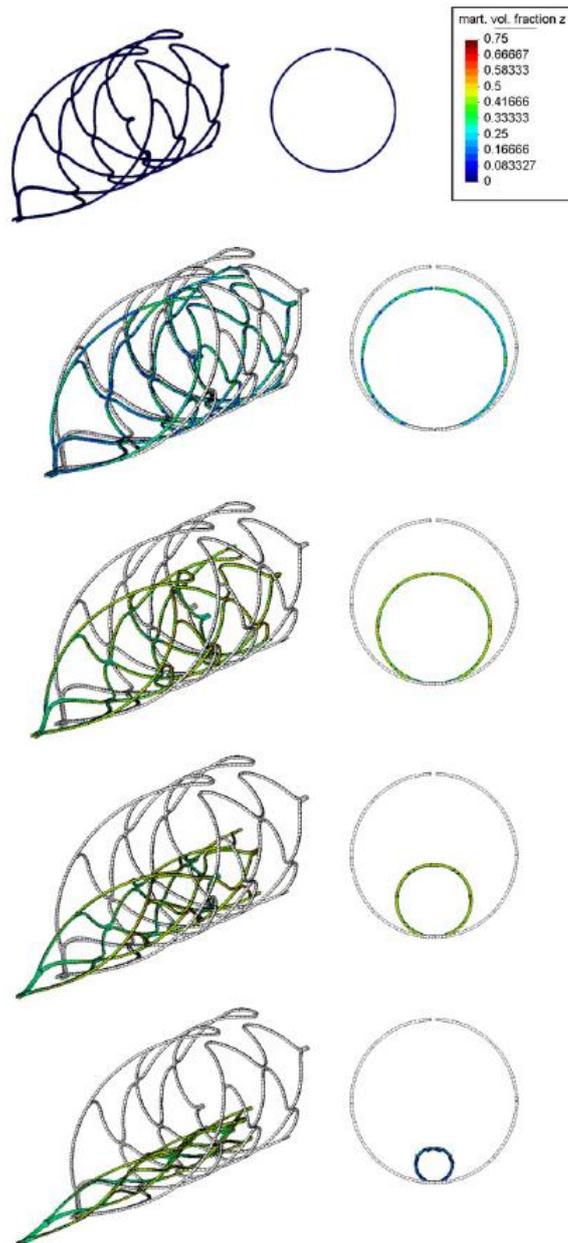
$$z = \frac{E_t}{\beta} \quad (1.40)$$

La figure 1.26 montre une simulation d'un tube mince en nickel-titane sur lequel on exerce des tests de traction-torsion. Les simulations apportent des résultats satisfaisants aussi bien pour des chargements en traction ou torsion que pour des chargements non-proportionnels.



**FIG. 1.26** – Distribution de la fraction volumique de martensite durant un chargement non proportionnel : nul (a), en traction (b), suivi d'une torsion (c), relâchement de la torsion (d) et décharge en traction (e)

L'étude aboutit sur son objectif initial : la prédiction du comportement de stent. La figure 1.27 montre l'étirement d'un stent tout en gardant en grisé la forme initiale, libre de tout chargement. On note alors le travail en grandes déformations dans ce cadre d'étude.



**FIG. 1.27** – Différents états de la distribution de la fraction volumique de martensite durant un chargement sur un stent. Colonne de gauche : vue isométrique ; colonne de droite : vue de face

### Modèles prenant différentes fractions volumiques de martensite comme variables internes

Les modèles entrant dans cette classification considèrent à l'aide de leurs variables internes les deux types de martensite  $M_T$  et  $M_\sigma$ . Différents travaux ont été consacrés sur des modélisations utilisant les fractions volumiques de martensite  $z_T$  et  $z_\sigma$  comme variables internes (Popov and D.C.Lagoudas (2007), Leclercq and LExcellent (1996), LExcellent et al. (2006)).

Le choix a été pris de décrire une des "écoles" (Brinson (1993)) de ce type de modèles afin d'éviter des redondances. L'équipe américaine du Pr. Brinson a été la première à contruire un modèle basé sur cette décomposition de la fraction volumique de martensite. Cette première approche qui ne considère qu'une seule dimension, présente une construction classique thermodynamique basée sur l'inégalité de Clausius-Duhem.

Une intégration numérique a été faite, basée sur des données expérimentales connues. Les résultats obtenus ont été trouvés satisfaisants, un bon nombre d'effets des AMF a pu être traduit : l'effet pseudo-élastique (voir figure 1.28), l'effet mémoire simple sens (voir figure 1.29), etc...

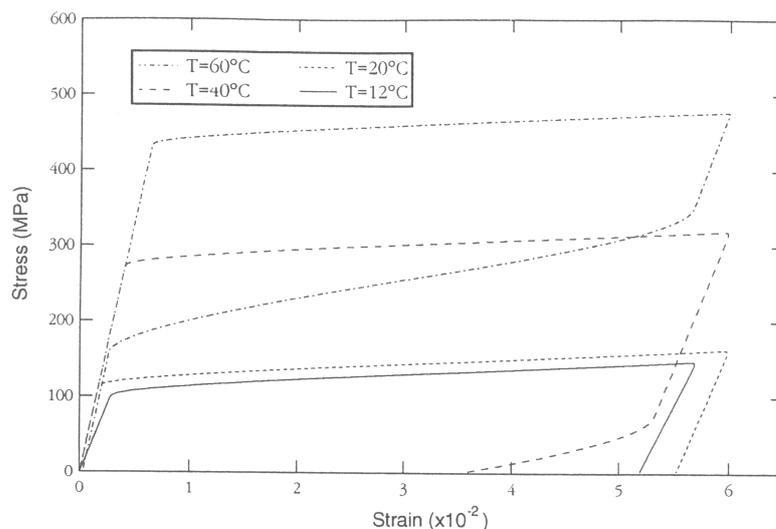


FIG. 1.28 – Courbes dans l'espace des déformations-contraintes illustrant l'effet pseudo-élastique

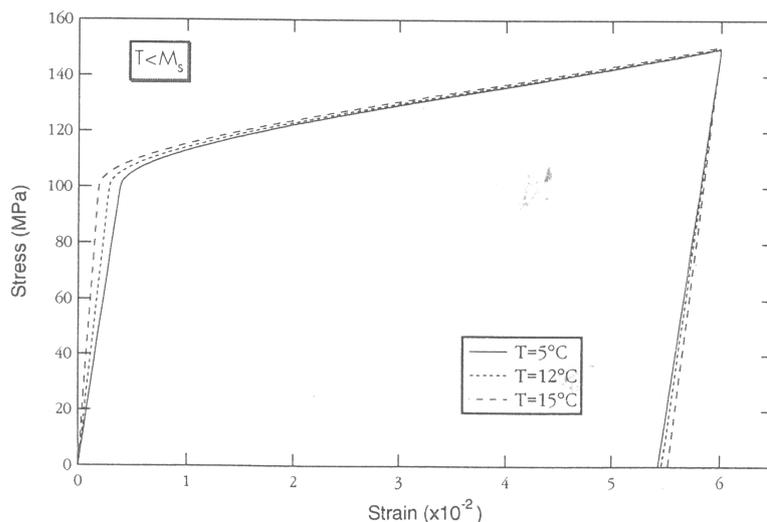


FIG. 1.29 – Courbes dans l'espace des déformations-contraintes illustrant l'effet mémoire simple sens

Le développement de ce modèle a été poursuivi et discuté jusqu'à maintenant (Brinson and Panico (2009)). La forme la plus finie se trouve dans les travaux de Panico and Brinson (2007). Il y est

présenté une extension 3D complète. Elle est construite depuis un choix de l'énergie libre de Helmholtz identique à celui de [Leclercq and LExcellent \(1996\)](#) (cf. formule 1.41).

$$\begin{aligned} \psi^{Brinson}(\underline{\varepsilon}^e, T, z_T, z_\sigma) = & \frac{1}{2\rho} \underline{\varepsilon}^e : \underline{L} : \underline{\varepsilon}^e + u_0^A - T s_0^A - z_T (\Delta u_0 - T \Delta s_0) - z_\sigma \langle \Delta u_0 - T \Delta s_0 \rangle \\ & + C_v \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] + \Delta \psi \end{aligned} \quad (1.41)$$

On remarque l'utilisation des parenthèses de Macauley  $\langle \bullet \rangle$  ne gardant que la partie positive de l'élément considéré. Cela permet d'avoir comme contrainte limite pour la création de la martensite orientée un plateau à basse température, comme observée expérimentalement.

L'énergie de configuration est supposée ne dépendre que de la fraction volumique de martensite orientée :

$$\Delta \psi = \frac{1}{2} H_\sigma z_\sigma^2, \quad (1.42)$$

avec  $H_\sigma$  est un paramètre du matériau à identifier.

La description du modèle se poursuit en décrivant la déformation macroscopique totale en une somme d'une partie élastique et d'une partie inélastique. Cette dernière est elle-même une décomposition d'une déformation de transformation et d'une déformation de ré-orientation.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{in} \quad (1.43)$$

$$\underline{\varepsilon}^{in} = \underline{\varepsilon}^{tr} + \underline{\varepsilon}^{re} \quad (1.44)$$

Les variables internes sont définies d'après la formulation d'[Andra et al. \(2001\)](#) pour  $z_\sigma$  et avec l'étude thermodynamique pour  $z_T$  :

$$z_\sigma = \frac{\|\underline{\varepsilon}^{in}\|}{\sqrt{3/2}\gamma} \quad (1.45)$$

$$\dot{z}_T = \begin{cases} -(\Delta s_0/c^f)\dot{T} & \text{pour } \dot{T} < 0 \\ -(\Delta s_0/c^r)\dot{T} & \text{pour } \dot{T} > 0 \\ -\dot{z}_\sigma & \text{si ré-orientation : } M_T \rightarrow M_\sigma \end{cases} \quad (1.46)$$

Avec  $\Delta s_0, c^f$  et  $c^r$  des paramètres matériau ;  $\gamma$  étant la déformation maximale en cisaillement.

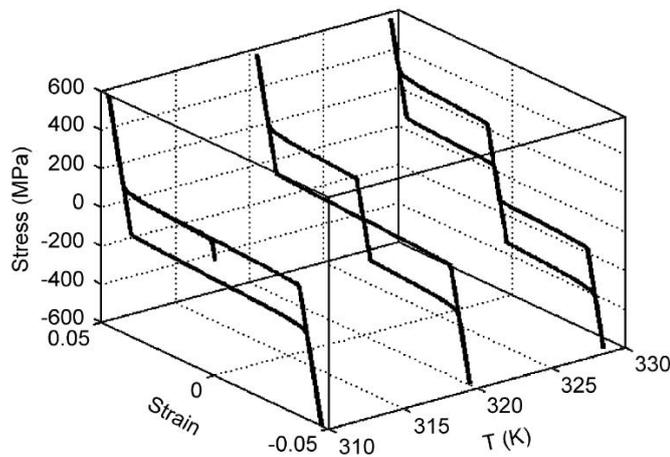
Enfin le modèle est piloté via les forces thermodynamiques suivantes associées à  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  (équation 1.47),  $\underline{\varepsilon}^{re}$  (équation 1.48) et  $z_T$  (équation 1.49) :

$$\underline{X}_{tr} = dev(\underline{\sigma}) - \rho [\langle T\Delta s_0 - \Delta u_0 \rangle + H_{\sigma z_{\sigma}}] \frac{\underline{\varepsilon}^{in}}{\sqrt{3/2}\gamma \|\underline{\varepsilon}^{in}\|} \quad (1.47)$$

$$\underline{X}_{re} = dev(\underline{\sigma}) \quad (1.48)$$

$$\underline{X}_T = -\rho (T\Delta s_0 - \Delta u_0) \quad (1.49)$$

Ce modèle a été implémenté numériquement : ses quinze paramètres ont été fixé conformément à d'autres modélisations existantes. Les courbes obtenues figure 1.30 présentent des simulations de tractions isothermes et une confrontation expérimental/numérique sur des chargements non-proportionnels figure 1.31.



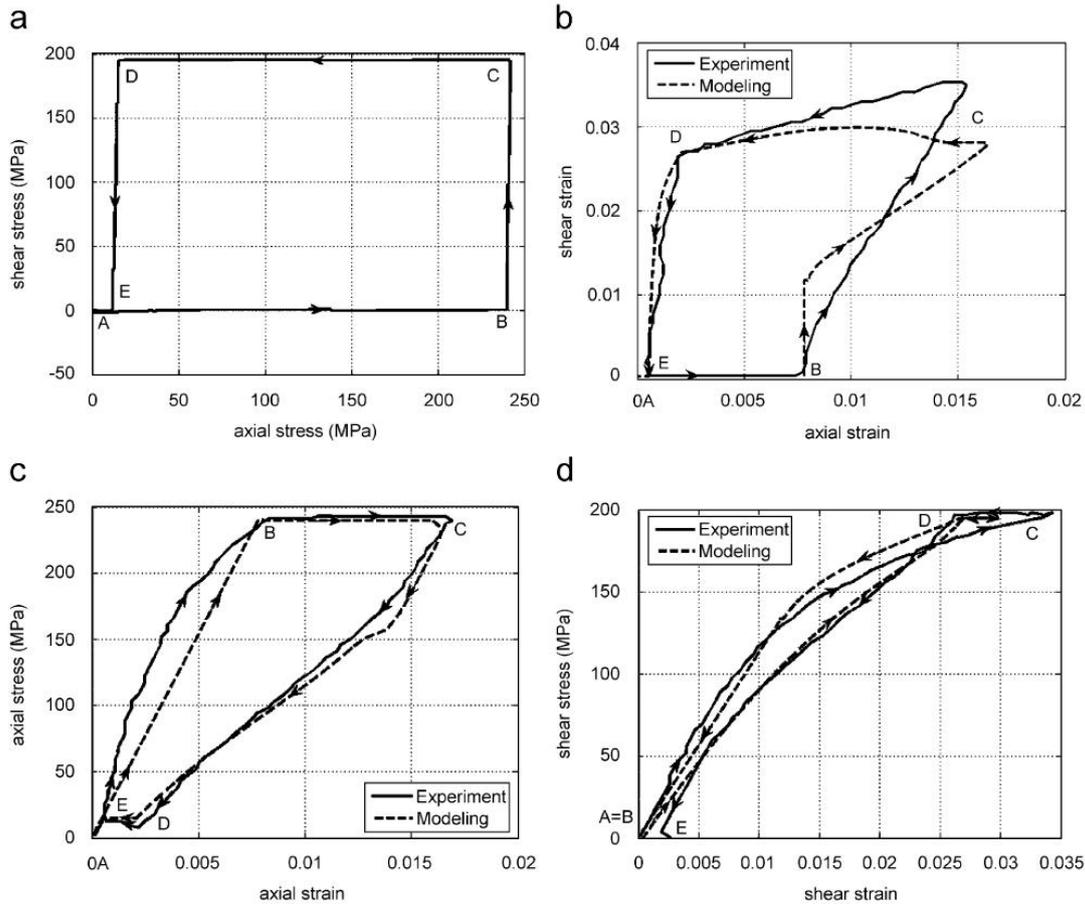
**FIG. 1.30** – Prédiction pour des chargements uni-axiaux isothermes, où on observe l'augmentation de la contrainte seuil de transformation avec la température

L'implémentation dans un code éléments finis de ce modèle a, par la suite, été employé pour des simulations s'inscrivant dans le programme du roundrobin (détaillé chapitre 3) mais aussi pour une étude portant sur les AMF poreux (Panico and Brinson (2008)). Le logiciel ABAQUS a été utilisé et un exemple de résultat sur un AMF poreux est donné figure 1.32, ce type de matériau est utilisé pour des applications bio-médicales ou encore pour ses qualités d'amortissement.

## 1.6 Bilan et conclusion

Après un survol de certains modèles existants, nous pouvons nous faire une idée des avancées et des enjeux à venir sur les études des alliages à mémoire de forme.

Les modèles sont tous construits globalement sur le même schéma afin d'assurer un cadre thermodynamique solide : une définition d'énergie libre, l'application de l'inégalité de Clausius-Duhem (premier et second principes de la thermodynamique), le calcul des forces thermodynamiques, etc... Comme déjà soulignée précédemment, la distinction entre les modélisations macroscopiques s'opère dans le choix :



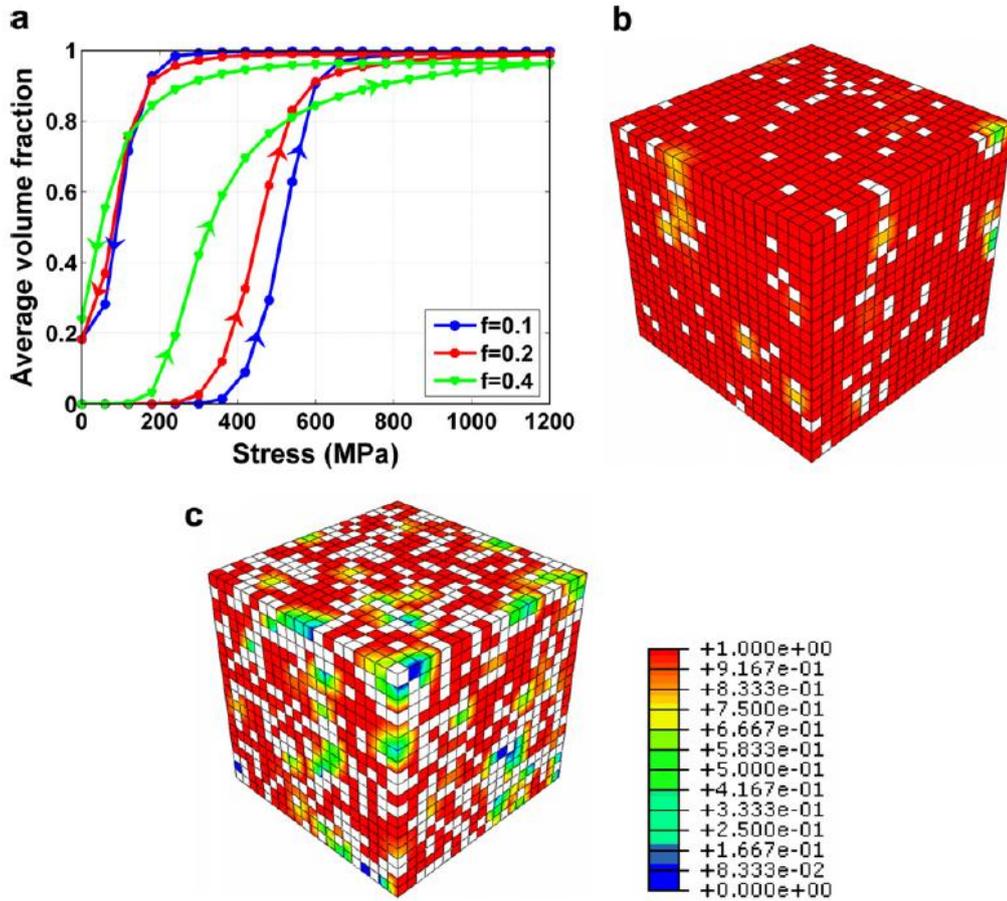
**FIG. 1.31** – Simulation de chargements non-proportionnels dans l'espace des contraintes (a) et comparaison aux résultats expérimentaux (Sittner et al. (1995)) dans le plan : des déformations axiales-déformations en torsion (b), déformations axiales-contraintes axiales (c) et déformations en torsion-contraintes en torsion (d)

- des variables internes. On voit ressortir deux écoles, celle optant pour  $z$  et  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  et l'autre pour  $z_T$  et  $z_\sigma$ ,
- de l'énergie d'interaction intervenant dans la définition de l'énergie libre.

Un facteur de jauge des différents modèles est le nombre de paramètres nécessaires et la facilité (éventuelle) à leur identification. En effet, l'application des lois de comportement est de les intégrer dans un logiciel de simulation pour des études industrielles. L'identification des paramètres macroscopiques ayant le plus de sens physique sont souvent les plus simples à mettre en oeuvre, les observations in situ restant encore un travail complexe pour les non-spécialistes.

Jusqu'à maintenant la quête des AMF n'a emmené personne vers une prédiction complète de tous leurs (nombreux) effets et particularités. Parmi les derniers enjeux des AMF courants on trouve la prédiction de :

- la dissymétrie traction-compression,
- chargements non-proportionnels,



**FIG. 1.32** – Evolution de la transformation de phase et de la fraction volumique de martensite orientée pour des échantillons d'AMF poreux : (a) fraction volumique de martensite en fonction de la contrainte appliquée ( $f$  est la fraction volumique de pore) ; (b) Fraction volumique de martensite sur un contour d'un élément poreux pour une contrainte appliquée maximum de 1200 MPa pour une porosité de 0.1 ; (c) Fraction volumique de martensite sur un contour d'un élément poreux pour une contrainte appliquée maximum de 1200 MPa pour une porosité de 0.4

- la prise en compte des constantes d'élasticité différentes pour l'austénite et la martensite,
- la fatigue, du cyclage et des points mémoire.

Les recherches s'ouvrent aussi de plus en plus vers de nouvelles utilisations des AMF ainsi que vers l'étude de nouvelles compositions, on citera entre autres les AMF hautes températures, les AMF avec des inclusions, les mousses en AMF, etc... Ces tendances sont pour la plupart couplées à des recherches industrielles diverses, on voit apparaître alors des modèles de commande, des actionneurs intelligents, bref une grande source de possibilités.

Tous les aspects du comportement si particulier des AMF n'ont pas encore pu être regroupés dans une modélisation unique, bien que beaucoup de modèles parviennent à très bien reproduire une majorité de ces aspects. La variété d'alliages à mémoire de forme existant, leur(s) application(s) ainsi que les questions soulevées laissent un champ d'investigation aussi vaste dans la modélisation

que dans le monde expérimental.



## Chapitre 2

# Surfaces critères de transformation de phase

## 2.1 Surface de début de transformation de phase dans l'espace des contraintes

### 2.1.1 Critère de limite élastique

#### Limite d'élasticité

Pour les matériaux métalliques, une application d'un champ de contraintes externes provoque des mouvements relatifs entre les atomes ce qui est traduit macroscopiquement par une déformation élastique. Cependant au-delà d'un certain niveau de contraintes il apparaît une autre sorte de déformation appelée déformation plastique. Ce niveau de contraintes constitue la limite élastique du matériau, notée couramment  $\sigma_y$ .

Les monocristaux ne peuvent pas être représentés à l'échelle microscopique comme un empilement parfait d'atomes. Les imperfections existantes dans le réseau cristallin sont appelées des dislocations ( il existe également des défauts ponctuels et encore des mâcles), au-delà de la limite élastique  $\sigma_y$  elles favorisent les mouvements irréversibles par glissements de nappes d'atomes les unes sur les autres comme montré sur la figure 2.1.

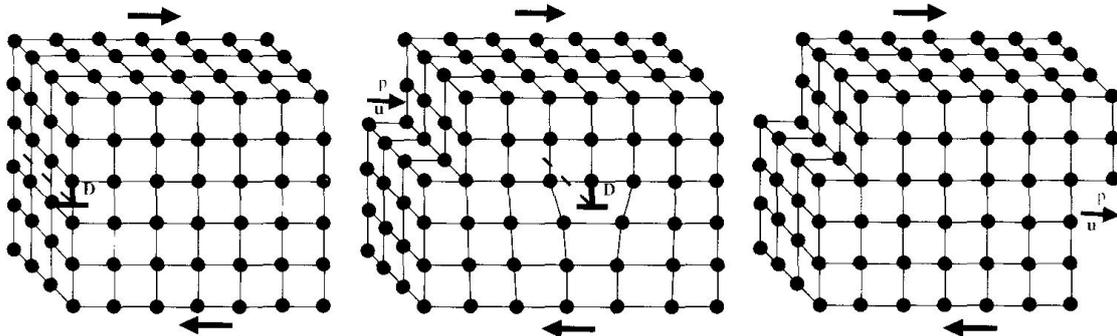


FIG. 2.1 – Dislocation coin représentée par le signe  $\perp$  et déformation plastique par glissement Lemaitre et al. (2007)

Pratiquement on repère, par exemple, la limite élastique par un essai de traction simple sur une éprouvette. La figure 2.2 présente le schéma typique du résultat d'un essai de traction sur un matériau métallique courant dans le plan déformation-contrainte. La contrainte  $\sigma_y$  se situe à la frontière du comportement élastique linéaire du matériau et du comportement plastique le plus souvent non-linéaire.

#### Représentation de la limite élastique

La limite élastique a été mise en évidence pour un essai uni-axial dans le paragraphe précédent. Ce critère de transition élasto-plastique peut être décrit par une fonction  $f$  dans l'équation 2.1.

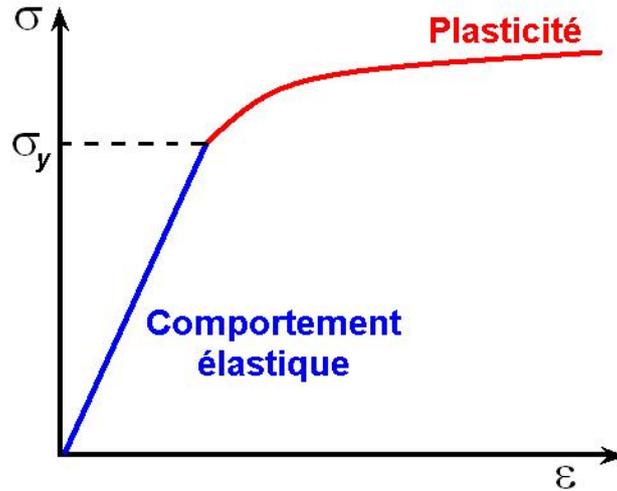


FIG. 2.2 – Schéma d'une courbe de comportement pour un matériau métallique classique

$$f(\sigma_{11}) = \sigma_{11} - \sigma_y = 0 \quad (2.1)$$

avec

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

dans un repère orthonormal. On notera par la suite les trois valeurs propres du tenseur  $\sigma$  :  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$ .

La question qui se pose alors est : comment généraliser cette fonction critère  $f$  en trois dimensions ? C'est-à-dire :

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}) \text{ ou } f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$$

On peut utiliser les trois invariants ( $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ ) du tenseur des contraintes définis. (cf. formules 2.3, 2.4 et 2.5).

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \quad (2.3)$$

$$I_2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III} \quad (2.4)$$

$$I_3 = \det(\underline{\sigma}) = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \quad (2.5)$$

Mais les expériences de Tresca sur les sphères de plomb ont montré que ces sphères ne se déformaient pas plastiquement quelle que soit la pression (c'est-à-dire la partie isotrope du tenseur des contraintes).

En plasticité, cela revient à dire que le matériau ne "voit" dans le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  que sa partie déviatorique. On exprime le déviateur des contraintes formule 2.6 tel que  $tr(S_\sigma) = 0$ .

$$\underline{S}_\sigma = \underline{\sigma} - \frac{tr(\underline{\sigma})}{3}\mathbb{I} \quad (2.6)$$

On peut donc prendre  $f$  uniquement fonction des deuxième et troisième invariants du déviateur des contraintes. Le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes  $J_2$  représente le critère de von Mises détaillé plus tard et le troisième invariant  $J_3$  permet de prendre en compte d'éventuelles dissymétries entre la traction et la compression. Les expressions des trois invariants sont données par les formules 2.7, 2.8 et 2.9.

$$J_1 = tr(\underline{S}_\sigma) = S_{\sigma 11} + S_{\sigma 22} + S_{\sigma 33} = 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \\ &= \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$J_3 = det(\underline{S}_\sigma) = \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 \quad (2.9)$$

On peut alors combiner ces invariants de façon judicieuse pour qu'à l'aide d'un ou de deux paramètres on retombe sur la surface de charge du matériau. Le choix de ces paramètres et leurs effets sur la surface obtenue est lui aussi important, de manière générale on choisit :

- un paramètre pour la taille sur la surface : une variation de ce paramètre transformera la surface de charge de façon homothétique.
- un paramètre changeant la forme de la surface de charge (d'un cercle vers un triangle par exemple)

[Krenk \(1996\)](#) s'étend plus longuement sur les combinaisons des invariants du tenseur des contraintes et sur l'impact des coefficients de la surface de charge. En prenant par exemple la formulation 2.10, on obtient un pannel de courbes présentées sur la figure 2.3. On fait varier le paramètre  $\eta$  de 0 à 1 qui contrôle la forme de la surface, le paramètre  $s_0$  gérant la taille est quant à lui gardé fixe.

$$\eta \frac{J_3}{s_0^3} + \frac{J_2}{s_0^2} = 1 \quad (2.10)$$

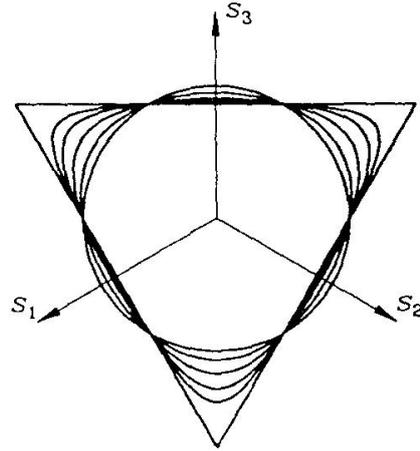


FIG. 2.3 – Surfaces de charge dans le plan déviatorique ( $\eta=0.0, 0.3, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0$ )

### Critères fréquemment utilisés

#### *Critère de Drucker-Prager*

Le critère de transformation de Drucker-Prager est un critère dépendant des effets de volume. Ce critère a été introduit pour traiter les déformations plastiques des sols. Beaucoup de déclinaisons de ce critère ont été appliquées pour des roches, des bétons, des polymères, des mousses et autres matériaux dépendants des effets de volume (les sols sont en effet très sensibles à la pression, ce qui se traduit par une grande déformation volumique).

Il est de la forme :

$$\sqrt{J_2} = A + BJ_1 \quad (2.11)$$

où  $A$  et  $B$  sont des paramètres identifiés expérimentalement.

Sa représentation 3D est figure 2.4.

#### *Critère de Tresca*

Le critère de Tresca est le second critère de plasticité le plus usité après celui de von Mises. Le critère de Tresca est le critère maximal de résistance d'un matériau aux efforts de cisaillement. Traduit mathématiquement ceci revient à la formule 2.12 pour le cas général en trois dimensions.

$$\overline{\sigma}_{Tresca} = \max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|) = \sigma_0 \quad (2.12)$$

Ce critère est plutôt utilisé pour des matériaux ductiles (ayant un seuil de rupture élevé et donc une phase plastique plus longue). En effet, pour de tels matériaux, la limite élastique est habituellement causée par le glissement des plans du cristal le long des surfaces de cisaillement maximum. Ainsi on considère pour un point quelconque dans l'espace des contraintes, qu'on se situe en-deça de la limite élastique tant que la contrainte de cisaillement maximum n'a pas atteinte en ce point

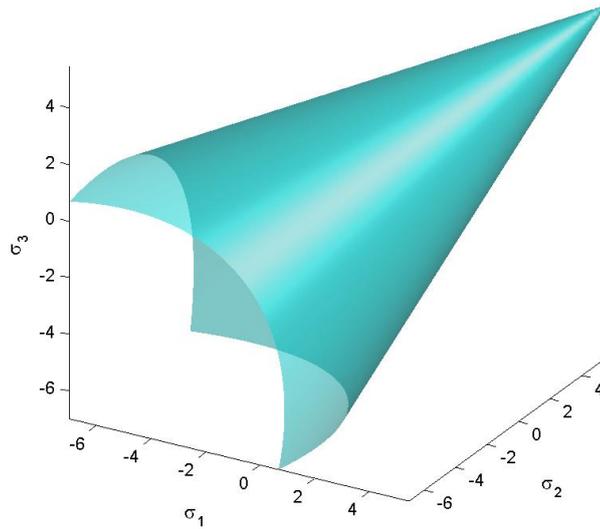


FIG. 2.4 – Surface de charge de type Drucker-Prager en représentation 3D

une valeur critique de cisaillement obtenue par un essai uni-axial en traction.

La figure 2.5 montre le tracé du critère de Tresca dans un espace à trois dimensions.

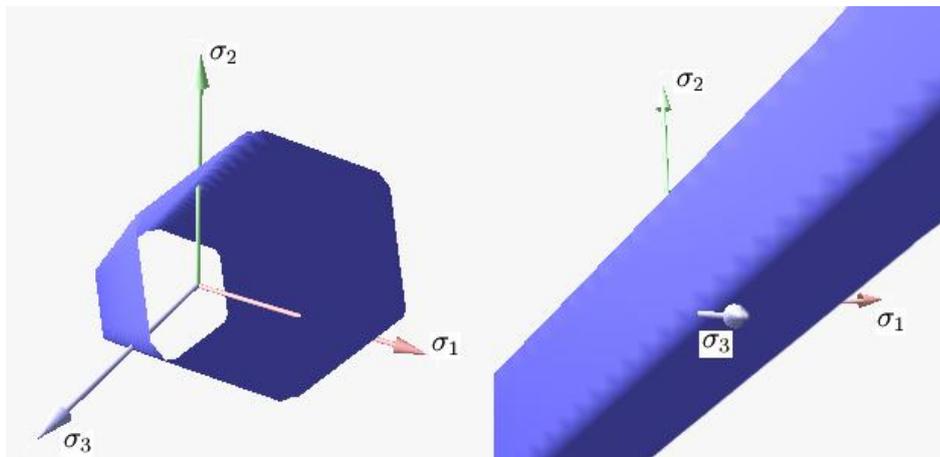


FIG. 2.5 – Surface de charge de type Tresca en représentation 3D

### Critère de von Mises

Bien que formulé par James C. Maxwell en 1865, ce critère est généralement attribué à Richard von Mises (von Mises (1912)) mais aussi en 1904 à un physicien polonais : Maximilian Huber, ainsi qu'à Heinrich Hencky (cf Hencky (1923)). Ce critère est apparenté à la théorie dite de Maxwell-Huber-Hencky-von Mises. Il est désigné usuellement comme le critère de von Mises.

Le critère de von Mises exprime le fait que la limite élastique du matériau débute lorsque le second invariant du déviateur des contraintes atteint une valeur critique  $\sigma_0$ . L'expression du critère de von Mises est donnée dans la formule 2.13

$$\bar{\sigma} = \overline{\sigma_{vonMises}} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{S}_{\sigma} : \underline{S}_{\sigma}} = \sqrt{3J_2} \quad (2.13)$$

Il reste le critère le plus utilisé de par sa bonne représentation de la réalité, de par sa manipulation aisée car il est scalaire et enfin de par la régularité de la surface de charge obtenue (contrairement au critère de Tresca par exemple). Le critère de von Mises ne prenant pas en compte par construction le premier invariant du tenseur des contraintes  $I_1$ , il est préférentiellement utilisé pour l'étude des déformations plastiques pour des matériaux ductiles comme les métaux, car la surface de charge de ce type de matériau ne dépend pas de la composante hydrostatique du tenseur des contraintes. Les figures 2.6 et 2.7 confrontent les critères de Tresca et de von Mises en trois dimensions d'une part et pour un chargement bi-axial d'autre part.

