THESE

Présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE
Spécialité : Mathématiques et Applications

THEORIE DES PSEUDO-MESURES UNE PRESENTATION CONSTRUCTIVE DE L'INTEGRALE DE LEBESGUE

Par

Daniel ENGEL

Soutenue le 13 février 2007 devant la commission d'Examen

Président du Jury	G. GODEFROY	Directeur de Recherche, CNRS Université Pierre et Marie curie, Paris 6
Rapporteurs	T. COQUAND	Professeur, Göteborg University
	G. GODEFROY	Directeur de Recherche, CNRS Université Pierre et Marie curie, Paris 6
Examinateurs	J. CRESSON	Professeur des Universités Université de Pau et des Pays de l'Adour
	G. LANCIEN	Maître de Conférences HDR, Université de Besançon
	H. LOMBARDI	Maître de Conférences HDR, Université de Besançon
	S. NEUWIRTH	Maître de Conférences HDR, Université de Besançon

Diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

René Descartes. Discours de la méthode.

Une fonction définie presque partout n'est définie nulle part.

Anonyme.

THEORIE DES PSEUDO-MESURES

Une présentation constructive de l'intégrale de Lebesgue

PLAN DE LA THESE

THEORIE DES PSEUDO-MESURES

Une présentation constructive de l'intégrale de Lebesgue

Daniel ENGEL

Contrairement aux présentations traditionnelles de l'intégrale de Lebesgue, qui nécessitent des raisonnements compliqués sur des objets relativement peu explicites (boréliens, ensembles de mesure nulle, etc...), nous proposons une théorie de nature différente, élaborée à partir de concepts qui nous semblent plus significatifs et performants.

Cette présentation inédite permet de définir avec une clarté absolue les objets fondamentaux et d'aboutir rapidement à des théorèmes substantiels. Son cadre général est celui des espaces de Riesz, c'est-à-dire des espaces vectoriels ordonnés possédant une *valeur absolue* (à valeurs dans l'ensemble des éléments positifs de l'espace).

Pour plus de simplicité nous étudions d'abord le cas d'un intervalle compact $\mathbf{I}$ de **R.**

L'étape initiale consiste à considérer l'espace des *formes linéaires continues sur l'espace des fonctions étagées sur* $\mathbf{I}$ (muni de la topologie uniforme). Etant donné que de telles formes n'ont pas de dénomination standard dans la littérature mathématique, nous avons décidé de les appeler *pseudo-mesures (*),* par analogie avec les mesures proprement dites. On montre d'ailleurs que les mesures s'identifient canoniquement à des pseudo-mesures particulières : les pseudo-mesures *hypercontinues*.

Nous notons E l'espace des fonctions étagées sur $\mathbf{I}$ et PM l'espace des pseudo-mesures sur $\mathbf{I}$.

Via l'intégration, E s'applique linéairement dans PM sur un sous-espace noté $\underline{E}$, qui est donc l'espace des formes linéaires sur E du type : $h \longrightarrow \int g\, h\, dx$, où g est une fonction étagée quelconque.

L'espace PM est un espace de Riesz. C'est aussi un espace de Banach pour la norme duale de la norme uniforme. Nous définissons alors l'espace L^1 des **classes de fonctions sommables** comme la **fermeture** de $\underline{E}$ dans PM. Les classes de fonctions sommables se présentent donc comme des pseudo-mesures (en fait des mesures) et l'intégrale d'une telle classe est la valeur que prend la forme linéaire sur la fonction constante **1**.

On obtient ainsi quasi-trivialement l'espace L^1 ainsi que ses propriétés principales, à savoir sa complétude et la densité de $\underline{E}$.

Nous cherchons ensuite à étendre l'action des mesures à des fonctions plus générales que les fonctions étagées : d'abord aux fonctions *pseudo-réglées*, puis aux fonctions *universelles*, ce qui permet de démontrer le théorème de *convergence dominée* de Lebesgue dans toute sa généralité.

Quant à l'espace FO des **classes de fonctions mesurables,** il est défini comme le **complété** de L^1 pour la *convergence exacte*, cette **seconde** complétion s'effectuant par la méthode des suites de Cauchy. L'espace FO est lui aussi un espace de Riesz, mais sans être un espace de Banach. On peut néanmoins y définir une "pseudo-norme" pour laquelle cet espace est complet.

L'ensemble de ces résultats se généralise de manière naturelle à **R** muni de la mesure de Lebesgue ou d'une autre mesure *positive*.

Le passage aux espaces $\mathbf{R}^n$ ne pose pas non plus de problèmes fondamentalement nouveaux, si ce n'est l'incontournable théorème de Fubini dont la démonstration repose *in fine* sur le théorème de Lebesgue.

Nous complétons notre travail par le traitement d'un certain nombre d'applications classiques (théorème de Titchmarsh, transformée de Fourier...).

Dans la dernière partie nous développons l'intégration des fonctions et des mesures *réelles ou complexes* sur **Z**_p (les nombres p-adiques), qui s'inspire des mêmes principes que sur les espaces euclidiens. Comme applications nous étudions de manière approfondie les séries de Fourier et la convolution sur **Z**_p avec de nombreux exemples explicites.

En conclusion nous pensons que le changement de perspective opéré dans ce travail contribue à une *constructibilité* et à une *compréhensibilité* accrues des différents chapitres des cours de théorie de la mesure. Il permet de plus d'unifier le traitement, traditionnellement séparé, des mesures et des fonctions sommables/mesurables.

(*) Le terme *pseudo-mesure* s'utilise déjà en mathématiques pour désigner les formes linéaires continues sur l' « algèbre du disque » (algèbre des fonctions continues dans le disque fermé et analytiques dans le disque ouvert, que l'on munit de la topologie uniforme). Néanmoins, compte tenu du contexte différent dans lequel nous utilisons ce trerme, aucune confusion ne devrait en résulter.

INTRODUCTION

Ce travail dérive d'une insatisfaction permanente devant les présentations habituelles de l'intégrale de Lebesgue. Objectivement parlant, en effet, quoi de plus informe qu'un borélien, quoi de plus indigent qu'un ensemble de mesure nulle, quoi de plus insaisissable qu'une fonction définie presque partout ?

Nous sommes d'avis que de telles notions sont trop alambiquées pour contribuer de façon pertinente à l'édification d'une théorie aussi fondamentale que la théorie de l'intégration. C'est pourquoi nous avons élaboré de nouveaux outils conceptuels, plus concrets et plus performants, destinés à rendre l'intégrale aussi limpide et intelligible que possible.

Au départ nous avons cherché ce que pourrait être une définition *globale* des « classes de fonctions sommables ». Effectivement, plutôt que de définir ces classes *de l'intérieur*, à partir de leur *contenu*, n'y aurait-il pas intérêt à les regarder *de l'extérieur* et à les décrire d'un point de vue résolument opératoire ?

Or ces classes, via l'intégration, ont pour propriété naturelle d'agir linéairement sur certains espaces de fonctions ; de fait, *les classes de fonctions sommables se comportent exactement comme des mesures*. Cette observation constitue le *principe fondateur et moteur* de notre exposé sur la théorie de l'intégration.

(Nous nous limiterons, pour l'essentiel de cette introduction, au cas de l'intégration de Lebesgue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$).

Notre idée de base consiste à considérer une classe de fonctions sommables comme une *forme linéaire continue sur l'espace des fonctions étagées* (muni de la topologie uniforme). L'intégrale des fonctions de la classe est alors définie comme la valeur que prend la forme linéaire sur la fonction constante $\mathbb{1}$.

Précisons tout de suite, et c'est évidemment capital, que l'inverse n'est pas vrai : toute forme linéaire continue sur l'espace des fonctions étagées ne correspond pas nécessairement à une classe de fonctions sommables.

Il nous faut d'abord résoudre un problème de terminologie : il n'existe en effet aucune dénomination spécifique pour les formes linéaires continues sur l'espace des fonctions *étagées* : nous proposons de les appeler des pseudo-mesures, comme l'annonce le titre de notre travail.

Bien entendu le concept de pseudo-mesure est fort proche du concept de mesure, c-à-d d'une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions *continues*. Mais cette définition des mesures souffre d'une défectivité certaine, puisqu'elle ne fournit pas *directement* la mesure d'un *intervalle*, ce qui est quand même assez consternant ! On ne l'obtient que par un processus d'extension relativement long et lourd, qu'il vaudrait mieux réserver à des fonctions plus compliquées que ne le sont de simples fonctions étagées !

D'autre part approcher des fonctions étagées par des fonction continues constitue une opération peu naturelle, en rupture épistémologique avec la définition de l'intégrale de Riemann. Il est beaucoup plus logique et productif de considérer que les mesures sont faites a priori pour mesurer des intervalles, objectif rempli naturellement par les pseudo-mesures.

D'ailleurs, par densité, les pseudo-mesures se trouvent automatiquement définies sur tout l'espace des fonctions *réglées*. Dès lors, par restriction aux fonctions continues, les pseudo-mesures deviennent ipso facto des mesures ; l'espace des mesures est donc isométrique au *quotient* de l'espace des pseudo-mesures par le sous-espace des pseudo-mesures nulles sur l'espace des fonctions continues.

Mais de manière plus significative encore, l'espace des mesures est isométrique au *sous-espace* des pseudo-mesures vérifiant une certaine propriété d'« *hypercontinuité* » (équivalente à la σ-additivité). Les mesures peuvent donc être définies directement comme des pseudo-mesures et agir ainsi directement sur les fonctions réglées.

D'autre part de nombreux concepts et théorèmes associés aux mesures (ou aux fonctions) se généralisent sans difficulté aux pseudo-mesures. L'espace des pseudo-mesures constitue donc bien l'espace naturel dans lequel traiter tous les problèmes relatifs à l'intégration.

Enfin, tous les espaces de fonctions, mesures et pseudo-mesures que nous définirons appartiennent à un même type d'espace ordonné : les espaces de Riesz, c-à-d les espaces vectoriels possédant un *ordre* et une *valeur absolue* (à valeurs dans l'ensemble des éléments positifs de l'espace et non dans $\mathbb{R}^+$). Nous emprunterons donc une large part de notre formalisme à la théorie générale de ces espaces.

****

Voyons maintenant précisément comment nous définissons l'espace $\mathcal{L}^1$ des classes de fonctions sommables pour la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[a,b]$.

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions étagées sur $[a,b]$, muni de la norme uniforme, et $\mathcal{PM}$ le dual normé (ou dual continu) de $\mathcal{E}$. Les éléments de $\mathcal{PM}$ sont appelés les pseudo-mesures sur $[a,b]$. Si $f \in \mathcal{E}$, on note $\{f\}$ la pseudo-mesure

$$\boxed{\mathcal{E} \to \mathbb{R} \ : \ g \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}\ .$$

$\{f\} \in \mathcal{PM}$ s'appelle la pseudo-mesure associée à f.