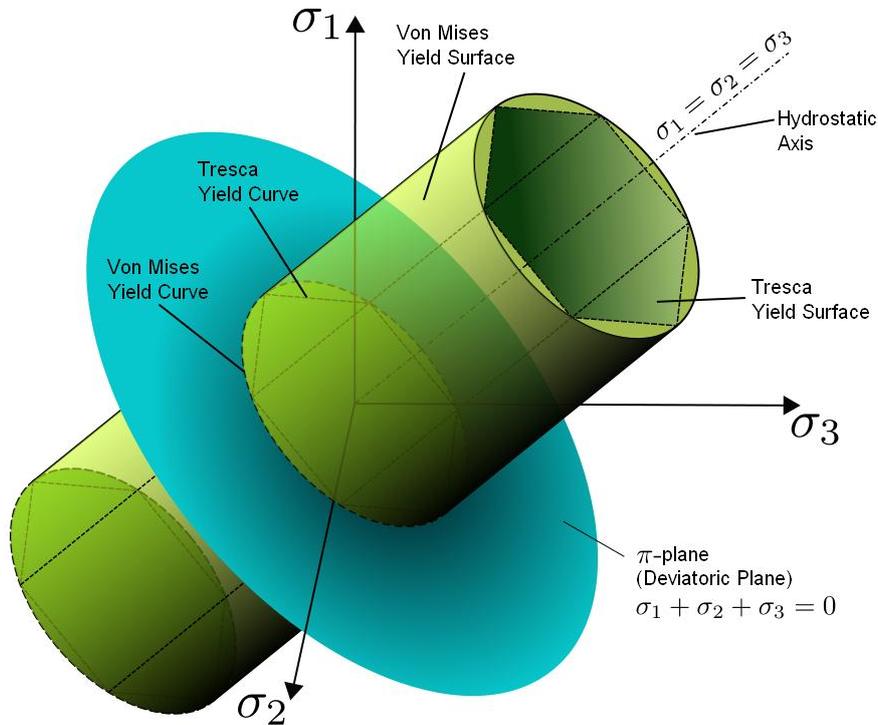
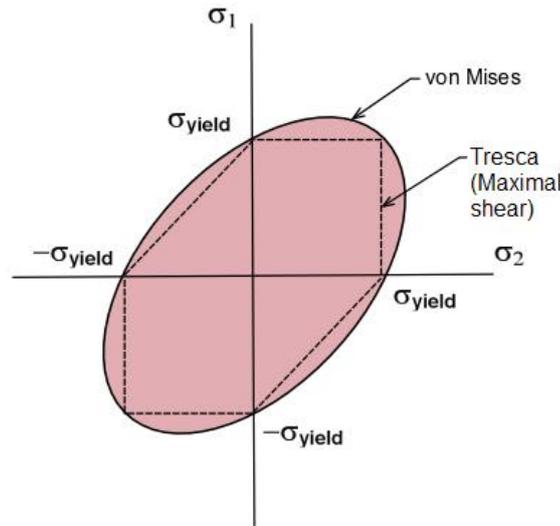


FIG. 2.6 – Surfaces de charge de type Tresca et von Mises en représentation 3D

## 2.1.2 Critère de début de transformation des AMF

### Dissymétrie traction - compression

Une grande partie des matériaux voit leur surface de charge décrite par un des critères précédemment décrits. Cependant on note une différence entre les limites élastiques en traction ou compression. Cette dissymétrie, notée SD effect en anglais (strength differential effects), est la



**FIG. 2.7** – Surfaces de charge de type Tresca et von Mises pour un chargement bi-axial

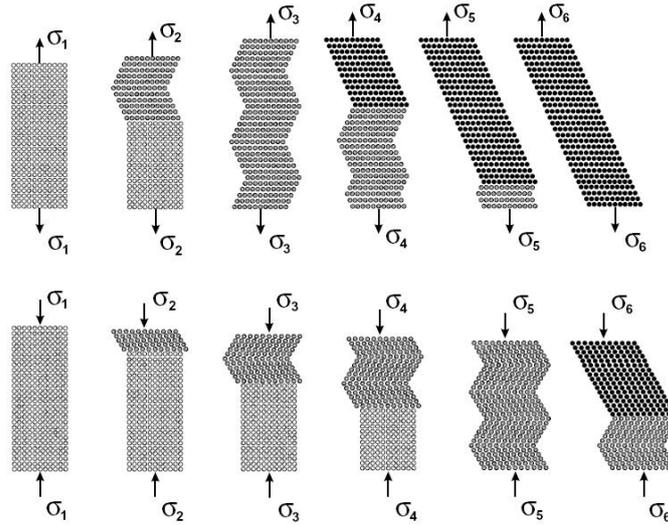
plupart du temps retrouvée pour des métaux dont la surface de charge dépend de la pression hydrostatique, soit le premier invariant du tenseur des contraintes (cf par exemple les travaux de [Sptizig et al. \(1976\)](#) et [Sptizig and Richmond \(1984\)](#)).

Cependant, certains matériaux isotropes comme les AMF exhibent un comportement dissymétrique en traction-compression avec des variations de volume négligeables pendant la phase de transformation. En particulier, [Hosford and Allen \(1973\)](#) énoncent le fait que les surfaces de charge présentant une forte dissymétrie traction-compression peuvent être attendues pour tout matériau isotrope indépendant des effets de volume mais qui présentent des déformations directionnelles comme le phénomène de ré-orientation martensitique pour les AMF.

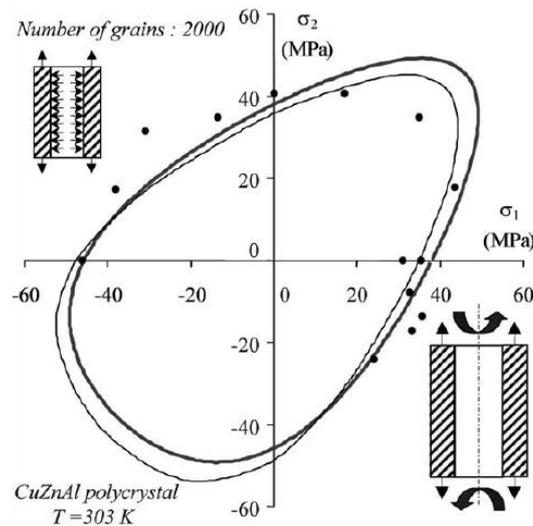
La dissymétrie pour les AMF provient aussi d'effets dans la microstructure. Le schéma [2.8](#) présente l'arrangement de différentes variantes de martensite selon un chargement en traction et un en compression. Pour assurer la compatibilité avec les variantes voisines, les variantes de martensite vont mieux croître en traction qu'en compression. Le schéma [2.8](#) nous montre que pour un même chargement, on retrouve plus de martensite orientée pour la traction que pour la compression et que les premières variantes de martensite apparaissent plus rapidement en traction.

L'orientation des grains joue aussi un rôle pour l'accommodation des variantes et influe donc aussi sur la dissymétrie en traction /compression. Par exemple des matériaux texturés présentent une orientation cristalline préférentielle par rapport à une distribution isotrope des orientations, impliquant une difficulté supplémentaire pour la compatibilité entre les variantes et augmentant alors la dissymétrie ([Saburi et al. \(1984\)](#)).

La surface de charge des AMF prend alors l'allure présentée figure [2.9](#). L'intérieur de la surface de charge est le lieu de la phase austénitique et l'extérieur représente la phase martensitique  $M_\sigma$ .



**FIG. 2.8** – Transformation micro-structurale de l'austénite (points clairs) par des variantes (points plus sombres) vers de la martensite orientée (points sombres). Haut de la figure : traction. Bas de la figure : compression. (Mahnken and Wilmanns (2008))



**FIG. 2.9** – Surface de charge d'un AMF polycristallin en CuZnAl dans le repère des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). (● points expérimentaux, — micro-macro-simulation, -simulation phénoménologique) (Lexcelent et al. (2002))

## Fonctions de correction

Pour retrouver les surfaces de charge présentant une dissymétrie traction / compression, on part de la surface de charge de von Mises à laquelle on adjoint une "fonction de correction". Cette fonction de correction prendra en compte l'expression du troisième invariant du déviateur des contraintes  $y_\sigma$  défini formule 2.14 (aussi appelé invariant de Lode),  $y_\sigma$  peut varier de  $-1$  à  $1$  ( $1$  correspondant à la traction,  $-1$  à la compression et  $0$  à du cisaillement pur). On gardera l'appellation "fonction de correction" pour la fonction  $f$  pour la suite du document.

$$y_\sigma = \frac{27 \det(\underline{S}_\sigma)}{2 \bar{\sigma}^3} \quad (2.14)$$

L'équation de la surface de charge prend alors la forme de l'équation 2.15. On notera  $\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente et  $\sigma_0$  une contrainte seuil dépendant le plus souvent de la température  $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ .

$$\mathcal{F}(\underline{\sigma}) = \bar{\sigma}f(y_\sigma) - \sigma_0 = \sigma_{eq} - \sigma_0 = 0 \quad (2.15)$$

### 2.1.3 Une condition nécessaire de convexité

Bigoni and Piccolroaz (2004) reviennent sur le fait qu'expérimentalement on retrouve des surfaces de charge convexes. De plus il est plus intéressant mathématiquement de travailler avec des fonctions convexes en particulier si on s'intéresse à la règle de normalité d'écoulement perpendiculaire à la surface de charge. Au vue de ces différents points, on peut donc conclure qu'il est plus judicieux et logique d'utiliser des fonctions de correction n'entraînant pas la non-convexité de la surface de charge.

Enfin le critère de BIS pour les polycristaux se retrouve vérifié. Il est à noter que la simple convexité de la fonction de correction n'implique pas celle de la surface de charge obligatoirement. Raniecki and Mróz (2008) ont démontré que la fonction de correction devait vérifier la condition de l'équation 2.16 afin que la surface de charge soit convexe. Laydi and Lexcelent (2008) ont démontré par la suite que cette condition était seulement nécessaire mais pas suffisante.

$$(1 - y_\sigma^2)f''(y_\sigma) - y_\sigma f'(y_\sigma) + \frac{f(y_\sigma)}{9} \geq 0 \quad (2.16)$$

#### Fonctions de correction existantes

Selon le matériau AMF étudié et la surface de charge correspondante, il faut définir une fonction de correction mathématiquement admissible et qui, bien entendu, rende compte de la réalité. Il existe différentes fonctions de correction répondant au critère de convexité énoncé 2.16. Ces fonctions ont leur utilisation propre selon le chargement et le matériau étudié. On propose dans ce paragraphe de dresser les fonctions de correction les plus courantes.

##### *Fonction de correction de Bouvet*

Suite à la fonction définie par Podgorski (1985), elle-même basée sur les travaux de Lade and Duncan (1975), Matsuoka (1976) et Ottosen (1977), Bouvet et al. (2004) ont défini une fonction de correction exprimée dans l'équation 2.17. Elle ne fait entrer en jeu qu'un seul paramètre :  $a_B$ , ce dernier doit être compris entre 0 et 1 pour que  $f_B$  soit définie. Il a d'ailleurs été démontré par Laydi and Lexcelent (2008) que la surface de correction reste convexe pour  $a_B \in [0, 1]$ .

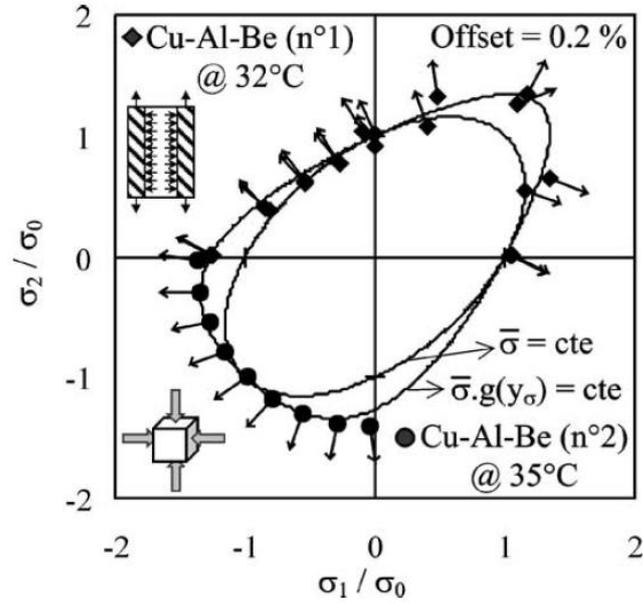
$$f_B(y_\sigma) = \cos \left[ \frac{\arccos(1 - a_B(1 - y_\sigma))}{3} \right] \quad (2.17)$$

$a_B$  peut être déterminé à l'aide de deux essais mettant en exergue la dissymétrie de la surface de charge. Classiquement on utilise un essai de traction et un essai de compression comme Taillard

et al. (2008) (on obtient  $a_B^{TC}$  formule 2.18) ou encore un essai de traction torsion (on obtient  $a_B^{Tt}$ , formule 2.19), où  $\overline{\sigma}_T^{AM}$ ,  $\overline{\sigma}_C^{AM}$  et  $\overline{\sigma}_t^{AM}$  sont respectivement les contraintes équivalentes au sens de von Mises pour un essai de traction, de compression et de torsion sur un matériau

$$0 < a_B^{TC} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( 3 \arccos \left( \frac{\overline{\sigma}_T^{AM}}{\overline{\sigma}_C^{AM}} \right) \right) \right] < 1 \quad (2.18)$$

$$0 < a_B^{Tt} = \frac{1}{1 - y_{\sigma^{tor}}} \left[ 1 - \cos \left( 3 \arccos \left( \frac{\overline{\sigma}_T^{AM}}{\overline{\sigma}_t^{AM}} \right) \right) \right] < 1 \quad (2.19)$$



**FIG. 2.10** – Surfaces de charge de CuAlBe (Points : partie expérimentale ; trait continu : partie simulation) comparées à la surface de charge de type von Mises ( $\overline{\sigma} = cte$ )

Fonction de correction de Raniecki

Raniecki and Mróz (2008) proposent une fonction de correction exponentielle définie équation 2.20 comprenant deux paramètres ( $b_R$  et  $c_R$ ). Cette fonction est construite de façon à égaler 1 en compression ( $f_R(-1) = 1$ ). On remarque qu'en prenant les paramètres  $b_R$  et  $c_R$  nuls, on revient au critère de von Mises pour la surface de charge.

$$f_R(y_\sigma) = 1 + b_R [1 - e^{-c_R(1+y_\sigma)}] \quad (2.20)$$

Après une étude sur la convexité de la surface de charge et la condition  $-1 \leq y_\sigma \leq 1$ , l'encadrement du paramètre  $c_R$  est apparu, on a alors une surface de charge convexe et mathématiquement admissible si et seulement si 2.21 est vérifiée.

$$0 \leq c_R \leq \frac{8}{27} \quad (2.21)$$

Cette fonction de correction se montre la plus adaptée pour un alliage en AMF de NiTi avec un test en compression pour l'identification.

*Fonction de correction de type puissance*

La dernière fonction de correction présentée n'est pas la plus utilisée bien que d'une forme assez simple. Il s'agit d'une fonction puissance comprenant deux paramètres :  $a_C$  et  $n$  (équation 2.22). Par construction on a  $f(0) = 1$ , ce qui rend cette fonction plus adaptée pour des essais de traction torsion.

$$f_C(y_\sigma) = (1 + a_C y_\sigma)^n \quad (2.22)$$

Si on choisit le paramètre  $n$  égale à  $1/3$  ceci revient à utiliser la fonction de [Cazacu and Barlat \(2004\)](#). En prenant  $n = -1$  avec  $a_C < 0$ , on choisit la forme proposée par [Mills and Zimmerman \(1970\)](#) utilisée comme un critère de rupture. Cette fonction de correction se retrouve aussi dans les travaux de [Gudehus \(1973\)](#) pour la sable sec pour  $n = -1/2$  et  $a_C < 0$ .

## 2.2 Surface des déformations de transformation associées à la formation de martensite

### 2.2.1 Définition du tenseur des déformations associées à la formation de martensite

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur des déformations totales  $\underline{\varepsilon}$  peut être décomposé additivement en un tenseur des déformations élastiques  $\underline{\varepsilon}_e$ , un tenseur des déformations de transformation  $\underline{\varepsilon}_{tr}$  et éventuellement selon l'utilité, un tenseur de déformation thermique  $\underline{\varepsilon}_{th}$  et un tenseur de déformations plastiques  $\underline{\varepsilon}_p$ .

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_{tr} + \underline{\varepsilon}_{th} + \underline{\varepsilon}_p \quad (2.23)$$

Intéressons-nous plus précisément au tenseur des déformations de transformation. Ce dernier peut être formulé comme en 2.24 où  $z$  représente la fraction volumique de martensite totale et  $\underline{\varepsilon}_m$  représente le tenseur des déformations associées à la création de la martensite.

$$\underline{\varepsilon}_{tr} = z \underline{\varepsilon}_m \quad (2.24)$$

Pour des chargements proportionnels, le tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  représente la déformation de transformation maximum théorique du matériau, c'est à dire que cette quantité n'est atteinte que lorsque la transformation martensitique aura été totale ( $z = 1$ ). Pratiquement, la transformation de phase n'est jamais complète, la fraction volumique de martensite totale peut atteindre 90-95%.

C'est pourquoi  $\underline{\varepsilon}_m$  reste une donnée théorique mais au travers de laquelle des modélisations concrètes peuvent être faites.  $\underline{\varepsilon}_m$  est une valeur extrapolée, c'est-à-dire une valeur atteinte pour une transformation complète ( $z = 100\%$ ).

### 2.2.2 Espace des déformations

L'ensemble des tenseurs  $\underline{\varepsilon}_m$  peut être réuni au sein d'un seul espace  $P$  de dimension cinq (2.25). Les tenseurs appartenant à cet espace ont une trace nulle et représentent un point à l'intérieur de la surface décrite par la fonction  $g(\underline{\varepsilon}_m)$ .

$$P = \{\underline{\varepsilon}_m / \text{tr}(\underline{\varepsilon}_m) = 0, g(\underline{\varepsilon}_m) \leq 0\} \quad (2.25)$$

La fonction  $g$  peut évidemment être décrite de plusieurs façons. Sadjadpour and Bhattacharya (2007a) ont explicitement travaillé sur cet espace  $P$ . Ils ont décrit la fonction  $g$  dans l'équation 2.26 pour un matériau isotrope et une extension 2.28 pour des matériaux isotropes transverses. Ces fonctions prennent en compte le second et le troisième invariant du tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  qui seront notés respectivement  $I_2(\underline{\varepsilon}_m)$  et  $I_3(\underline{\varepsilon}_m)$  (sachant que  $I_1(\underline{\varepsilon}_m) = \text{tr}(\underline{\varepsilon}_m) = 0$ ).

$$g(\underline{\varepsilon}_m) = (-I_2(\underline{\varepsilon}_m))^{3/2} - a_{Bh}I_3(\underline{\varepsilon}_m) - b_{Bh} \quad (2.26)$$

La fonction prenant en compte l'anisotropie fait apparaître un nouveau terme dans lequel on retrouve la direction principale de l'isotropie transverse  $\vec{e}$  ainsi que le tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  normalisé sous la forme  $\underline{N}_\varepsilon$  (équation 2.27). On pondère le dernier terme de la fonction  $g$  par un paramètre  $c_{Bh}$  à identifier quantifiant le degré de l'isotropie transverse.

$$\underline{N}_\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{|\underline{\varepsilon}_m|} \underline{\varepsilon}_m \quad \text{avec :} \quad |\underline{\varepsilon}_m| = (\underline{\varepsilon}_m : \underline{\varepsilon}_m)^{1/2} \quad (2.27)$$

$$g(\underline{\varepsilon}_m) = (-I_2(\underline{\varepsilon}_m))^{3/2} - a_{Bh}I_3(\underline{\varepsilon}_m) - b_{Bh} + c_{Bh}(\vec{e}\underline{N}_\varepsilon\vec{e}) \quad (2.28)$$

### 2.2.3 Représentation de l'espace des déformations de transformation

Les figures 2.11(a), 2.11(b), 2.11(c), 2.12(a), 2.12(b) et 2.12(c) présentent différentes surfaces dans l'espace des déformations  $\underline{\varepsilon}_m$  pour des sollicitations en bi-traction avec différents paramètres de la fonction  $g$ . On prend comme tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  un tenseur de la forme 2.29 représentant un essai en bi-traction par exemple. De même sur les figures 2.13(a), 2.13(b), 2.13(c), 2.14(a), 2.14(b) et 2.14(c) on observe les mêmes surfaces mais pour des essais en traction-torsion, la forme du tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  est donnée équation 2.30. On note alors l'influence de chaque paramètre de la fonction  $g$  :

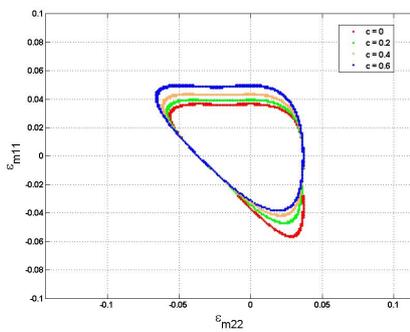
- $a_{Bh}$  agit sur la forme de la surface
- $b_{Bh}$  agit sur la taille de la surface

–  $c_{Bh}$  prend en compte l'isotropie transverse du matériau (on prend ici une orientation de l'anisotropie telle que  $\hat{e} = (1, 0, 0)$ ).

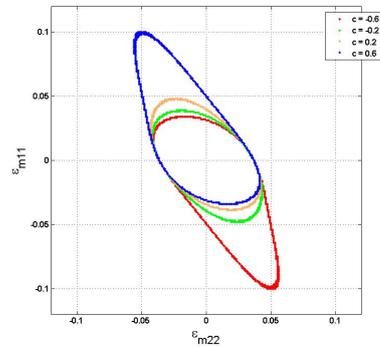
On fixe le paramètre  $b_{Bh}$  constant pour tous les essais, celui-ci ne transformant les courbes que de façon homothétique.

$$\underline{\varepsilon}_m = \begin{pmatrix} \varepsilon_{m11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{m22} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{m11} - \varepsilon_{m22} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

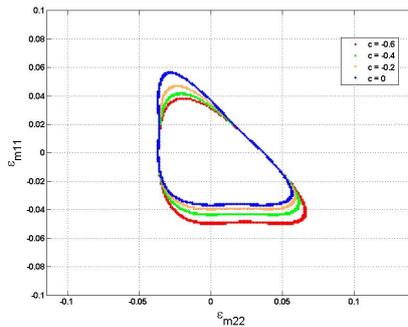
$$\underline{\varepsilon}_m = \begin{pmatrix} \varepsilon_{m11} & \varepsilon_{m12} & 0 \\ \varepsilon_{m12} & -\frac{1}{2}\varepsilon_{m11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_{m11} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$



(a)  $a_{Bh} = -1.5$ ,  $b_{Bh} = 4,9.10^{-5}$

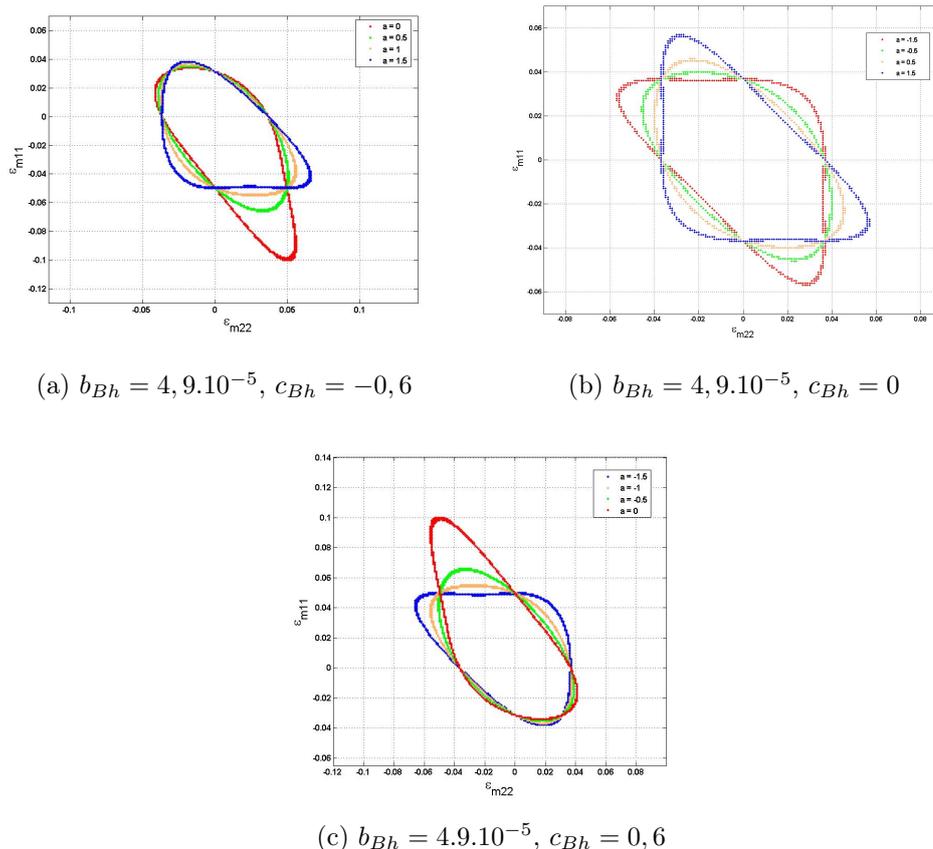


(b)  $a_{Bh} = -0$ ,  $b_{Bh} = 4,9.10^{-5}$



(c)  $a_{Bh} = 1,5$ ,  $b_{Bh} = 4.9.10^{-5}$

**FIG. 2.11** – Surfaces de fin de transformation dans l'espace des  $\underline{\varepsilon}_m$  pour une sollicitation en bi-traction - Influence du paramètre  $a_{Bh}$



**FIG. 2.12** – Surfaces de fin de transformation dans l'espace des  $\underline{\varepsilon}_m$  pour une sollicitation en bi-traction - Influence du paramètre  $c_{Bh}$

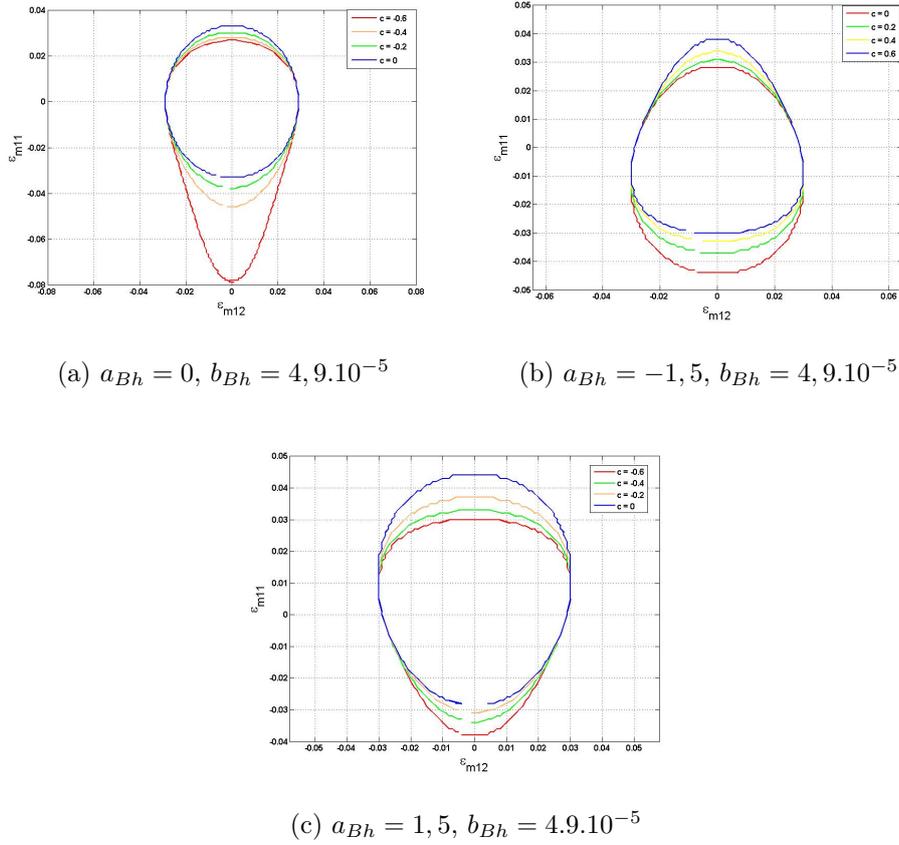
## 2.3 Dualité liant les contraintes aux déformations de transformation associées à la formation de martensite

### 2.3.1 Introduction

Une analogie entre la fonction  $g(\underline{\varepsilon}_m)$  et la description des surfaces de charge définies en contraintes, peut être exposée dans le cadre des AMF. Dans les deux cas on décrit une surface délimitant une transformation. La surface de charge pour un AMF représente la limite entre la phase austénitique et l'apparition des premières variantes de martensite ( $z = 0^+$ ). La fonction  $g$ , quant à elle, transcrit la limite théorique de fin de transformation ( $z = 1$ ).

La nature de l'espace des déformations de transformation touche aux limites de transformation du matériau, c'est à dire une transformation totale qui ne se retrouve pas expérimentalement. C'est pourquoi nous décrirons dans un premier temps le passage de l'espace des  $\underline{\varepsilon}_m$  vers celui des contraintes  $\underline{\sigma}$ .

Ensuite une description de la dualité liant ces deux espaces sera dressée. Enfin des exemples d'utilisation de ce nouvel outil seront décrits.



**FIG. 2.13** – Surfaces de fin de transformation dans l'espace des  $\underline{\varepsilon}_m$  pour une sollicitation en traction-torsion - Influence du paramètre  $a_{Bh}$

### 2.3.2 Passage de l'espace des contraintes à celui des déformations de transformation

Le passage le plus naturel d'un espace à l'autre est celui liant les déformations de transformation  $\underline{\varepsilon}_m$  vers les contraintes  $\underline{\sigma}$ . Pour cela nous partons de la règle de normalité appliquée à des chargements proportionnels 2.31 et validée expérimentalement par Bouvet (2001) dans ses essais sur du CuAlBe .

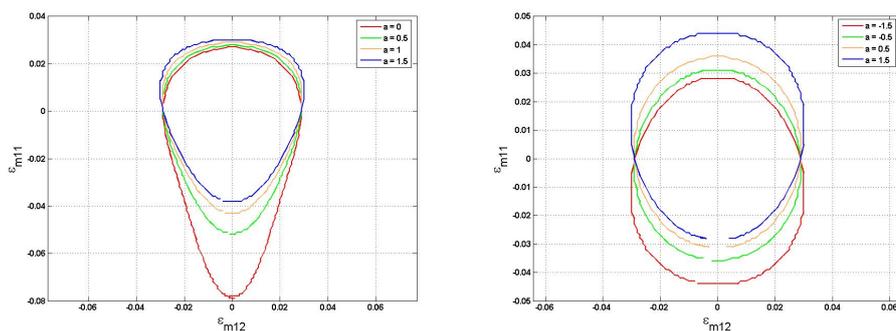
$$\underline{\varepsilon}_m = \gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (2.31)$$

On calcule la dérivée de  $\mathcal{F}$  (définie équation 2.15) par rapport à  $\underline{\sigma}$  :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\sigma}} = f(y_\sigma) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} + f'(y_\sigma) \bar{\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{\sigma}} \quad (2.32)$$

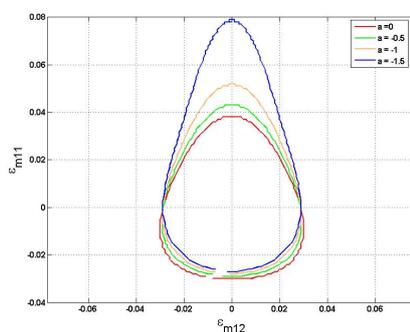
On calcule alors indépendamment chacun des deux termes de l'équation 2.32, avec  $\kappa = \sqrt{\frac{3}{2}}$  et  $|\underline{a}| = \sqrt{\text{tr}(\underline{a}^T \underline{a})}$ . Dans un premier temps avec  $\underline{\sigma} = \kappa |\underline{S}_\sigma|$  :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} = \kappa \frac{\partial |\underline{S}_\sigma|}{\partial \underline{\sigma}} \quad (2.33)$$



(a)  $b_{Bh} = 4, 9.10^{-5}$ ,  $c_{Bh} = -0,6$

(b)  $b_{Bh} = 4, 9.10^{-5}$ ,  $c_{Bh} = 0$



(c)  $b_{Bh} = 4.9.10^{-5}$ ,  $c_{Bh} = 0,6$

**FIG. 2.14** – Surfaces de fin de transformation dans l'espace des  $\underline{\varepsilon}_m$  pour une sollicitation en traction-torsion - Influence du paramètre  $c_{Bh}$

En utilisant l'identité 2.34

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \underline{S}_\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \frac{\partial}{\partial \underline{S}_\sigma} \right) \mathbb{I} \quad (2.34)$$

On a :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} = \kappa \frac{\partial |S_\sigma|}{\partial \underline{S}_\sigma} \quad (2.35)$$

Ce qui revient à trouver :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} = \kappa^2 \frac{S_\sigma}{\kappa |S_\sigma|} = \kappa \frac{S_\sigma}{\bar{\sigma}} = \underline{N}_\sigma \quad (2.36)$$

Ensuite regardons le second terme de 2.32, on a :

$$\bar{\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{N}_\sigma} - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{N}_\sigma} : \underline{N}_\sigma \right) \cdot \underline{N}_\sigma - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{N}_\sigma} \right) \mathbb{I} \quad (2.37)$$

En la relation 2.38 et en reprenant la définition de la comatrice on a :

$$\frac{\partial \det(\underline{N}_\sigma)}{\partial \underline{N}_\sigma} = \text{com}(\underline{N}_\sigma) = \det(\underline{N}_\sigma)^T \underline{N}_\sigma^{-1} \quad (2.38)$$

Donc :

$$\frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{N}_\sigma} = y_\sigma \underline{N}_\sigma^{-1} \quad (2.39)$$

De plus :

$$\frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{N}_\sigma} : \underline{N}_\sigma = ({}^T \underline{N}_\sigma^{-1} : \underline{N}_\sigma) y_\sigma = 3y_\sigma \quad (2.40)$$

Et enfin :

$$\text{tr} \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial \underline{N}_\sigma} \right) = y_\sigma \text{tr} ({}^T \underline{N}_\sigma^{-1}) = y_\sigma \times -\frac{9}{2} y_\sigma^{-1} = -\frac{9}{2} \quad (2.41)$$

L'équation 2.37 revient alors à :

$$\bar{\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial \sigma} = y_\sigma \left( \underline{N}_\sigma^{-1} - \frac{9}{2} \underline{N}_\sigma \right) + \frac{3}{2} \mathbb{I} \quad (2.42)$$

On retrouve l'expression donnée par [Laydi and Lexcellent \(2008\)](#) :

$$\sqrt{1 - y_\sigma^2 \underline{N}_\sigma^\perp} = y_\sigma \left( \underline{N}_\sigma^{-1} - \frac{9}{2} \underline{N}_\sigma \right) + \frac{3}{2} \mathbb{I} \quad (2.43)$$

On obtient alors une expression élégante et simple à utiliser pour le tenseur des déformations de transformation :

$$\underline{\varepsilon}_m = \gamma \left( f(y_\sigma) \underline{N}_\sigma + 3f'(y_\sigma) \sqrt{1 - y_\sigma^2 \underline{N}_\sigma^\perp} \right) \quad (2.44)$$

### 2.3.3 Dualité liant les deux espaces étudiés

Nous avons établi, au paragraphe précédent, l'expression du tenseur des déformations de transformation à partir de la connaissance du tenseur des contraintes. Il s'agit maintenant de construire un lien entre les deux espaces et de pouvoir exprimer l'un en fonction de l'autre. L'écriture dans le domaine des déformations de transformation a été bâtie sur celle dans l'espace des contraintes. On note par exemple que  $\underline{N}_\sigma$  et  $\underline{N}_\varepsilon$  (équation 2.27) ont exactement la même forme. De même l'équation de la surface de début de transformation dans l'espace des contraintes  $\mathcal{F}$  (équation 2.15) et celle de la surface de fin de transformation dans l'espace des déformations de transformation  $\mathcal{H}$  (équation 2.45) peuvent être écrites sous la même forme.

$$\mathcal{H}(\underline{\varepsilon}_m) = \bar{\varepsilon}_m h(\underline{\varepsilon}_m) - \gamma = g(I_2(\underline{\varepsilon}_m), I_3(\underline{\varepsilon}_m)) = 0 \quad (2.45)$$

Une réécriture est alors effectuée pour passer de la fonction définie par Batthacharya et al.  $g(I_2(\underline{\varepsilon}_m), I_3(\underline{\varepsilon}_m))$  et la fonction  $h(\underline{\varepsilon}_m)$  plus en lien avec notre approche.

$$h(\underline{\varepsilon}_m) = \frac{1}{\hat{b}} \left( 1 - \hat{a}y_\varepsilon - \hat{c} \left( e^T \underline{N}_\varepsilon e \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.46)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{2}{9} \sqrt{3} a_{Bh} \\ \hat{b} &= \sqrt{3} b^{\frac{1}{3}} \\ \hat{c} &= \frac{8}{9} \sqrt{3} c_{Bh} \end{aligned}$$

Cette ré-écriture entraine un rapprochement et permet de décrire plus facilement la dualité des deux espaces pris en compte et de définir une dualité entre eux. La clé de voute de cette dualité réside dans l'hypothèse de normalité vérifiée par [Bouvet et al. \(2004\)](#) donnée 2.31 et dans celle démontrée par [Laydi and Lexcellent \(2008\)](#) qui figure équation 2.47.

$$\mathcal{H}'(\underline{\varepsilon}_m) = \frac{1}{\sigma_0} S_\sigma \quad (2.47)$$

Cette équation permet de faire un pont mathématique entre le monde des contraintes et celui des déformations de transformation de phase.

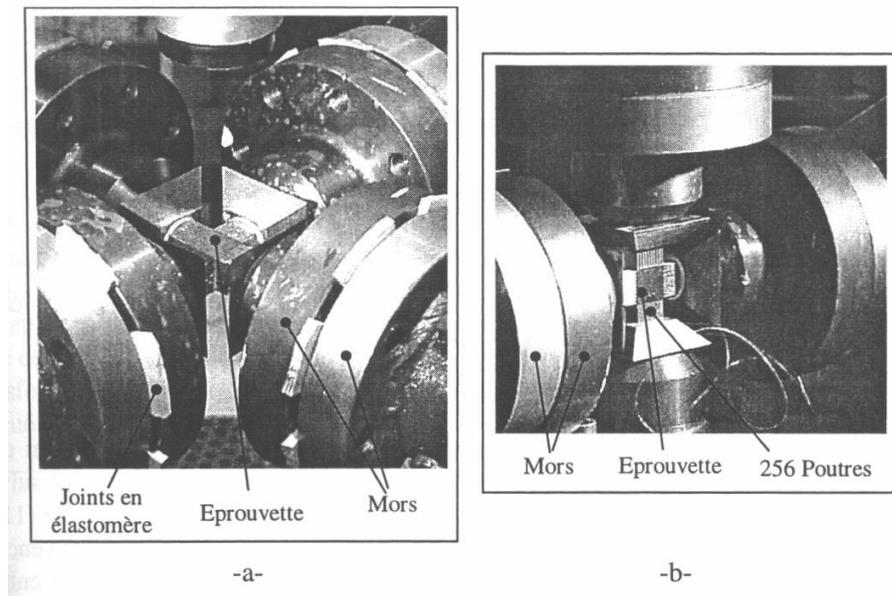
### 2.3.4 Applications

Dans cette partie, nous avons choisi de mettre en oeuvre le passage de l'espace des contraintes vers celui des déformations de transformation, et ce, à travers des résultats expérimentaux en notre possession. Nous nous baserons sur deux campagnes d'essais, la première pour des essais en bi-traction sur un alliage en cuivre-aluminium-béryllium et la seconde pour des essais en traction-torsion sur un AMF en nickel-titane.

#### Application à des essais expérimentaux en bi-traction sur un alliage de CuAlBe

Ces essais ont été effectués par [Bouvet \(2001\)](#) lors de ses travaux de thèse. La machine utilisée dans le Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT-Cachan) est la machine d'essais triaxiale Astrée (figure 2.15). Elle est asservie électro-hydrauliquement avec six vérins installés selon trois directions orthogonales deux à deux et chacun peut être asservi en force ou en déplacement par rapport à son opposé (asservissement couplé), (pour plus de renseignements, se référer aux travaux de [Calloch \(1997\)](#)).

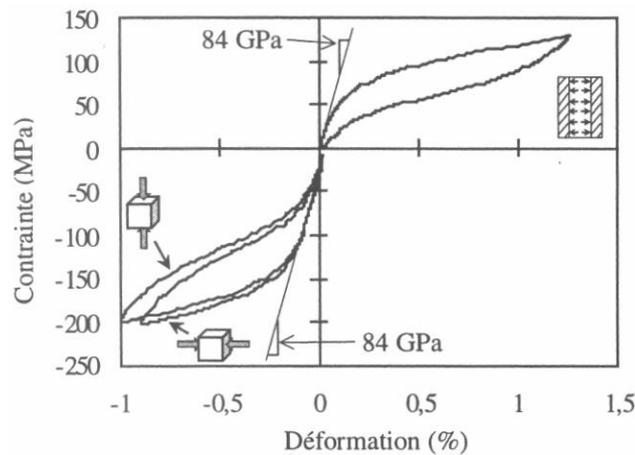
Le matériau utilisé est un cube de Cu 87.5-Al 11.33-Be 0.49 (% en masse) de nom commercial AH88. Le matériau fourni par Tréfimétaux (France) a été usiné puis a subi un traitement thermique : chauffage à 350 ° C pendant 20 minutes puis trempe à l'eau bouillante à 100 ° C pendant



**FIG. 2.15** – Montage d'essai de tricompression (a) avec les joints en élastomère, (b) sans les joints en élastomère Bouvet (2001)

une heure.

Les températures caractéristiques de transformation ont été déterminées à l'aide de mesures de résistance électrique :  $M_s^0 \approx 14^\circ C$ ,  $M_f^0 \approx -13^\circ C$ ,  $A_s^0 \approx 12^\circ C$  et  $A_f^0 \approx 26^\circ C$ . On vérifie qu'on peut alors travailler à la température ambiante et être dans la zone de la pseudo-élasticité ( $T > A_f^0$ ). Une courbe de traction compression (compression suivant deux axes différents) est présentée figure 2.16.



**FIG. 2.16** – Essai de traction et de compression suivant 2 axes de CuAlBe Bouvet (2001)

On considère que le tenseur des contraintes a la forme suivante :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Les différents couples de valeurs figurant dans le tableau 2.1 sont les contraintes de début de transformation, elles permettent de décrire la surface de charge du matériau considéré.

<b>i</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_1$ (MPa)	87.1	91.4	105.7	45.7	0	-45.7	-105.7	-100	-65.7	0
$\sigma_2$ (MPa)	0	42.8	102.8	100	80	60	0	-48.6	-91.4	-100

**TAB. 2.1** – Données expérimentales des essais de bi-traction sur du CuAlBe

Dans un premier temps il faut opter pour une fonction de correction permettant de décrire au mieux la surface de charge obtenue ici. Le choix le plus judicieux pour la fonction de correction pour un alliage de type cuivreux est la fonction écrite en 2.17. Sur la figure 2.17 apparaissent les points expérimentaux ainsi que la surface de charge tracée en utilisant la fonction 2.17.

Le paramètre  $a_B$  de la fonction de correction est moyenné avec les différents essais (équation 2.49). On prend au final comme valeurs :

$$\begin{aligned} a_B &= 0.47 \\ \sigma_0 &= 98.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

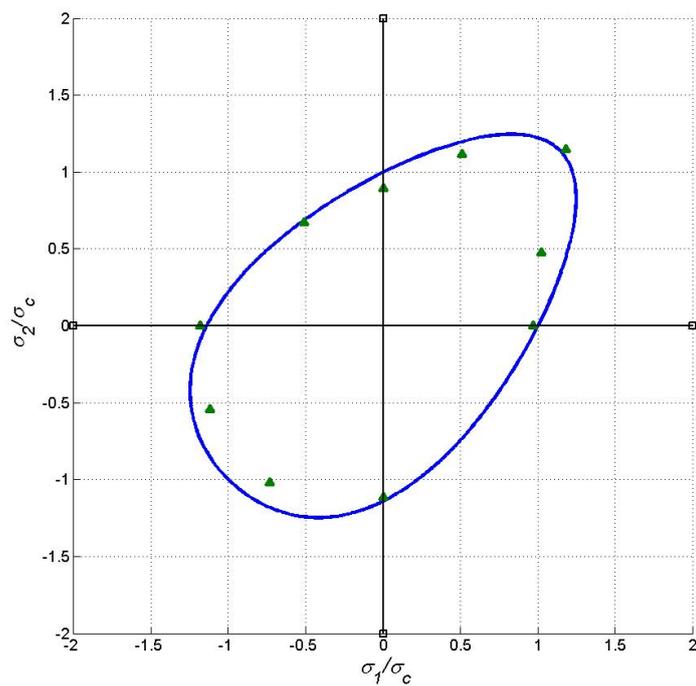
$$a_B = \frac{\sum_{i=1}^{10} \left( 1 - \cos \left( 3 \arccos \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \right) \right) \right)}{\sum_{i=1}^{10} (1 - y_{\sigma_i})} \quad (2.49)$$

Avec la fonction de correction associée à la surface de début de transformation pour cet alliage, on utilise directement l'équation 2.47 pour obtenir la surface de fin de transformation dans l'espace des déformations de transformations  $\underline{\varepsilon}_m$ . La figure 2.18 présente la courbe obtenue.

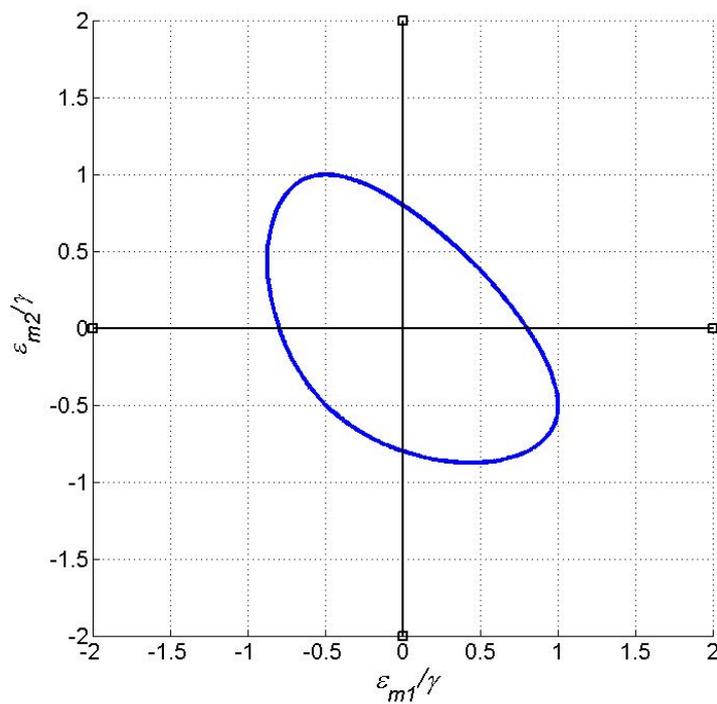
### Application à des essais expérimentaux en traction-torsion sur un alliage de NiTi

On propose pour cette application de non seulement changer d'alliage en prenant un NiTi mais aussi de type d'essais. La sollicitation est ici en traction-torsion dans une étuve assurant que les tests soient bien isothermes.

La machine utilisée ici est une machine MTS électro-hydraulique asservie de traction-torsion, ses vérins axial et rotatifs ont des capacités de 100 kN et de 1,2 kN.m respectivement. Une struture de maintien a été ajoutée à la machine afin de garder le montage de l'éprouvette au sein d'une



**FIG. 2.17** – Surface de charge (ligne continue) d'un alliage en CuAlBe confrontée aux points expérimentaux (triangles)

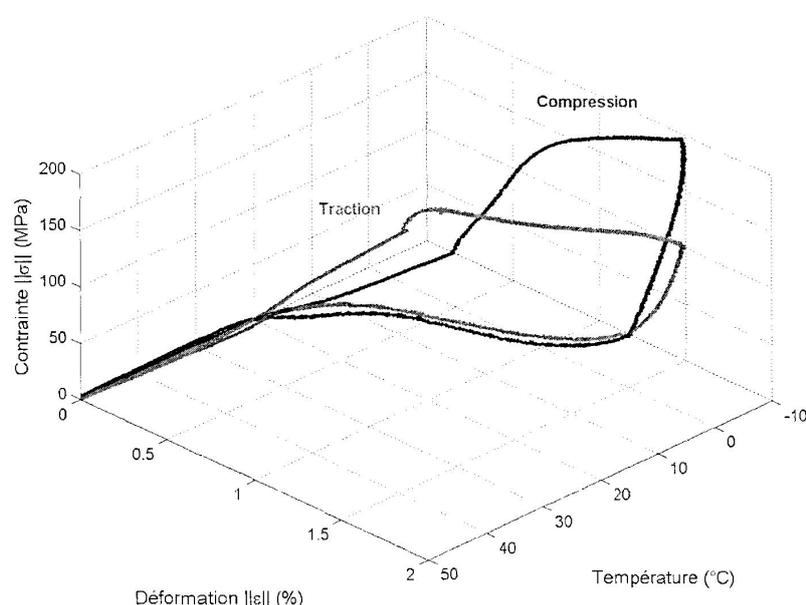


**FIG. 2.18** – Surface de fin de transformation dans l'espace des déformations de transformation normalisées  $\underline{\epsilon}_m/\gamma$  pour un AMF de CuAlBe)

enceinte thermique régulée.

Le matériau considéré pouvait alors être soumis aussi bien à des chargements mécaniques en traction et/ou torsion qu'à des chargements thermiques, l'effet mémoire simple sens a entre autre été testé, une comparaison de cet effet en traction et compression apparaît figure 2.19.

Les éprouvettes sont des tubes minces de NiTi (figure 2.20) usinés à partir d'un barreau tréfilé. Des jauges de déformation sous forme de rosette à 45 degrés de longueur 3 mm y ont été collées. Ces dernières permettent de mesurer les déformations axiale  $\varepsilon_{zz}$  et de cisaillement  $\varepsilon_{z\theta}$ ; les contraintes axiales et de cisaillement, supposées homogènes, sont déterminées à partir des informations de la cellule d'effort : effort axial F et couple M.



**FIG. 2.19** – Comparaison de l'effet mémoire simple sens en traction et en compression (Taillard (2006))

Nous ne regarderons qu'une campagne expérimentale isotherme ( $T=50^{\circ}\text{C}$ ) visant à obtenir la surface de début de transformation de l'alliage considéré en traction-torsion. Les valeurs retenues figurent dans le tableau 2.2.

La forme du tenseur des contraintes appliquées est donnée en 2.50.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z\theta} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

De la même manière que pour l'alliage en CuAlBe, nous optons pour une fonction trigonométrique (équation 2.17). On identifie la contrainte seuil  $\sigma_0$  et le coefficient  $a_B$  sur la moyenne des essais



FIG. 2.20 – Eprouvette tubulaire en NiTi munie de jauges de déformation (Taillard (2006))

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\sigma_{zz}$ (MPa)	400	390	310	220	0	-210	-370	-520	-530	-520	-430	-200	30	250
$\sqrt{(3)}\sigma_{z\theta}$ (MPa)	0	150	240	340	440	420	330	220	0	-150	-340	-400	-370	-300

TAB. 2.2 – Données expérimentales des essais de traction-torsion sur du NiTi

considérés :

$$a_B = 0.63$$

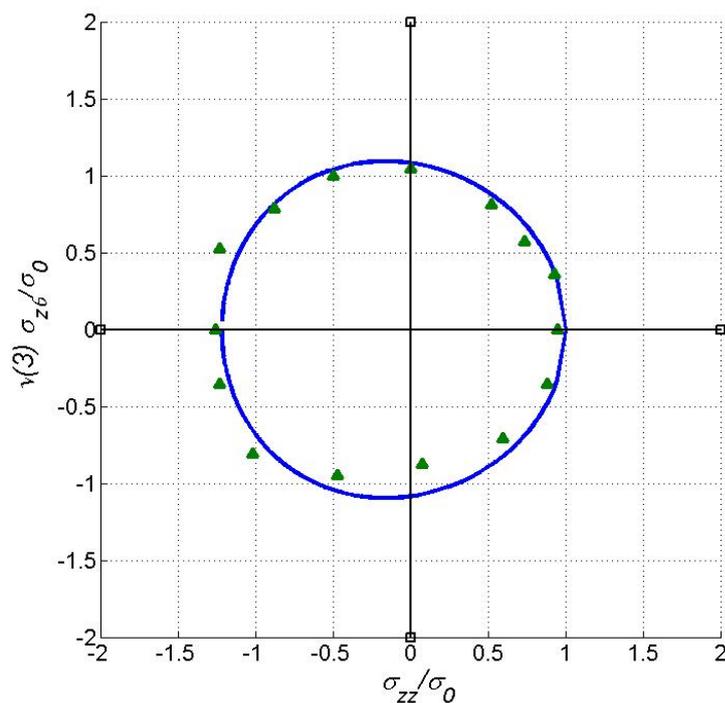
$$\sigma_0 = 424.31 MPa$$

Les figures 2.21 et 2.22 présentent respectivement la surface de début de transformation et la surface de fin de transformation qui lui est associée.

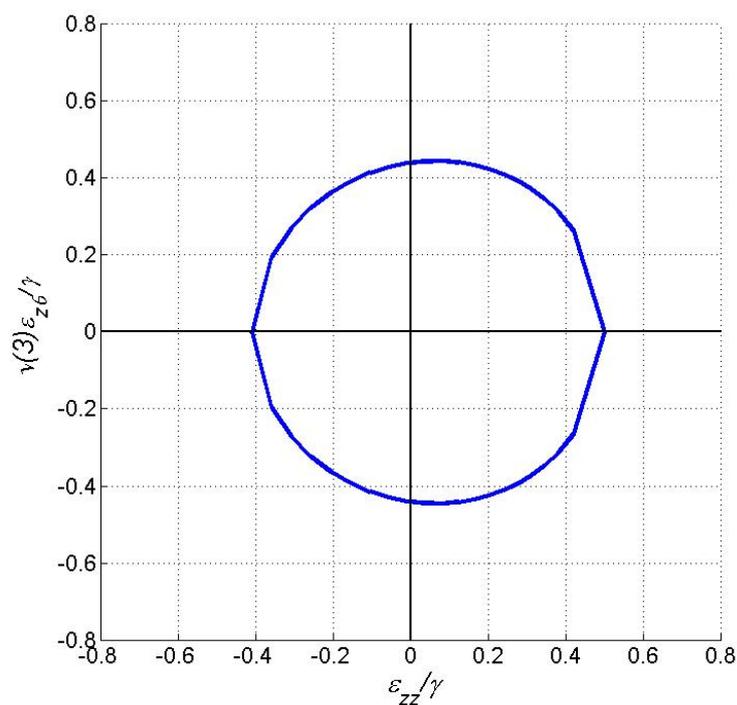
## 2.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre une revue des critères élastoplastiques a été dressée, on y découvre l'importance des différents invariants mis en jeu. La dissymétrie en traction-compression pour les alliages à mémoire de forme est aussi soulevée. Cette dernière entraîne une forme modifiée de la surface de charge par rapport au critère de von Mises couramment utilisé. On adjoint alors une fonction de correction à ce critère. Le choix de cette fonction ainsi que ses paramètres doivent répondre à une condition de convexité de la surface de charge obtenue.

L'ensemble de cette étude permet, avec uniquement un ou quelques paramètres, de décrire la surface de charge de tout AMF existant ayant un comportement isotrope. L'anisotropie (isotropie transverse, orthotropie,...) peut être traitée via l'ellipsoïde de Hill, plus de détails sont fournis au sein de la thèse de Taillard (2006) sur ce point.



**FIG. 2.21** – Surface de charge (ligne continue) d'un alliage en NiTi confrontée aux points expérimentaux (triangles)



**FIG. 2.22** – Surface de fin de transformation dans l'espace des déformations de transformation normalisées  $\varepsilon_{\underline{m}}/\gamma$  pour un AMF de NiTi)

Dans un second temps, la description de la surface de fin de transformation de phase est dressée. Cette surface plus accessible théoriquement que pratiquement intervient cependant dans divers modèles dont celui de Sadjadpour et Bhattacharya décrit dans le chapitre 4. Suite à leurs travaux, nous pouvons construire par exemple une fonction  $h$  qui est la fonction duale de la fonction de correction de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

Parmi les points abordés au cours de ce chapitre, la dualité entre les deux espaces considérés reste la plus intéressante. En effet, outre un souci pratique, cette théorie entérine mathématiquement le lien existant entre les contraintes et les déformations de transformations aux seuils des transformations de phase. Ce passage permettrait de relier plusieurs modèles de comportement d'AMF qui, en abordant le problème de la modélisation selon divers aspects, décrivent toujours le même matériau.

## Chapitre 3

Modèle macroscopique basé sur la  
détermination de la surface de début de  
transformation de phase

## 3.1 Description du modèle

### 3.1.1 Introduction

Pour étudier le comportement du matériau, notre travail se base sur un volume élémentaire représentatif (VER) d'alliage à mémoire de forme en phase solide. Ce dernier est considéré comme suffisamment grand pour prendre en compte les phénomènes observables macroscopiquement.

L'état initial est sous contrainte nulle ( $\underline{\sigma} = 0$ ) et sous une température notée  $T_0$  telle que l'alliage considéré soit purement austénitique, soit  $T_0 \geq A_f^0$ .

Le modèle choisi pour notre étude est un modèle étendu de [Lexcellent et al. \(2006\)](#). Il s'agit d'un modèle décrivant le comportement d'alliages à mémoire de forme à l'échelle macroscopique, il est basé sur l'identification de la surface de début de transformation de phase séparant le domaine austénitique du domaine martensitique. Il se base sur les travaux effectués par [Raniecki et al. \(1992\)](#) et par [Raniecki and Lexcellent \(1998\)](#) pour la structure du modèle et par [Brinson \(1993\)](#) pour le choix des variables internes  $z_T$  et  $z_\sigma$ .

### 3.1.2 Potentiels thermodynamiques

Chaque description des modèles macroscopiques est basée sur l'écriture d'un potentiel thermodynamique. Le potentiel choisi ici est l'énergie libre de Helmholtz pour un système triphasé (équation [3.1](#)). Dans le cadre des AMF il est admis que cette dernière peut se décomposer sous forme additive (cf travaux de [Leclercq and Lexcellent \(1996\)](#)), c'est d'elle que va découler l'ensemble des équations construisant le modèle. On notera par la suite :

- $i = 1$  pour la phase austénitique,
- $i = 2$  pour la martensite auto-accomodante,
- $i = 3$  pour la martensite orientée.

$$\phi(\underline{\varepsilon}_i, z_\sigma, z_T, T) = (1 - z)\phi_1 + z_T\phi_2 + z_\sigma\phi_3 + \Delta\phi(T, z_T, z_\sigma) \quad (3.1)$$

De la même façon, pour les déformations ayant lieu au cours des divers chargements thermomécaniques, on considère que notre cadre d'étude se passe en petites déformations et que le tenseur des déformations totales s'écrit sous la forme de l'équation [3.2](#).

$$\underline{\varepsilon} = (1 - z)\underline{\varepsilon}_1 + z_T\underline{\varepsilon}_2 + z_\sigma\underline{\varepsilon}_3 \quad \text{avec : } z = z_T + z_\sigma \quad (3.2)$$

Avec pour chaque tenseur de déformation  $\underline{\varepsilon}_i$  :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{\varepsilon}_i^e + \underline{\varepsilon}_i^{tr} + \underline{\varepsilon}_i^{th} \quad (3.3)$$

On définit une déformation purement élastique  $\underline{\varepsilon}^e$ , une déformation induite par la transformation de phase  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  et une déformation thermique  $\underline{\varepsilon}^{th}$ .

La décomposition additive de l'énergie libre est commune à quasi l'ensemble des modèles macroscopiques des AMF. Les différences se situent alors dans les expressions de l'énergie libre de chaque phase, ici chaque phase a une expression générique  $\phi_i$  (3.4) où  $u_0^i$  et  $s_0^i$  représentent respectivement l'énergie interne et l'entropie.

$$\phi_i = u_0^i - T s_0^i + \frac{1}{2\rho} (\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^{tr} - \underline{\varepsilon}_i^{th}) : \underline{\underline{L}}_i : (\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^{tr} - \underline{\varepsilon}_i^{th}) + C_v \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] \quad (3.4)$$

L'expression de l'énergie libre de chacune des phases est une forme classique faisant intervenir une partie chimique, une élastique et enfin une partie thermique. La majorité des modèles prennent cette description. La différence majeure distinguant les modélisations réside dans l'expression de l'énergie d'interaction notée  $\Delta\phi$  :

$$\Delta\phi(T, z_T, z_\sigma) = z(1 - z)\phi_{it}(T) + z_T z_\sigma \phi_{it}^m(T) \quad (3.5)$$

avec :

$$\phi_{it}(T) = \bar{u}_0 - T\bar{s}_0, \quad \phi_{it}^m(T) = \bar{u}_0^m - T\bar{s}_0^m \quad (3.6)$$

$\bar{u}_0$ ,  $\bar{s}_0$ ,  $\bar{u}_0^m$  et  $\bar{s}_0^m$  sont des paramètres du modèle.

Ici, la clé de la description pour l'énergie d'interaction est la formulation  $z(1 - z)$  qui traduit l'interaction entre les phases en présence (austénite et martensite). Autrement dit cette énergie d'interaction peut prendre en compte les seuils de transformation en fonction de la température, ce qui permet de prendre en compte un enjeu important de la modélisation de AMF : la taille de l'hystérésis selon la température appliquée.

La description rigoureuse de notre modèle fait bien entendu intervenir des hypothèses. Ces dernières et leurs conséquences sur l'écriture de notre modèle sont présentées ci-après.

– Hypothèse 1

On suppose que pour toute phase et pour tout type de martensite le coefficient de dilatation ainsi que les masses volumiques sont égaux :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \\ \rho_1 &= \rho_2 = \rho_3 = \rho \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ce qui amène à exprimer les déformations thermiques sous une forme unique :

$$\underline{\varepsilon}_1^{th} = \underline{\varepsilon}_2^{th} = \underline{\varepsilon}_3^{th} = \underline{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0)\mathbb{I} \quad (3.8)$$

– Hypothèse 2

On prend l'hypothèse de Sachs : on considère que l'état de contrainte est indifférent à l'état de phase, c'est-à-dire :

$$\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_2 = \underline{\sigma}_3 = \underline{\sigma} \quad (3.9)$$

En notant que  $\underline{L}_1$  est le tenseur d'élasticité de l'austénite et  $\underline{L}_2 = \underline{L}_3$  sont tous deux le même tenseur d'élasticité pour la martensite.

$$\underline{\varepsilon}_1^{el} = \underline{L}_1^{-1}\underline{\sigma}, \quad \underline{\varepsilon}_2^{el} = \underline{\varepsilon}_3^{el} = \underline{L}_2^{-1}\underline{\sigma} \quad (3.10)$$

– Hypothèse 3

Si on considère les déformations de transformation, celles de l'austénite et de la martensite auto-accommodante sont dans notre modèle prises nulles. C'est-à-dire que seule à la martensite orientée est associée une déformation de transformation (équation 3.11).

$$\underline{\varepsilon}_1^{tr} = \underline{\varepsilon}_2^{tr} = 0, \quad \underline{\varepsilon}_3^{tr} = \underline{\varepsilon}_m \quad (3.11)$$

Le tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  représente le tenseur des déformations associées à la formation de la phase martensitique tel que  $tr(\underline{\varepsilon}_m) = 0$ .

Pour résumer, les tenseurs des déformations macroscopiques pour l'austénite et les deux types de martensites sont :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_1 &= \underline{\varepsilon}_1^{el} + \underline{\varepsilon}^{th} \\ \underline{\varepsilon}_2 &= \underline{\varepsilon}_2^{el} + \underline{\varepsilon}^{th} \\ \underline{\varepsilon}_3 &= \underline{\varepsilon}_3^{el} + \underline{\varepsilon}^{th} + \underline{\varepsilon}_m \end{aligned} \quad (3.12)$$

En utilisant 3.12 dans 3.1 on a le tenseur des déformations totales :

$$\underline{\varepsilon} = (1 - z)\underline{\varepsilon}_1^{el} + z_T\underline{\varepsilon}_2^{el} + z_\sigma\underline{\varepsilon}_3^{el} + \underline{\varepsilon}^{th} + z_\sigma\underline{\varepsilon}_m \quad (3.13)$$

C'est-à-dire :

$$\underline{\varepsilon} = \left( (1 - z)\underline{L}_1^{-1} + z\underline{L}_2^{-1} \right) \underline{\sigma} + \underline{\varepsilon}^{th} + z_\sigma\underline{\varepsilon}_m \quad (3.14)$$

A l'instar de Zaki and Moumni (2007), on peut écrire un tenseur de complaisances élastiques équivalent sous la forme :

$$\underline{L}^{-1} = (1 - z)\underline{L}_1^{-1} + z\underline{L}_2^{-1} \quad (3.15)$$

En utilisant les expressions 3.8 et 3.11 dans l'expression de l'énergie libre de Helmholtz donnée dans l'équation 3.13, on obtient la forme de l'équation 3.16 :

$$\begin{aligned} \phi(\underline{\varepsilon}, z_\sigma, z_T, T) = & u_0^1 - T s_0^1 - z\pi_0^f(T) + C_v \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2\rho} \left[ \underline{\varepsilon} - z_\sigma \underline{\varepsilon}_m - \alpha(T - T_0)\mathbb{I} \right] : \underline{L} : \left[ \underline{\varepsilon} - z_\sigma \underline{\varepsilon}_m - \alpha(T - T_0)\mathbb{I} \right] \\ & + z(1 - z)\phi_{it} + z_T z_\sigma \phi_{it}^m \end{aligned} \quad (3.16)$$

où :

$$\pi_0^f = \Delta u_0 - T \Delta s_0, \quad \Delta u_0 = u_0^1 - u_0^2, \quad \Delta s_0 = s_0^1 - s_0^2 \quad (3.17)$$

Raniecki et al. (1992) ont défini le concept d'arrangement interne optimal. Ce dernier traduit la minimisation de la fonction d'énergie libre  $\phi$  utilisée par les variables internes  $h_k$  (équation 3.18).

$$\frac{\partial \phi_{eq}}{\partial h_K} = \frac{-z_\sigma}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial h_K} = 0 \quad (3.18)$$

On supposera que dans le reste de l'étude on se place toujours dans ce cas d'équilibres locaux, soit  $\phi_{eq}$  et  $\phi$  seront équivalents.

Par la suite les mêmes auteurs établiront que le tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  peut être vu comme dérivant d'un potentiel qui s'écrit sous la forme d'une fonction positivement homogène d'ordre 1 :  $g^*$  telle que :

$$\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}_m = \rho g^*(\underline{\sigma}) \quad (3.19)$$

Soit :

$$\underline{\varepsilon}_m = \rho \frac{\partial g^*(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.20)$$

On fait l'hypothèse d'un écoulement normal de transformation appelée par la suite « loi de normalité » qui suppose que les directions de transformation sont normales à la surface de début de transformation de phase. Cette hypothèse a été vérifiée dans les travaux de Bouvet et al. (2004) pour un alliage d'AMF en CuAlBe comme montré sur la figure 3.1. Cette loi de normalité se traduit par :

$$\underline{\varepsilon}^{tr} = \lambda_F \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.21)$$

Or la déformation de transformation est définie par :

$$\underline{\varepsilon}^{tr} = z_\sigma \underline{\varepsilon}_m \quad (3.22)$$

Soit, en différenciant cette expression, on a :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \dot{z}_\sigma \underline{\varepsilon}_m + z_\sigma \dot{\underline{\varepsilon}}_m \quad (3.23)$$

On suppose que pour les chargements proportionnels le terme  $\dot{\underline{\varepsilon}}_m$  est nul, ce terme pourrait être identifié comme la contribution pour des chargements non proportionnels. Avec  $\gamma$  la déformation de transformation maximum en cisaillement et en tenant compte des équations 3.20 et 3.21, on a pour des chargements proportionnels :

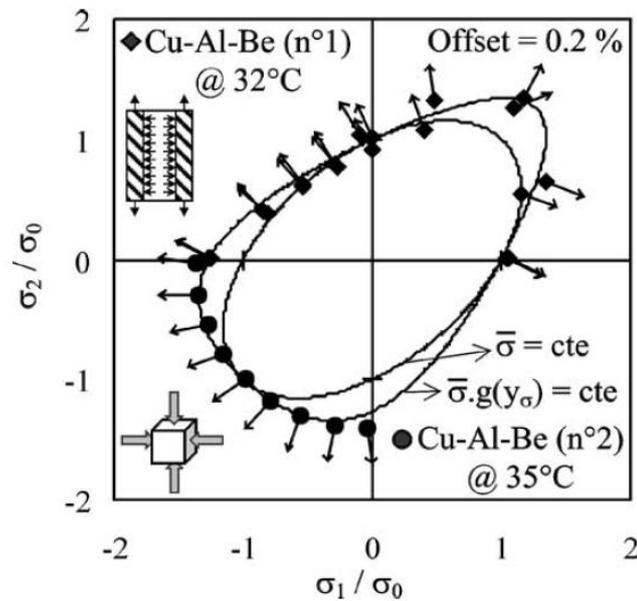
$$\underline{\varepsilon}_m = \gamma \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.24)$$

et :

$$\dot{\lambda}_F = \gamma \dot{z}_\sigma \quad (3.25)$$

Ce qui amène finalement à :

$$g^*(\underline{\sigma}) = \gamma \frac{\sigma_{eq}}{\rho} \quad (3.26)$$



**FIG. 3.1** – Normalité des directions de transformation de phase à la surface de début de transformation Bouvet et al. (2004)

On prend l'énergie libre de Gibbs associée à l'énergie libre de Helmholtz pour un arrangement interne optimal :

$$\rho g = \rho \phi_{eq} - \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \quad (3.27)$$

Soit, en prenant les équations 3.15, 3.16 et 3.27 :

$$\begin{aligned} \rho g(\underline{\sigma}, z_\sigma, z_T, T) = \rho \left( u_0^1 - T s_0^1 - z \pi_0^f(T) + C_v \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] \right) \\ - \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{L}^{-1} \underline{\sigma} - z_\sigma \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}_m - \alpha (T - T_0) \underline{\sigma} : \mathbb{I} \\ + \rho z (1 - z) \phi_{it} + \rho z_T z_\sigma \phi_{it}^m \end{aligned} \quad (3.28)$$

C'est à partir de ce potentiel thermodynamique que peuvent être déterminées les expressions utiles pour la modélisation.