On note $\| \ \|_\star$ la norme duale dans $\mathcal{PM}$; on a en particulier

$$\forall f \in \mathcal{E} \quad \|\{f\}\|_\star = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Un résultat classique et élémentaire nous dit que $\mathcal{PM}$ est complet pour la norme duale.

On pose $\underline{\mathcal{E}} = \{\, \{f\} \mid f \in \mathcal{E}\,\} \subset \mathcal{PM}$. Nous **définissons** alors $\mathcal{L}^1$ comme la ***fermeture de*** $\underline{\mathcal{E}}$ ***dans*** $\mathcal{PM}$ pour la norme duale. Les éléments de $\mathcal{L}^1$ sont appelés les fonctionnelles sommables sur $[a,b]$.

Contrairement aux présentations traditionnelles, nous obtenons ainsi directement et quasi-trivialement l'espace $\mathcal{L}^1$, ainsi que ses propriétés fondamentales (en particulier sa complétude et la densité de $\underline{\mathcal{E}}$). On démontre de plus sans difficulté que les fonctionnelles sommables, définies au départ comme des pseudo-mesures, sont en fait des mesures.

Par des procédés analogues nous pouvons de même définir l'espace $\mathcal{L}^2$ des fonctionnelles hilbertiennes et l'espace $\mathcal{B}$ des fonctionnelles bornées ; on a d'ailleurs $\underline{\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1}$.

Sur l'espace $\mathcal{L}^1$ nous pouvons définir, en plus de la convergence en norme, quatre autres modes de convergence pour les suites : les convergences ***en mesure***, ***presque partout***, ***plate*** et ***exacte***. La convergence exacte est la plus fine d'entre elles. Classiquement parlant, une suite de fonctions f_n converge *exactement* vers la fonction f ssi le *support* de $f_n - f$ converge presque partout vers 0. Bien entendu cette définition doit étre adaptée au fait que les éléments de $\mathcal{L}^1$ sont des fonctionnelles et non des fonctions.

Nous construisons alors l'espace $\mathcal{FO}$ des classes de fonctions mesurables, que nous appellerons simplement fonctionnelles, comme le ***complété de*** $\boldsymbol{\mathcal{L}^1}$ pour la convergence ***exacte***. Plus exactement nous définissons cet espace comme le ***complété de*** $\mathcal{B}$, ce qui permet une définition plus naturelle de la multiplication des fonctionnelles.

A défaut d'un procédé plus spécifique ou plus suggestif, cette ***seconde*** complétion est réalisée par la méthode des suites de Cauchy.

Il faut savoir que les quatre modes de convergences cités plus haut engendrent le *même* complété pour $\mathcal{L}^1$, à savoir $\mathcal{FO}$; néanmoins c'est l'utilisation de la convergence exacte qui permet d'obtenir le plus directement et le plus tangiblement les propriétés de $\mathcal{FO}$.

Remarquons que nous avons défini les (classes de) fonctions mesurables *après* les (classes de) fonctions sommables, contrairement à la plupart des théories qui construisent les fonctions sommables *à partir* des fonctions mesurables. Or eu égard à la complexité des fonctions mesurables et à l'intérêt prépondérant des fonctions sommables, il semble manifestement plus avantageux de procéder comme nous l'avons fait : définir le plus rapidement, le plus simplement et le plus naturellement possible les fonctions sommables, en réservant la définition des fonctions mesurables pour un stade plus avancé de la théorie.

****

Si avec cette dernière extension notre théorie atteint ses frontières naturelles, il reste encore un problème important à résoudre. Notre intégrale en effet ne permet pas d'intégrer d'autres fonctions que les fonctions réglées. Une telle limitation, acceptable en dimension un, devient par trop contraignante en dimension supérieure : la fonction caractéristique d'un disque, par exemple, n'est pas une fonction réglée. Soulignons néanmoins que pour nombre d'applications il est inutile de savoir intégrer des *fonctions* : l'intégration des *fonctionnelles* suffit ! C'est d'ailleurs ce *découplage* entre fonctions et fonctionnelles qui permet de simplifier l'exposition de nombreuses questions relatives à l'intégration.

Il nous faut donc étendre l'intégration (par rapport à une mesure quelconque) à une classe plus vaste de fonctions que les fonctions réglées. C'est la partie la plus délicate de la théorie ; elle est d'ailleurs intimement liée à la démonstration du théorème de « convergence dominée » de Lebesgue, qui, contrairement au théorème de « convergence monotone », n'est applicable qu'à des fonctions, et non à des fonctionnelles. Cette extension est basée sur l'étude approfondie de l'espace des fonctions positives semi-continues supérieurement, dont la propriété de semi-complétude constitue la clé de voûte du raisonnement.

Ici encore il est nécessaire d'opérer au moyen de deux extensions successives. Nous étendons d'abord l'intégrale aux fonctions pseudo-réglées, qui sont les limites simples bornées des fonctions étagées, puis dans un second temps aux fonctions que nous appelons universelles. Ces fonctions ne sont autres, dans la terminologie traditionnelle, que les fonctions universellement mesurables et sommables (ce qui implique qu'elles sont bornées).

L'espace des fonctions universelles, que nous notons $\mathcal{W}$, jouit de la propriété remarquable d'être *complet* pour la *convergence simple bornée*. On en déduit qu'il contient toutes les fonctions bornées « imaginables », et en particulier toutes les fonctions boréliennes bornées.

Remarquons qu'un tel espace est bien plus commode à utiliser que l'espace des fonctions boréliennes, car les fonctions universelles sont approximables par des fonctions élémentaires (par des fonctions pseudo-réglées, elles mêmes approximables par des fonctions étagées), alors que les fonctions boréliennes, d'après leur définition même, ne sont approximables par des fonctions élémentaires qu'à travers une induction transfinie.

Ce processus d'extension est *voisin* de celui qui est proposé dans les présentations traditionnelles. Il en diffère néanmoins sur deux points essentiels :

1°) Nous procédons à cette extension alors que nous avons *déjà* défini $\mathcal{L}^1$, et non pas dans l'*objectif* de définir $\mathcal{L}^1$! La complexité relative du processus d'extension ne vient donc pas altérer la description intrinsèquement simple des classes de fonctionnelles sommables. De plus la connaissance préalable de $\mathcal{L}^1$ (et plus généralement de $\mathcal{PM}$) permet d'améliorer considérablement la lisibilité et l'intelligibilité des démonstrations.

2°) Nous ne construisons pas les fonctions mesurables *pour une mesure donnée*, mais les fonctions mesurables et sommables *simultanément pour toutes les mesures*. Ceci permet de ne faire appel qu'à un seul espace de fonctions au lieu d'avoir à considérer autant d'espaces que de mesures.

Une fois $\mathcal{W}$ construit, nous pouvons définir pour tout $f \in \mathcal{W}$ la fonctionnelle

$$\boxed{\{f\} \;:\; \mathcal{E} \to \mathrm{I\!R} \;:\; g \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}\,.$$

On démontre alors que l'application $\mathcal{W} \to \not{\mathcal{B}} \;:\; f \mapsto \{f\}$ est *surjective*, ce qui équivaut à dire que toute fonctionnelle bornée peut être « représentée » par une fonction universelle.

Notre idée de base se ramène donc en fait, pour les fonctionnelles bornées, à identifier la classe de la fonction universelle f avec la fonctionnelle $f\,dx$; c'est la *canonicité* de la mesure de Lebesgue dx qui autorise d'ailleurs une telle identification.

****

L'ensemble des résultats que nous avons exposés jusqu'à présent se généralise de manière naturelle à $\mathbb{R}$, muni de la mesure de Lebesgue ou d'une autre mesure positive. Le passage aux espaces $\mathbb{R}^n$ ne pose pas non plus de problèmes fondamentalement nouveaux, si ce n'est l'incontournable théorème de Fubini. La démonstration consiste à étendre progressivement le théorème à des epaces de fonctions de plus en plus généraux, et repose *in fine* sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Nous complétons cette partie par un certain nombre d'applications classiques (théorème de Titchmarsh, transformée de Fourier, ...).

Dans l'avant dernière partie nous définissons les espaces

$$\mathcal{FO}(\tilde{\mu}) \supset \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \supset \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}) \supset \mathcal{B}(\tilde{\mu})$$

où $\tilde{\mu}$ est une mesure normée *positive* sur $\mathbb{R}^n$. Leurs éléments sont appelés les $\tilde{\mu}$–fonctionnelles, respectivement *générales, sommables, hilbertiennes* et *bornées*. Leurs propriétés sont analogues à celle des espaces étudiés précédemment, pour lesquels $\tilde{\mu}$ est la mesure de Lebesgue sur un intervalle ou un pavé compacts.

Néanmoins il serait maladroit de vouloir encore identifier la classe *modulo* $\tilde{\mu}$ d'une fonction universelle f avec la mesure $f\,\tilde{\mu}$. Il faut plutôt considérer que la classe de f est représentée par l'expression $\boxed{\dfrac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}}$, c-à-d par le quotient (formel) de deux mesures. De cette manière on préserve la cohérence de la notation intégrale, puisqu'on peut effectivement écrire $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,\tilde{\mu} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\mu}}$.

Ces espaces constituent le cadre naturel dans lequel traiter des notions classiques en théorie des probabilités, comme la *convergence en loi* et le *conditionnement*.

Dans la dernière partie nous développons l'intégration des fonctions et des mesures *réelles* ou *complexes* sur $\mathbb{Z}_p$, en nous inspirant des mêmes principes que sur les espaces euclidiens, la mesure de Haar prenant le relais de la mesure de Lebesgue. Signalons que sur $\mathbb{Z}_p$ il y a *identité de définition* entre fonction continue et fonction réglée, et donc aussi entre mesure et pseudo-mesure. Comme applications nous étudions de manière approfondie les séries de Fourier et la convolution sur $\mathbb{Z}_p$, avec de nombreux exemples explicites.

En conclusion nous pensons que le changement de perspective opéré dans ce travail accroît fortement la *constructibilité* et la *compréhensibilité* des différents chapitres de la « théorie de la mesure ». Il permet de plus d'*unifier* le traitement, traditionnellement séparé, des mesures et des fonctions sommables/mesurables.

Addendum

Après la soutenance de cette thèse, et suite à diverses questions soulevées par le jury, nous avons rajouté au texte proprement dit de la thèse une partie supplémentaire, traitant de l'intégration sur l'espace vectoriel $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ de toutes les suites réelles. Nous montrons en effet que notre formalisme s'étend sans véritable difficulté à ce nouvel espace, procurant ainsi des fondements clairs et solides à la théorie des processus stochastiques.