### 3.1.3 Dissipation intrinsèque et inégalité de Clausius-Duhem

La dissipation intrinsèque traduit le premier et le second principe de la thermodynamique, on obtient l'inégalité 3.29 où  $s$  représente l'entropie totale du système :

$$D_i = -\rho \dot{\phi}_{eq} - s \dot{T} + \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} \geq 0 \quad (3.29)$$

En dérivant l'expression de  $g$  dans l'équation 3.27, nous avons :

$$\rho \dot{\phi}_{eq} = \rho \dot{g} + \dot{\underline{\varepsilon}} : \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} \quad (3.30)$$

L'expression 3.29 de la dissipation intrinsèque devient alors :

$$D_i = -\dot{g} - \frac{1}{\rho} \dot{\underline{\varepsilon}} : \underline{\varepsilon} - s \dot{T} \geq 0 \quad (3.31)$$

Or la fonction de Gibbs  $g$  est fonction de quatre variables d'état :  $\underline{\sigma}$ ,  $z_\sigma$ ,  $z_T$  et la température  $T$ . En différenciant cette fonction on obtient l'équation 3.32 :

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial z_\sigma} \dot{z}_\sigma + \frac{\partial g}{\partial z_T} \dot{z}_T + \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} \quad (3.32)$$

Les équations 3.31 et 3.32 donnent :

$$D_i = \left( \frac{1}{\rho} \underline{\varepsilon} - \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \right) \dot{\underline{\varepsilon}} + \left( -\frac{\partial g}{\partial T} - s \right) \dot{T} - \frac{\partial g}{\partial z_\sigma} \dot{z}_\sigma - \frac{\partial g}{\partial z_T} \dot{z}_T \geq 0 \quad (3.33)$$

Dans le cadre des milieux standards généralisés, l'expression de la dissipation intrinsèque doit être vérifiée pour toute vitesses de chargements mécanique et thermique, c'est à dire que l'expression doit rester valide pour toute vitesses de contraintes  $\dot{\underline{\varepsilon}}$  et pour toute vitesses de température  $\dot{T}$ . Ce qui amène à définir le tenseur des déformations (3.34) et l'entropie (3.38) de façon à annuler les deux premiers termes de la somme de 3.33.

$$\underline{\varepsilon} = -\rho \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{tr} + \underline{\varepsilon}^{th} \quad (3.34)$$

Avec :

– La déformation élastique

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.35)$$

– La déformation de transformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \gamma z_\sigma \underline{\underline{\varepsilon}}_m \quad (3.36)$$

– La déformation thermique

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T - T_0)\mathbb{I} \quad (3.37)$$

$$s = -\frac{\partial g}{\partial T} = s_0^1 - z\Delta s_0 + \frac{\alpha}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{I} + z(1-z)\bar{s}_0 + z_T z_\sigma \bar{s}_0^m + C_v \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (3.38)$$

On note par la suite  $\pi_T^f$  et  $\pi_\sigma^f$  les forces thermodynamiques respectivement associées à la fraction volumique de martensite orientée  $z_\sigma$  et celle de martensite auto-accommodante  $z_T$ . On définit ces forces telles que :

$$\pi_\sigma^f = -\frac{\partial g}{\partial z_\sigma} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_m + \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{L}}_1^{-1} - \underline{\underline{L}}_2^{-1}) \underline{\underline{\sigma}} - (1-2z)\phi_{it} - z_T \phi_{it}^m + \pi_0^f(T) \quad (3.39)$$

$$\pi_T^f = -\frac{\partial g}{\partial z_T} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{L}}_1^{-1} - \underline{\underline{L}}_2^{-1}) \underline{\underline{\sigma}} - (1-2z)\phi_{it} - z_\sigma \phi_{it}^m + \pi_0^f(T) \quad (3.40)$$

En tenant compte de la nullité des deux premiers termes de la somme de 3.33 et en reprenant les notations pour les forces thermodynamiques, on arrive à l'inégalité 3.41 qui permet de « piloter » notre modèle.

$$D_i = \pi_\sigma^f \dot{z}_\sigma + \pi_T^f \dot{z}_T \geq 0 \quad (3.41)$$

Depuis l'inégalité 3.41, on peut différencier deux cas particuliers :

(i) Celui d'un **chargement isotherme**

Seule de la martensite orientée  $M_\sigma$  est créée et la fraction volumique de martensite auto-accommodante est alors nulle :  $\dot{z}_T = 0$ . L'inégalité de Clausius-Duhem se réduit alors à l'inégalité 3.42.

$$D_i = \pi_\sigma^f \dot{z}_\sigma \geq 0 \quad (3.42)$$

Cette dernière devant toujours rester vraie, les termes  $\pi_\sigma^f$  et  $\dot{z}_\sigma$  sont toujours du même signe. Or le signe de la cinétique de la fraction volumique de martensite  $\dot{z}_\sigma$  indique la création ou la disparition de la martensite orientée. Donc la force thermodynamique peut être considérée d'une certaine manière comme une variable d'observation de la création ou disparition de la martensite orientée.

$$A \rightarrow M_\sigma \text{ si } \dot{z}_\sigma \geq 0 \implies \pi_\sigma^f \geq 0 \quad (3.43)$$

$$M_\sigma \rightarrow A \text{ si } \dot{z}_\sigma \leq 0 \implies \pi_\sigma^f \leq 0 \quad (3.44)$$

(ii) Celui d'un **chargement thermique sous contrainte nulle**

On crée alors uniquement de la martensite auto-accomodante  $M_T : \dot{z}_\sigma = 0$ . La dissipation intrinsèque prend alors la forme suivante :

$$D_i = \pi_T^f \dot{z}_T \geq 0 \quad (3.45)$$

De la même manière que précédemment, le signe de cinétique de la fraction volumique  $\dot{z}_T$  signale la création ou la disparition de la martensite auto-accomodante :

$$A \rightarrow M_T \text{ si } \dot{z}_T \geq 0 \implies \pi_T^f \geq 0 \quad (3.46)$$

$$M_T \rightarrow A \text{ si } \dot{z}_T \leq 0 \implies \pi_T^f \leq 0 \quad (3.47)$$

### 3.1.4 Cinétiques des transformations de phase

Le cadre constitutif du modèle est désormais posé. On doit définir maintenant la forme des cinétiques de transformation afin de compléter la description du comportement de l'alliage étudié.

Pour cela, on suppose l'existence de quatre fonctions constitutives  $\psi_{F/R}^{\sigma/T}$  (tableau 3.1). On notera :

- F pour les transformations directes (comme Forward),
- R pour les transformations inverses (comme Reverse),
- $\sigma$  signale les transformations pour de la martensite orientée,
- $T$  signale les transformations pour la martensite auto-accomodante.

Transformation	Cinétique	Fonction constitutive correspondante
$A \rightarrow M_\sigma$	$\dot{z}_\sigma \geq 0$ et $\dot{z}_T = 0$	$\psi_F^\sigma(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T) = \pi_\sigma^f - k_F^\sigma$
$M_\sigma \rightarrow A$	$\dot{z}_\sigma \leq 0$ et $\dot{z}_T = 0$	$\psi_R^\sigma(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T) = \pi_\sigma^f - k_R^\sigma$
$A \rightarrow M_T$	$\dot{z}_\sigma = 0$ et $\dot{z}_T \geq 0$	$\psi_F^T(T, z_\sigma, z_T) = \pi_T^f - k_F^T$
$M_T \rightarrow A$	$\dot{z}_\sigma = 0$ et $\dot{z}_T \leq 0$	$\psi_R^T(T, z_\sigma, z_T) = \pi_T^f - k_R^T$

**TAB. 3.1** – Fonctions constitutives des cinétiques de transformation

Les fonctions  $k_F^\sigma$ ,  $k_R^\sigma$ ,  $k_F^T$  et  $k_R^T$  sont inspirées des formes cinétiques proposées par des métallurgistes comme [Koistinen and Marburger \(1959\)](#). On utilise ensuite les conditions de cohérence sur la nullité des dérivées des fonctions définies précédemment, soit :

$$\dot{\psi}_F^\sigma = \dot{\psi}_R^\sigma = \dot{\psi}_F^T = \dot{\psi}_R^T = 0 \quad (3.48)$$

Toutefois, il faut apporter un soin particulier à la transformation inverse  $M_\sigma \rightarrow A$ . En effet dans le cas particulier de transformation de phase inverse, le domaine élastique n'est plus convexe. Ceci implique la construction d'une fonction constitutive  $\kappa(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T)$  qui sera convexe telle que :

$$\begin{aligned} \kappa(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T) &< 0 \quad \text{quand} \quad \psi_R^\sigma(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T) < 0 \\ \kappa(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T) &= 0 \quad \text{quand} \quad \psi_R^\sigma(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T) = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Une telle fonction peut être prise égale à :

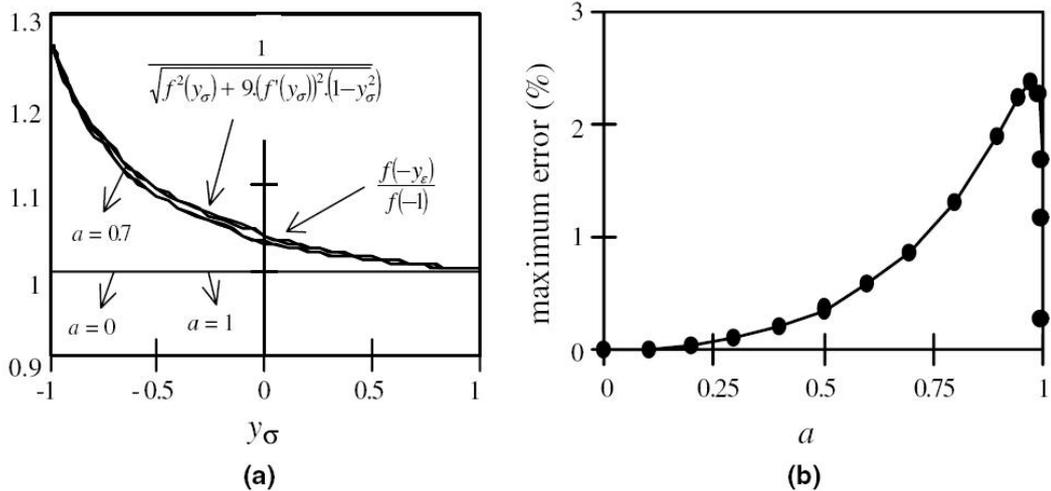
$$\kappa(\underline{\sigma}, T, z_\sigma, z_T) = -\underline{\sigma} : \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\varepsilon_{eq}^{tr}} + \sigma_0^{MA}(T, z_\sigma, z_T) \quad (3.50)$$

Si la propriété de dissymétrie traction-compression des AMF n'est pas prise en compte, on peut définir  $\varepsilon_{eq}^{tr}$  comme la déformation équivalente au sens de von Mises. Cependant, en tenant compte de cette propriété, on peut prendre pour des chargements proportionnels l'expression suivante :

$$\varepsilon_{eq}^{tr} = \frac{\bar{\varepsilon}^{tr}}{(f^2(y_\sigma) + 9f'(y_\sigma)(1 - y_\sigma^2))} \quad \text{avec} \quad \bar{\varepsilon}^{tr} = \left( \frac{2^T}{3} \underline{\varepsilon}^{tr} : \underline{\varepsilon}^{tr} \right)^{1/2} \quad (3.51)$$

Avec cette définition,  $\varepsilon_{eq}^{tr}$  dépend de la contrainte à travers  $y_\sigma$ . Pour résoudre ce problème,  $y_\sigma$  devrait être exprimé comme une fonction du tenseur des déformations de transformation pour tout chargement proportionnel. Cependant, une telle expression analytique ne peut être trouvée aisément, on utilise alors l'expression approchée suivante (Bouvet et al. (2002), figure 3.2) :

$$\frac{\bar{\varepsilon}^{tr}}{(f^2(y_\sigma) + 9f'(y_\sigma)(1 - y_\sigma^2))} = \frac{f(-y_\varepsilon)}{-1}, \quad y_\varepsilon = 4 \frac{\det(\underline{\varepsilon}^{tr})}{(\bar{\varepsilon}^{tr})^3} \quad (3.52)$$



**FIG. 3.2** – Fonction d'approximation pour la déformation de transformation équivalente - "a" est le paramètre de dissymétrie de la fonction de correction (Bouvet et al.). La figure (a) représente le maximum d'erreur sur les valeurs prises par  $y_\sigma$  et la figure (b) selon le paramètre "a"

On obtient alors les fonctions des lois d'évolution présentées dans le tableau 3.2 par un choix "ad hoc" des fonctions  $k_F^\sigma$ ,  $k_R^\sigma$ ,  $k_F^T$  et  $k_R^T$ .

On choisit, ici, des fonctions de formes simples car ces dernières décriront le mieux la partie expérimentale, on aura un nombre restreint de paramètres de cinétique à identifier :  $a_\sigma^F$ ,  $b_\sigma^F$ ,  $a_\sigma^R$ ,

Transformation	Lois d'évolution
$A \rightarrow M_\sigma$	$z_\sigma^F = a_\sigma^F \langle \sigma_{ef} - (s_{AM}T - b_\sigma^F) \rangle$
$M_\sigma \rightarrow A$	$z_\sigma^R = a_\sigma^R \langle (s_{MA}T - b_\sigma^R) - \sigma_{ef} \rangle$
$A \rightarrow M_T$	$z_T^F = a_T^F (T - b_T^F)$
$M_T \rightarrow A$	$z_T^R = a_T^R (T - b_T^R)$

**TAB. 3.2** – *Lois d'évolution des phases de transformation*

$b_\sigma^R$ ,  $a_T^F$  et  $b_T^F$ ,  $a_T^R$  et  $b_T^R$ . Il existe des formes finales plus complexes pour décrire les cinétiques avec des paramètres plus nombreux, comme par exemple ceux apparaissant dans le tableau 3.3.

Transformation	Cinétique
$A \rightarrow M_\sigma$	$z_\sigma^F = (1 - z_\sigma) \left[ \frac{\gamma a_F^\sigma}{\rho \Delta s_0} \sigma_{ef} - b_F^\sigma a_F^\sigma e^{-b_F(T - M_s^0)} \right]$
$M_\sigma \rightarrow A$	$z_\sigma^R = z_\sigma \left[ \frac{\gamma a_R^\sigma}{\rho \Delta s_0} \sigma_{ef} - b_R^\sigma a_R^\sigma e^{-b_R(T - A_s^0)} \right]$
$A \rightarrow M_T$	$z_T^F = (1 - z_T) a_F^T \dot{T}$
$M_T \rightarrow A$	$z_T^R = z_T a_R^T \dot{T}$

**TAB. 3.3** – *Autres cinétiques des phases de transformation*

Les fonctions des tableaux 3.2 et reftab3 ont été testées l'une et l'autre. Pour les résultats expérimentaux du Roundrobin présentés plus tard, les cinétiques sont des plateaux durant la transformation de phase, mon choix s'est donc porté sur le premier type de fonction, celles du tableau 3.2 bien plus simples à manipuler. Les résultats étant quasi identiques pour les deux type de fonctions. Le tableau 3.3 présente des fonctions beaucoup plus complexes, cela permettrait de construire des cinétiques pouvant décrire des courbes et non pas simplement des plateaux.

### 3.1.5 Paramètres du modèle

Selon sa construction, chaque modèle a son ensemble de paramètres. Ces paramètres sont fonction du matériau utilisé et permettent de s'adapter à différents cas de figure. Ils révèlent toute leur importance lors de l'application numérique sur un cas expérimental concret. En effet, ces modèles ont pour but, à terme, d'être implémentés dans des codes de calculs. Ainsi, ils seront d'autant plus appréciés si l'identification des paramètres est aisée et rapide.

Dans notre cas on peut classer les paramètres en deux grandes catégories :

- les *paramètres matériaux dits classiques*, ils sont en général fournis par le fabricant et figurent dans le tableau 3.4. A noter que les fabricants donnent une liste plus exhaustive, nous prenons ici les seuls paramètres utiles à notre étude. Ces paramètres sont tous utilisés par l'ensemble

des modèles macroscopiques.

Notation	Correspondance
$\rho$	Masse volumique
$E_A$	Module d'Young de l'austénite
$E_M$	Module d'Young de la martensite
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\gamma$	Déformation de transformation maximum en cisaillement
$A_s^0$ et $A_f^0$	Températures de début et de fin de la transformation austénitique
$M_s^0$ et $M_f^0$	Températures de début et de fin de la transformation martensitique

**TAB. 3.4** – Paramètres matériau de notre modèle

– les *paramètres propres à notre modèle*. C'est à travers eux que sont personnalisés les différents modèles macroscopiques. Ces paramètres sont caractéristiques de notre modèle et figurent dans le tableau 3.5.

Notation	Correspondance
$\Delta u^0$ et $\Delta s^0$	Termes de la force thermodynamique initiale : $\pi_0^f(T) = \Delta u^0 - T\Delta s^0$
$\bar{u}_0$ et $\bar{s}_0$	Termes de l'expression de l'énergie interne : $\phi_{it}(T) = \bar{u}_0 - T\bar{s}_0$
$\bar{u}_0^m$ et $\bar{s}_0^m$	Termes de l'expression de l'énergie interne : $\phi_{it}^m(T) = \bar{u}_0^m - T\bar{s}_0^m$
On a alors tous les termes de l'énergie interne : $\Delta\phi = z(1-z)\phi_{it}(T) + z_T z_\sigma \phi_{it}^m(T)$	
$a$	Paramètre de dissymétrie
<b>Coefficients cinétiques</b>	
$a_F^\sigma, b_F^\sigma, a_F^T, b_F^T$	Coefficients cinétiques pour la transformation directe
$a_R^\sigma, b_R^\sigma, a_R^T, b_R^T$	Coefficients cinétiques pour la transformation inverse

**TAB. 3.5** – Paramètres du modèle

### 3.1.6 Identification de la fonction de correction

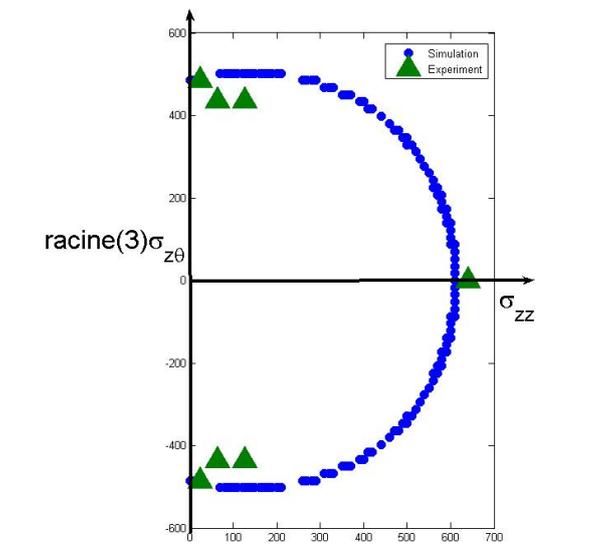
La surface de charge des AMF présente une forme particulière qui ne peut pas être décrite uniquement avec le critère de von Mises. On ajoute une fonction de correction au critère de von Mises. Cette dernière est fonction du troisième invariant du tenseur des contraintes  $y_\sigma$ . On définit alors la surface de début de transformation telle que :

$$F(\underline{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_0 = \bar{\sigma} f(y_\sigma) - \sigma_0 = 0 \quad (3.53)$$

Le jeu ici est de trouver la fonction  $f$  suivant de la meilleure façon notre surface expérimentale de début de transformation. Les essais fournis nous donnent que peu de points permettant de redessiner cette surface. Parmi les fonctions disponibles pour décrire les surfaces de début de transformation, notre choix s'est porté sur une fonction de type puissance de [Cazacu and Barlat \(2004\)](#) (équation 3.54). En effet, seule cette dernière remplissait d'une part une bonne description des points expérimentaux mais respectait aussi une condition nécessaire de convexité.

$$f(y_\sigma) = (1 - ay_\sigma)^n \quad (3.54)$$

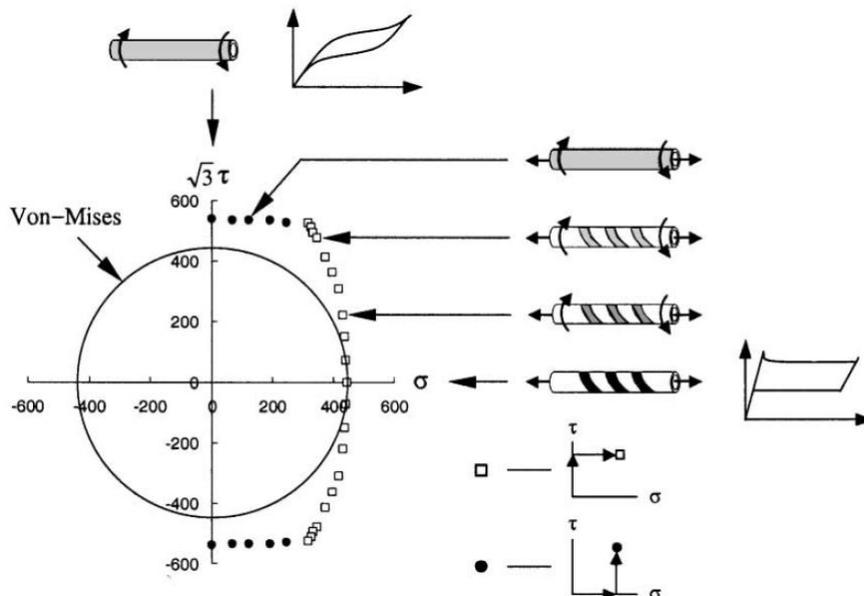
La difficulté dans l'identification des paramètres  $a$  et  $n$  de la fonction de correction réside dans le fait que la fonction de correction doit respecter la condition de convexité de la surface de charge. Les paramètres arrivant à décrire au mieux la surface ainsi qu'à vérifier la convexité sont  $a = 0.5$  et  $n = 3$ . La surface de charge obtenue est présentée figure 3.3.



**FIG. 3.3** – Surface de début de transformation de type "Puissance" confrontée aux points expérimentaux (fils de NiTi sollicités en traction-torsion)

On remarque que la fonction ne parvient pas à suivre parfaitement les points expérimentaux. Une réponse à la forme atypique de cette surface de charge est l'anisotropie intrinsèque due à un effet de structure. En effet la structure de notre échantillon implique un tréfilage qui obligatoirement induira une anisotropie dans le sens du tréfilage. De telles surfaces de début de transformation ont été observées par [Q.P. Sun \(2002\)](#) comme par exemple sur la figure 3.4 tirée de leur publication.

On suppose que la forme particulière provient du fait que les essais sont non-proportionnels. Un phénomène de ré-orientation des plaquettes de martensite orientée a lieu. La partie non-



**FIG. 3.4** – Lieux de début de transformation : ( $\square$ ) essais de traction sous torsion constante, ( $\bullet$ ) essais de torsion sous traction constante (sur des tubes minces) (Q.P. Sun (2002))

proportionnelle n'étant pas gérée par notre modèle, nous supposons ici que la forme de la surface de début de transformation pour des essais proportionnels est équivalente à celle relevée sur les essais fournis.

## 3.2 Essais Expérimentaux

### 3.2.1 Présentation du roundrobin - MAFESMA

Un projet commun à plusieurs laboratoires français et européens a été créé en 2005. Ce projet permet d'unifier et de partager les connaissances et compétences européennes actuelles sur les AMF, il se nomme MAFESMA pour Material Algorithms Finite Elements Shape Memory Actuators Humbeeck (Mis en ligne en mai 2006, consulté le 05 avril 2009).

Il porte principalement sur les actionneurs utilisant les AMF (partie commande, contrôle) mais l'accent est surtout porté sur les aspects de modélisation. Dans ce cadre, une conférence a été tenue en mai 2008 à Prague, organisée par Novak and Lexcellent (5-7 mai 2008), au cours de laquelle une séance de travail permettant de comparer les modèles a été faite.

La comparaison des modèles s'est faite à travers une table ronde (roundrobin) où chaque laboratoire exposait les résultats obtenus par son modèle. Afin de pouvoir juger au mieux et sur un pied d'égalité les modèles entre eux, tous les modélisateurs devaient travailler sur les mêmes essais expérimentaux.

### 3.2.2 Description des essais expérimentaux

Les essais expérimentaux ont été réalisés à l'Institut de Physique de Prague en 2008 par J. Pilch et P. Sittner. Le matériel étudié est un fil en NiTi (54,5-45,5 wt.%) provenant de la société Fort Wayne Metals. La partie utile du fil a une longueur  $l_0$  de 50 mm et un diamètre  $d$  de 0.1 mm.

Cinq campagnes d'essais ont été réalisées sur une machine de traction - torsion :

- DATASET 1 : Tests en traction simple isothermes sous plusieurs températures
- DATASET 2 : Chargements thermiques sous contrainte constante
- DATASET 3 : Tests en torsion isothermes sous diverses températures
- DATASET 4 : Tests en torsion - traction combinés isothermes sous diverses températures et contrainte constante en traction
- DATASET 5 : Tests en boucles internes à différentes pré-déformations et effet d'histoire

Le contrôle de la température a été effectué dans une cellule à effet Peltier. Pour chaque campagne d'essais, l'échantillon est chauffé jusqu'à une température de 395 K (supérieure à la température  $A_0^f$ ) et refroidi jusqu'à la température du test.

Les vitesses de chauffe et de refroidissement sont suffisamment lentes pour avoir une bonne précision des températures lors des essais ; elles sont choisies comme toujours inférieures à  $10^{-3}$  °C/min.

De même tous les essais de traction et de torsion sont effectués avec des vitesses de déformation faibles, soit inférieures à  $10^{-3}$  s<sup>-1</sup>, afin que les effets thermiques soient minimisés. Ces taux restent constants pour chaque expérimentation sur un échantillon.

Finalement, afin de stabiliser la réponse mécanique, chaque échantillon est soumis à un cyclage de 100 tractions successives comme montré figure 3.5.

L'alliage à mémoire de forme étudié ici est couramment utilisé dans des applications médicales. Bien que la structure filaire en nickel titane rende de bons résultats dans le développement d'applications, on retrouve quelques inconvénients pour la modélisation : en particulier une forte tendance à la création et à la propagation de bandes de cisaillement ainsi que la prise en compte de la R-phase compliquant éventuellement la modélisation.

Néanmoins, ce fil a été sélectionné pour nos différents cas d'études puisqu'il montre un comportement super-élastique qui peut être reconduit avec un fil facilement accessible dans le commerce et simple à utiliser.

Le but de ces essais était d'éprouver les modèles de chaque pôle de recherche sur les AMF, aucun modèle actuel ne pouvant simuler de façon complète tous les essais. Le modèle que nous utilisons a ainsi pu être testé sur les quatre premières campagnes d'essais.

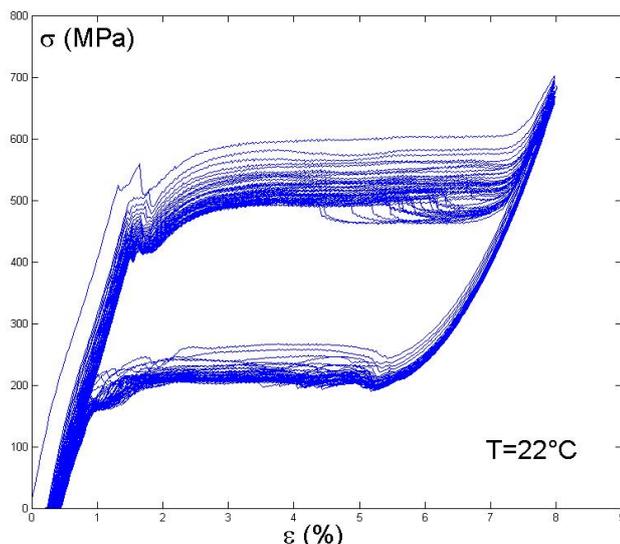


FIG. 3.5 – Cyclage (100 cycles) en traction d’un fil en NiTi à température isotherme (22 °C)

### 3.2.3 Tests en traction simple isothermes sous plusieurs températures

Les essais en traction ont chacun été réalisés à une température extérieure constante. Différentes températures ont été choisies afin de couvrir le spectre d’utilisation du matériau considéré, une gamme d’essais isothermes est alors obtenue ; la température étant fixée par pas de 10 °C de -20 °C à 60 °C. Cet éventail de température nous permet d’appréhender le modèle sous différentes températures caractéristiques comme le montre le diagramme de Clausius-Clapeyron modifié (figure 3.6).

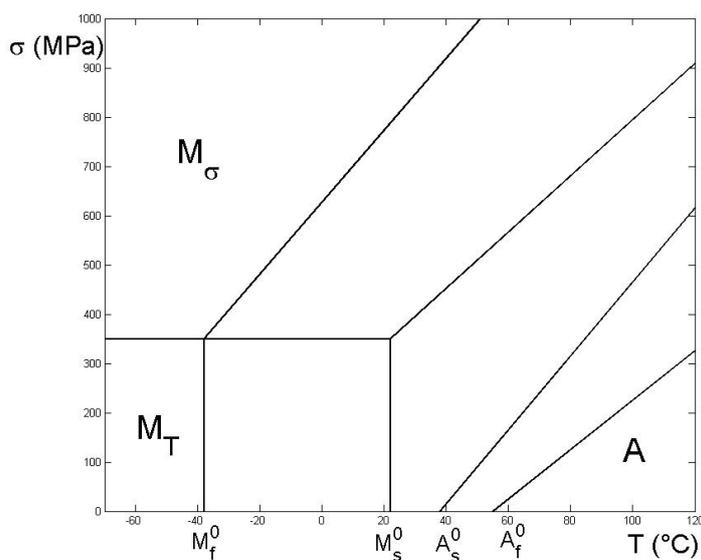
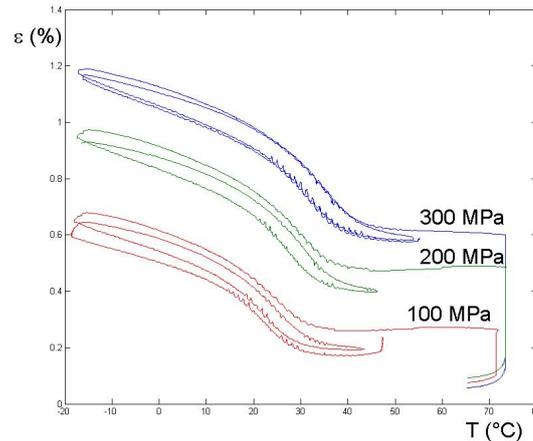


FIG. 3.6 – Diagramme de Clausius-Clapeyron modifié

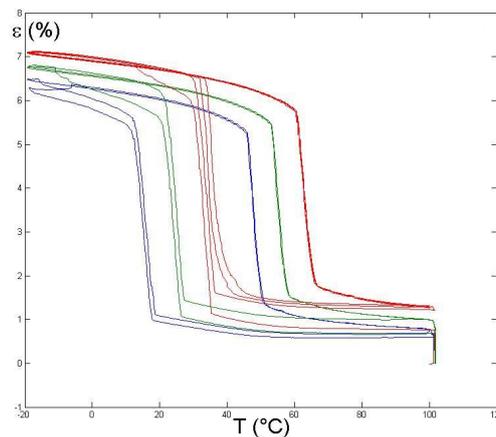
### 3.2.4 Chargements thermiques sous contraintes constantes

Lors de ces essais on charge un fil sous une contrainte qui restera constante tout au long de l'expérience. On fait varier uniquement la température en suivant un cycle reproduit plusieurs fois de  $100\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow -20\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow 100\text{ }^{\circ}\text{C}$  à une vitesse de variation basse ( $<10\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$ ).

Les contraintes constantes appliquées varient de 100 MPa à 500 MPa. Pour chaque contrainte, on opère à plusieurs cyclages consécutifs (3.7 et 3.8).



**FIG. 3.7** – Réponse déformation - température mesurée lors d'un refroidissement puis d'un chauffage à faibles contraintes



**FIG. 3.8** – Réponse déformation - température mesurée lors d'un refroidissement puis d'un chauffage à fortes contraintes (une contrainte est maintenue constante pour chacun des trois essais : 300MPa (courbe bleue), 400MPa (courbe verte) et 500MPa (courbe rouge))

### 3.2.5 Tests en torsion isothermes sous diverses températures

Dans cette partie expérimentale, le fil est soumis à une contrainte en traction constante de 24 MPa et la température (différente pour chaque essai) est gardée constante aussi. On applique ensuite

un couple positif puis négatif de même amplitude. Les courbes sont présentées dans un espace couple  $C$  - angle de torsion  $\theta$  (figure 3.9).

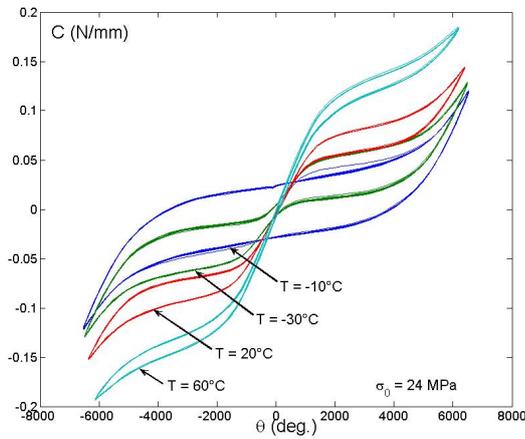


FIG. 3.9 – Essais en torsion sous une pré-contrainte de 24 MPa à différentes températures

#### 3.2.6 Tests en torsion isothermes sous diverses températures et diverses pré-contraintes

Les essais réalisés ici sont très similaires à ceux du paragraphe précédent. On opère encore à des essais de torsion isothermes sous différentes températures mais la pré-contrainte n'est pas uniquement fixée à 24 MPa mais varie de 24 à 127 MPa. On obtient donc un réseau de courbes beaucoup plus étendu dont une partie est représentée figures 3.10, 3.11, 3.12.