THEORIE DES PSEUDO-MESURES

Une présentation constructive de l'intégrale de Lebesgue

TABLE DES MATIERES

Première partie : Intégration sur un intervalle compact de IR

Chapitre I : Pseudo-mesures, fonctionnelles sommables, mesures sur [a,b]

Chapitre II : Espaces de Riesz

Deuxième partie : Intégration sur IR

Chapitre XII : Pseudo-mesures, mesures, fonctionnelles sur IR

Chapitre XIII : Théorèmes classiques

Troisième partie : Intégration sur un rectangle compact de $\mathbb{R}^2$

Chapitre XV : Fonctions et pseudo-mesures sur un rectangle compact

CONVENTIONS GENERALES

En l'absence d'indications contraires, tous les espaces vectoriels sont réels.

Les théorèmes dont les numéros sont suivis d'une astérisque (*) sont donnés sans démonstration, soit parce que la démonstration est évidente, soit parce que le théorème constitue l'adaptation ou la généralisation naturelle d'un théorème précédent déjà démontré.

$\boxed{\text{THEORIE DES PSEUDO-MESURES}}$

Une présentation constructive de l'intégrale de Lebesgue

Première partie : **Intégration sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$**

Chapitre I : Pseudo-mesures, fonctionnelles sommables, mesures sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

Contenu :

Nous décrivons le dual normé d'un espace vectoriel V muni d'une *semi-norme* : c'est un espace de Banach que nous appelons le *N-dual* de V. A partir du N-dual de l'espace des fonctions étagées, muni de la norme uniforme, nous construisons les objets de base de la théorie : *pseudo-mesures*, *fonctionnelles sommables* et plus loin *mesures*.

Sur l'espace des pseudo-mesures nous définissons un *ordre* et une *valeur absolue*, concepts essentiels pour l'étude de cet espace.

§ 0. Notations

A. Intervalles

1) $\boxed{[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \text{ est un intervalle compact de } \mathbb{R} \ (\mathrm{a}<\mathrm{b}).}$

2) $\boxed{\text{Si I est un intervalle borné de } \mathbb{R} \text{ on note sa longueur } |\mathrm{I}|.}$

B. Algèbres de fonctions

$\mathcal{E}$ = algèbre des fonctions : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ étagées

(= en escalier = constantes par morceaux)

$\mathcal{C}$ = algèbre des fonctions : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues

$\mathcal{R}$ = algèbre des fonctions : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ réglées

$\mathcal{F}$ = algèbre des fonctions : $[a, b] \to \mathbb{R}$ bornées

$\forall f, g \in \mathcal{F}$ on note $f \vee g = \sup\{f, g\}$ et $f \wedge g = \inf\{f, g\}$.

$\mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F}$ sont des algèbres stables pour les lois $\vee$ et $\wedge$.

C. Normes , semi-normes , convergences

Si $f \in \mathcal{F}$ on pose $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Si $f \in \mathcal{R}$ on pose $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ et $\|f\|_2 = \left[\int_a^b f(x)^2\,dx\right]^{1/2}$

Dans $\mathcal{F}$ on note :

1) $f_n \xrightarrow{\bullet} f$ ssi f_n converge simplement (ou ponctuellement) vers f sur [a,b], c-à-d ssi

$$\boxed{\forall c \in [a, b] \quad f_n(c) \to f(c)}.$$

2) $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$ ssi f_n converge simplement vers f sur [a,b] et ssi la suite $\|f_n\|$ est bornée; c'est la convergence bornée.

3) $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$ ssi f_n converge uniformément vers f sur [a,b], c-à-d ssi $\|f_n - f\| \to 0$.

Remarque : $[\xrightarrow{\mathbf{u}}] \Rightarrow [\xrightarrow{\text{b}}] \Rightarrow [\xrightarrow{\bullet}]$

§ 1. N-dual d'un espace semi-normé

1.1. Définition : Une semi-norme sur un espace vectoriel V est une application $\|\ \|_s : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) $\forall u, v \in \mathrm{V} \quad \|u + v\|_s \leq \|u\|_s + \|v\|_s$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathrm{V} \quad \|\lambda u\|_s = |\lambda|\,\|u\|_s$.

Un espace vectoriel muni d' **une** semi-norme est appelé un espace semi-normé

1.2.* Théorème : Soit V un espace semi-normé ; on pose $\mathrm{V}_0 = \left\{u \in \mathrm{V} \,\middle\|\, \|u\|_s = 0\right\}$; alors V/V_0 est un espace normé.

1.3. Définition : Soit V un espace semi-normé ; une forme linéaire $\phi : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ est normée ss'il existe $M > 0$ tel que $\boxed{\forall\, u \in \mathrm{V} \quad |\phi(u)| \le M \, \|u\|_s}$.

L'espace vectoriel de toutes les formes linéaires normées sur V s'appelle le N-dual de V et se note $\mathrm{V}^\star$.

1.4. Définition : $\forall\, \phi \in \mathrm{V}^\star$ on note

$$\boxed{\begin{aligned} \|\phi\|_\star &= \sup_{u \in \mathrm{V},\ \|u\|_s = 1} |\phi(u)| = \sup_{u \in \mathrm{V},\ \|u\|_s = 1} \phi(u) \\ &= \sup_{u \in \mathrm{V},\ \|u\|_s \le 1} |\phi(u)| = \sup_{u \in \mathrm{V},\ \|u\|_s \le 1} \phi(u) \end{aligned}}$$

1.5. Théorème fondamental : $\| \ \|_\star$ est une $\boxed{\text{norme}}$ sur $\mathrm{V}^\star$, appelée norme duale de la semi-norme $\| \ \|_s$, et $\mathrm{V}^\star$ est $\boxed{\text{complet}}$ pour cette norme ; en d'autres termes :

$$\boxed{\text{Le N-dual d'un espace semi-normé est un espace de Banach.}}$$

Dém : Classique.

1.6.* Lemme : $\forall\, u \in \mathrm{V} \quad \forall\, \phi \in \mathrm{V}^\star$ on a $\Big[\ \|u\|_s = 0 \ \Rightarrow\ \phi(u) = 0\ \Big]$.

1.7.* Théorème : Le N-dual de l'espace semi-normé V est canoniquement isométrique au N-dual de l'espace normé V/V_0.

§ 2. Pseudo-mesures sur [a,b]

2.1. Définition fondamentale :

$$\boxed{\text{Une pseudo-mesure sur } [\mathrm{a},\mathrm{b}] \text{ est un élément du N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}, \| \ \|\big).}$$

Ou encore :

Une pseudo-mesure sur [a,b] est une forme linéaire $\tilde{f} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété

$$\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall\, g \in \mathcal{E} \quad |\tilde{f}(g)| \le M \, \|g\|.}$$

On note $\mathcal{PM}$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures sur [a,b].

Autrement dit $\boxed{\mathcal{PM} \text{ est le N-dual de l'espace normé } \left(\mathcal{E}, \| \ \|\right).}$

Remarque : Les pseudo-mesures seront toujours représentées par des lettres « tildées » pour les différencier des fonctions.

2.2.* Théorème : $\mathcal{PM}$ constitue un espace de Banach pour la norme $\| \ \|_\star$, duale de la norme $\| \ \|$, définie par

$$\boxed{\|\tilde f\|_\star = \sup_{g \in \mathcal{E},\, \|g\|=1} |\tilde f(g)| = \sup_{g \in \mathcal{E},\, \|g\|=1} \tilde f(g)}\,.$$

Notation : On écrit $\tilde f_n \xrightarrow{\star} \tilde f$ ssi $\|\tilde f_n - \tilde f\|_\star \to 0$ et on note $\boxed{\tilde f = {}^\star\lim_n \tilde f_n}$; on dit que la suite $\tilde f_n$ converge en norme $\| \ \|_\star$ vers $\tilde f$.

2.3. Théorème : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{PM}$ est convergente en norme $\| \ \|_\star$ dans $\mathcal{PM}$ ssi

$$\boxed{\sup_{p,q \geq n} \|\tilde f_p - \tilde f_q\|_\star \to 0}\,.$$

Dém : C'est le critère de Cauchy.

2.4. Définition : Tout $\tilde f \in \mathcal{PM}$ s'étend canoniquement à $\mathcal{R}$ en posant $\forall\, g \in \mathcal{R}$

$$\boxed{\tilde f(g) = \lim_n \tilde f(g_n) \quad \text{avec} \quad g_n \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad g_n \xrightarrow{\mathbf{u}} g}\,.$$

Notation intégrale : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM} \quad \forall\, g \in \mathcal{R}$ on note $\boxed{\int_a^b g(x)\, \tilde f(x) = \int_a^b g\, \tilde f = \tilde f(g)}$.

2.5.* Théorème : $\mathcal{PM}$ est isométrique au N-dual de $\left(\mathcal{R}, \| \ \|\right)$.

2.6.* Théorème - Définition :

$\forall\, f \in \mathcal{R}$ la forme linéaire $\boxed{\{f\} : \mathcal{E} \to \mathbb{R} : g \mapsto \int_a^b g\, f\, dx}$ est une pseudo-mesure ;

$\{f\}$ est la pseudo-mesure associée à f.

En particulier à la fonction constante $\boxed{\mathbb{1} = 1_{[a,b]} \in \mathcal{E}}$ est associée la pseudo-mesure

$$\boxed{\{\mathbb{1}\} : \mathcal{E} \to \mathbb{R} : g \mapsto \int_a^b g\, dx}\,.$$

Notation : On note $\underline{\mathcal{R}} = \big\{ \{f\} \,\|\, f \in \mathcal{R} \big\} \subset \mathcal{PM}$.

On utilise une notation analogue pour tous les *sous-ensembles* de $\mathcal{R}$.

$\boxed{\text{Dans la pratique on remplacera couramment la notation } \{f\} \text{ par la notation } f.}$

Remarque : Nous verrons plus loin que $\forall\, f \in \mathcal{R}$ la pseudo-mesure $\{f\}$ est de fait une *mesure*, et plus précisément une *fonctionnelle sommable* ; c'est en particulier le cas pour $\boxed{\{\mathbb{1}\}}$ appelée $\boxed{\text{mesure de Lebesgue}}$.

En consquence nous parlerons de $\{f\}$ comme la fonctionnelle associée à f, plutôt que la pseudo-mesure associée à f.

2.7. Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{R}$ on a $\|\, f \,\|_\star = \|\, f \,\|_1$.

Dém : Soit $f \in \mathcal{R}$; il faut montrer $\displaystyle\sup_{\substack{g \,\in\, \mathcal{E} \\ \|\,g\,\| = 1}} \left| \int_a^b g\, f\; dx \right| = \|\, f \,\|_1$.