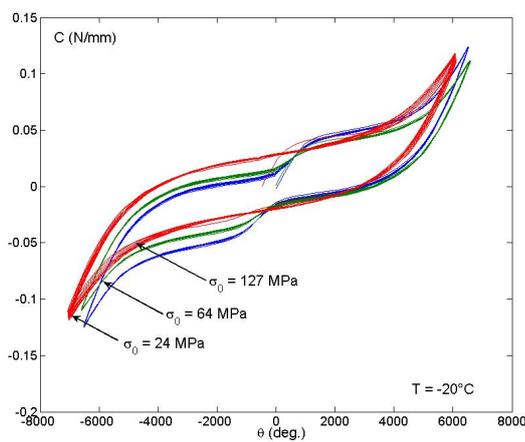


FIG. 3.10 – Essais en torsion sous 3 pré-contraintes à  $T = -20^\circ\text{C}$

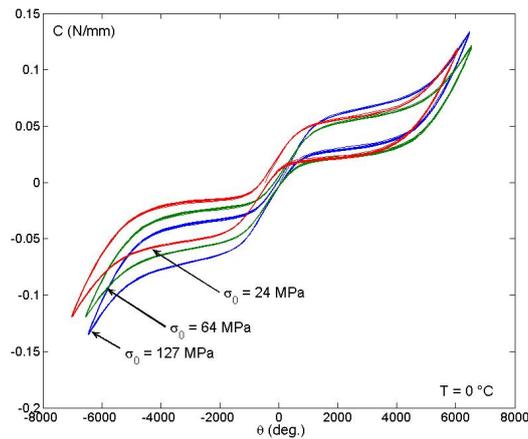


FIG. 3.11 – Essais en torsion sous 3 pré-contraintes à  $T = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$

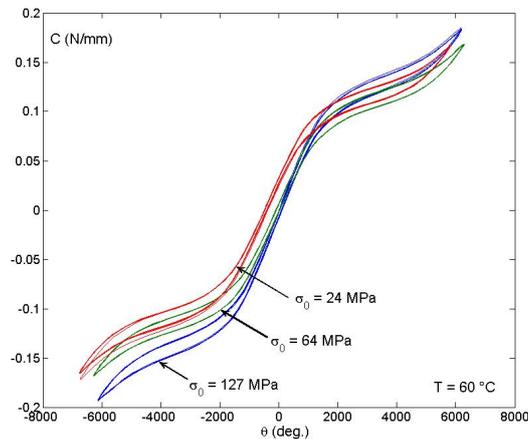


FIG. 3.12 – Essais en torsion sous 3 pré-contraintes à  $T = 60 \text{ } ^\circ\text{C}$

## 3.3 Identification des paramètres du modèle

### 3.3.1 Paramètres matériaux classiques

Ces paramètres sont décrits et repertoriés dans le tableau 3.4.

- les *modules d'Young de l'austénite et de la martensite*  $E_M$  et  $E_A$  ont été re-mesurés sur les courbes qui sont produites par les expérimentateurs et non pas sur celle fournies par le fabricant afin de minimiser des écarts éventuels. Les pentes élastiques en début et fin de transformation (que l'on suppose totale : le matériau est alors complètement martensitique) sont relevées pour des essais de traction simple comme sur la figure 3.13.
- les *températures caractéristiques de transformations*  $A_s^0$ ,  $A_f^0$ ,  $M_s^0$  et  $M_f^0$ . Elles sont mesurées par DSC (Differential Scanning Calorimetry ou calorimétrie différentielle à balayage), le graphique résultant permet de repérer les températures caractéristiques comme montré sur la figure 3.14.

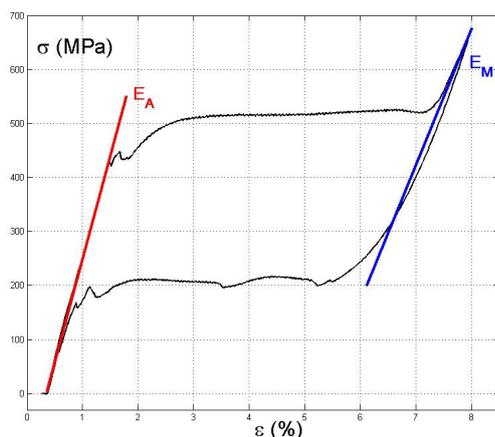


FIG. 3.13 – Pentes élastiques austénitique et martensitique sur un essai de traction isotherme ( $T=22^{\circ}C$ )

Cette méthode se base sur la relation de proportionnalité liant la résistance électrique du matériau à la fraction volumique de martensite comme l’ont montré [Vacher and LExcellent \(1991\)](#).

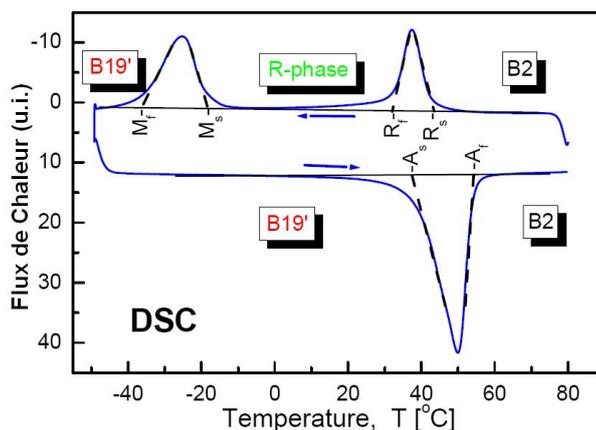


FIG. 3.14 – Schéma de mesure de DSC

– la *masse volumique*  $\rho$ , le *coefficient de Poisson* et la *déformation maximum en cisaillement* sont fournis directement par le fabricant sur la fiche technique du matériau.

On obtient alors les valeurs figurant dans le tableau 3.6.

### 3.3.2 Paramètres caractéristiques du modèle

Ces paramètres sont décrits et repertoriés dans le tableau 3.5. Etant caractéristiques à notre modèle, ils demandent une attention particulière quant aux méthodes d’identification utilisées selon les données expérimentales fournies.

–  $\Delta s_0$  et  $\bar{s}_0$

Notation	Valeur	unité
$\rho$	6450	$kg.m^{-3}$
$E_A$	53,6	GPa
$E_M$	21,1	GPa
$\nu$	0,33	-
$\gamma$	4,65	%
$A_s^0$	311	K
$A_f^0$	328	K
$M_s^0$	295	K
$M_f^0$	235	K

**TAB. 3.6** – Paramètres matériau de notre modèle

Dans le cadre de chargements purement mécaniques isothermes, on ne prend en compte que la force thermodynamique associée à la formation de martensite orientée. Si on précise l'étude au moment du début de transformation, on regarde l'équation 3.55 :

$$\pi_\sigma^f(\sigma_{eq}, T, z_T = 0, z_\sigma = 0) = \pi_\sigma^f(\sigma_0, M_s^0, z_T = 0, z_\sigma = 0) = 0 \quad (3.55)$$

Soit

$$\sigma_{eq} - \sigma_0 - \frac{\rho(\Delta s_0 - \bar{s}_0)}{\gamma}(T - M_s^0) = 0 \quad (3.56)$$

Ou encore en dérivant :

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dT} = \frac{\rho(\Delta s_0 - \bar{s}_0)}{\gamma} = C_M \quad (3.57)$$

où  $C_M$  représente la pente de la droite marquant le début de transformation de l'austénite vers la martensite orientée (figure 3.15).

De la même façon on considère le matériau dans un état martensitique avec uniquement de la martensite orientée après un chargement mécanique isotherme. La force thermodynamique associée à la martensite orientée est donc :

$$\pi_\sigma^f(\sigma_{eq}, T, z_T = 0, z_\sigma = 1) = \pi_\sigma^f(0, A_s^0, z_T = 0, z_\sigma = 1) = 0 \quad (3.58)$$

Soit

$$\sigma_{eq} - \frac{\rho(\Delta s_0 + \bar{s}_0)}{\gamma}(T - A_s^0) = 0 \quad (3.59)$$

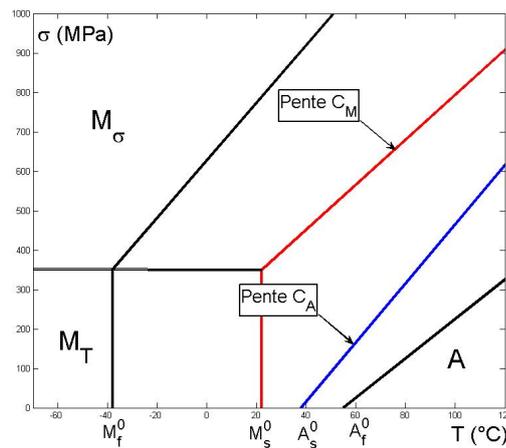


FIG. 3.15 – Diagramme de Clausius-Clapeyron dans le plan  $(\sigma_{eq}, T)$

Ou encore en dérivant :

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dT} = \frac{\rho(\Delta s_0 + \bar{s}_0)}{\gamma} = C_A \quad (3.60)$$

Les pentes  $C_M$  et  $C_A$  sont obtenues pratiquement sur les essais de tractions isothermes sous des températures différentes (figure 3.16)

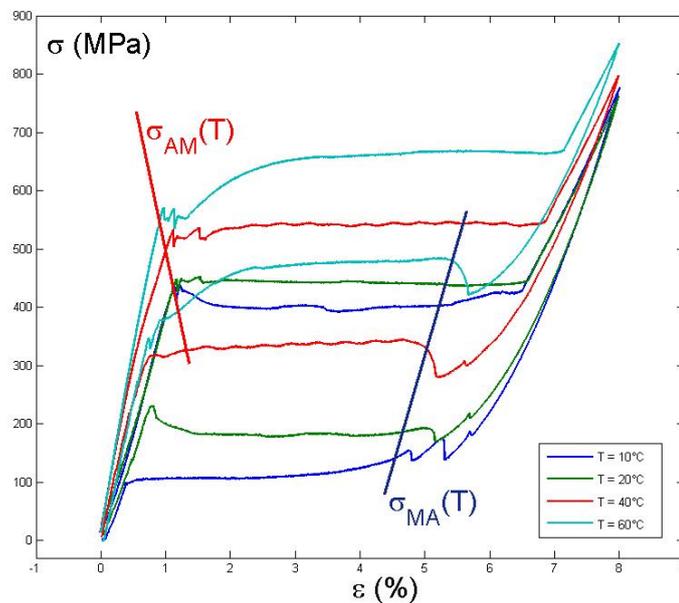


FIG. 3.16 – Essais de traction isothermes sous différentes températures

En regroupant les deux équations 3.57 et 3.60, on retrouve les deux paramètres  $\Delta s_0$  et  $\bar{s}_0$  comme les solutions d'un système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho(\Delta s_0 - \bar{s}_0)}{\gamma} = C_M \\ \frac{\rho(\Delta s_0 + \bar{s}_0)}{\gamma} = C_A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta s_0 = \frac{\gamma}{2\rho}(C_M + C_A) \\ \bar{s}_0 = \frac{\gamma}{2\rho}(C_A - C_M) \end{array} \right. \quad (3.61)$$

–  $\Delta u_0$  et  $\bar{u}_0$

Pour identifier ces deux paramètres, on se penche sur des essais libres de contraintes mais où la température est commandée. La martensite formée est alors uniquement de la martensite auto-accomodante, on ne tient alors compte que de la force thermodynamique associée au début des transformations directe  $A \rightarrow M_T$  (équation 3.62) et inverse  $M_T \rightarrow A$  (équation 3.63) :

$$\pi_T^f(T = M_s^0, z_T = 0, z_\sigma = 0) \Big|_{\underline{\sigma}=0} = (\Delta u_0 - \bar{u}_0) - (\Delta s_0 - \bar{s}_0)M_s^0 = 0 \quad (3.62)$$

$$\pi_T^f(T = A_s^0, z_T = 1, z_\sigma = 0) \Big|_{\underline{\sigma}=0} = (\Delta u_0 + \bar{u}_0) - (\Delta s_0 + \bar{s}_0)A_s^0 = 0 \quad (3.63)$$

Les paramètres  $\Delta s_0$  et  $\bar{s}_0$  ayant été calculés précédemment, il reste un système de deux équations à deux inconnues qui nous fournit  $\Delta u_0$  et  $\bar{u}_0$  :

$$\Delta u_0 = \frac{\rho}{2\gamma}(C_M A_s^0 + C_A M_s^0) \quad \text{et} \quad \bar{u}_0 = \frac{\rho}{2\gamma}(C_M A_s^0 - C_A M_s^0) \quad (3.64)$$

–  $\bar{u}_0^m$  et  $\bar{s}_0^m$

On considère ici le cas particulier de la ré-orientation des plaquettes de martensite  $M_T \rightarrow M_\sigma$  sous un chargement purement mécanique. Cela se traduit par une condition sur les fractions volumiques de martensite (équation 3.65) et sur la dissipation intrinsèque (équation 3.66) :

$$1 - z_T = z_\sigma \Rightarrow z\dot{\sigma} = \dot{(z_T)} \quad (3.65)$$

$$D_i = \pi_{\sigma T}^f z\dot{\sigma} \geq 0 \quad (3.66)$$

Avec  $\pi_{\sigma T}^f$  une forme particulière de la force thermodynamique associée à la martensite orientée  $\pi_\sigma^f$  : celle associée à la ré-orientation sous un chargement mécanique pur (équation 3.67).

$$\pi_{\sigma T}^f = \frac{1}{\rho} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}_m - (1 - 2z_\sigma) \phi_{it}^m \quad (3.67)$$

Sur l'ensemble des courbes fournies ici, une seule courbe en traction est disponible sur la ré-orientation de martensite auto-accomodante vers la martensite orientée en traction c'est à dire sans précontraintes ; le paramètre  $\bar{s}_0^m$  est fixé arbitrairement à zéro. Cela signifie qu'on enlève la dépendance à la température du terme  $\phi_{it}^m$ , l'incidence de la nullité de ce paramètre pouvant être considérée comme négligeable au vue des simulations à traiter dans notre cas.

Dans les données du Roundrobin, on regarde un essai où on suppose le matériau totalement transformé de l'état austénitique à l'état de martensite auto-accommodante, soit à une température inférieure à  $M_f^0$  (figure 3.17) à l'état libre de contrainte  $\underline{\sigma} = 0$ .

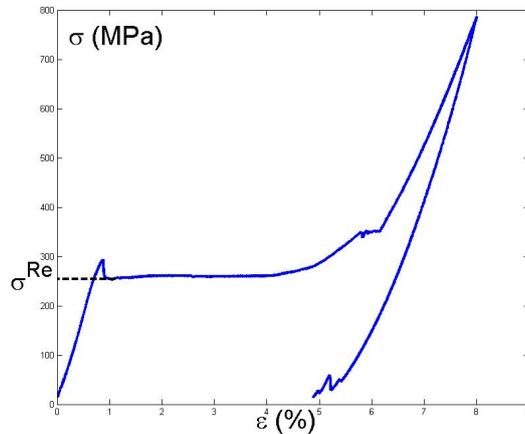


FIG. 3.17 – Ré-orientation martensitique sur un essai de traction ( $T \leq M_f^0$ )

D'après les équations 3.19 et 3.26, on déduit :

$$\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}_m = \gamma \sigma_{eq} \quad (3.68)$$

La force thermodynamique pour la ré-orientation donnée à l'équation 3.69 et la valeur de la contrainte de début de ré-orientation  $\sigma^{Re}$  permettent de trouver le dernier paramètre  $u_0^m$ .

$$\pi_{\sigma T}^f(\sigma_{eq} = \sigma^{Re}, T, z_\sigma = 0) = \frac{1}{\rho} \sigma^{Re} - u_0^m \quad (3.69)$$

Au final nous obtenons les valeurs figurant dans le tableau 3.7 pour les paramètres du modèle étudié ici.

Notation	Valeur	Unité
$\Delta u^0$	10980	$J.kg^{-1}$
$\Delta s^0$	42,58	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\bar{u}_0$	3266	$J.kg^{-1}$
$\bar{s}_0$	8,2	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\bar{u}_0^m$	1676	$J.kg^{-1}$
$\bar{s}_0^m$	0	$J.kg^{-1}.K^{-1}$

TAB. 3.7 – Paramètres caractéristiques du modèle

### 3.3.3 Paramètres des cinétiques

Les cinétiques choisies sont celles figurant dans le tableau 3.2. Les coefficients de chaque cinétique sont identifiés sur les courbes expérimentales correspondantes (pur chargement thermique ou mécanique). Chaque coefficient est calculé pour plusieurs essais, la moyenne des valeurs obtenues sera la valeur finale donnée au coefficient correspondant.

Notation	Valeur	Unité
$a_F^\sigma$	$3,4 \cdot 10^{-8}$	$Pa^{-1}$
$b_F^\sigma$	$1,09 \cdot 10^9$	$Pa$
$a_F^T$	-0,1	$K^{-1}$
$b_F^T$	293	$K$
$a_R^\sigma$	$1,85 \cdot 10^{-8}$	$Pa^{-1}$
$b_R^\sigma$	$2 \cdot 10^9$	$Pa$
$a_R^T$	-0,33	$K^{-1}$
$b_R^T$	320	$K$

TAB. 3.8 – Paramètres cinétiques du modèle

## 3.4 Confrontation : expérience / simulation

### 3.4.1 Essais isothermes en traction simple

Pour chacun des essais en traction, on note sur les figures 3.18 et 3.19 que nos simulations décrivent très bien la partie expérimentale. Ce qui est intéressant de souligner ici, c'est la bonne prise en compte de la taille de l'hystérésis par notre modèle. En effet l'hystérésis reste encore un challenge parmi les modèles existant et ses variations avec la température sont ici parfaitement reproduites.

### 3.4.2 Essais en chargement thermique sous contraintes constantes

Les simulations pour les chargements thermiques avec une forte pré-contrainte en tension du fil donnent de bons résultats (figure 3.20). Cependant lorsque le fil a une plus faible pré-contrainte notre modèle n'arrive pas à reproduire le comportement du matériau (figure 3.21). Ceci se comprend à la lecture du diagramme de Clausius-Clapeyron (figure 3.6). En effet pour des contraintes inférieures à la contrainte seuil dite de ré-orientation  $\sigma_{Re}$  on se situe dans la partie basse du diagramme. La contrainte restant constante, seule une transformation de martensite auto-accommodante vers de la martensite orientée est possible durant le chargement thermique.

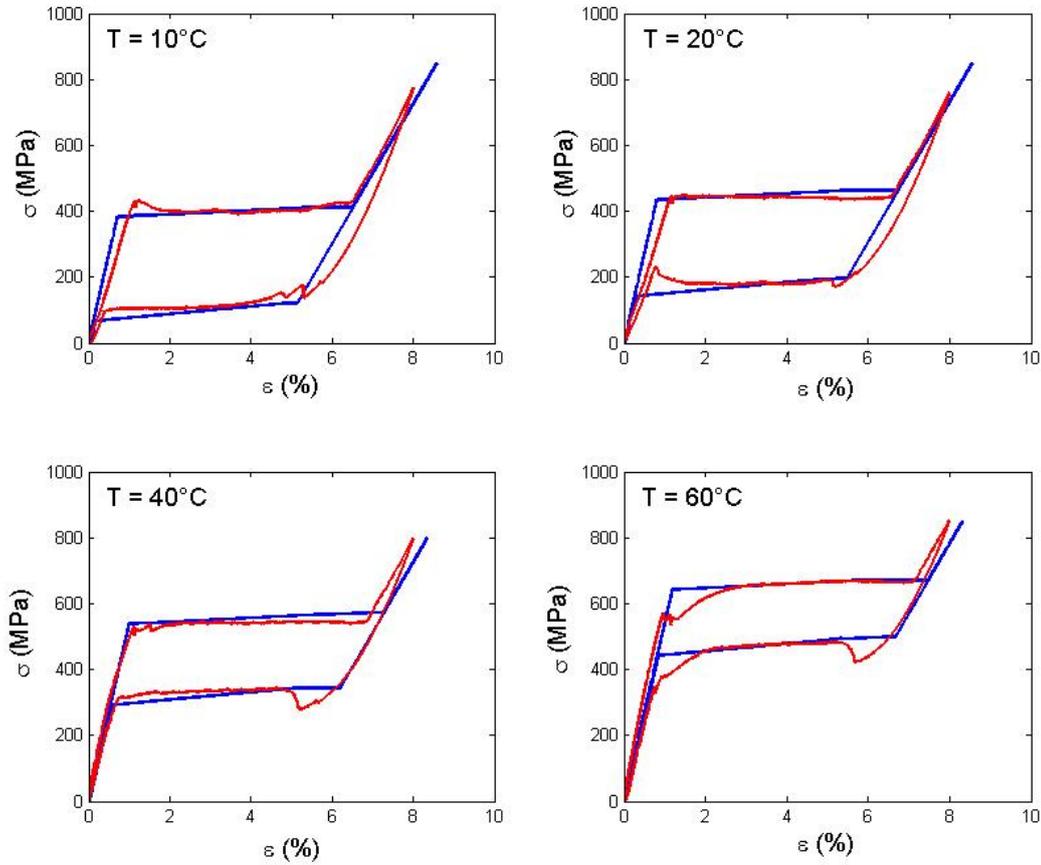


FIG. 3.18 – Comparaison des essais de traction simple sous différentes températures - I

Cependant on observe une variation des déformations de l'ordre de 1 à 2 % sur la figure 3.21. Il s'agit des déformations thermiques durant le chargement thermique comme le montre la décomposition grâce aux formules 3.70, 3.71 et 3.72.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{th} + \underline{\varepsilon}^{tr} \quad (3.70)$$

La pré-containte crée une déformation qui reste constante tout au long de l'essai, elle est due, d'une part à une déformation élastique, et d'autre part à une déformation de transformation incomplète.

$$\underline{\varepsilon}^e = cste, \quad \underline{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0), \quad \underline{\varepsilon}^{tr} = z_\sigma \underline{\varepsilon}_m = cste2 \quad (3.71)$$

Soit :

$$\underline{\varepsilon} = cste + \alpha(T - T_0) + cste2 \quad (3.72)$$

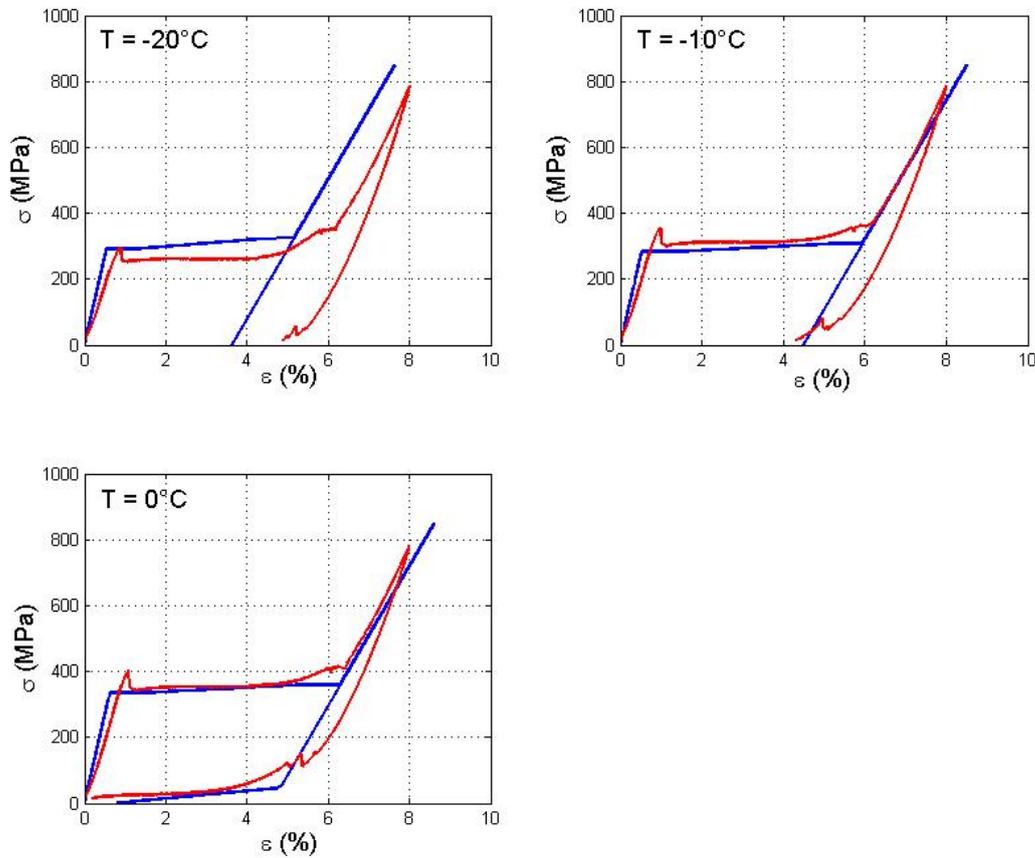


FIG. 3.19 – Comparaison des essais de traction simple sous différentes températures - II

### 3.4.3 Essais en torsion pure

On note sur la figure 3.22 que les seuils de début de transformation sont exacts et que la taille de l'hystérésis suit celle de l'expérience. Néanmoins les simulations présentées ne reproduisent pas la forme particulière des essais en torsion.

Notre modèle se base sur VER qui ne tient pas compte des effets de structures, or l'échantillon est un fil et ses effets ne peuvent être ignorés.

Plus précisément, le modèle nous fournit une information sur la contrainte et la partie expérimentale sur la couple appliqué, seulement pour le passage de la contrainte vers le couple  $C$ , la relation d'élasticité usuelle 3.73 faisant intervenir le rayon du fil  $R$  et son moment quadratique à la torsion  $I_0$  ne traduit pas le comportement de l'échantillon. La relation établie 3.74 pour un AMF ayant un plateau de transformation fournit un passage plus précis entre le couple et la contrainte de cisaillement  $\sigma_{z\theta}$  (figure 3.23).

$$C = \frac{\sigma_{z\theta} I_0}{R} \quad (3.73)$$

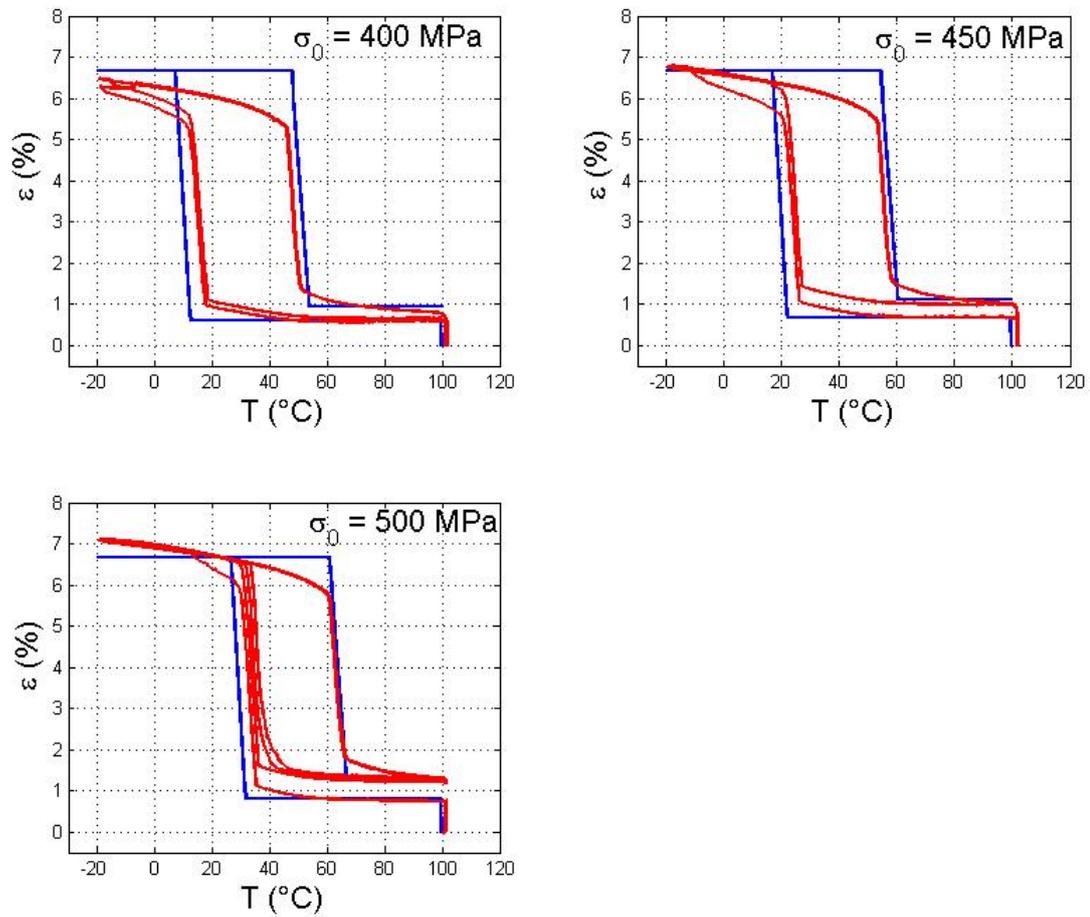


FIG. 3.20 – Comparaison des essais en chargement thermique sous fortes contraintes constantes

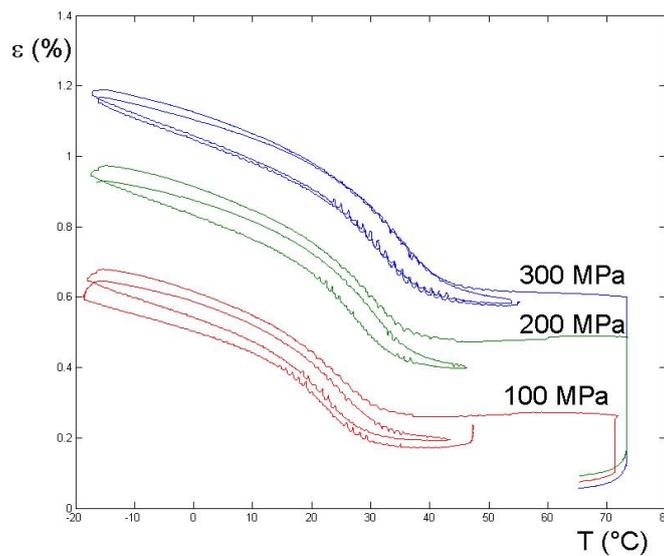


FIG. 3.21 – Comparaison des essais en chargement thermique sous faibles contraintes constantes

$$C = \frac{4}{3} C_{max}^{el} \left( 1 - 2 \left( \frac{l}{R} \right)^3 \left( \frac{\sigma_{z\theta}^{AM}}{\mu} \right)^3 \frac{1}{\theta^3} \right) \quad (3.74)$$

Avec :

$C_{max}^{el}$  : le couple élastique maximum

$l$  : la longueur du fil considéré

$\sigma_{z\theta}^{AM}$  : la contrainte seuil du plateau

$\mu$  : le module de cisaillement

$\theta$  : l'angle de torsion

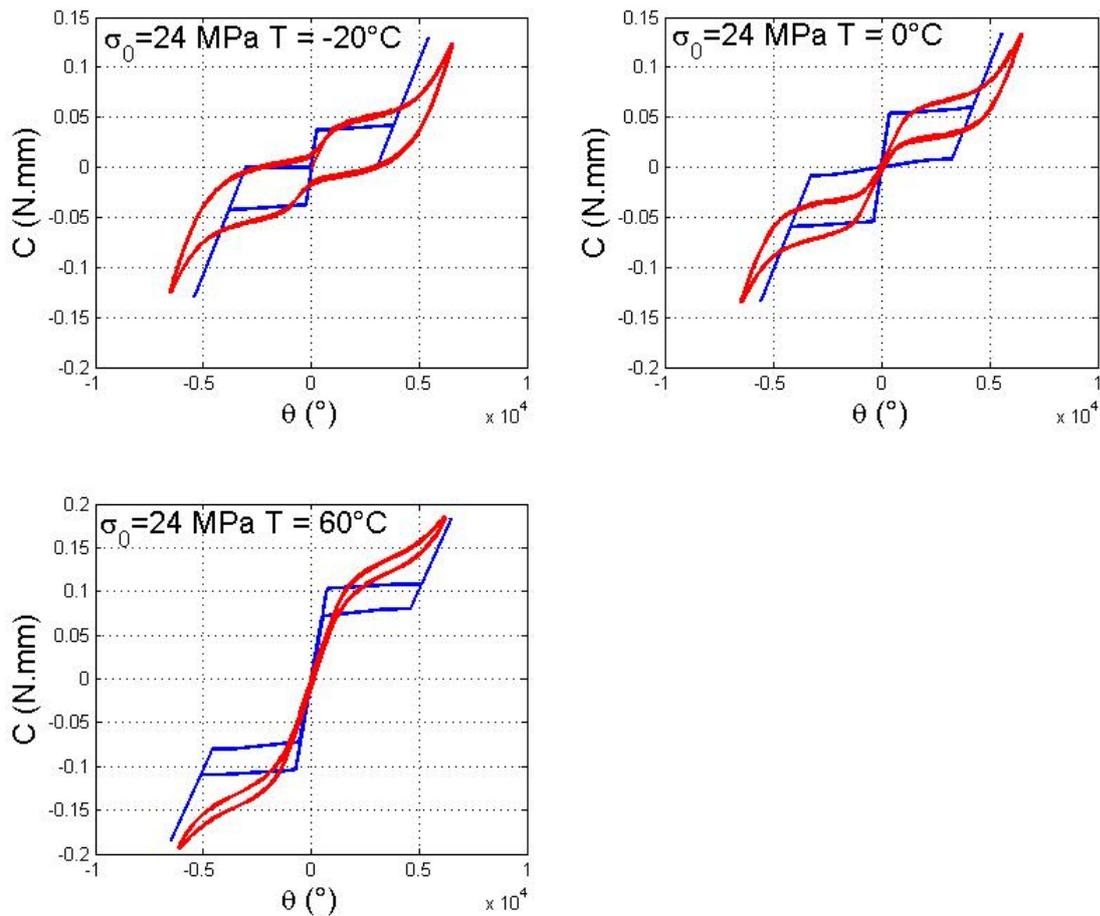


FIG. 3.22 – Comparaison des essais en torsion pure sous différentes températures

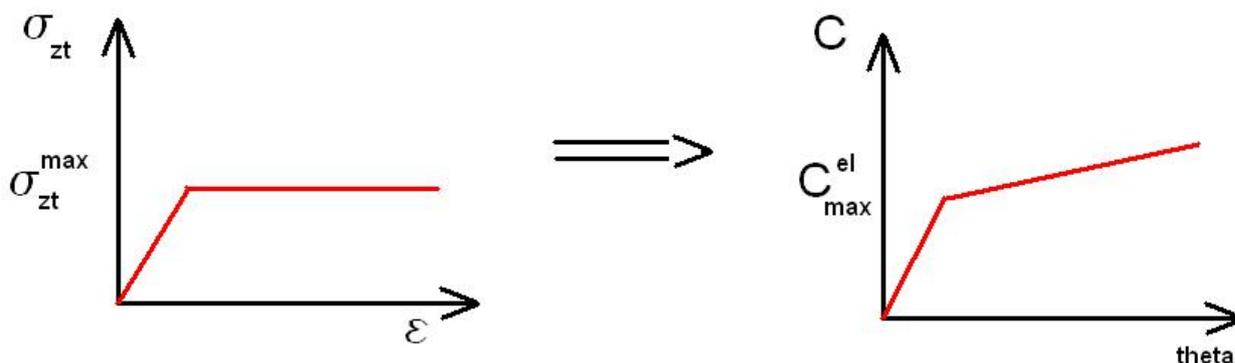


FIG. 3.23 – Schéma de la courbe en contrainte - déformation induisant le graphe en couple - angle de torsion pour un AMF

### 3.4.4 Essais en traction - torsion

Les figures 3.24 et 3.25 montrent la confrontation entre les essais en torsion-traction. Là encore l'effet de structure du fil apparaît mais on suppose que des effets de ré-orientation décrits précédemment sont aussi présents.

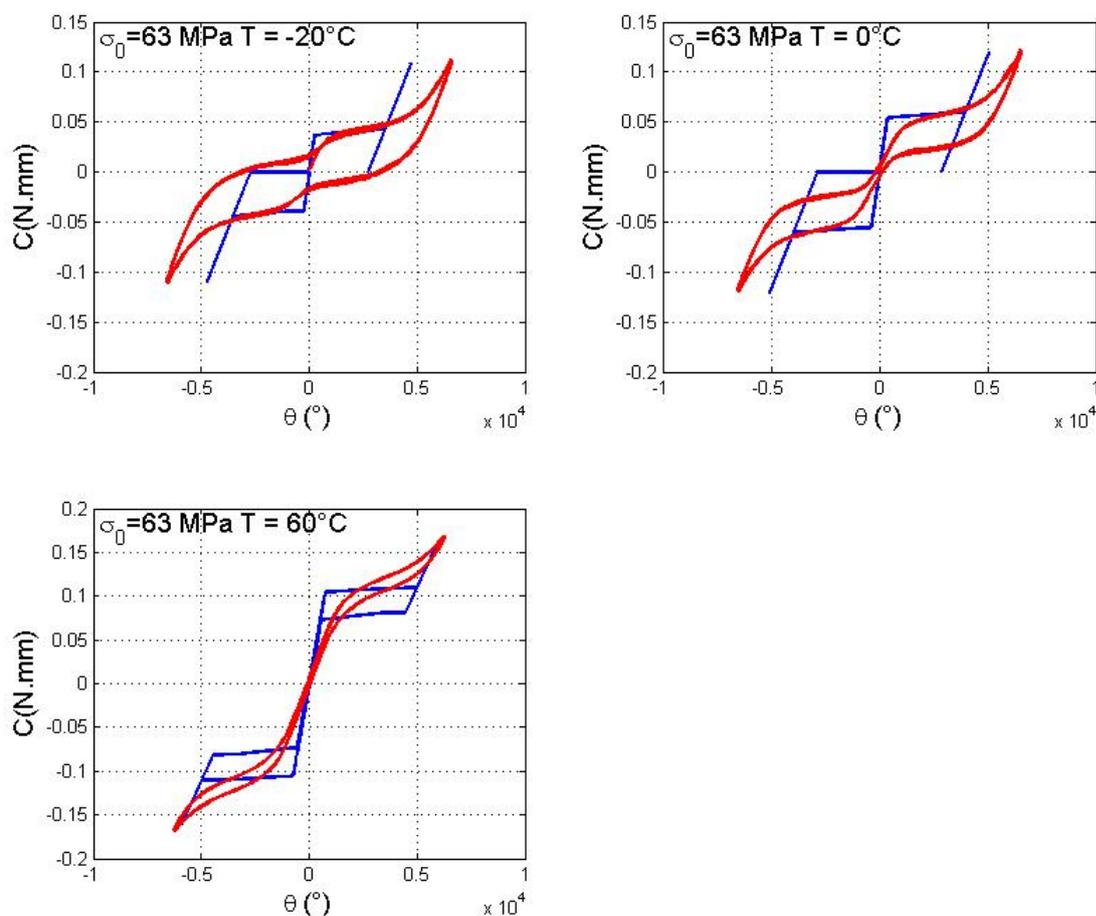
On note que les seuils de début et de fin de transformation sont corrects en regard aux essais.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les qualités de ce modèle ont été mises en avant comme le nombre restreint de paramètres à identifier, le respect de l'hystérésis, la prise en compte de la température. Un point important est la distinction des parties élastiques de l'austénite et de la martensite ; de nombreux modèles choisissent dans leurs hypothèses de départ de les égaliser, le ratio entre les deux étant pourtant environ de 2/5.

La prise en compte de la surface de début de transformation de phase permet au modèle de répondre à toute sollicitation proportionnelle. Cependant on doit pour cela passer par un parcours expérimental complet pour procéder à une identification correcte. Par exemple, des études en traction-torsion ne pourront pas remplacer des études du même matériau en traction-pression interne et vice-versa. La partie expérimentale sur laquelle notre modèle a été utilisé permet de tester de nombreuses facettes du comportement des AMF, mais il faut cependant garder à l'esprit qu'un modèle reste pour le moment plus réservé à certains effets que d'autres (certains pour les problèmes de fatigue, d'autres de localisations, ou encore de chargements non-proportionnels, etc..).

Les améliorations envisageables de notre modèle seraient la prise compte des chargements non-proportionnels, une étude sur la fatigue et les déformations résiduelles des AMFs au long d'un cyclage. L'ajout de ces points ne remet pas en cause l'ensemble du modèle mais devrait en apporter une modification sans en changer la "philosophie" :



**FIG. 3.24** – *Comparaison des essais en torsion sous différentes températures avec une contrainte de 63 MPa en traction*

- Pour le non proportionnel, il faut tenir compte de la dérivée de la déformation de transformation  $\dot{\varepsilon}_m$ . Le travail amont présenté au chapitre 2 avançant bien cette étude.
- Le cyclage peut être pris en compte comme l'ont fait [Lexcellant et al. \(1994\)](#). On peut aussi reprendre les travaux sur les points mémoire de [Bouvet \(2001\)](#) ou autres. Une variable interne liée aux déformations résiduelles devra alors être sans doute ajoutée.

A l'issue d'une comparaison coordonnée de divers modèles, notre modèle s'est avéré performant sur bons nombres de points mais des progrès peuvent encore être faits. Son caractère prédictif lui assure une pérennité dans le monde des modélisateurs d'AMF contre un travail de fond sur les points énoncés précédemment. Enfin son implémentation sur un code éléments finis type ANSYS ou ABAQUS serait un nouveau moyen de tester ses performances sur des structures complexes (stents, fraise endodontique, etc...) et envisager une utilisation pratique de cette modélisation.

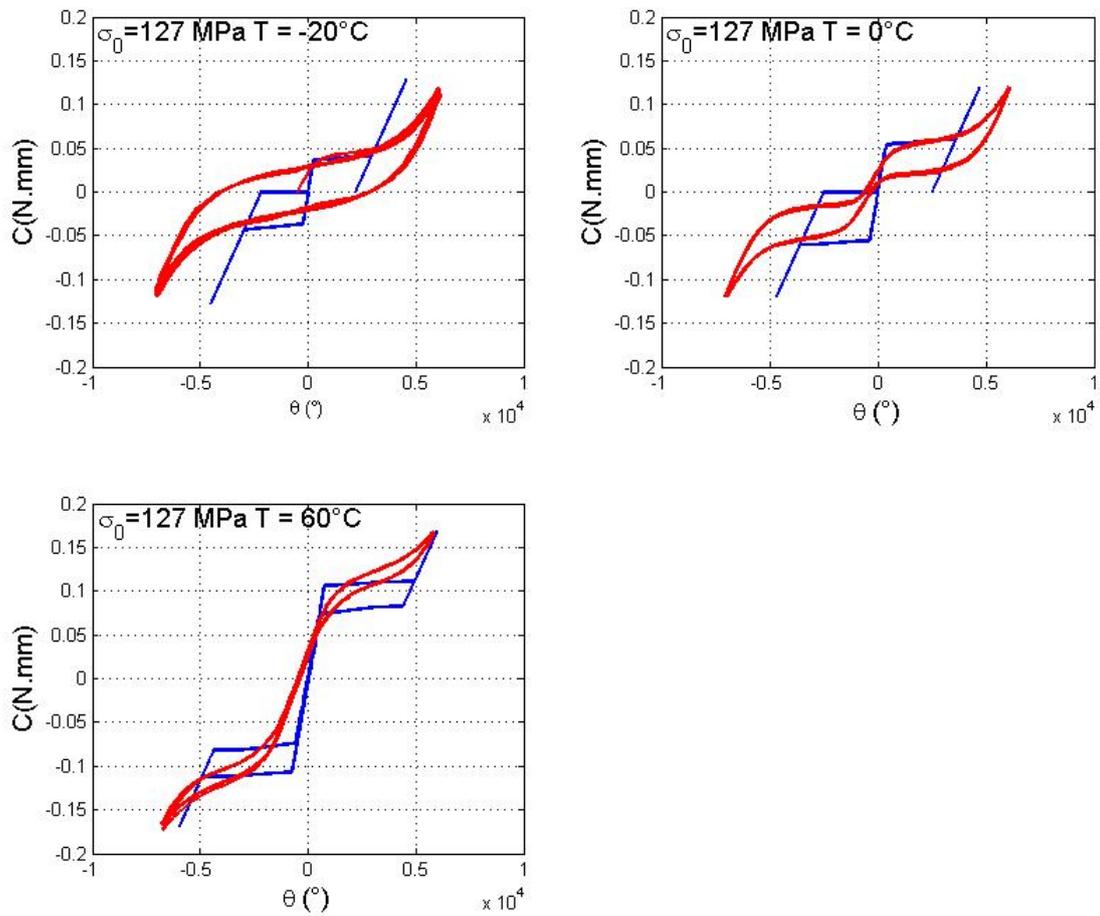


FIG. 3.25 – Comparaison des essais en torsion pure sous différentes températures avec une contrainte de 127 MPa en traction

## Chapitre 4

Modèle inspiré de la micro mécanique de  
Sadjadpour et Bhattacharya

Le modèle décrit et utilisé dans ce chapitre a été développé par l'équipe américaine du Pr. Bhattacharya et particulièrement par Amir Sadjadpour au cours de sa thèse (Sadjadpour (2006)), il présente une modélisation étendue de leur modélisation 1D (Sadjadpour and Bhattacharya (2007b)) à la 3D (Sadjadpour and Bhattacharya (2007a)). Ce modèle est inspiré d'une étude à l'échelle microscopique pour ressortir un modèle macroscopique. Il est basé sur une surface intrinsèque du matériau, mais ici non pas celle de **début** de transformation de phase Austénite  $\rightarrow$  Martensite mais celle de **fin** de cette transformation de phase; de plus cette surface est étudiée dans l'espace des déformations de transformation  $\underline{\varepsilon}_m$  décrit au chapitre 2 et non dans l'espace des contraintes plus usuel.

Le travail d'A. Sadjadpour a porté dans son ensemble sur le développement théorique du modèle et sur une première approche des surfaces de fin de transformation de phase. Ce travail sera complété dans ce chapitre par l'application à ce modèle des résultats expérimentaux du Roundrobin présentés dans le chapitre 3.

Nous dresserons alors un comparatif entre les deux modèles étudiés, tous deux basés sur des surfaces de transformation différentes mais liées mathématiquement comme vu au chapitre 2.

### 4.1 Description du modèle

#### 4.1.1 Choix des variables internes

Nous considérons ici un volume élémentaire représentatif (VER) constitué d'un certain nombre de grains suffisants pour décrire le comportement macroscopique du matériau. Chaque grain est considéré comme contenant une microstructure complexe d'austénite et des variantes de martensite.

Le choix des variables internes se porte dans ce modèle sur :

- la fraction volumique de martensite  $z$ . Elle est la somme des fractions volumiques de martensite précédemment décrites :  $z = z_\sigma + z_T$ ,
- le tenseur des déformations associées à la transformation de phase  $\underline{\varepsilon}_{tr}$ .

La fraction volumique de martensite  $z$  représente la fraction volumique de martensite moyennée, i.e., elle correspondrait à la valeur obtenue si l'on prenait les volumes de toutes les variantes de martensite possibles dans chacun des grains et que l'on divisait par le volume total du VER. Plus précisément, posons  $\chi^{ij}$  la fonction de la  $j^{ieme}$  variante de martensite dans le  $i^{ieme}$  grain du VER. Cette fonction est égale à 1 si la  $j^{ieme}$  variante dans le  $i^{ieme}$  grain est présente et 0 sinon.

On a alors  $\chi^i = \sum_{j=1}^N \chi^{ij}$  la fonction représentant toute la martensite dans le  $i^{ieme}$  grain, avec  $N$  le nombre de variantes, selon la crystallographie de la transformation. On définit alors la fraction volumique comme en 4.1 où  $\langle \bullet \rangle$  représente la moyenne sur l'ensemble des grains.

$$z = \langle \chi^i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \chi^{ij} \right\rangle \quad (4.1)$$

Donc  $z$  ne peut être compris qu'entre 0 et 1, 0 correspondant à l'état purement austénitique et 1 à celui purement martensitique.

Cependant, cette variable interne ne permet pas de considérer les différentes variantes de martensite, on introduit alors une seconde variable interne qui est le tenseur des déformations de transformations de phase  $\underline{\varepsilon}_{tr}$ .

De la même manière que pour la fraction volumique de martensite on définit ce tenseur pour chaque grain avec  $\underline{\varepsilon}_m^{ij}$ ; il s'agit de la déformation de transformation de phase de la  $j^{ieme}$  variante de martensite dans le  $i^{ieme}$  grain du VER définie par 4.2 où  $\underline{R}_i$  est la matrice de rotation donnant l'orientation du  $i^{ieme}$  grain définie par la texture du matériau et  $\underline{\varepsilon}_m^j$  la déformation de transformation de la  $j^{ieme}$  variante.

$$\underline{\varepsilon}_m^{ij} = \underline{R}_i^T \underline{\varepsilon}_m^j \underline{R}_i \quad (4.2)$$

On définit alors la seconde variable interne comme 4.3.

$$\underline{\varepsilon}_{tr} = \left\langle \sum_{j=1}^N \chi^{ij} \underline{\varepsilon}_m^j \right\rangle \quad (4.3)$$

Bien entendu le matériau a différentes microstructures, par conséquent l'arrangement des variantes, et donc  $\chi^{ij}$  et  $\underline{\varepsilon}_{tr}$  prennent différentes valeurs. On ne s'intéressera alors qu'aux microstructures compatibles sans mélange arbitraire de variantes. L'ensemble des valeurs possibles pour le tenseur des déformations  $\underline{\varepsilon}_m$  est contenu dans l'espace associé  $P$  décrit précédemment et rappelé en 4.4.

$$P = \{ \underline{\varepsilon}_m / tr(\underline{\varepsilon}_m) = 0, g(\underline{\varepsilon}_m) \leq 0 \} \quad (4.4)$$

Enfin, on ajoute une dernière variable interne : le tenseur des déformations plastiques  $\underline{\varepsilon}_p$ .

L'ensemble de ces définitions revient à proposer la décomposition additive de tenseur des déformations, avec  $\vec{u}$  le vecteur déplacement :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) = \underline{\varepsilon}_e + z \underline{\varepsilon}_m + \underline{\varepsilon}_p \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Lois d'équilibre

En utilisant les équations de conservation de la quantité de mouvement (4.6, les forces volumiques étant nulles) et de l'énergie (4.7) on a :

$$\rho \vec{u}_{tt} = \text{div} \underline{\sigma} \quad (4.6)$$

$$\dot{\epsilon} = -\text{div} \vec{q} + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} \quad (4.7)$$

avec :

- $\rho$  la masse par unité de longueur,
- $u_{tt}$  l'accélération,
- $\epsilon$  l'énergie interne du système,
- $q$  le flux de chaleur.

Soit l'énergie spécifique de Helmholtz  $\Psi$  fonction des variables internes, des déformations et de la température avec  $s$  l'entropie du système :

$$\psi = \psi \left( \underline{\epsilon}, z, \underline{\epsilon}_m, \underline{\epsilon}_p, T, \right) = \epsilon - Ts \quad (4.8)$$

On fait intervenir la forme locale de la seconde loi de la thermodynamique :

$$-\dot{\psi} - s\dot{T} + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \frac{q \nabla T}{T} \geq 0 \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Cadre thermodynamique

On suppose que l'énergie libre de Helmholtz prend la forme la plus simple et la plus naturelle :

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_p - z \underline{\epsilon}_m \right) : \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_p - z \underline{\epsilon}_m \right) + z \omega(T) - C_p T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (4.10)$$

où :

- $\underline{\underline{C}}$  est un tenseur d'ordre 4 représentant le module élastique, on suppose ici que l'austénite et la martensite ont le même module d'élasticité,
- $\omega(T)$  représente la différence d'énergie chimique entre l'austénite et la martensite,
- $C_p$  est la capacité thermique (prise égale pour l'austénite et la martensite),
- la dilatation thermique n'est pas prise en compte.

Cette relation est illustrée figure 4.1.

On suppose que la différence d'énergie chimique  $\omega$  prend la forme de 4.11 où  $L$  est la chaleur latente et  $T_{cr}$  la moyenne des températures  $A_s^0$  et  $M_s^0$ .

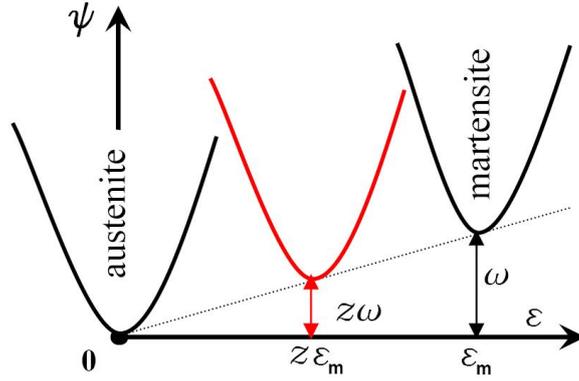


FIG. 4.1 – Représentation schématique de l'énergie libre de Helmholtz

$$\omega(T) = \frac{L}{T_{cr}} (T - T_{cr}) \quad (4.11)$$

En remplaçant l'énergie libre de Helmholtz dans l'inégalité de Clausius-Duhem 4.9, c'est à dire en la dérivant au sein de cette expression, on obtient pour la dissipation intrinsèque :

$$- \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} - \underline{\sigma} \right) \dot{\underline{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \dot{z} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}_m} \dot{\underline{\varepsilon}}_m - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}_p} \dot{\underline{\varepsilon}}_p - \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} - s \right) \dot{T} \geq 0 \quad (4.12)$$

En utilisant la même démarche que celle de Coleman and Noll (1963), on a pour les contraintes (4.13) et l'entropie (4.14) :

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (4.13)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (4.14)$$

On définit les forces thermodynamiques associées aux variables internes  $z$  (4.15),  $\underline{\varepsilon}_m$  (4.16),  $\underline{\varepsilon}_p$  (4.17).

$$d_z = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.15)$$

$$d_{\underline{\varepsilon}_m} = - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}_m} \quad (4.16)$$

$$d_{\underline{\varepsilon}_p} = - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}_p} \quad (4.17)$$

En substituant ces forces thermodynamiques dans 4.12 et en se servant de 4.13 et de 4.14, l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à :

$$d_z \dot{z} + d_{\underline{\varepsilon}_m} \dot{\underline{\varepsilon}}_m + d_{\underline{\varepsilon}_p} \dot{\underline{\varepsilon}}_p \geq 0 \quad (4.18)$$

C'est avec cette relation que nous allons pouvoir décrire l'évolution des variables internes au cours des simulations numériques.

En utilisant la forme de l'énergie de Helmholtz choisie (4.10), on obtient :

$$\underline{\sigma} = \underline{C} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_p - z\underline{\varepsilon}_m) \quad (4.19)$$

$$s = z \frac{L}{T_{cr}} - C_p \left( 1 + \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right) \quad (4.20)$$

$$d_z = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}_m - \omega \quad (4.21)$$

$$d_{\underline{\varepsilon}_m} = z\underline{\sigma} \quad (4.22)$$

$$d_{\underline{\varepsilon}_p} = \underline{\sigma} \quad (4.23)$$

avec  $d_z$ ,  $d_{\underline{\varepsilon}_m}$  et  $d_{\underline{\varepsilon}_p}$  les forces thermodynamiques associées respectivement aux cinétiques des variables internes  $z$ ,  $\underline{\varepsilon}_m$  et  $\underline{\varepsilon}_p$ .

#### 4.1.4 Cinétiques du modèle

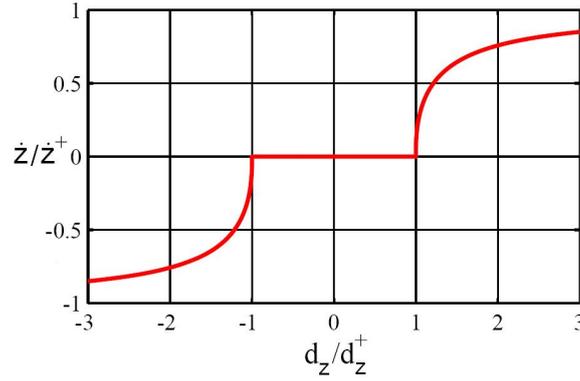
La cinétique décrivant l'évolution de la fraction volumique de martensite est prise sous la forme 4.24 où  $z^\pm$ ,  $d_z^\pm$  et  $p$  sont des paramètres matériaux.

$$\dot{z} = \begin{cases} \dot{Z}^+ \left( 1 + (d_z - d_z^+)^{-1} \right)^{-\frac{1}{p}} & d_z \geq d_z^+ \text{ et } z \leq 1 \\ \dot{Z}^- \left( 1 + (d_z - d_z^-)^{-1} \right)^{-\frac{1}{p}} & d_z \leq d_z^- \text{ et } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.24)$$

Cette relation apparaît figure 4.2. On note que la relation de cinétique est caractérisée par un palier pour des petites valeurs de la force thermodynamique associée. C'est à dire que le taux de transformation de la fraction volumique de martensite est nulle en deçà d'une valeur seuil de la force thermodynamique.

On voit que juste après cette valeur seuil la courbe devient quasi verticale, ce qui traduit le fait que la vitesse de la transformation de phase est indéterminée ou réciproquement que la force thermodynamique est indépendante de la vitesse de la transformation de phase. On remarque aussi pour de grandes valeurs de la force thermodynamique que la valeur de  $\dot{z}$  reste constante ou réciproquement, il s'agit ici donc d'un comportement dépendant de la vitesse de la transformation de phase.

Le choix d'une telle cinétique a été pris d'après des observations expérimentales exhibant une indépendance pour les faibles forces thermodynamiques et une dépendance pour les hautes (Nemat-Nasser et al. (2005)).



**FIG. 4.2** – Relation de la cinétique  $\dot{z}$  et de la force thermodynamique associée (Sadjadpour (2006))

On prend comme cinétique de la déformation plastique 4.25 où  $H$  est le paramètre d'écroutissage du matériau :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_p = \frac{d_{\varepsilon_p}}{H} = \begin{cases} \frac{\dot{\sigma}}{H} & \text{pour } \sigma_{eq} \geq \sigma_p \text{ ou } \sigma_{eq} \leq -\sigma_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.25)$$

La cinétique des déformations de transformation de phase  $\underline{\dot{\varepsilon}}_m$  retient une attention plus particulière. L'évolution du tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  décrit l'orientation et la ré-orientation qui transforme un type de martensite en une autre variante. E. Sadjadpour suppose que sa loi d'évolution prend la forme suivante :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_m = K_{\varepsilon_m}(d_{\varepsilon_m}, z, \underline{\varepsilon}_m) = \begin{cases} \frac{\alpha}{z} d_{\varepsilon_m} & \underline{\varepsilon}_m \in \check{P} \\ \frac{\alpha}{z} (d_{\varepsilon_m})_{\partial P} & \underline{\varepsilon}_m \in \partial P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.26)$$

où  $\check{P}$  représente l'intérieur de l'espace  $P$ ,  $\partial P$  est la frontière de ce même domaine et  $\alpha$  est un paramètre matériau choisi de façon à avoir une cinétique suffisamment rapide.

$\underline{\varepsilon}_m$  est en lien direct avec la surface de fin de transformation ou, autrement dit, avec l'espace convexe  $P$  défini formule 4.27. La définition de cet espace est au centre de la modélisation proposée et influe grandement sur l'ensemble des simulations.

$$P = \{ \underline{\varepsilon}_m | tr(\underline{\varepsilon}_m) = 0, g(\underline{\varepsilon}_m) \leq 0 \} \quad (4.27)$$

Cet espace est défini au travers d'une fonction  $g(\underline{\varepsilon}_m)$ . Plus précisément, au travers d'une fonction  $g(I_1(\underline{\varepsilon}_m), I_2(\underline{\varepsilon}_m), I_3(\underline{\varepsilon}_m))$  où  $I_1(\underline{\varepsilon}_m)$ ,  $I_2(\underline{\varepsilon}_m)$  et  $I_3(\underline{\varepsilon}_m)$  représentent les invariants du tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  :

$$\begin{cases} I_1(\underline{\varepsilon}_m) = & tr(\underline{\varepsilon}_m) \\ I_2(\underline{\varepsilon}_m) = & \frac{1}{2} [tr(\underline{\varepsilon}_m)^2 - tr(\underline{\varepsilon}_m^2)] \\ I_3(\underline{\varepsilon}_m) = & det(\underline{\varepsilon}_m) \end{cases} \quad (4.28)$$

Comme discuté précédemment, l'auto-accommodation implique la nullité de la trace du tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$ , c'est-à-dire :

$$tr(\underline{\varepsilon}_m) = I_1(\underline{\varepsilon}_m) = 0, \quad I_2(\underline{\varepsilon}_m) = -\frac{1}{2}tr(\underline{\varepsilon}_m^2) \quad (4.29)$$

Il reste donc maintenant à définir la fonction  $g$ . Plusieurs cas s'offrent à nous : celui de la transformation isotrope symétrique, celui de la transformation anisotrope symétrique et enfin celui de la transformation anisotrope dissymétrique.

#### – Transformation isotrope symétrique

On considère ici le cas le plus simple : le matériau exhibe le même comportement quelle que soit la direction de la sollicitation, et la dissymétrie entre la traction et la compression n'est pas prise en compte. La fonction  $g$  ne nécessite alors que la prise en compte du second invariant du tenseur des déformations de transformation, d'où la définition de l'espace  $P$  suivante :

$$P = \{ \underline{\varepsilon}_m | tr(\underline{\varepsilon}_m) = 0, g(\underline{\varepsilon}_m) = I_2(\underline{\varepsilon}_m) - b_{Bh} \leq 0 \} \quad (4.30)$$

On ne fait alors intervenir qu'un seul paramètre  $b_{Bh}$  pour fixer la taille de l'espace  $P$ , sa forme restant fixée à un cercle.

Le tenseur décrivant la cinétique des déformations de transformation prend alors la forme :

$$\underline{\varepsilon}_m = \begin{cases} \alpha \underline{S}_\sigma & |\underline{\varepsilon}_m| < \sqrt{2b_{Bh}} \\ \alpha \left( \underline{S}_\sigma - \underline{\varepsilon}_m \frac{\underline{\varepsilon}_m \cdot \underline{S}_\sigma}{|\underline{\varepsilon}_m|^2} \right) & |\underline{\varepsilon}_m| = \sqrt{2b_{Bh}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.31)$$

#### – Transformation isotrope dissymétrique

Manifestement, la seule implication du second invariant de  $\underline{\varepsilon}_m$  ne suffit pas pour décrire la dissymétrie traction-compression. A l'instar des travaux effectués dans l'espace des contraintes (cf. chapitre 2), on choisit de prendre en compte aussi le troisième invariant de  $\underline{\varepsilon}_m$  :  $I_3(\underline{\varepsilon}_m)$  :

$$g(\underline{\varepsilon}_m) = g(I_2(\underline{\varepsilon}_m), I_3(\underline{\varepsilon}_m)) \quad (4.32)$$

On complète alors la forme précédente de  $g$  en introduisant un nouveau paramètre  $a_{Bh}$  qui fixe le degré de dissymétrie entre la traction et la compression.

$$P = \left\{ \underline{\varepsilon}_m | tr(\underline{\varepsilon}_m) = 0, g(\underline{\varepsilon}_m) = \left( -I_2(\underline{\varepsilon}_m)^{\frac{3}{2}} \right) - a_{Bh} I_3(\underline{\varepsilon}_m) - b_{Bh} \leq 0 \right\} \quad (4.33)$$

Les équations 4.26 et 4.33 donnent alors une loi d'évolution pour la déformation de transformation telle que :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_m = \begin{cases} \alpha \underline{S}_\sigma & g(\underline{\varepsilon}_m) < 0 \\ \alpha \left( \underline{S}_\sigma - \left( \frac{3|\underline{\varepsilon}_m|}{\sqrt{8}} - a_{Bh}^T \text{cof}(\underline{\varepsilon}_m) \right) \frac{\left( \frac{3|\underline{\varepsilon}_m|}{\sqrt{8}} - a_{Bh}^T \text{cof}(\underline{\varepsilon}_m) \right) : \underline{S}_\sigma}{\left| \left( \frac{3|\underline{\varepsilon}_m|}{\sqrt{8}} - a_{Bh}^T \text{cof}(\underline{\varepsilon}_m) \right) \right|^2} \right) & g(\underline{\varepsilon}_m) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.34)$$

#### – Transformation anisotrope dissymétrique

Enfin, les alliages étudiés présentent souvent une ou des directions privilégiées d'isotropie transverse ou d'orthotropie. Ceci est souvent dû au processus de fabrication qui induit un degré d'anisotropie supplémentaire. On introduit alors dans la description de l'espace P un vecteur  $\hat{e}$  qui est dirigé dans la direction privilégiée d'une isotropie transverse.

On a alors une fonction  $g$  telle que :

$$g(\underline{\varepsilon}_m) = g(I_2(\underline{\varepsilon}_m), I_3(\underline{\varepsilon}_m), \hat{e} \cdot \underline{\varepsilon}_m \hat{e}) \quad (4.35)$$

Sadjadpour et al. proposent la définition suivante pour  $g$  :

$$g(\underline{\varepsilon}_m) = \left( -I_2(\underline{\varepsilon}_m)^{\frac{3}{2}} \right) - a_{Bh} I_3(\underline{\varepsilon}_m - b_{Bh} - c_{Bh}(\hat{e} \cdot \underline{\varepsilon}_m \hat{e})^3) \quad (4.36)$$

On obtient alors un espace des déformations de transformation  $P$  :

$$P = \left\{ \underline{\varepsilon}_m \mid \text{tr}(\underline{\varepsilon}_m) = 0, g(\underline{\varepsilon}_m) = \left( -I_2(\underline{\varepsilon}_m)^{\frac{3}{2}} \right) - a_{Bh} I_3(\underline{\varepsilon}_m - b_{Bh} - c_{Bh}(\hat{e} \cdot \underline{\varepsilon}_m \hat{e})^3) \leq 0 \right\} \quad (4.37)$$

La cinétique du tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  est alors décrite par :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_m = \begin{cases} \frac{\alpha}{z} d_{\underline{\varepsilon}_m} & g(\underline{\varepsilon}_m) < 0 \\ \frac{\alpha}{z} \left( d_{\underline{\varepsilon}_m} - \frac{d_{\underline{\varepsilon}_m} : \frac{\partial g}{\partial \underline{\varepsilon}_m}}{\left| \frac{\partial g}{\partial \underline{\varepsilon}_m} \right|^2} \right) & g(\underline{\varepsilon}_m) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.38)$$

Avec :

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{\varepsilon}_m} = \frac{3|\underline{\varepsilon}_m|}{\sqrt{8}} \underline{\varepsilon}_m - a_{Bh}^T \text{cof}(\underline{\varepsilon}_m) - 3c_{Bh}(\hat{e} \cdot \hat{e})(\hat{e} \cdot \underline{\varepsilon}_m \hat{e})^2 \quad (4.39)$$

Un paramètre  $c_{Bh}$  a été introduit pour quantifier l'importance de l'isotropie transverse. La nullité de ce paramètre ramène au cas précédent d'une transformation isotrope et tenant compte de la dissymétrie.

On peut noter que l'introduction d'un seul vecteur ne permet pas de couvrir tous les cas d'anisotropie existants, de plus on trouve des problèmes de convexité en utilisant cette expression pour certains cas de figure. La méthode la plus efficace pour la prise en compte de n'importe

quelle anisotropie reste le passage par l'ellipsoïde de Hill lorsqu'on travaille dans l'espace des contraintes. Des travaux ont été mené par [Taillard \(2006\)](#) sur une application de l'ellipsoïde de Hill pour les AMF.

Une extension de ces travaux a été couplée au modèle présenté dans ce chapitre par [Lexcellent et al. \(2009\)](#). L'idée principale est d'adjoindre un tenseur  $\underline{\underline{D}}$  au tenseur des contraintes afin de définir un tenseur des contraintes dilatées  $\tilde{\underline{\sigma}}$  et ainsi de modifier la surface de charge (équation 4.40). Ce tenseur peut prendre en compte n'importe quelle anisotropie moyennant une identification des coefficients du critère de Hill contenus dans le tenseur  $\underline{\underline{D}}$ .

$$\tilde{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}\underline{\sigma} \quad (4.40)$$

On peut alors procéder avec le même raisonnement mais non pas en terme de contrainte mais en terme de déformation de transformation :

$$\tilde{\underline{\varepsilon}}_m = \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\varepsilon}_m \quad (4.41)$$

Cette solution, plus universelle et plus élégante, pourrait être appliquée dans un nouveau modèle étendant les possibilités de son étude.

### 4.1.5 Evolution de la température

En reprenant l'expression de l'énergie libre et la relation de l'équilibre thermodynamique, on peut décrire l'évolution de la température sous l'expression suivante :

$$C_p \dot{T} = \dot{z}T \frac{L}{T_{cr}} - \nabla q + r + d_z \dot{z} + d_{\underline{\varepsilon}_m} : \dot{\underline{\varepsilon}}_m + d_{\underline{\varepsilon}_p} : \dot{\underline{\varepsilon}}_p, \quad (4.42)$$

avec  $q$  représentant le flux de chaleur et  $r$  la chaleur par convection ou l'apport de chaleur par unité de surface.

#### – Conditions adiabatiques

Une hypothèse simplificatrice est celle de considérer comme négligeable les transferts de chaleur entre le matériau étudié et son environnement extérieur ( $q = r = 0$ ). Ce qui revient à dire que la chaleur latente associée à la transformation de phase est plus grande que celle de l'énergie dissipée durant cette transformation (ré-orientation des variantes de martensite, plasticité). Ainsi on suppose :

$$C_p \dot{T} = \dot{z}T \frac{L}{T_{cr}} \quad (4.43)$$

En intégrant cette expression, on obtient une relation de la température en fonction du temps faisant intervenir la fraction volumique de martensite :

$$T(t) = T_0 \exp\left(\frac{(z(t) - z_0)L}{C_p T_{Cr}}\right) \quad (4.44)$$

où  $z_0$  et  $T_0$  représentent respectivement la fraction volumique de martensite initiale et la température initiale.