C'est évident si $f \in \mathcal{E}$; soit alors $f \in \mathcal{R}$; $\forall\, g \in \mathcal{E}$ tel que $\|\, g \,\| = 1$ on a

$$\left| \int_a^b g\, f\; dx \right| \leq \int_a^b |g|\,|f|\; dx \leq \int_a^b |f|\; dx = \|\, f \,\|_1 \,, \text{ donc } \|\, f \,\|_\star \leq \|\, f \,\|_1 .$$

Par ailleurs soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\|\, f_n \,\|_1 = \sup_{\substack{g \,\in\, \mathcal{E} \\ \|\,g\,\| = 1}} \left| \int_a^b g\, f_n\; dx \right| \leq \sup_{\substack{g \,\in\, \mathcal{E} \\ \|\,g\,\| = 1}} \left| \int_a^b g\, f\; dx \right| + \sup_{\substack{g \,\in\, \mathcal{E} \\ \|\,g\,\| = 1}} \left| \int_a^b g\,(f_n - f)\; dx \right|$$

$\leq \|\, f \,\|_\star + (b-a)\,\|\, f_n - f \,\|$; en faisant $n \to +\infty$ on trouve $\|\, f \,\|_1 \leq \|\, f \,\|_\star$.

2.8. Définition : $\forall\, g \in \mathcal{R} \quad \forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on définit

$$\boxed{g \,.\, \tilde{f} \;:\; \mathcal{E} \to \mathbb{R} \;:\; h \mapsto \tilde{f}\,(g\, h)}\,.$$

2.9.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall\, g \in \mathcal{R}$ on a $g \,.\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ et $\|\, g \,.\, \tilde{f} \,\|_\star \leq \|g\|\, \|\, \tilde{f} \,\|_\star$.

2.10.* Théorème : $\forall\, f, g \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{g \,.\, \{f\} = \{g\, f\}}$.

2.11.* Corollaire : $\forall\, f \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{\{f\} = f \,.\, \{\mathbb{1}\}}$.

§ 3. Fonctionnelles sommables sur [a,b]

Nous pouvons maintenant décrire avec une grande simplicité les *classes de fonctions sommables* pour la mesure de Lebesgue sur [a,b], que nous nommons *fonctionnelles sommables* sur [a,b].

3.1. Définition fondamentale : $\boxed{\mathcal{L}^1 \text{ est la fermeture de } \underline{\mathcal{E}} \text{ dans } \mathcal{PM} \text{ pour la norme } \| \;\|_\star .}$

Les éléments de $\mathcal{L}^1$ s'appellent les fonctionnelles sommables (ou intégrables) sur [a,b].

Vu le caractère fondateur et novateur de cette définition nous en donnons ci-dessous quatre versions de plus en plus explicites :

Version 1 : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{E}$ tel que $\|\tilde f - g\|_\star \leq \varepsilon$.

Version 2 : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ ss'il existe une suite $g_n \in \mathcal{E}$ telle que $\|\tilde f - g_n\|_\star \to 0$.

Version 3 : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{E}$ tel que

$$\forall\, h \in \mathcal{E} \quad \left| \tilde f(h) - \int_a^b g(x)\, h(x)\, dx \right| \leq \varepsilon\, \|h\| .$$

Version 4 : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ ss'il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ et une suite $g_n \in \mathcal{E}$ telles que

$$\forall\, h \in \mathcal{E} \quad \left| \tilde f(h) - \int_a^b g_n(x)\, h(x)\, dx \right| \leq \varepsilon_n\, \|h\| .$$

Notation : 1) $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on note $\boxed{\|\tilde f\|_1 = \|\tilde f\|_\star}$.

2) On écrit $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f$ ssi $\|\tilde f_n - \tilde f\|_1 \to 0$ et on note $\boxed{\tilde f = {}^1\lim_n \tilde f_n}$; on dit que la suite $\tilde f_n$ converge en norme $\| \;\|_1$ vers $\tilde f$.

3.2.* Théorème : 1) $\underline{\mathcal{R}} \subset \mathcal{L}^1$

2) $\mathcal{L}^1$ est un $\boxed{\text{espace de Banach}}$ pour la norme $\| \;\|_1$

3) $\mathcal{L}^1$ est fermé dans $\mathcal{PM}$

4) $\underline{\mathcal{E}}$ est dense dans $\mathcal{L}^1$.

Notation intégrale : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on écrit $\displaystyle\int_a^b \tilde f(x)\, dx$ au lieu de $\displaystyle\int_a^b \tilde f(x)$; on a donc

$$\boxed{\int_a^b \tilde f(x)\, dx = \int_a^b \tilde f(x) = \tilde f(\mathbb{1})}\,.$$

3.3. Lemme : Soit $g \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$; alors il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que $\| g - h \|_1 \leq \varepsilon$.

Dém : Il suffit de faire un dessin !

3.4.* Théorème : $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{L}^1$.

3.5. Corollaire : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{L}^1$.

Dém : On applique le théorème de Weierstrass.

§ 4. Sommes de Lebesgue

4.1. Lemme fondamental d'analyse fonctionnelle (*LFAF*)

Enoncé : Soient X et Y des espaces de Banach et soit une suite de morphismes linéaires $\mathrm{T}_n : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ avec $\sup\limits_n \|\mathrm{T}_n\| < +\infty$. On suppose qu'il existe un sous-espace dense A de X tel que $\forall\, a \in \mathrm{A}\ \ \mathrm{T}_n(a) \to 0$; alors $\forall\, x \in \mathrm{X}\ \ \mathrm{T}_n(x) \to 0$.
(Ce lemme s'étend sans peine aux suites généralisées).

Dém : Posons $M = \sup\limits_n \|\mathrm{T}_n\|$; soit $x \in \mathrm{X}$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $a \in \mathrm{A}$ tel que $\|x - a\| \leq \varepsilon / M$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \|\mathrm{T}_n(x)\| \leq \|\mathrm{T}_n(a)\| + \|\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_n(a)\|$ $\leq \|\mathrm{T}_n(a)\| + \|\mathrm{T}_n\|\,\|x - a\| \leq \|\mathrm{T}_n(a)\| + \varepsilon$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N\ \ \|\mathrm{T}_n(a)\| \leq \varepsilon$; alors $\forall\, n \geq N\ \ \|\mathrm{T}_n(x)\| \leq 2\,\varepsilon$; donc $\mathrm{T}_n(x) \to 0$.

4.2. Définition : Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision D de $[\,a, b\,]$; on pose $\|\mathrm{D}\| = \max\limits_r\, (a_{r+1} - a_r)$; on définit $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$

$$\mathrm{W_D}(\tilde f) = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{1}{a_{r+1} - a_r} \left(\int_{a_r}^{a_{r+1}} \tilde f(u)\, du \right) \mathbb{1}_{]\,a_r, a_{r+1}\,[}\,.$$

$\mathrm{W_D}(\tilde f)$ est la fonction étagée dont les valeurs sont les moyennes de $\tilde f$ sur les intervalles $]\,a_r, a_{r+1}\,[$. Ces fonctions constituent les sommes de Lebesgue associées à $\tilde f$.

4.3.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\mathrm{W_D}(\tilde f) \in \mathcal{E}$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{W_D}(\tilde f)\,dx = \int_a^b \tilde f\,dx$.

4.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\big|\mathrm{W_D}(\tilde f)\big| \le \mathrm{W_D}\big(|\tilde f|\big)$ et donc $\big\|\mathrm{W_D}(\tilde f)\big\|_1 \le \|\tilde f\|_1$.

<u>Dém</u> : La première inégalité est triviale ; de plus on a

$$\big\|\mathrm{W_D}(\tilde f)\big\|_1 = \int_a^b \big|\mathrm{W_D}(\tilde f)\big|\,dx \le \int_a^b \mathrm{W_D}(|\tilde f|)\,dx = \int_a^b |\tilde f|\,dx = \|\tilde f\|_1 .$$

4.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{C}$ on a $\mathrm{W_D}(f) \xrightarrow{\mathbf{u}} f$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$.

<u>Dém</u> :

Soit $\varepsilon > o$ et soit $\eta > 0$ tel que $\forall\, x\,,\, y \in [\,a\,,\, b\,]$ on ait $|x-y| \le \eta \Rightarrow |\,f(x) - f(y)\,| \le \varepsilon$;

soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision D de $[\,a\,,\,b\,]$ telle que $\|\mathrm{D}\| \le \eta$;

$\forall\, r \in [[\,0\,,\, p-1\,]]$ choisissons $\xi_r \in [\,a_r\,,\, a_{r+1}\,]$ tel que $\displaystyle\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(u)\,du = f(\xi_r)\,(a_{r+1} - a_r)$;

on a alors $\displaystyle \mathrm{W_D}(f) = \sum_{r=0}^{p-1} f(\xi_r)\, \mathbb{1}_{[\,a_r,\, a_{r+1}\,]}$; on en déduit $\forall\, x \in [\,a_r\,,\, a_{r+1}\,]$

$\big|\mathrm{W_D}(f)(x) - f(x)\big| = |\,f(\xi_r) - f(x)\,| \le \varepsilon$; donc $\mathrm{W_D}(\tilde f) \xrightarrow{\mathbf{u}} f$.

4.6. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\mathrm{W_D}(\tilde f) \xrightarrow{1} \tilde f$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$.

<u>Dém</u> : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $\mathrm{W_D} - \mathrm{I} \,:\, \mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^1$.

§ 5. <u>Espaces ordonnés. Ordre dans $\mathcal{PM}$</u>

5.1. <u>Définition</u> : Si V est un espace vectoriel muni d'un ordre on note

$$\boxed{\mathrm{V}^+ = \{\, u \in \mathrm{V} \,\|\, u \ge 0\,\}}\,.$$

5.2. <u>Définition</u> : Un espace vectoriel V muni d'un ordre est un <u>espace ordonné</u> ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+\ \ \forall\, u \in \mathrm{V}^+\ \ \lambda\, u \ge 0 \\ 2)\ \ \forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}\ \ \big(\, u \le v \ \Leftrightarrow\ v - u \ge 0\,\big) \end{array}}$$

5.3.* <u>Théorème</u> : Si V est un espace ordonné il en est de même de tous ses sous-espaces.

5.4. <u>Théorème</u> : Soit V un espace ordonné ; alors $\boxed{\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+\ \ u + v \ge 0}$.

<u>Dém</u> : On a $u+v \geq u$ car $u+v-v=u \geq 0$, donc $u+v \geq u \geq 0$.

5.5. <u>Définition</u> : Un espace ordonné V est <u>archimédien</u> ssi

$$\boxed{\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+ \;\; \big[\, \big(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+_\star \;\; \lambda\, u \leq v\big) \;\Rightarrow\; u=0 \,\big]},$$

ou de manière équivalente ssi

$$\boxed{\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+ \;\; \big[\, \big(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+_\star \;\; u \leq \lambda\, v\big) \;\Rightarrow\; u=0 \,\big]}.$$

5.6.* <u>Théorème</u> :

Si V est un espace ordonné archimédien il en est de même de tous ses sous-espaces.