### – Conditions non-adiabatiques

Si le cadre de travail n'entre pas dans des conditions adiabatiques, l'apport de chaleur par unité de volume  $r$  n'est plus considéré comme nul et prend la valeur donnée par l'équation 4.45.

$$r = -\frac{4h}{d_s}(T - T^{Amb}) \quad (4.45)$$

avec  $h$  le coefficient de convection (il est pour l'air normalement situé entre 10 et 100  $\frac{J}{m^2 K s}$ ). Le paramètre  $d_s$  est la taille caractéristique de l'échantillon et  $T^{Amb}$  est la température ambiante. L'équation 4.43 devient alors :

$$C_p \dot{T} = \dot{z} T \frac{L}{T_{Cr}} + r = \dot{z} T \frac{L}{T_{Cr}} - \frac{4h}{d_s}(T - T^{Amb}) \quad (4.46)$$

En intégrant cette nouvelle expression, on trouve l'expression de la température en fonction du temps :

$$T(t) = \exp^{\int_0^t \left(\frac{L}{C_p T_{Cr}} \dot{z}(\tau) - \frac{4h}{C_p d_s}\right) d\tau} \left( T_0 - \int_0^t \frac{4h}{C_p d_s} \exp^{\int_0^{\tau^*} \left(\frac{L}{C_p T_{Cr}} \dot{z}(\tau^*) - \frac{4h}{C_p d_s}\right) d\tau^*} d\tau \right) \quad (4.47)$$

### Surface de charge déduite en terme de contrainte

Considérons un chargement proportionnel :

$$\underline{\sigma}(t) = s(t) \underline{\Sigma} \quad (4.48)$$

avec  $s > 0$  et augmentant de façon monotone. Puisque le coefficient  $\alpha$  est choisi suffisamment grand pour que  $\underline{\varepsilon}_m$  évolue plus rapidement que la contrainte appliquée,  $\underline{\varepsilon}_m$  atteint donc la frontière de  $P$  assez rapidement et cherche ensuite à devenir parallèle à la contrainte  $\underline{\Sigma}$ . On a alors :

$$\max_{\underline{\varepsilon}_m \in P} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}_m) = s \max_{\underline{\varepsilon}_m \in P} (\underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon}_m). \quad (4.49)$$

La force thermodynamique associée à la fraction volumique de martensite donnée en 4.15 devient alors :

$$d_z = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - \omega = s \max_{\underline{\varepsilon}_m \in P} (\underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon}_m) - \omega \quad (4.50)$$

La transformation débute dès que  $d_z = d_z^+$ . On caractérise alors la contrainte de début de transformation  $s_c$  par :

$$s_c = (d_z^+ + \omega) / \max_{\underline{\varepsilon}_m \in P} (\underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon}_m) \quad (4.51)$$

Ceci définit le point sur la surface de charge dans l'espace des contraintes pour une contrainte donnée  $\Sigma$ . La figure 4.3 montre à quoi correspond ce point dans le plan déformation-contrainte d'un AMF et au niveau de la cinétique de la fraction volumique de martensite.

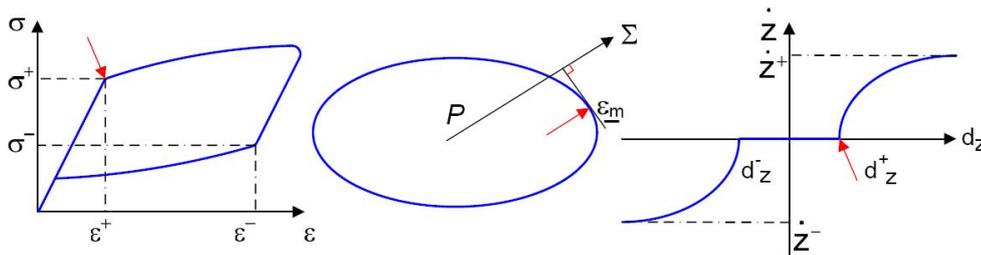


FIG. 4.3 – Correspondance graphique du début de la transformation de phase (Sadjadpour (2006))

## 4.2 Mises en oeuvre du modèle

Le modèle présenté précédemment a été implémenté au cours de la thèse de E. Sadjadpour dans le logiciel Matlab. Le modèle a alors été éprouvé sous différentes sollicitations afin de tester sa validité. Cependant, il n'a quasiment pas été fait de simulations devant reproduire des essais expérimentaux. On propose alors de reprendre la démarche effectuée avec le Roundrobin dans le chapitre précédent.

Nous regarderons dans un premier temps les résultats obtenus avec les simulations des expériences du Roundrobin, puis nous reviendrons sur les capacités et potentialités du modèle développé par ailleurs.

### 4.2.1 Application du modèle de Sadjadpour et Bhattacharya au Roundrobin

#### Présentation des essais utilisés

Le Roundrobin effectué dans le cadre du projet européen S3T Eurocores a pour but de confronter les différents modèles existants à un même set expérimental. Ce dernier a été fait sur un fil de NiTi de façon à pouvoir dresser les capacités et les limites de chacun des modèles face aux autres. La chapitre précédent détaille plus amplement les conditions expérimentales avec lesquelles ont été faits les nombreux essais.

Parmi les différents essais proposés, nous sélectionnerons ici les essais de :

- tractions isothermes
- torsions isothermes
- tractions-torsions isothermes

Les simulations de chaque type d'essai seront effectuées pour différentes températures, gardées constantes pour chaque test.

### Identification des paramètres du modèle

Les paramètres restent un critère important dans l'évaluation d'un modèle à la fois par leur nombre et par la facilité à les calculer. Le travail d'identification des paramètres du modèle de Sadajdpour et Bhattacharya a été effectué ici avec les résultats expérimentaux fournis par Y. Pilch et al. au cours du Roundrobin.

Le tableau 4.1 dresse l'ensemble de ces paramètres ainsi que leur description.

Notation	Correspondance
$\rho$	Masse volumique
$E = E_A = E_M$	Modules d'Young de l'austénite et de la martensite
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\gamma$	Déformation de transformation maximum en cisaillement
$A_s^0$ et $M_s^0$	Températures de début des transformations austénitique et martensitique
$L$	Chaleur latente de transformation
$d_z^+$ et $d_z^-$	Débuts de transformation directe et inverse associés à la force thermodynamique $d_z$
$\dot{Z}^+$ , $\dot{Z}^-$ et $p$	Paramètres des cinétiques de transformation
$a_{Bh}$ et $b_{Bh}$	Paramètres de la surface convexe de l'espace P

**TAB. 4.1** – Paramètres du modèle de Sadajdpour et Bhattacharya

On peut souligner que le nombre de paramètres de ce modèle reste en-deçà du nombre de paramètres des autres modèles. On va maintenant s'attarder sur l'identification de chacun de ses coefficients.

Nous ne nous attarderons pas sur les paramètres matériaux classiques que sont le module d'Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson. Ces derniers sont repris du chapitre précédent.

De même pour les températures de début de transformation  $A_s^0$  et  $M_s^0$  qui sont données par le fournisseur du matériau.

La température  $T_{cr}$  n'est pas prise comme un paramètre indépendant du modèle. En effet, elle représente la moyenne de  $A_s^0$  et  $M_s^0$  comme formulée dans l'équation 4.52.

$$T_{cr} = \frac{A_s^0 + M_s^0}{2} \quad (4.52)$$

– **Identification de la chaleur latente de transformation**

On prend ici un essai en traction. On suppose alors que la forme du tenseur des déformations de transformation est la suivante :

$$\underline{\varepsilon}_m^{traction} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{m11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon_{m11}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_{m11}}{2} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

On note respectivement  $\sigma^{dti}$  et  $\varepsilon_m^{dti}$ , la contrainte et la déformation de transformation en début de transformation inverse (cf. figure 4.4). On suppose alors que la transformation austénite  $\rightarrow$  martensite est totale, c'est-à-dire que  $z = 1$ . Bien que cette hypothèse ne soit pas vraiment réalisée pratiquement (même si on s'en approche), elle reste la plus pratique pour identifier le tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$ . En effet, en reprenant la decomposition additive des déformations on a :

$$\underline{\varepsilon}_m = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^e - \underline{\varepsilon}_p \quad (4.54)$$

Alors, en début de transformation inverse on obtient :

$$\varepsilon_m^{dti} = \varepsilon^{dti} - \varepsilon_e^{dti} - \varepsilon_p^{dti} \quad (4.55)$$

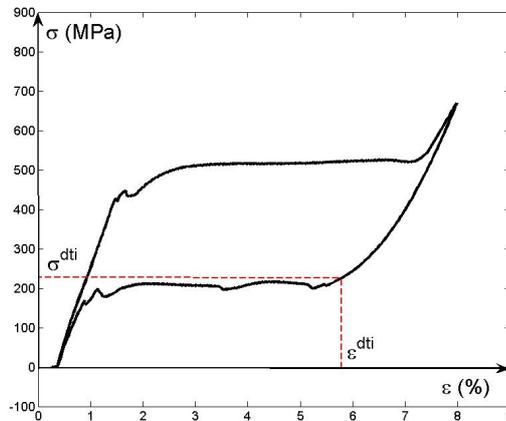


FIG. 4.4 – Essai de traction isotherme avec une transformation martensitique supposée totale - Définition du couple  $(\sigma^{dti}, \varepsilon^{dti})$

En se positionnant en début de transformation inverse, on obtient pour une température fixée  $T$  l'expression de la force thermodynamique associée à  $z$  suivante :

$$d_z(T) = \sigma^{dti} \varepsilon_m^{dti} - \omega(T) = \sigma^{dti} \varepsilon_m^{dti} - \frac{L}{T_{cr}}(T - T_{cr}) = d_z^- \quad (4.56)$$

Or, pour une contrainte nulle on a :

$$d_z(T = A_s^0) = -\omega(A_s^0) = -\frac{L}{T_{cr}}(A_s^0 - T_{cr}) = d_z^- \quad (4.57)$$

En associant 4.57 avec 4.56, on obtient alors une expression 4.58 permettant d'identifier  $L$  :

$$L = \frac{\sigma^{dti} \varepsilon_m^{dti} T_{cr}}{T_{cr} - A_s^0} \quad (4.58)$$

#### – Identification de $d_z^+$ et $d_z^-$

La force thermodynamique  $d_z$  atteint respectivement les valeurs  $d_z^+$  et  $d_z^-$  lorsque les transformations directe et inverse se déclenchent. On les associe donc à des seuils de début de transformation martensitique et austénitique. Si on regarde à l'état de contraintes nulles, les températures pour lesquelles ces transformations s'initient sont respectivement  $M_s^0$  et  $A_s^0$ . On calcule donc  $d_z^+$  et  $d_z^-$  telles que :

$$d_z^+ = -\frac{L}{T_{cr}}(M_s^0 - T_{cr}) \quad (4.59)$$

$$d_z^- = -\frac{L}{T_{cr}}(A_s^0 - T_{cr}) \quad (4.60)$$

#### – Identification de $\dot{Z}^+$ , $\dot{Z}^-$ et $p$

Ces trois paramètres entrent dans la description des cinétiques au cours des transformations. Il suffit alors de prendre trois essais de traction pour identifier ces paramètres. On construit ainsi un système faisant intervenir l'équation de la cinétique de la fraction volumique de martensite 4.24 qui est résolu numériquement.

#### – Identification de $a_{Bh}$ et $b_{Bh}$

Les paramètres  $a_{Bh}$  et  $b_{Bh}$  interviennent dans la description de l'espace  $P$  des déformations de transformation  $\underline{\varepsilon}_m$  pour un matériau isotrope dont on considère la dyssymétrie entre la traction et la compression. Pour les identifier, on se place à nouveau dans le cadre d'un test de traction. En reprenant l'expression du tenseur  $\underline{\varepsilon}_m$  équation 4.53, on calcule les deuxième et troisième invariants de  $\underline{\varepsilon}_m$  (équations 4.61 et 4.62).

$$I_2(\underline{\varepsilon}_m) = -\frac{1}{2}tr(\underline{\varepsilon}_m^2) = -\frac{3}{4}\varepsilon_{m11}^2 \quad (4.61)$$

$$I_3(\underline{\varepsilon}_m) = \det(\underline{\varepsilon}_m^2) = -\frac{1}{4}\underline{\varepsilon}_{m11}^3 \quad (4.62)$$

En appliquant ce cas particulier de chargement à la fonction  $g$  (formule 4.33), on obtient :

$$g(\underline{\varepsilon}_m^{traction}) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}a_{Bh}\right)\varepsilon_{m11}^3 - b_{Bh} \quad (4.63)$$

En prenant alors un choix de deux points judicieux (par exemple l'état de fin de transformation martensitique sur deux essais de traction à des températures différentes), on peut calculer les deux paramètres recherchés ici.

On peut aussi envisager une autre approche afin de caractériser l'espace  $P$ . En effet ce dernier peut être décrit via une définition de la fonction  $g$  en 4.64 :

$$g(\underline{\varepsilon}_m) = \overline{\varepsilon}_m h(y_{\varepsilon_m}) - 1 \quad (4.64)$$

avec  $\overline{\varepsilon}_m$  le tenseur des déformations de transformation pris au sens de von Mises et  $y_{\varepsilon_m}$  défini tel que :

$$y_{\varepsilon_m} = \frac{4\det(\underline{\varepsilon}_m)}{\overline{\varepsilon}_m^3} \quad (4.65)$$

L'identification des paramètres  $a_{Bh}$  et  $b_{Bh}$  revient alors à définir et identifier une fonction  $h$  convenable. On s'appuie alors sur l'approximation faite par [Bouvet et al. \(2002\)](#) qui donne un résultat approché de  $h$  via la fonction de correction  $f$  des surfaces de charge dans l'espace des contraintes :

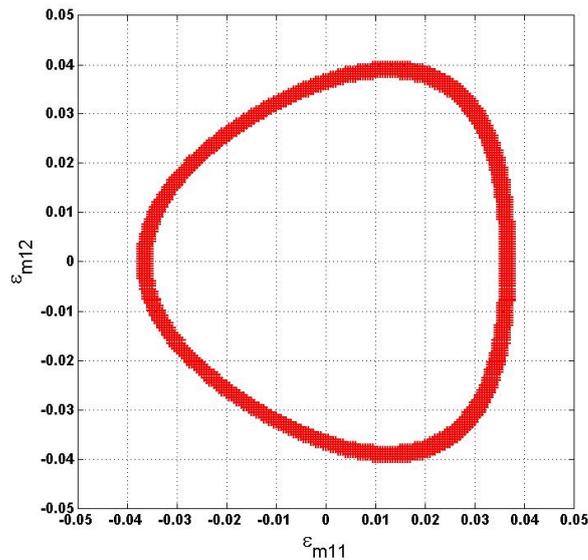
$$h(y_{\varepsilon_m}) \approx \frac{f(-y_{\varepsilon_m})}{f(-1)} \quad (4.66)$$

On revient alors à l'identification d'un ou de plusieurs paramètres de la fonction de correction selon celle qui est choisie. L'accès à ces paramètres est alors plus aisé et précis, l'hypothèse d'une transformation martensitique totale n'étant plus alors nécessaire. Les coefficients identifiés permettent alors de construire la surface figure 4.5.

L'identification des paramètres de ce modèle se révèle au final assez simple. En effet, il suffit de choisir plusieurs essais en traction pour connaître l'ensemble des paramètres du modèle. On note que dans le cadre de cette approche, la dissymétrie traction-compression est moins facilement prise en compte.

## Simulations obtenues - Confrontation à l'expérience

### Essais de traction isothermes



**FIG. 4.5** – Surface de fin de transformation dans l'espace des déformations de transformations en traction-torsion

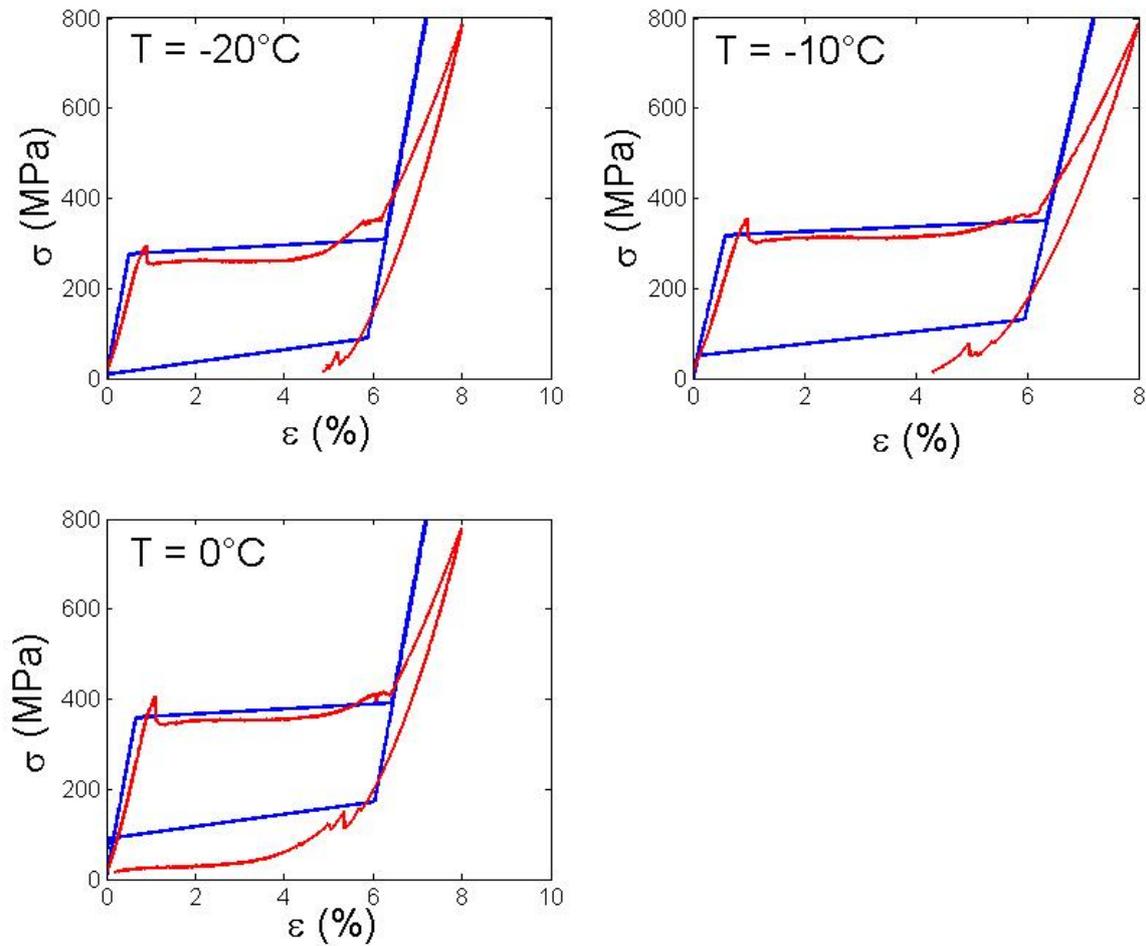
Les essais en traction sur les fils ont été faits après quelques cyclages afin de stabiliser le comportement du fil (en particulier pour les déformations résiduelles). La figure 4.6 présente des résultats de traction pour des températures faibles obtenues en simulation et expérimentalement, tandis que la figure 4.7 montre les résultats pour des températures plus hautes.

On note que les seuils de début et de fin de transformation sont respectés dans l'ensemble au cours de ces essais en traction. Cependant les pentes élastiques martensitiques et austénitiques ne sont pas distinctes suite à l'hypothèse prise par les élaborateurs du modèle.

Le modèle présenté dans ce chapitre réussit donc à simuler correctement des essais en traction quelle que soit la température. Les paramètres étant identifiés sur quelques uns de ces essais, il semble logique que ce set expérimental soit correctement simulé. Cependant, il faut noter que parmi les essais présentés ici, seul celui à une température  $T = 50^{\circ}\text{C}$  a été utilisé pour l'identification. Les autres courbes de simulation en traction ainsi que celles à suivre sont toutes produites à partir des paramètres calculés sur quelques essais de traction pour des températures hautes.

### Essais de torsion isothermes

Nous présentons figure 4.8 les résultats comparatifs entre les simulations faites avec le modèle de E. Sadjadpour et K. Bhattacharya et les expériences produites pour le Roundrobin. Afin de re-créeer une expérience de torsion pure sur un fil, ce dernier doit être pré-tendu. Les expérimentateurs ont alors fait le choix de prendre une charge en tension minimale afin d'être considérée comme négligeable devant celle appliquée en torsion. C'est pourquoi les essais dits en torsions

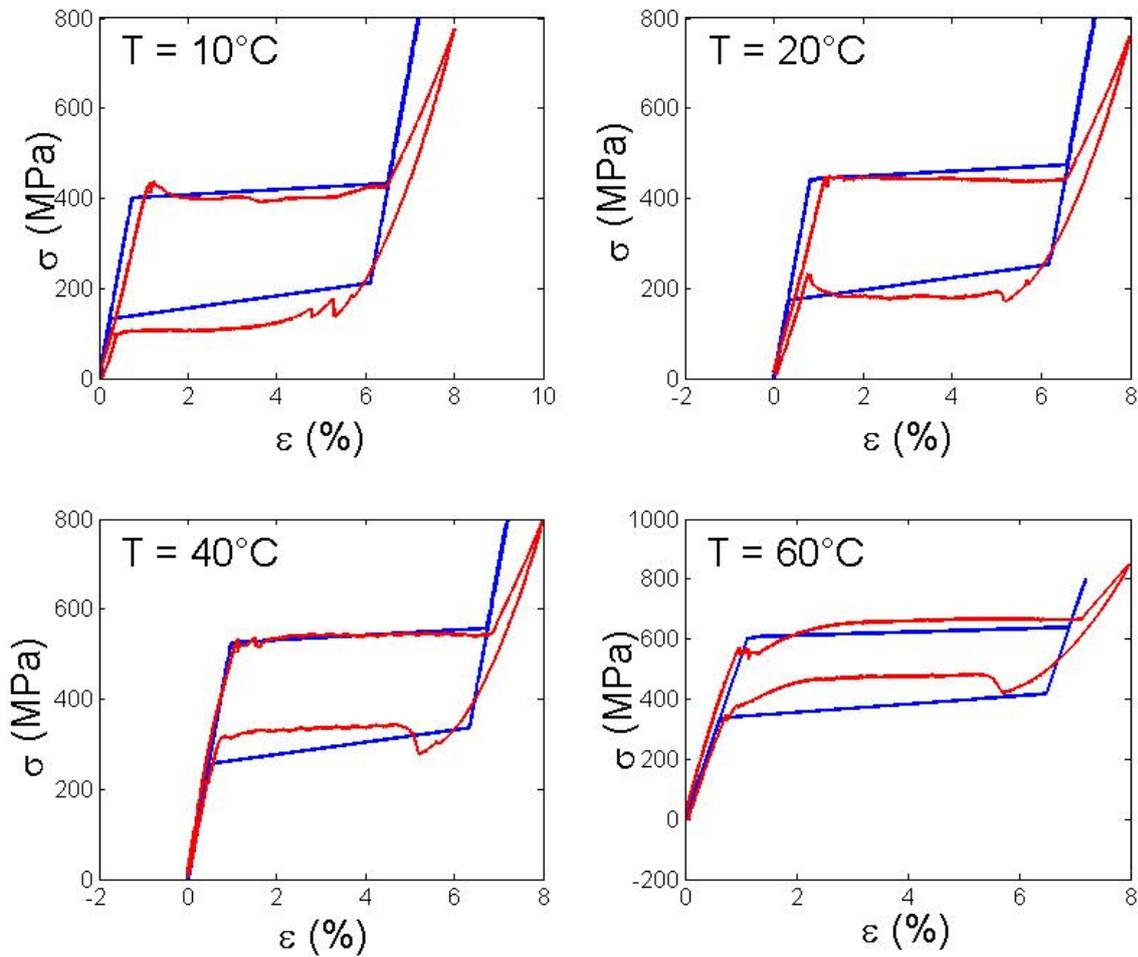


**FIG. 4.6** – *Comparaison des essais de traction simple isothermes sous différentes températures négatives pures sont en fait produits avec une pré-charge de 24 MPa.*

On retrouve les mêmes types de résultats que pour le modèle présenté au chapitre 3. En effet, on remarque que les cycles d’hystérésis sont correctement simulés. Cependant durant les phases de transformation, les plateaux décrits par le modèle ne suivent pas forcément les courbes expérimentales. Comme détaillé dans le chapitre précédent, on peut expliquer cette dissemblance par une non prise en compte des effets de structure du fil, le travail présenté ici se faisant aussi sur un VER.

### Essais de traction-torsion isothermes

Les essais expérimentaux présentent des essais de torsion isothermes sur un fil subissant une contrainte axiale de 63 MPa puis de 127 MPa. Sur les figures 4.9 et 4.10 on voit respectivement ces essais accompagnés des courbes de simulation du modèle de Sadjadpour et Bhattacharya.



**FIG. 4.7** – Comparaison des essais de traction simple isothermes sous différentes températures positives

Comme pour les simulations précédentes, on voit que les seuils de début et de fin de transformation sont respectés. On rencontre le même problème quant à la prise en compte de la structure filaire étudiée. Une implémentation de ce modèle dans un code EF permettrait de lever le voile sur les erreurs visibles pour la torsion.

#### 4.2.2 Autres simulations issues du modèle étudié

Nous avons appliqué le modèle de Sadjadpour et Bhattacharya à un set expérimental qui, bien que large, ne couvre pas toutes les sollicitations existantes. Nous proposons ici de compléter les simulations effectuées en comparaison au Roundrobin par des simulations finissant d'éprouver le modèle. En revanche nous ne nous appuyerons sur aucune nouvelle partie expérimentale pour le tracé de ces courbes.

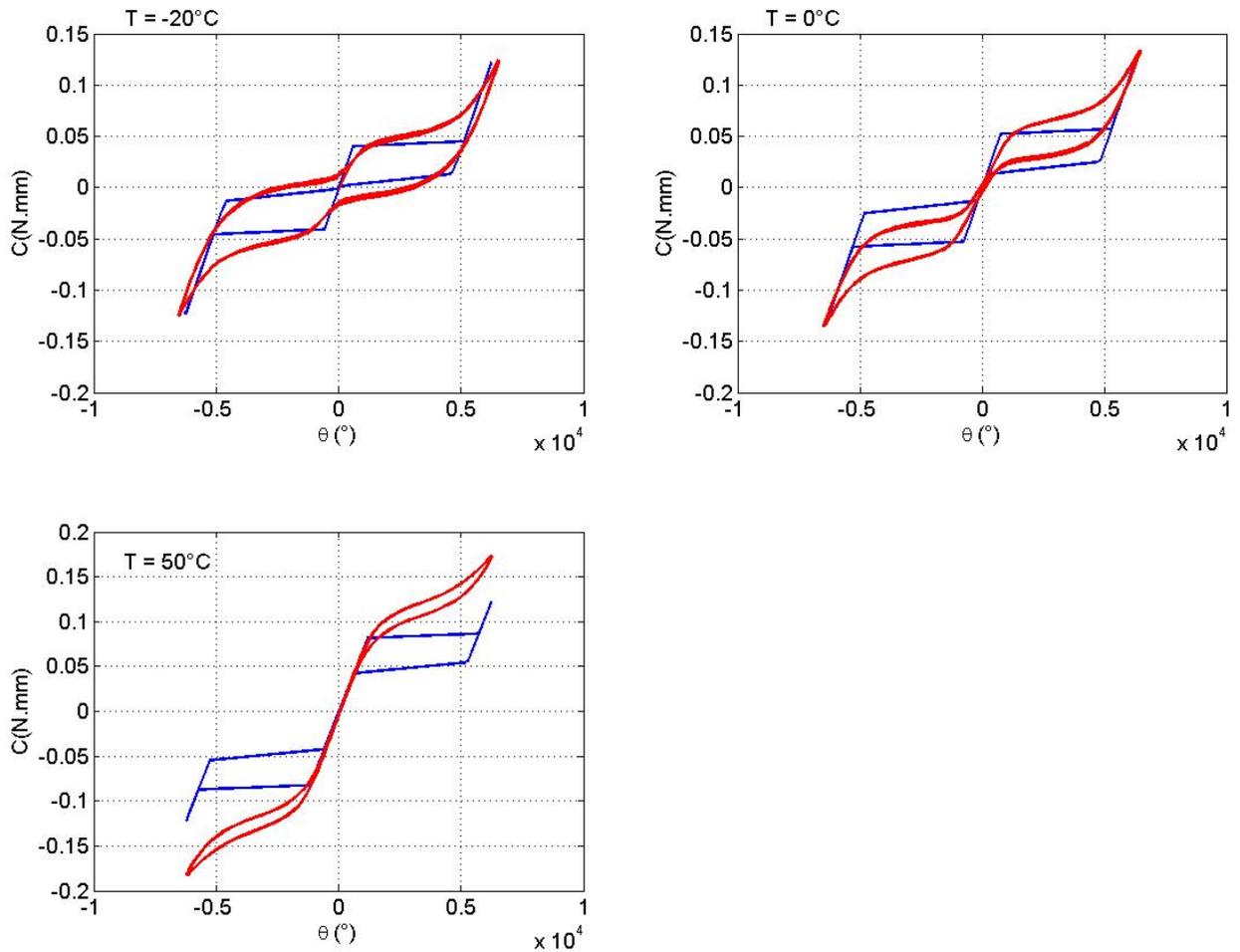


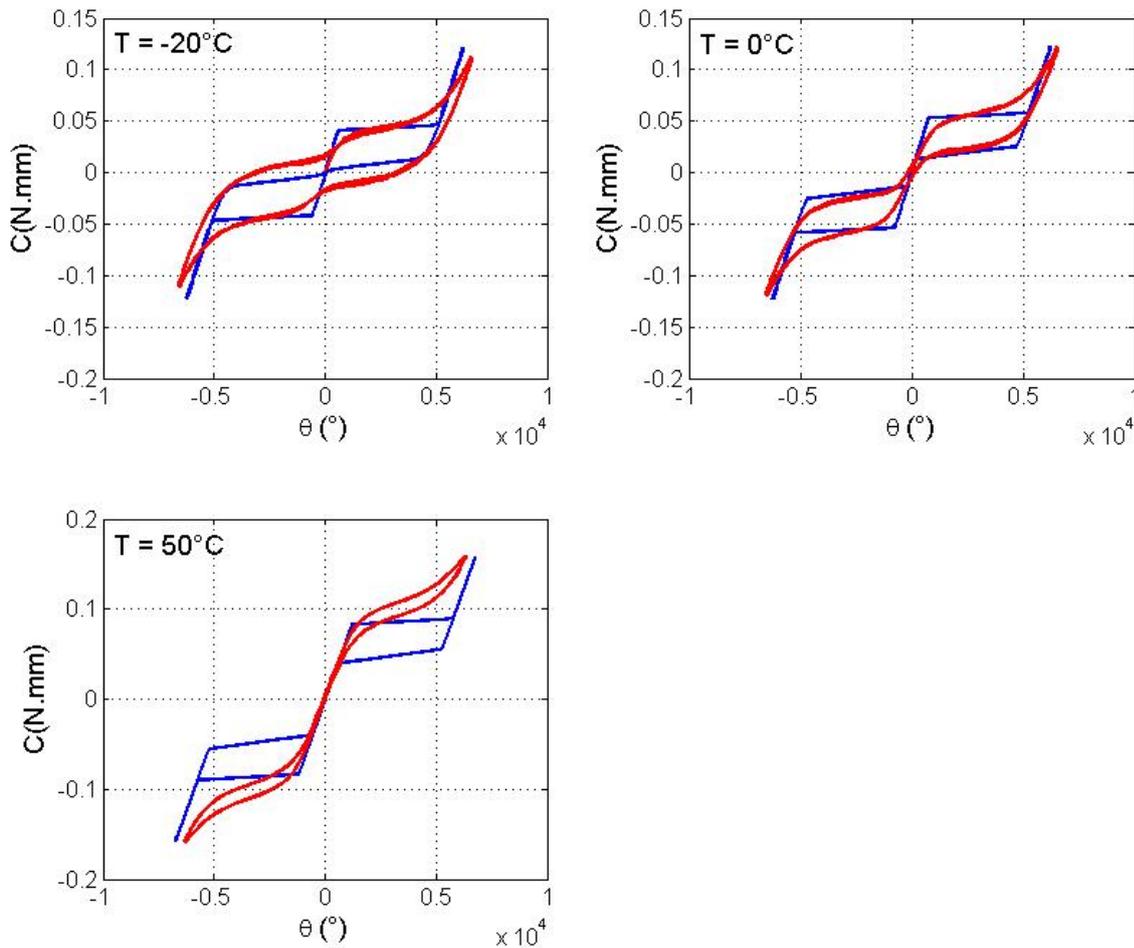
FIG. 4.8 – Comparaison des essais de torsion simple isothermes sous différentes températures négatives

## Simulations d'essais uni-axiaux et bi-axiaux proportionnels

### Simulations d'essais de traction-compression

Un des tests révélateurs pour éprouver une modélisation d'AMF est celui mettant en cause la dissymétrie traction-compression. En effet, cette dernière, bien que non prise en compte par plusieurs modèles, reste un enjeu important dans le monde des modèles des alliages à mémoire de forme.

La figure 4.11 présente une courbe de traction superposée à une courbe de compression (on place dans un plan  $|\sigma|$ - $|\varepsilon|$ ), toutes deux effectuées avec le même ensemble de paramètres. On vérifie une valeur plus haute en compression qu'en traction pour la contrainte seuil de début de transformation. De plus on relève une déformation de transformation totale plus courte pour le cas de la compression.



**FIG. 4.9** – Comparaison des essais de traction-torsion simple isothermes sous une charge en traction de 63 MPa

La figure 4.12 issue de la thèse de [Sadjadpour \(2006\)](#) présente deux courbes de simulations d'essais de traction-compression pour différentes températures. La dissymétrie est toujours conservée, de plus on observe aussi que les seuils de transformations sont sensibles à la température du matériau tout comme pour les essais en traction isothermes effectués au cours de Rounrobin.