<u>Exemple</u> : $\mathcal{F}$ est un espace ordonné archimédien pour l'ordre naturel :

$$\forall\, f,\, g \in \mathcal{F} \quad \Big[\; f \leq g \quad \text{ssi} \quad \forall\, x \in [\,a\,,\,b\,] \;\; f\,(x) \leq g\,(x) \,\Big].$$

5.7. <u>Définition</u> : Un sous-espace W d'un espace ordonné V est <u>intégral</u> (ou <u>solide</u>)

ssi $\boxed{\forall\, v \in \mathrm{V}^+ \;\; \forall\, w \in \mathrm{W}^+ \;\; \big(\, v \leq w \;\Rightarrow\; v \in W^+ \big)}$.

5.8.* <u>Théorème</u> : Soit V un espace ordonné et W un sous-espace intégral de V ; alors V/W possède une structure naturelle d'espace ordonné si on pose :

$$\forall\, \widehat{u} \in \mathrm{V}/\mathrm{W} \quad \boxed{\widehat{u} \geq 0 \quad \text{ss'il existe} \quad u' \in \widehat{u} \;\; \text{tel que} \;\; u' \geq 0}$$

$$\text{et} \quad \forall\, \widehat{u}\,,\, \widehat{v} \in \mathrm{V}/\mathrm{W} \quad \boxed{\widehat{u} \leq \widehat{v} \quad \text{ssi} \quad \widehat{v} - \widehat{u} \geq 0}.$$

5.9. <u>Définition fondamentale</u>

On définit un ordre naturel dans $\mathcal{PM}$ en posant $\forall\, \tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$

$$\boxed{\tilde{f} \leq \tilde{g} \quad \text{ssi} \quad \forall\, h \in \mathcal{E}^+ \;\; \tilde{f}\,(h) \leq \tilde{g}\,(h)}.$$

5.10. <u>Théorème</u> : $\mathcal{PM}$ muni de cet ordre est un espace ordonné archimédien.

<u>Dém</u> :

On a $\mathcal{PM}^+ = \{\, \tilde{f} \in \mathcal{PM} \parallel \forall\, h \in \mathcal{E}^+ \;\; \tilde{f}\,(h) \geq 0 \,\}$; montrons que $\mathcal{PM}$ est archimédien ; soient $\tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ tels que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+_\star \;\; \lambda\, \tilde{f} \leq \tilde{g}$; soit $h \in \mathcal{E}^+$; on a donc $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+_\star$ $\lambda\, \tilde{f}\,(h) \leq \tilde{g}\,(h)$, donc aussi $0 \leq \tilde{f}\,(h) \leq \lambda\, \tilde{g}\,(h)$; en faisant $\lambda \to 0^+$, on trouve $\tilde{f}\,(h) = 0$; donc $\forall\, h \in \mathcal{E} \;\; \tilde{f}\,(h) = \tilde{f}\,(h^+) - \tilde{f}\,(h^-) = 0$; donc $\tilde{f} = 0$.

5.11.* Théorème :

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}^+$ une suite convergente en norme $\| \, \|_\star$ vers $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{PM}^+$.

On en déduit la conservation des inégalités par passage à la limite dans $\mathcal{PM}$.

5.12.* Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}^+$ on a $\boxed{\|\tilde{f}\|_\star = \tilde{f}(\mathbb{1})}$.

§ 6. Pseudo-mesures spécifiques sur [a,b]

6.1. Définition :

Une pseudo-mesure spécifique sur [a,b] est une application $\phi : \mathcal{E}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ \forall\, h, k \in \mathcal{E}^+ \ \ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \ \ \phi(\lambda h + \mu k) = \lambda\, \phi(h) + \mu\, \phi(k) \\ 2)\ \ \text{il existe } \ M > 0 \ \text{ tel que } \ \forall\, h \in \mathcal{E}^+ \ \ |\phi(h)| \leq M\, \|h\| \end{array}}$$

Notation : On note $\mathcal{PM}_S$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures spécifiques sur [a,b].

6.2. Théorème : Toute pseudo-mesure spécifique ϕ s'étend de manière unique en une pseudo-mesure, appelée prolongement de ϕ à $\mathcal{E}$.

Dém :

Soit $\phi \in \mathcal{PM}_S$; on pose $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\boxed{\phi(h) = \phi(h^+) - \phi(h^-)}$; montrons que $\phi \in \mathcal{PM}$.

a) On a clairement $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ $\phi(\lambda h) = \lambda\, \phi h)$.

b) On a $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\phi(-h) = \phi[(-h)^+] - \phi[(-h)^-] = \phi(h^-) - \phi(h^+) = -\phi(h)$.

c) On a $(h+k)^+ - (h+k)^- = h + k = h^+ - h^- + k^+ - k^-$,

donc $(h+k)^+ + h^- + k^- = (h+k)^- + h^+ + k^+$,

donc $\phi\left[(h+k)^+\right] + \phi(h^-) + \phi(k^-) = \phi\left[(h+k)^-\right] + \phi(h^+) + \phi(k^+)$

$$\phi\left[(h+k)^+\right] - \phi\left[(h+k)^-\right] = \phi(h^+) - \phi(h^-) + \phi(k^+) - \phi(k^-)$$

$$\phi(h+k) = \phi(h) + \phi(k).$$

d) On a $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\phi(h) = \left|\phi(h^+) - \phi(h^-)\right| \leq |\phi(h^+)| + |\phi(h^-)|$

$\leq M\left(\|h^+\| + \|h^-\|\right) \leq 2\, M\, \|h\|$.

e) L'unicité est évidente car si $\phi \in \mathcal{PM}$, par linéarité on a nécessairement $\forall\, h \in \mathcal{E}$

$\phi(h) = \phi(h^+) - \phi(h^-)$.

6.3.* Corollaire :

L'application $\mathcal{PM} \to \mathcal{PM}_S \ : \ \tilde{f} \to \tilde{f}|_{\mathcal{E}^+}$ est un isomorphisme linéaire.

Autrement dit une pseudo-mesure spécifique n'est ni plus ni moins que la restriction d'une pseudo-mesure à $\mathcal{E}^+$, ce qui peut s'écrire $\boxed{\mathcal{PM}_S = \mathcal{PM}|_{\mathcal{E}^+}}$.

6.4. Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{PM}$

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\tilde{f}_n\|_\star \leq M$; alors $\tilde{f}_n$ converge en norme $\| \ \|_\star$ vers une pseudo-mesure $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; on a donc aussi $\lim\limits_n \|\tilde{f}_n\|_\star = \|\tilde{f}\|_\star$.

Dém : On peut supposer la suite $\tilde{f}_n$ croissante et positive ; on pose $\forall\, g \in \mathcal{E}^+$ $\tilde{f}(g) = \lim\limits_n \tilde{f}_n(g)$; la limite existe bien car la suite $\tilde{f}_n(g)$ est croissante et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde{f}_n(g) \leq \|\tilde{f}_n\|_\star \|g\| \leq M\|g\|$. On a donc $\tilde{f} \in \mathcal{PM}_S$; notons encore $\tilde{f}$ le prolongement de $\tilde{f}$ à $\mathcal{E}$. On en clairement $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde{f} - \tilde{f}_n \geq 0$, donc $\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_\star = (\tilde{f} - \tilde{f}_n)(\mathbb{1})$ $= \tilde{f}(\mathbb{1}) - \tilde{f}_n(\mathbb{1}) \to 0$; donc $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$.

Notation : On note $\boxed{\tilde{f} = \operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n \ \ \underline{\text{ou}} \ \ \operatorname*{Inf}_n \tilde{f}_n}$ suivant que la suite $\tilde{f}_n$ est croissante ou décroissante.

6.5.* Corollaire : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ une suite croissante telle que $\sup\limits_n \|\tilde{f}_n\|_\star < +\infty$; alors on a

$$\boxed{\forall\, g \in \mathcal{E}^+ \ \ \Big(\operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n\Big)(g) = \sup_n \big[\tilde{f}_n(g)\big]} \quad \text{et} \quad \boxed{\Big\|\operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n\Big\|_\star = \sup_n \|\tilde{f}_n\|_\star}.$$

Le théorème de convergence monotone est manifestement vrai dans n'importe quel sous-espace fermé de $\mathcal{PM}$. En particulier on a le

6.6.* Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^1$

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\tilde{f}_n\|_1 \leq M$; alors $\tilde{f}_n$ converge en norme $\| \ \|_1$ vers une fonctionnelle $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on a donc aussi $\lim\limits_n \|\tilde{f}_n\|_1 = \|\tilde{f}\|_1$.

§ 7. Valeur absolue d'une pseudo-mesure

7.1. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; on pose $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$ $\boxed{|\tilde{f}|(h) = \|\, h\tilde{f}\,\|_\star}$.

7.2.* Lemme : $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ on a $|\tilde{f}|(\lambda\, h) = \lambda\, |\tilde{f}|(h)$.

7.3.* Lemme : $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$ on a $|\tilde{f}|(h) \leq \|\tilde{f}\|_\star\, \|h\|$.

7.4. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$ $\boxed{|\tilde{f}|(h) = \sup\limits_{k \in \mathcal{E},\, |k| \leq h} |\tilde{f}(k)| = \sup\limits_{k \in \mathcal{E},\, |k| \leq h} \tilde{f}(k)}$

Dém :

On a $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$ $|\tilde{f}|(h) = \big\| h\tilde{f}\big\|_\star = \sup\limits_{k \in \mathcal{E},\, \|k\| \leq 1} \big(h\tilde{f}\big)(k) = \sup\limits_{k \in \mathcal{E},\, \|k\| \leq 1} \tilde{f}\big(k\,h\big) = \sup\limits_{\ell \in \mathcal{E},\, |\ell| \leq h} \tilde{f}(\ell)$.

7.5. Lemme : Soient $h_1,\, h_2 \in \mathcal{E}^+$ tels que $h_1 \,.\, h_2 = 0$; alors

$$|\tilde{f}|(h_1 + h_2) = |\tilde{f}|(h_1) + |\tilde{f}|(h_2)\,.$$

Dém :

$$|\tilde{f}|(h_1 + h_2) = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E} \\ |k| \leq h_1 + h_2}} \tilde{f}(k) = \sup_{\substack{k_1, k_2 \in \mathcal{E} \\ |k_1| \leq h_1,\, |k_2| \leq h_2}} \tilde{f}(k_1 + k_2) = \sup_{\substack{k_1, k_2 \in \mathcal{E} \\ |k_1| \leq h_1,\, |k_2| \leq h_2}} \tilde{f}(k_1) + \tilde{f}(k_2)$$

$$= \sup_{\substack{k_1 \in \mathcal{E} \\ |k_1| \leq h_1}} \tilde{f}(k_1) + \sup_{\substack{k_2 \in \mathcal{E} \\ |k_2| \leq h_2}} \tilde{f}(k_2) = |\tilde{f}|(h_1) + |\tilde{f}|(h_2)\,.$$

7.6. Théorème : $|\tilde{f}| \in \mathcal{PM}_S$.

Dém : Il reste à montrer que $\forall\, h,\, k \in \mathcal{E}^+$ $|\tilde{f}|(h + k) = |\tilde{f}|(h) + |\tilde{f}|(k)$.

Soient $h,\, k \in \mathcal{E}^+$; on peut trouver une partition de $[\mathrm{a,b}]$ en intervalles I_r $(1 \leq r \leq n)$ telle que $h = \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r\, \mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}$ et $k = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r\, \mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}$ avec $\forall\, r \in [[1, n]]$ $\alpha_r \in \mathbb{R}^+$ et $\beta_r \in \mathbb{R}^+$.

On a alors $|\tilde{f}|(h + k) = |\tilde{f}|\Big[\sum\limits_{r=1}^{n} (\alpha_r + \beta_r)\mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}\Big] = \sum\limits_{r=1}^{n} |\tilde{f}|\big[(\alpha_r + \beta_r)\mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}\big]$

$$= \sum_{r=1}^{n} (\alpha_r + \beta_r)\, |\tilde{f}|(\mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r\, |\tilde{f}|(\mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}) + \sum_{r=1}^{n} \beta_r\, |\tilde{f}|(\mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}) = |\tilde{f}|(h) + |\tilde{f}|(k)\,.$$

Notation : Nous continuons à noter $|\tilde{f}|$ le prolongement de $|\tilde{f}|$ à $\mathcal{E}$.

7.7. Théorème : $|\tilde{f}| \in \mathcal{PM}^+$ et $\boxed{\big\|\, |\tilde{f}|\, \big\|_\star = \|\tilde{f}\|_\star}$.

Dém :

$\forall\, h \in \mathcal{E}$ on a $\big|\, |\tilde{f}|(h) \big| = \big|\, |\tilde{f}|(h^+) - |\tilde{f}|(h^-) \big| \leq |\tilde{f}|(h^+) + |\tilde{f}|(h^-) = |\tilde{f}|(h^+ + h^-)$

$= |\tilde{f}|\big(|h|\big) = \big\| |h|\, \tilde{f} \big\|_\star \leq \|\tilde{f}\|_\star \, \|h\|$; donc $|\tilde{f}| \in \mathcal{PM}$; d'autre part on a clairement $|\tilde{f}| \geq 0$, donc $\big\| |\tilde{f}| \big\|_\star = |\tilde{f}|(\mathbb{1}) = \|\tilde{f}\|_\star$.

7.8. <u>Définition</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on appelle $|\tilde{f}|$ la $\boxed{\text{valeur absolue}}$ de $\tilde{f}$.

7.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall\, h \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{\big|\tilde{f}(h)\big| \leq |\tilde{f}|\big(|h|\big)}$.

<u>Dém</u> :

a) $h \in \mathcal{E}^+$: on a $\big|\tilde{f}(h)\big| \leq \sup\limits_{k \in \mathcal{E},\, |k| \leq h} |\tilde{f}(k)| = |\tilde{f}|(h)$

b) $h \in \mathcal{E}$: on a $\big|\tilde{f}(h)\big| = \big|\tilde{f}(h^+ + h^-)\big| = \big|\tilde{f}(h^+) + \tilde{f}(h^-)\big| \leq \big|\tilde{f}(h^+)\big| + \big|\tilde{f}(h^-)\big|$
$\leq |\tilde{f}|(h^+) + |\tilde{f}|(h^-) = |\tilde{f}|(h^+ + h^-) = |\tilde{f}|\big(|h|\big)$

c) $h \in \mathcal{R}$: vrai par densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$.

7.10. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall\, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a

$$\boxed{|\tilde{f}| \leq \tilde{g} \;\Leftrightarrow\; \Big[\forall\, h \in \mathcal{E} \quad \big|\tilde{f}(h)\big| \leq \tilde{g}\big(|h|\big)\Big]}\,.$$

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: On a $\forall\, h \in \mathcal{E} \quad \big|\tilde{f}(h)\big| \leq |\tilde{f}|\big(|h|\big) \leq \tilde{g}\big(|h|\big)$.

b) $\Leftarrow$: On a $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}|(h) = \sup\limits_{k \in \mathcal{E},\, |k| \leq h} |\tilde{f}(k)| \leq \sup\limits_{k \in \mathcal{E},\, |k| \leq h} \tilde{g}\big(|k|\big) = \tilde{g}(h)$.

7.11. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall\, h \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{|\tilde{f}|\big(|h|\big) \leq \|\tilde{f}\|_\star \, \|h\|}$.

<u>Dém</u> : a) $h \in \mathcal{E}$: c'est l'inégalité de la norme

b) $h \in \mathcal{R}$: vrai par densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$.

7.12. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{|\tilde{f}| \leq |\tilde{g}| \;\Rightarrow\; \|\tilde{f}\|_\star \leq \|\tilde{g}\|_\star}$.

<u>Dém</u> : $|\tilde{f}| \leq |\tilde{g}| \Rightarrow \|\tilde{f}\|_\star = |\tilde{f}|(\mathbb{1}) \leq |\tilde{g}|(\mathbb{1}) = \|\tilde{g}\|_\star$.

7.13. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall\, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a $\boxed{|\tilde{f}| \leq \tilde{g} \;\Leftrightarrow\; -\tilde{g} \leq \tilde{f} \leq \tilde{g}}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: On a $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad \big|\tilde{f}(h)\big| \leq |\tilde{f}|(h) \leq \tilde{g}(h)$, c-à-d $-\tilde{g}(h) \leq \tilde{f}(h) \leq \tilde{g}(h)$.

b) $\Leftarrow$: On a $\forall\, k \in \mathcal{E}^+ \quad \big|\tilde{f}(k)\big| \leq \tilde{g}(k)$; donc $\forall\, k \in \mathcal{E}$

$\left|\tilde{f}(k)\right| = \left|\tilde{f}(k^+) - \tilde{f}(k^-)\right| \leq \left|\tilde{f}(k^+)\right| + \left|\tilde{f}(k^-)\right| \leq \tilde{g}(k^+) + \tilde{g}(k^-) = \tilde{g}\big(|k|\big)$;

on a donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}|(h) = \sup\limits_{k \in \mathcal{E}\,,\, |k| \leq h} |\tilde{f}|(k) \leq \sup\limits_{k \in \mathcal{E}\,,\, |k| \leq h} \tilde{g}\big(|k|\big) = \tilde{g}(h)$.

7.14.* Corollaire : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ $\boxed{-|\tilde{f}| \leq \tilde{f} \leq |\tilde{f}|}$.

7.15. Théorème : $\forall\, \tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{|\tilde{f} + \tilde{g}| \leq |\tilde{f}| + |\tilde{g}|}$.

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f} + \tilde{g}|(h) = \sup\limits_{|k| \leq h} \big[\tilde{f}(k) + \tilde{g}(k)\big] \leq \sup\limits_{|k| \leq h} \tilde{f}(k) + \sup\limits_{|k| \leq h} \tilde{g}(k)$ $= |\tilde{f}|(h) + |\tilde{g}|(h) = \big(|\tilde{f}| + |\tilde{g}|\big)(h)$.

7.16.* Corollaire : $\forall\, \tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ on a $\big||\tilde{f}| - |\tilde{g}|\big| \leq |\tilde{f} - \tilde{g}|$.

7.17.* Corollaire : $\forall\, \tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ on a $\big\||\tilde{f}| - |\tilde{g}|\big\|_\star \leq \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_\star$.

7.18.* Corollaire : L'application $\mathcal{PM} \to \mathcal{PM}^+$: $\tilde{f} \mapsto |\tilde{f}|$ est continue pour la toplologie de la norme $\|\ \|_\star$.

7.19. Théorème : Si $f \in \mathcal{R}$ la valeur absolue de f définie dans $\mathcal{PM}$ coïncide avec la valeur absolue ordinaire de f.

Dém : C'est évident si $f \in \mathcal{E}$. Notons provisoirement la valeur absolue définie dans $\mathcal{PM}$ par $|\ |_\alpha$. Soit $f \in \mathcal{R}$ et soit $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$; on a $|f_n|_\alpha \xrightarrow{\star} |f|_\alpha$ c-à-d $|f_n| \xrightarrow{\star} |f|_\alpha$; or on a $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$, donc $|f_n| \xrightarrow{\mathbf{u}} |f|$, donc $|f_n| \xrightarrow{\star} |f|$; donc $|f|_\alpha = |f|$.

7.20. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall\, g \in \mathcal{R}$ on a $\big|g\,\tilde{f}\big| = |g|\,|\tilde{f}|$.

Dém : Soit d'abord $g \in \mathcal{E}$; alors $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$ on a $\big|g\,\tilde{f}\big|(h) = \sup\limits_{|k| \leq h} (g\tilde{f})(k)$ $= \sup\limits_{|k| \leq h} \tilde{f}\big(g\,k\big) = \sup\limits_{|k| \leq h} \tilde{f}\big(|g|\,k\big) \leq \sup\limits_{|\ell| \leq |g|\,h} \tilde{f}(\ell) = |\tilde{f}|\big(|g|\,h\big) = \big(|g|\,|\tilde{f}|\big)(h)$;

par ailleurs donnons-nous $h \in \mathcal{E}^+$; soit $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \mathcal{E}$ tel que $|\ell| \leq |g|\,h$ et $|\tilde{f}|\big(|g|\,h\big) - \varepsilon \leq \tilde{f}(\ell)$; définissons $k \in \mathcal{E}$ par : $\forall\, x \in [\,a\,,\,b\,] \quad k(x) = 0$ ssi $g(x) = 0$, sinon $k(x) = \ell(x)/g(x)$; on a $|k| \leq h$ et donc $\big(|g|\,|\tilde{f}|\big)(h) - \varepsilon = |\tilde{f}|\big(|g|\,h\big) - \varepsilon \leq \tilde{f}(\ell)$ $= \tilde{f}\big(g\,k\big) = \big(g\tilde{f}\big)(k) \leq \big|g\,\tilde{f}\big|(h)$; donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad \big|g\,\tilde{f}\big|(h) = \big(|g|\,|\tilde{f}|\big)(h)$, donc aussi $\forall\, h \in \mathcal{E} \quad \big|g\,\tilde{f}\big|(h) = \big(|g|\,|\tilde{f}|\big)(h)$, c-à-d $\big|g\,\tilde{f}\big| = |g|\,|\tilde{f}|$.

Le résultat général se déduit alors de la densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$ pour la topologie uniforme.