### Simulations d'essais de bi-traction

Un autre pannel d'essais est celui des essais en traction bi-axiale. Ces essais permettent habituellement la construction de la surface de charge dans l'espace des contraintes. Nous proposons ici un ensemble de simulations d'essais bi-axiaux isothermes adiabatiques sous une température  $T = 280K$  (figure 4.13). On suppose que le tenseur des contraintes prend la forme suivante (l'angle  $\phi$  pouvant varier entre chaque essai) :

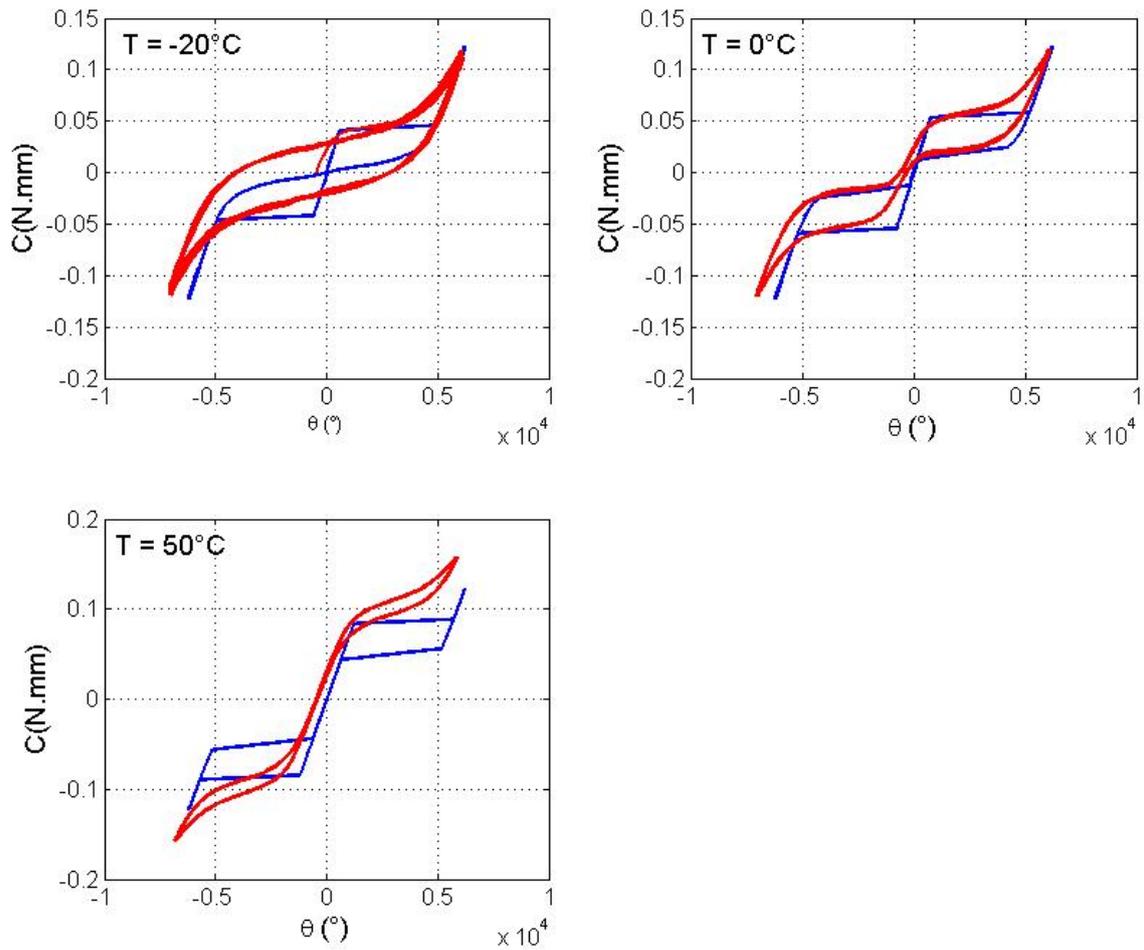


FIG. 4.10 – Comparaison des essais de traction-torsion simple isothermes sous une charge en traction de 127 MPA

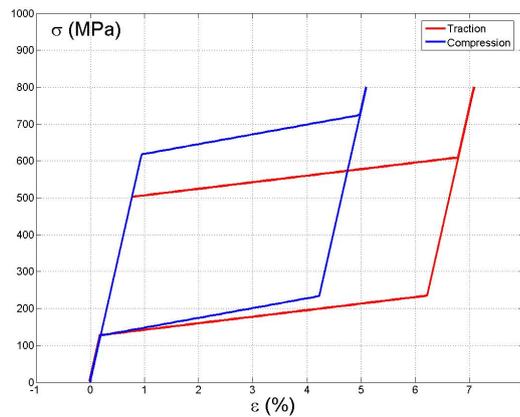


FIG. 4.11 – Simulations de courbes de traction et de compression dans le même plan  $|\sigma| - |\epsilon|$

$$\underline{\sigma} = \sigma_{max} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

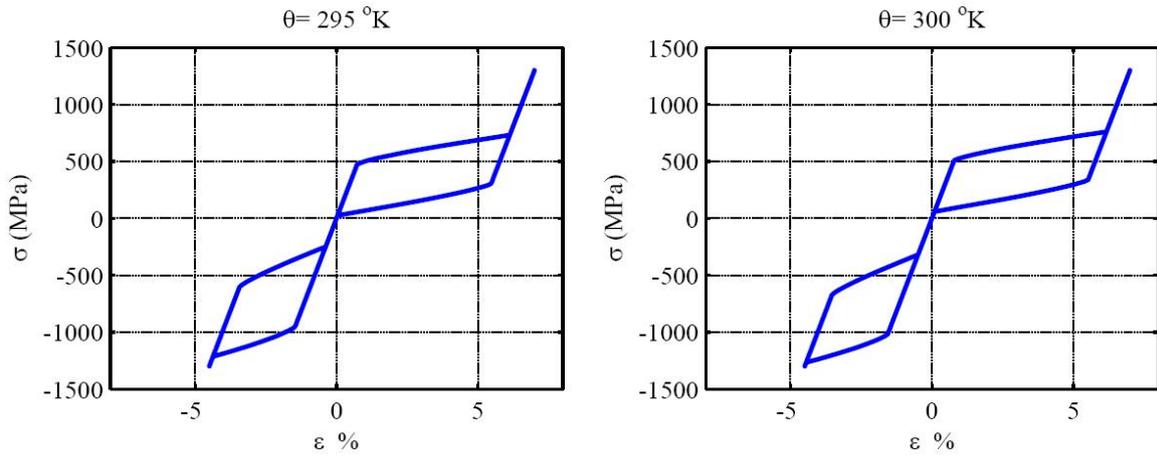


FIG. 4.12 – Simulation d'essais de traction-compression sous différentes température

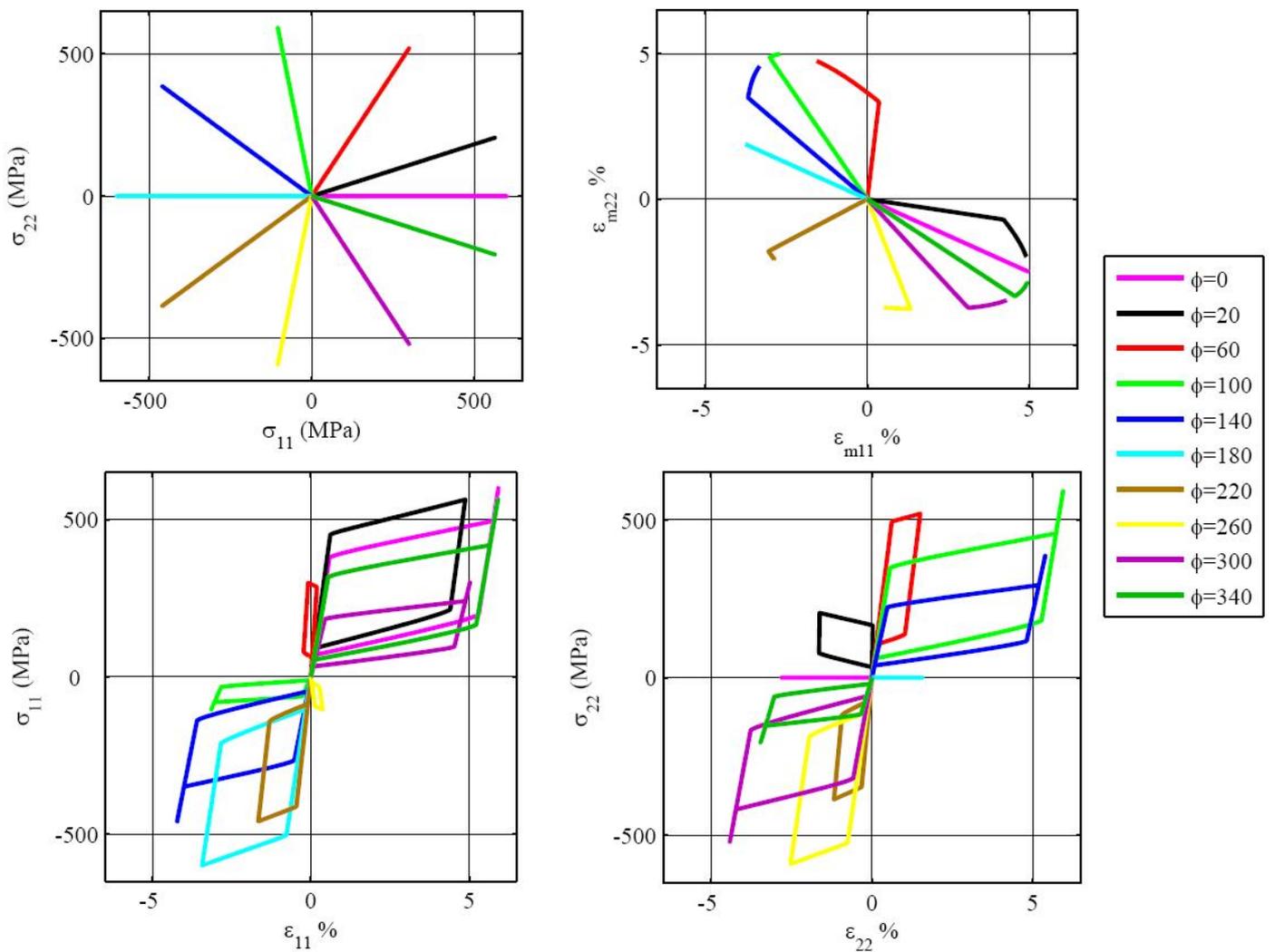


FIG. 4.13 – Simulation de divers essais de bi-traction proportionnels (*Sadjadpour (2006)*)

### Simulations d'essais non-proportionnels

On regarde ici une autre facette des enjeux des AMF : les chargements non-proportionnels. Ces derniers font intervenir des phénomènes de ré-orientation et font l'objet d'une attention particulière des modélisateurs. La figure 4.14 issue de Sadjadpour (2006) montre un exemple de chargement non-proportionnel sous forme de quarts de cercle. De la même façon, la figure 4.15 décrit un chargement sous forme de triangles. On note un comportement attendu de la part des résultats de simulation, cependant la non-confrontation à un set expérimental complet (chargements proportionnels et non-proportionnels) reste un manque pour une validation définitive du modèle dans cette partie.

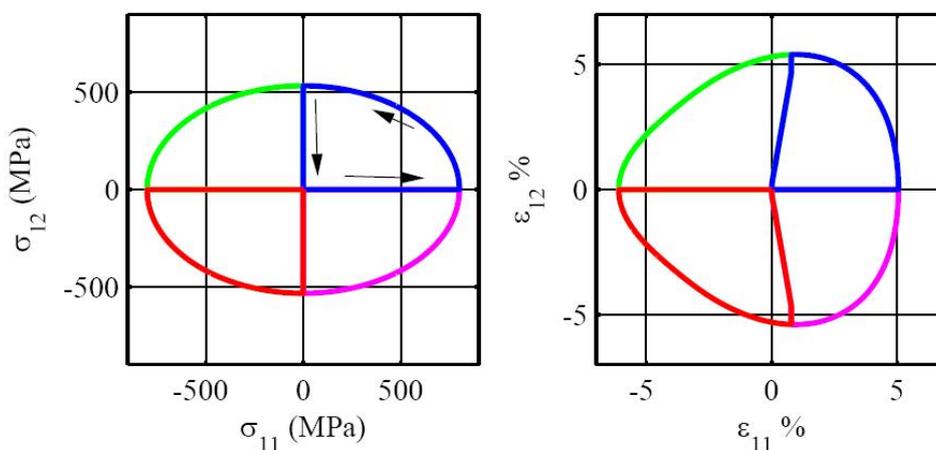


FIG. 4.14 – Simulation d'un essai non-proportionnel en forme de quart de cercle (Sadjadpour (2006))

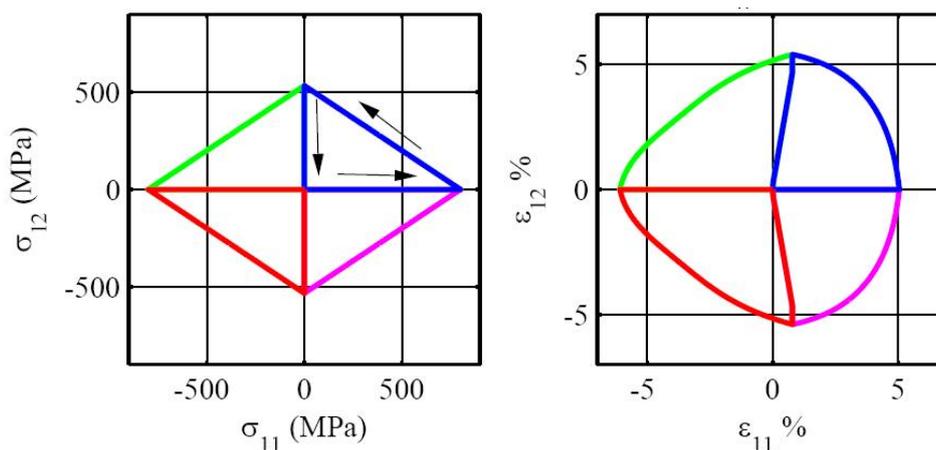


FIG. 4.15 – Simulation d'un essai non-proportionnel en forme de triangle (Sadjadpour (2006))

## 4.3 Conclusion

Le modèle 3D de Sadjadpour et Bhattacharya a été décrit puis implémenté et enfin confronté à des essais expérimentaux. Ce modèle original est basé, non pas sur une surface de charge dans

l'espace des contraintes, mais sur une surface de fin de transformation dans un espace défini par des déformations de transformation répondant à un critère.

L'identification qui n'avait jamais été réalisée sur ce modèle se montre relativement aisée et pratique. Il faut cependant garder à l'esprit que ce travail porte sur la forte hypothèse d'une transformation martensitique totale. Ceci revient au point faible de ce modèle : on se base sur une surface qui reste théoriquement accessible, mais pratiquement le matériau ne devient pas purement martensitique et cette surface ne peut pas être extraite directement de l'expérience.

Au final, ce modèle s'avère performant et efficace. Il parvient à simuler les chargements mécaniques les plus divers, il réussit, entre autres à prendre en compte la dissymétrie des AMF en traction-compression, les chargements non-proportionnels et les effets de la température du matériau au cours de ces essais.

En outre, sa construction simple et élégante permet de concevoir des améliorations et des ajouts à ses capacités. On pourra citer par exemple : une prise en compte de l'anisotropie pour des cas généraux et non plus seulement pour l'anisotropie transverse.



# Conclusion générale et perspectives

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire ont porté sur une nouvelle étude de la modélisation des alliages à mémoire de forme (AMF). Parmi les différentes approches, nous nous sommes concentrés principalement sur la notion de surfaces de transformation.

Au cours des recherches sur les AMF, différents points ou difficultés ont été soulevés. Dans chaque cas, on observe une phase de compréhension de la physique derrière les phénomènes étudiés et une phase de modélisation de ces phénomènes, les deux étant intrinsèquement liés. D'après la littérature des derniers modèles existants - que l'on peut considérer comme les plus aboutis jusqu'à présents - on peut distinguer les nombreux enjeux de la modélisation des AMF :

- un couplage thermo-mécanique fort,
- les phénomènes de localisation,
- les chargements non-proportionnels (associés à des processus de ré-orientation),
- le cyclage et la fatigue des AMF,
- l'hystérésis propre aux AMF,
- la distinction entre les comportements élastiques de l'austénite et de la martensite,
- la dissymétrie entre la traction et la compression.

C'est sur ce dernier point que le modèle du chapitre 3 se révèle être le plus efficace. En effet, la dissymétrie traction-compression se reflète le plus visiblement sur la surface de charge de début de transformation dans l'espace des contraintes. L'introduction du troisième invariant du tenseur du déviateur des contraintes  $\underline{S}_\sigma$  via la variable  $y_\sigma$  permet de jouer sur la forme de la surface de charge finale de manière adéquate, quelques paramètres suffisent alors à s'adapter au matériau étudié.

En basant le modèle sur une telle surface, on obtient un modèle multi-directionnel aux possibilités étendues. Grâce au choix de considérer les deux types de martensite  $M_T$  (auto-accommodante) et  $M_\sigma$  (orientée) indépendamment, on parvient à modéliser une grande partie des effets "classiques" des AMF (pseudo-élasticité, contrôle en température) mais aussi à prendre en compte le SD-effect (effet directionnel de chargement) ou encore la taille de l'hystérésis selon la température. De plus, on s'est attaché à bien distinguer les propriétés élastiques de l'austénite de celle de la martensite, l'hypothèse de leur égalité restant forte ( $E_M = \frac{2}{5}E_A$ ). Les travaux à faire à propos de ce modèle seraient ceux d'une meilleure intégration de l'équation de la chaleur, d'un passage

à une implantation dans un code éléments finis et enfin d'une prise en compte des chargements non-proportionnels. Ces derniers ont fait l'objet de travaux par [Saint-Sulpice et al. \(2009\)](#) en conservant cette philosophie basée sur les surfaces de début de transformation martensitique.

Une approche plus récente et novatrice a été présentée au chapitre 4 : celle de [Sadjadpour and Bhattacharya \(2007a\)](#). Cette dernière a été exploitée et testée face à des séries de tests expérimentaux. Un effort a été porté sur l'identification des paramètres, en effet le modèle est construit autour de la définition d'un espace convexe de déformation de transformation associée à la martensite  $\underline{\varepsilon}_m$ . Cette déformation reste une déformation théorique, non atteinte expérimentalement. Cependant avec quelques hypothèses, nous sommes parvenus à simuler les courbes expérimentales fournies. On trouve alors un modèle facilement exploitable, avec peu de paramètres aux vues d'autres travaux de modélisation, et dont les potentialités quant aux enjeux précédemment cités sont rassurantes.

En perspectives possibles de ce modèle, on peut citer une prise en compte de la distinction des différentes parties élastiques austénite/martensite, un ajout de variables de mémoire pour tenir compte des effets de cyclage. La ré-écriture du modèle devant alors bien sûr être refaite mais la structure ainsi que l'esprit de la modélisation resteraient inchangés.

Une partie des travaux présentés dans ce mémoire a aussi porté sur la dualité reliant le seuil de début de transformation martensitique en terme de contrainte  $\underline{\sigma}$  à l'espace des déformations  $\underline{\varepsilon}_m$  décrivant la fin de la transformation  $A \rightarrow M$ . Via une correspondance d'écriture mais surtout grâce à la normalité à la surface de charge vérifiée par [Bouvet et al. \(2002\)](#), on est parvenu à créer un pont mathématique entre l'espace des contraintes et celui des déformations de transformation. Au-delà d'une utilité pratique, cette dualité permet d'entériner des relations sur les égalités de travaux appliqués aux AMF et de proposer des relations de normalité appliquée maintenant à la surface de fin de transformation dans l'espace des  $\underline{\varepsilon}_m$ .

Il faut cependant souligner que des travaux d'approches plus conceptuels ont été effectués par [Bhattacharya and Schlömerkemper \(2009\)](#). Ils soulignent le fait qu'il existe deux approches différentes des seuils de début et de fin de transformation. En effet le seuil de début de transformation martensitique défini, c'est-à-dire le moment où les premiers grains de martensite apparaissent, est vérifié expérimentalement si l'on se place dans les conditions de Sachs : on considère que les contraintes sont réparties de façon homogène dans le matériau. De la même façon, la stabilisation du plateau de transformation est considérée comme totale de manière correcte en optant pour les conditions de Taylor : on considère alors que ce sont les déformations qui sont homogènes dans le matériau.

En clair, le début et la fin de la transformation martensitique devraient être vues chacun selon un angle d'approche différent, il faut par contre savoir qu'on ne considère qu'un seul et même module d'élasticité pour le matériau. Notre approche duale plus mathématique permet de pallier à cette

---

hypothèse.

Une compilation de données expérimentales, déjà amorcée par [Lexcelent and Schlömerkemper \(2007\)](#), regroupant des surfaces de charges pour des matériaux isotropes ainsi que des observations in situ sur le même matériau permettraient de mieux pouvoir statuer sur le lien entre les deux espaces considérés dans ces travaux de thèse et de les appliquer aux modèles correspondants.



# Bibliographie

- H. Andra, O. Hesebeck, L. Juhasz, and E. Schnack. Simulation of thermomechanical behavior of shape-memory alloys under multiaxial non-proportional stress. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 81 :S329–S330, 2001.
- F. Auricchio and R.L. Taylor. Shape mémoire alloys : modelling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143 :175–194, 1997.
- F. Auricchio, A. Reali, and U. Stefanelli. A three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation with permanent inelasticity. *International Journal of Plasticity*, 23 : 207–226, 2007.
- F. Auricchio, A. Reali, and U. Stefanelli. A macroscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behaviors and transformation-dependent elastic properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - In Press*, x :xxx–xxx, 2009.
- K. Bhattacharya and A. Schlömerkemper. Stress-induced phase transformations in shape-memory polycrystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis - In press*, 2009.
- D. Bigoni and A. Piccolroaz. Yield criteria for quasibrittle and frictional materials. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :2855–2878, 2004.
- C. Bouvet. *De l'uniaxial au multiaxial : comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme*. Thèse, Université de Franche-Comté, 2001.
- C. Bouvet, S. Calloch, and C. LExcellent. Mechanical behavior of a copper shape memory alloy under multiaxial proportional and non-proportional loadings. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124 :112–124, 2002.
- C. Bouvet, S. Calloch, and C. LExcellent. A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multi-axial proportional and non-proportional loadings. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23 :37–61, 2004.

- L.C. Brinson. One dimensional constitutive behavior of shape memory alloys : thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 4 :229–242, 1993.
- L.C. Brinson and M. Panico. Comments to the paper differential and integrated form consistency in 1-d phenomenological models for shape memory alloy constitutive behavior by v.r buravalla and khandelwal (int. j. solids and struct.44(2007) 4369-4381). *International Journal of Solids and Structures*, 46 :217–220, 2009.
- W.J. Buehler, J.V. Gilfrich, and R.C. Wiley. Effect of low-temperature phase changes on the mechanical properties of alloys near composition tni. *Journal of Applied Physics*, 34 :1475, 1963.
- S. Calloch. *Essais triaxiaux non-proportionnels et ingénierie des modèles de plasticité cyclique*. Thèse, Université de Paris VI, 1997.
- O. Cazacu and F. Barlat. A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals. *International Journal of Plasticity*, 20 :2027–2045, 2004.
- L.C. Chang and T.A. Read. Plastic deformation and diffusionless phase changes in metals-the gold-cadmium beta phase. *American Institute of Mining and Metallurgical Engineers Transactions*, 191 :47–53, 1951.
- K. Chastaing, A. Denquin, and R. Portier ans P. Vermaut. High-temperature shape memory alloys based on the ru-nb system. *Materials Science and Engineering*, A 481-482 :702–706, 2008.
- Y. Chemisky. *Modélisation du comportement macroscopique des alliages à mémoire de forme - Applications aux matériaux composites*. Thèse, Université Paul Verlaine de Metz, 2009.
- B.D. Coleman and W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13 :167–183, 1963.
- T. Duerig, A. Pelton, and D. Stöckel. An overview of nitinol medical applications. *Materials Science and Engineering*, A 273-275 :149–160, 1999.
- G.S. Firstov, J. Van Humbeeck, and Y.N. Koval. High-temperature shape memory alloys some recent developments. *Materials Science and Engineering*, A 378 :2–10, 2004.
- J.Y. Gauthier, A. Hubert, J. Abadie, N. Chaillet, and C. LExcellent. Nonlinear hamiltonian modelling of magnetic shape memory alloy based actuators. *Sensors and Actuators*, A 141 : 536–547, 2008.
- C. Grabe and O.T. Bruhns. Tension/torsion tests of pseudoelastic, polycrystalline niti shape memory alloys under temperature control. *Materials Science and Engineering*, A 481-482 : 109–113, 2008.

- C. Grabe and O.T. Bruhns. Path dependence and multiaxial behavior of a polycrystalline niti alloy within the pseudoelastic and pseudoplastic temperature regimes. *International Journal of Plasticity*, 25 :513–545, 2009.
- G. Gudehus. Elastoplastische stoffgleichungen für trockenen sand. *Ing. Archiv.*, 42 :3, 1973.
- H. Gugel, A. Schuermann, and W. Thiesen. Laser welding of niti wires. *Materials Science and Engineering*, A :668–671, 2008.
- D. Hartl, B. Volk, D.C. Lagoudas, F. Calkins, and J.H. Mabe. Thermomechanical characterization and modeling of ni60ti40 sma for actuated chevron. In *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pages 1–10, 2006.
- D. Helm and P. Haupt. Shape memory behaviour : modelling within continuum thermomechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 10 :827–849, 2003.
- H. Hencky. Über einige statisch bestimmte fälle des gleichgewichts in plastischen körpern. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1923.
- W.F. Hosford and T.J. Allen. Twinning and directional slip as a cause for a strength differential effect. *Metallurgical and Materials Transactions*, 4 :1424–1425, 1973.
- M. Huang, X. Gao, and L.C. Brinson. A multivariant micromechanical models for smas : Part2. polycrystal model. *International Journal of Plasticity*, 16 :1371–1390, 2000.
- P.V. Hull, S.L. Canfield, and C. Carrington. A radiant energy-powered shape memory alloy actuator. *Mechatronics*, 14 :757–775, 2004.
- J. Van Humbeeck. Mafesma : tools for modeling, design and control of smart structural systems based on shape memory alloys. <http://www.fzu.cz/departments/metals/sma/mafesma/index.php>, Mis en ligne en mai 2006, consulté le 05 avril 2009.
- G. Butler J.H. Mabe, F. Calkins. Boeing’s variable geometry chevron, morphing aerostructure for jet noise reduction. In *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Newport, Rhode Island*, pages 1–19, 2006.
- F. Khelifaoui. *Effet des traitements thermomécaniques sur les transformations displacives de l’alliage Ti-Ni*. Thèse, INSA de Lyon, 2000.
- D.P. Koistinen and R.E. Marburger. A general equation prescribing the extent of the austénite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and plain carbon steels. *Acta Metallurgica*, 7 :59–69, 1959.
- S. Krenk. Family of invariant stress surfaces. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 :201–208, 1996.

- P.V. Lade and J.M. Duncan. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 101 :1037–1053, 1975.
- D.C. Lagoudas, P.B. Entchev, P. Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, and X. Gao. Shape memory alloys, part ii : Modeling of polycrystals. *Mechanics of Materials*, 38 :430–462, 2006.
- M.R. Laydi and C. LExcellent. Yield criteria for shape memory materials : Convexity conditions and surface transport. *Mathematics and Mechanics of Solids - In Press*, 2008.
- S. Leclercq and C. LExcellent. A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44 :953–980, 1996.
- J. Lemaitre, P.A. Boucard, and F. Hild. *Résistance Mécanique des solides*. Dunod, 2007.
- V.I. Levitas. Thermomechanical theory of martensitic phase transformations in inelastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :889–940, 1998.
- C. LExcellent and A. Schlömerkemper. Comparison of several models for the determination of the phase transformations yield surface in shape-memory alloys with experimental data. *Acta Materialia*, 55 :2995–3006, 2007.
- C. LExcellent, H. Tobushi, A. Ziólkowski, and K. Tanaka. Thermodynamical model of reversible r-phase transformation in tini shape memory alloy. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 58 :51–57, 1994.
- C. LExcellent, A. Vivet, C. Bouvet, S. Calloch, and P. Blanc. Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :2717–2735, 2002.
- C. LExcellent, M.L. Boubakar, C. Bouvet, and S. Calloch. About modelling the shape memory alloy behaviour based one the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :613–626, 2006.
- C. LExcellent, R. Laydi, and E. Gibeau. Extension of a micromechanics-inspired constitutive model for shape memory alloys performed by sadjadjpour and bhattacharya : yield surfaces transport. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik - submitted*, 2009.
- Y. Liang, Y. Kuga, and M. Taya. Design of membrane actuators based on ferromagnetic chape memory alloy composite for synthetic jet applications. *Sensors and Actuators*, A 125 :512–518, 2006.

- 
- A.A. Likhachev, A. Sozinov, and K. Ullakko. Different modeling concepts of magnetic shape memory and their comparison with some experimental results obtained in ni-mn-ga. *Materials Science and Engineering, A* 378 :513–518, 2004.
- R. Mahnken and S. Wilmanns. Simulation of asymmetric effects for shape memory alloys by decomposition of transformation strains. *Computational Materials Science*, 42 :295–305, 2008.
- H. Matsuoka. On the significance on the spatial mobilized plane. *Soils Foundations (Japan)*, 16 : 91–100, 1976.
- L.L. Mills and R.M. Zimmerman. Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. *Journal ACI. Proc.*, 67 :10, 1970.
- C. Müller and O.T. Bruhns. A thermodynamic finite-strain model for pseudoelastic shape memory alloys. *International Journal of Plasticity*, 22 :1658–1682, 2006.
- S. Nemat-Nasser, J.Y. Choi, W.G. Guo, and J.B. Isaacs. Very high strain-rate response of a niti shape-memory alloy. *Mechanics of Materials*, 37 :287–298, 2005.
- V. Novak and C. Lexcellent. Sma modelling workshop. In *Institute of Physics, v.v.i. Academy of Sciences of the Szech Republic*, 5-7 mai 2008.
- N.S. Ottosen. A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 103 :527–535, 1977.
- M. Panico and L.C. Brinson. A three-dimensional phénoménological model for martensite reorientation in shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, 55 :2941–2511, 2007.
- M. Panico and L.C. Brinson. Computational modeling of porous shape memory alloys. *International Journal of Solids and Structures*, 4 :5613–5626, 2008.
- E. Patoor, A. Eberhardt, and M. Berveiller. Thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Archives of Mechanics*, 40 :755–794, 1988.
- E. Patoor, A. Eberhardt, and M. Berveiller. Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys. *Journal de Physique IV*, C1 :6 :277–292, 1996.
- E. Patoor, D.C. Lagoudas, P.B. Entchev, L.C. Brinson, and X. Gao. Shape memory alloys, part i : General properties and modeling of single crystals. *Mechanics of Materials*, 38 :391–429, 2006.
- B. Peultier, T. Ben Zineb, and E. Patoor. Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. application to structure computation by fem. *Mechanics of Materials*, 38 :510–524, 2006.
-

- J. Podgorski. General failure criterion for isotropic media. *Journal of Engineering Mechanics*, 111 :188–201, 1985.
- P. Popov and D.C.Lagoudas. A 3-d constitutive model for shape memory alloys incorporating pseudoelasticity and detwinning of self-accomodated martensite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23 :1679–1720, 2007.
- Z.Q. Li Q.P. Sun. Phase transformation in superelastic niti polycrystalline micro-tubes under tension and torsion—from localization to homogeneous deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :3797–3809, 2002.
- B. Raniecki and C. Lexcellent. Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17 :185–205, 1998.
- B. Raniecki and Z. Mróz. Yield or martensitic phase transformation conditions and dissipation functions for isotropic, pressure-insensitive alloys exhibiting sd effect. *Acta Mechanica*, 195 : 81–102, 2008.
- B. Raniecki, C. Lexcellent, and K. Tanaka. Thermodynamic models of pseudoelastic behaviour of shape memory alloys. *Archives of Mechanics*, 44 :261–284, 1992.
- S. Reese and D. Christ. Finite deformation pseuso-elasticity of shape memory alloys - constitutive modelling and finite element implementation. *International Journal of Plasticity*, 24 :455–482, 2008.
- J. Rejzner. *Modélisation des alliages à mémoire de forme soumis à des sollicitations multiaxiales ou des gradients de contraintes*. Thèse, Université de Fanche-Comté, 2000.
- T. Saburi, M. Yoshida, and S. Nenno. Deformation behavior of shape memory ti-ni alloy crystals. *Scripta Metallurgica*, 18 :363–366, 1984.
- A. Sadjadpour. *A Micromechanics-Inspired Three-Dimensional Constitutive Model for The Thermomechanical Response of Shape-Memory Alloys*. Thèse, California Institute of Technology, 2006.
- A. Sadjadpour and K. Bhattacharya. A micromechanics-inspired constitutive model for shape-memory alloys. *Smart Materials ans Structures*, 16 :1751–1765, 2007a.
- A. Sadjadpour and K. Bhattacharya. A micromechanics inspired constitutive model for shape-memory alloys : the one-dimensional case. *Smart Materials ans Structures*, 16 :S51–S62, 2007b.
- L. Saint-Sulpice, S. Arbab Chirani, and S. Calloch. A 3d super-elastic model for shape memory alloys taking into account progressive strain under cyclic loadings. *Mechanics of Materials*, 41 : 12–26, 2009.

- 
- T.W. Shield, P.H. Leo, and C.C. Grebner. Quasi-static extension of shape memory wires under constant load. *Acta Materialia*, 45 :67–74, 1997.
- P. Sittner, Y. Hara, and M. Tokuda. Experimental-study on the thermoelastic martensitic-transformation in shape-memory alloy polycrystal induced by combined external forces. *Metallurgical and Materials Transactions*, 26 :2923–2935, 1995.
- J. Slutsker and A.L. Roytburd. Control of intrinsic instability of superelastic deformation. *International Journal of Plasticity*, 18 :1561–1581, 2002.
- A. Souza, E.N. Mamiya, and N. Zouain. Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17 :789–806, 1998.
- W.A. Sptizig and O. Richmond. The effect of pressure on the flow stress of metals. *Acta Metallurgica*, 32 :457–463, 1984.
- W.A. Sptizig, R.J. Sober, and O. Richmond. The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and hy-80 steels and its implication for plasticity theory. *Metallurgical and Materials Transactions*, 7A :1703–1710, 1976.
- Q.P. Sun and K.C. Hwang. Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys, part i. derivation of general relations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :1–17, 1993a.
- Q.P. Sun and K.C. Hwang. Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys, part ii. study of the individual phenomena. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :19–33, 1993b.
- K. Taillard. *Etude du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme sous sollicitations multiaxiales complexes*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, 2006.
- K. Taillard, S. Arbab Chirani, S. Calloch, and C. Lexcellent. Equivalent transformation strain and its relation with martensite volume fraction for isotropic and anisotropic shape memory alloys. *Mechanics of Materials*, 48 :151–170, 2008.
- P. Thamburaja and L. Anand. Polycrystalline shape-memory materials : effect of crystallographic texture. *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, 49 :709–737, 2001.
- H. Tobushi, T. Hachisuka, S. Yamada, and P.H. Lin. Rotating-bending fatigue of a tini shape-memory alloy wire. *Mechanics of Materials*, 26 :35–42, 1997.
- K. Ullakko, J.K. Huang, V.V. Kokorin, and R.C. O’Handley. Magnetically controlled shape memory effect in ni<sub>2</sub>mnga intermetallics. *Scripta Materialia*, 36 :1133–1138, 1997.
-

- P. Vacher and C. LExcellent. Study of a pseudoelastic behavior of polycrystalline shape memory alloys by resistivity measurements and acoustic emission. In *ICM VI*, volume 6, pages 231–236, 1991.
- B. Vieille, J.F. Michel, M.L. Boubakar, and C. LExcellent. Validation of a 3d numerical model of shape memory alloys pseudoelasticity through tensile and bulging tests on copper sheets. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49 :280–297, 2007.
- R. von Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Göttinger Nachrichten Math.-Phys*, 1 :582–592, 1912.
- W. Zaki and Z. Moumni. A 3d model of the cyclic thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :2427–2454, 2007.
- L. Zhao, N.H. van Dijk, E. Brück, J. Sietsma, and S. van der Zwaag. Magnetic and x-ray diffraction measurements for the determination and retained austenite in trip steels. *Materials Science and Engineering*, A313 :145–152, 2001.