7.21. Définition : On pose $\forall\, \tilde f\,,\, \tilde g \in \mathcal{PM}$

$$\mathrm{Sup}\,\{\tilde f\,,\, \tilde g\} = \boxed{\tilde f \vee \tilde g = \tfrac{1}{2}\,(\tilde f + \tilde g + |\tilde f - \tilde g|)}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{Inf}\,\{\tilde f\,,\, \tilde g\} = \boxed{\tilde f \wedge \tilde g = \tfrac{1}{2}\,(\tilde f + \tilde g - |\tilde f - \tilde g|)}\,.$$

7.22.* Théorème : $\forall\, \tilde f\,,\, \tilde g \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde f \wedge \tilde g \le \tilde f \le \tilde f \vee \tilde g}$.

7.23. Définition : On pose $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde f^{+} = \tilde f \vee 0 = \tfrac{1}{2}\,(|\tilde f| + \tilde f)} \in \mathcal{PM}^{+}$

$$\text{et} \quad \boxed{\tilde f^{-} = (-\tilde f)^{+} = (-\tilde f) \vee 0 = \tfrac{1}{2}\,(|\tilde f| - \tilde f)} \in \mathcal{PM}^{+}.$$

7.24.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde f^{+} \wedge \tilde f^{-} = 0}$, $\boxed{\tilde f = \tilde f^{+} - \tilde f^{-}}$

$$\text{et} \quad \boxed{|\tilde f| = \tilde f^{+} + \tilde f^{-} = \tilde f^{+} \vee \tilde f^{-} = \tilde f \vee (-\tilde f)}\,.$$

§ 8. Mesures et mesures diffuses sur $[\,\mathbf{a}\,,\mathbf{b}\,]$

8.1. Définition : $\tilde f \in \mathcal{PM}$ est une mesure ssi $\boxed{\forall\, c \in [\,a\,,\, b\,] \quad \lim\limits_{d \to c^{\pm}} \tilde f\left(1_{]\,c\,,\,d\,[}\right) = 0}$.

Cette propriété s'appelle l'hypercontinuité des mesures.

On note $\mathcal{M} = \{\,\tilde f \in \mathcal{PM} \,||\, \tilde f \text{ mesure}\,\}$.

Remarque : L'hypercontinuité des mesures assure, pour ainsi dire, leur continuité *horizontale*, la continuité proprement dite assurant leur continuité *verticale*.

8.2. Définition : $\tilde f \in \mathcal{M}$ est une mesure diffuse ssi $\boxed{\forall\, c \in [\,a\,,\, b\,] \quad \tilde f\left(1_{\{c\}}\right) = 0}$.

On note $\mathcal{M}_D = \{\,\tilde f \in \mathcal{PM} \,||\, \tilde f \text{ mesure diffuse}\,\}$.

La mesure diffuse $\boxed{\mathcal{E} \to \mathrm{I\!R} \;:\; h \mapsto \int_a^b h(x)\, dx}$ n'est autre que la mesure de Lebesgue.

Remarque : Pour des exemples de mesures non diffuses et de pseudo-mesures qui ne sont pas des mesures, voir Chapitre VII, § 3.

8.3.* Théorème : $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{M}_D \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{PM}$.

8.4. Théorème : $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_D$ sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{PM}$.

Dém : Montrons que $\mathcal{M}$ est fermé dans $\mathcal{PM}$.

Soit une suite $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ telle que $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f} \in \mathcal{PM}$; il faut montrer $\tilde{f} \in \mathcal{M}$.

Soit $c \in [\,a\,,\,b\,]$ et soit $\varepsilon > 0$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{f}_N - \tilde{f}\|_\star \leq \varepsilon$; on a

$\forall\, d \in [\,a\,,\,b\,]$ $\quad \left|\tilde{f}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right)\right| \leq \left|\tilde{f}_N\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right)\right| + \left|(\tilde{f}_N - \tilde{f})\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right)\right| \leq \left|\tilde{f}_N\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right)\right| + \varepsilon$,

donc $\overline{\lim\limits_{d \to c^\pm}} \left|\tilde{f}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right)\right| \leq \varepsilon$; on a donc $\lim\limits_{d \to c^\pm} \tilde{f}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) = 0$.

La fermeture de $\mathcal{M}_D$ est évidente.

8.5. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; |\tilde{f}| \in \mathcal{M}}$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{E}$ tel que $\|h\| \leq 1$ et $\|\tilde{f}\|_\star \leq \tilde{f}(h) + \varepsilon$;

soit I un intervalle de $[\,a\,,\,b\,]$ et soit $\mathrm{E} = [\,a\,,\,b\,] - \mathrm{I}$; on peut écrire

$|\tilde{f}|(1_\mathrm{I}) + |\tilde{f}|(1_\mathrm{E}) = |\tilde{f}|(\mathbb{1}) = \|\tilde{f}\|_\star \leq \tilde{f}(h) + \varepsilon = \tilde{f}(h\,1_\mathrm{I}) + \tilde{f}(h\,1_\mathrm{E}) + \varepsilon$

$\leq \tilde{f}(h\,1_\mathrm{I}) + |\tilde{f}|(1_\mathrm{E}) + \varepsilon$; donc $|\tilde{f}|(1_\mathrm{I}) \leq \tilde{f}(h\,1_\mathrm{I}) + \varepsilon$.

En prenant $\mathrm{I} =]\,c,\,d\,[$ on obtient $\overline{\lim\limits_{d \to c^\pm}} |\tilde{f}|\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) \leq \overline{\lim\limits_{d \to c^\pm}} \tilde{f}\left(h\,1_{]\,c,\,d\,[}\right) + \varepsilon$;

or h est localement constante à gauche ou à droite de c, donc $\lim\limits_{d \to c^\pm} \tilde{f}\left(h\,1_{]\,c,\,d\,[}\right) = 0$,

donc $\overline{\lim\limits_{d \to c^\pm}} |\tilde{f}|\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) \leq \varepsilon$; donc $\lim\limits_{d \to c^\pm} |\tilde{f}|\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) = 0$.

b) $\Leftarrow$: On a $\lim\limits_{d \to c^\pm} \left|\tilde{f}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right)\right| \leq \lim\limits_{d \to c^\pm} |\tilde{f}|\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) = 0$.

8.6. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M}_D \;\Leftrightarrow\; |\tilde{f}| \in \mathcal{M}_D}$.

Dém : Résulte de l'égalité évidente $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\;|\tilde{f}|\left(1_{\{c\}}\right) = \left|\tilde{f}\left(1_{\{c\}}\right)\right|$.

8.7.* Corollaire :

$\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ est une mesure diffuse ssi $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\;\lim\limits_{d \to c^\pm} |\tilde{f}|\left(1_{[\,c,\,d\,]}\right) = 0$.

8.8. Théorème : Soient $\tilde{f} \in \mathcal{M}^+$, $g \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$; alors il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que $\|h\| = \|g\|$ et $\tilde{f}\left(|g - h|\right) < \varepsilon$.

Dém : Il suffit de faire un dessin !

8.9.* Corollaire : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{M}$ on a $\boxed{\|\tilde{f}\|_\star = \sup\limits_{g \in \mathcal{C},\, \|g\| = 1} |\tilde{f}(g)|}$.

8.10.* Corollaire : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{M}$ on a $\boxed{\tilde{f}|_\mathcal{C} = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{f} = 0}$ et $\boxed{\tilde{f}|_{\mathbb{R}[X]} = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{f} = 0}$.

§ 9. Convergence fine dans $\mathcal{PM}$

Contenu : Nous introduisons un nouveau type de convergence, la convergence *fine*, ainsi nommée car plus fine que la convergence en norme.

9.1. Définition :

Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}^+$ est dominée supérieurement (resp. inférieurement) ss'il existe $\widetilde{F} \in \mathcal{PM}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}\quad \tilde{f}_n \leq \widetilde{F}$ (resp. $\tilde{f}_n \geq \widetilde{F}$).

9.2. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ est dominée ssi elle est dominée à la fois supérieurement et inférieurement, c-à-dss'il existe $\widetilde{F} \in \mathcal{PM}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}\quad |\tilde{f}|_n \leq \widetilde{F}$.

9.3. Définition : Si $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ est une suite dominée supérieurement (ou inférieurement), on pose $\boxed{\operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n = \operatorname*{Sup}_n \; \tilde{f}_0 \vee \tilde{f}_1 \vee \ldots \vee \tilde{f}_n}$ et $\boxed{\operatorname*{Inf}_n \tilde{f}_n = \operatorname*{Inf}_n \; \tilde{f}_0 \wedge \tilde{f}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{f}_n}$.

9.4.* Théorème : Pour toute suite dominée $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}^+$ on a

$$\boxed{\Big\| \operatorname*{Inf}_n \tilde{f}_n \Big\|_\star \leq \inf_n \|\tilde{f}_n\|_\star \leq \sup_n \|\tilde{f}_n\|_\star \leq \Big\| \operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n \Big\|_\star} \; .$$

Dans la suite de ce paragraphe toutes les suites seront désormais supposées $\boxed{\text{dominées}}$.

9.5. Définition : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$; on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \tilde{g}_n = \operatorname*{Inf}_{p \geq n} \tilde{f}_p \qquad \text{et} \qquad \tilde{h}_n = \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \tilde{f}_p\,;$$

$\tilde{g}_n$ est une suite croissante, $\tilde{h}_n$ une suite décroissante ; on pose ensuite

$$\boxed{\operatorname*{\underline{Lim}}_n \tilde{f}_n = \operatorname*{Sup}_n \tilde{g}_n = \operatorname*{Sup}_n \operatorname*{Inf}_p \tilde{f}_{n+p}} \in \mathcal{PM}$$

$$\text{et} \qquad \boxed{\operatorname*{\overline{Lim}}_n \tilde{f}_n = \operatorname*{Inf}_n \tilde{h}_n = \operatorname*{Inf}_n \operatorname*{Sup}_p \tilde{f}_{n+p}} \in \mathcal{PM}\,.$$

Ce sont respectivement la Limite Inférieure et la Limite Supérieure de la suite dominée $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$; on a toujours $\boxed{\operatorname*{\underline{Lim}}_n \tilde{f}_n \leq \operatorname*{\overline{Lim}}_n \tilde{f}_n}$.

9.6. Définition : On dit que $\tilde{f}_n$ converge finement vers $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi

$\boxed{\tilde{f} = \operatorname*{\underline{Lim}}_n \tilde{f}_n = \operatorname*{\overline{Lim}}_n \tilde{f}_n}$; on écrit $\boxed{\tilde{f}_n \overset{\times}{\to} \tilde{f}}$ et on note $\boxed{\tilde{f} = \operatorname*{Lim}_n \tilde{f}_n}$.

9.7. Théorème : Soient $\tilde f_n\,,\ \tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f_n \overset{\times}{\to} \tilde f$ ssi $\boxed{\operatorname*{Sup}_{r\,\ge\, n}\ |\,\tilde f_r - \tilde f\,| \overset{\star}{\to} 0}$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $\forall\, r \ge n \quad \Big(\operatorname*{Inf}_{p\,\ge\, n}\ \tilde f_p\Big) - \tilde f \le \tilde f_r - \tilde f \le \Big(\operatorname*{Sup}_{p\,\ge\, n}\ \tilde f_p\Big) - \tilde f\,,$

donc $\forall\, r \ge n \quad |\,\tilde f_r - \tilde f\,| \le \left|\Big(\operatorname*{Inf}_{p\,\ge\, n}\ \tilde f_p\Big) - \tilde f\right| \vee \left|\Big(\operatorname*{Sup}_{p\,\ge\, n}\ \tilde f_p\Big) - \tilde f\right|$;

$$\text{donc}\quad \operatorname*{Sup}_{r\,\ge\, n}\ |\,\tilde f_r - \tilde f\,| \le \left|\Big(\operatorname*{Inf}_{p\,\ge\, n}\ \tilde f_p\Big) - \tilde f\right| \vee \left|\Big(\operatorname*{Sup}_{p\,\ge\, n}\ \tilde f_p\Big) - \tilde f\right|$$
$$= \left|\Big(\operatorname*{Inf}_{p}\ \tilde f_{n+p}\Big) - \tilde f\right| \vee \left|\Big(\operatorname*{Sup}_{p}\ \tilde f_{n+p}\Big) - \tilde f\right| \overset{\star}{\to} 0\,.$$

b) $\Leftarrow$: Soit $n \in \mathbb{N}$; on a

$\left|\Big(\operatorname*{Sup}_{p}\ \tilde f_{n+p}\Big) - \tilde f\right| = \left|\ \operatorname*{Sup}_{p}\ \big(\tilde f_{n+p} - \tilde f\,\big)\right| \le \operatorname*{Sup}_{p}\ \ |\,\tilde f_{n+p} - \tilde f\,| = \operatorname*{Sup}_{r\,\ge\, n}\ \ |\,\tilde f_r - \tilde f\,| \overset{\star}{\to} 0$;

de même on a $\left|\Big(\operatorname*{Inf}_{p}\ \tilde f_{n+p}\Big) - \tilde f\right| = \left|\ \operatorname*{Inf}_{p}\ \big(\tilde f_{n+p} - \tilde f\,\big)\right| \le \operatorname*{Sup}_{p}\ \ |\,\tilde f_{n+p} - \tilde f\,| \overset{\star}{\to} 0\,.$

9.8. Critère pratique : Soient $\tilde f_n\,,\ \tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f_n \overset{\times}{\to} \tilde f$ ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ il existe } \ p \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall\, q \ge p \quad \Big\|\operatorname*{Sup}_{p\,\le\, r\,\le\, q} |\,\tilde f_r - \tilde f\,|\Big\|_\star \le \varepsilon}\,.$$

9.9.* Corollaire : $\forall\, \tilde f_n\,,\ \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde f_n \overset{\times}{\to} \tilde f \ \Rightarrow\ \tilde f_n \overset{\star}{\to} \tilde f}$;

si $\tilde f_n$ est monotone on a $\tilde f_n \overset{\times}{\to} \tilde f \ \Leftrightarrow\ \tilde f_n \overset{\star}{\to} \tilde f\,.$

9.10.* Théorème :

Soient $\tilde f_n\,,\ \tilde f \in \mathcal{PM}$ tels que $\tilde f_n \overset{\star}{\to} \tilde f$; alors $\boxed{\operatorname*{\underline{Lim}}_{n}\ \tilde f_n \le \tilde f \le \operatorname*{\overline{Lim}}_{n}\ \tilde f_n}$.

9.11. Définition :

On dit que la suite $\tilde f_n \in \mathcal{PM}$ est Cauchy-fine (C-fine) ssi $\boxed{\operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\ge\, n}\ |\,\tilde f_p - \tilde f_q\,| \overset{\star}{\to} 0}$.

9.12. Théorème : $\mathcal{PM}$ est complet pour la convergence fine.

Dém : Soit $\tilde f_n \in \mathcal{PM}$ une suite C-fine ; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\sup\limits_{p\,,\,q\,\ge\, n}\ \|\,\tilde f_p - \tilde f_q\,\|_\star \le \Big\|\operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\ge\, n} \|\,\tilde f_p - \tilde f_q\,|\Big\|_\star \to 0\,,$ donc $\tilde f_n$ est une suite de Cauchy

dans $\mathcal{PM}$ pour la norme $\|\ \|_\star$; posons $\tilde f = {}^\star\lim\limits_{n}\ \tilde f_n \in \mathcal{PM}\,.$

Montons que $\tilde f_n \overset{\times}{\to} \tilde f$; soit $\varepsilon > 0$; soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\,\tilde f_n - \tilde f\,\|_\star \le \varepsilon$ et

$\Big\| \operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\geq\, n} |\,\tilde{f}_p - \tilde{f}_q\,| \Big\|_\star \leq \varepsilon$; alors on a $\forall\, r \in \mathbb{N} \quad |\,\tilde{f}_r - \tilde{f}\,| \leq |\,\tilde{f}_r - \tilde{f}_n| + |\,\tilde{f}_n - \tilde{f}\,|$,

donc $\Big\| \operatorname*{Sup}_{r\,\geq\, n} |\,\tilde{f}_r - \tilde{f}\,| \Big\|_\star \leq \Big\| \operatorname*{Sup}_{r\,\geq\, n} |\,\tilde{f}_r - \tilde{f}_n\,| \Big\|_\star + \|\,\tilde{f}_n - \tilde{f}\,\|_\star \leq 2\,\varepsilon$.

9.13.* <u>Théorème</u> : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ telle que $\sum\limits_{n\,=\,0}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_\star < +\infty$;

alors $\sum\limits_{n\,=\,0}^{\infty} \tilde{f}_n$ converge finement dans $\mathcal{PM}$ et $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} 0$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \operatorname*{Sup}_{q\,>\,p\,\geq\, n} \Big\| \tilde{f}_p + \tilde{f}_{p+1} + \ldots + \tilde{f}_q \Big\|_\star \leq \Big\| |\tilde{f}_p| + |\tilde{f}_{p+1}| + \ldots + |\tilde{f}_q| \Big\|_\star$

$\leq \sum\limits_{r\,=\,n}^{\infty} \|\,\tilde{f}_r\,\|_\star$, donc $\sum\limits_{n\,=\,0}^{\infty} \tilde{f}_n$ converge finement dans $\mathcal{PM}$; de plus

$\Big\| \operatorname*{Sup}_{p\,\geq\, n} |\tilde{f}_p| \Big\|_\star \leq \Big\| \sum\limits_{r\,=\,n}^{\infty} |\tilde{f}_p| \Big\|_\star \leq \sum\limits_{r\,=\,n}^{\infty} \|\,\tilde{f}_p\,\|_\star$, donc $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} 0$.

9.14. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ et soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ telle que $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$;
alors il existe une sous-suite $\tilde{f}_{n'}$ telle que $\tilde{f}_{n'} \xrightarrow{\times} \tilde{f}$.

<u>Dém</u> : On construit une suite strictement croissante d'indices $n' \in \mathbb{N}$ tels que
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \|\,\tilde{f}_{n'} - \tilde{f}\,\|_1 \leq 1/2^n$; alors on a $\Big\| \operatorname*{Sup}_{r'\,\geq\, n'} |\,\tilde{f}_{r'} - \tilde{f}\,| \Big\|_1 \leq \sum\limits_{r'\,=\,n'}^{\infty} \|\,\tilde{f}_{r'} - \tilde{f}\,\|_1$

$\leq \sum\limits_{r\,=\,n}^{\infty} 1/2^r = 2/2^n$; donc $\tilde{f}_{n'} \xrightarrow{\times} \tilde{f}$.

9.15. <u>Théorème</u> : Pour toute suite dominée $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}^+$ on a

$$\boxed{\Big\| \operatorname*{\underline{Lim}}_n \tilde{f}_n \Big\|_\star \leq \operatorname*{\underline{lim}}_n \|\tilde{f}_n\|_\star \leq \operatorname*{\overline{lim}}_n \|\tilde{f}_n\|_\star \leq \Big\| \operatorname*{\overline{Lim}}_n \tilde{f}_n \Big\|_\star} \,.$$

<u>Dém</u> : On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sup_p \|\,\tilde{f}_{n+p}\|_\star \leq \Big\| \operatorname*{Sup}_p \tilde{f}_{n+p} \Big\|_\star$; or $\operatorname*{Sup}_p \tilde{f}_{n+p} \xrightarrow{\star} \operatorname*{\overline{Lim}}_n \tilde{f}_n$
quand $n \to +\infty$; donc $\operatorname*{\overline{lim}}_n \|\,\tilde{f}_n\|_\star \leq \Big\| \operatorname*{\overline{Lim}}_n \tilde{f}_n \Big\|_\star$.

§ 10. <u>Suprémum et Infimum généralisés dans $\mathcal{PM}$</u>

<u>**Contenu**</u> : On généralise aux parties de $\mathcal{PM}$ les notions de Suprémum et d'Infimum , déjà étudiées pour les suites .

10.1. <u>Définition</u> : Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{PM}$ satisfaisant aux propriétés suivantes

1) Il existe $\widetilde{F} \in \mathcal{PM}$ tel que $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{A} \quad \tilde{f} \leq \widetilde{F}$ ($\mathcal{A}$ est dominée supérieurement)

2) $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{A}$ on a $\tilde{f} \vee \tilde{g} \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable pour la loi $\vee$) .

On pose $\boxed{\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad \widetilde{\Phi}\,(h) = \sup_{\tilde f \in \mathcal{A}} \tilde f\,(h)}$.

10.2. <u>Théorème</u> : $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{PM}_S$.

<u>Dém</u> : On a clairement $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad \forall\, \lambda \geq 0 \quad \Phi\,(\lambda\, h) = \lambda\, \widetilde{\Phi}\,(h)$.

Montrons que $\forall\, h\,,\, k \in \mathcal{E}^+ \quad \widetilde{\Phi}\,(h+k) = \widetilde{\Phi}\,(h) + \widetilde{\Phi}\,(k)$; on a $\forall\, \tilde f \in \mathcal{A} \quad \forall\, h\,,\, k \in \mathcal{E}^+$ $\tilde f\,(h+k) = \tilde f\,(h) + \tilde f\,(k) \leq \widetilde{\Phi}\,(h) + \widetilde{\Phi}\,(k)$, donc $\Phi\,(h+k) \leq \widetilde{\Phi}\,(h) + \widetilde{\Phi}\,(k)$.

Par ailleurs soient $h\,,\, k \in \mathcal{E}^+$ et $\varepsilon > 0$; il existe $\tilde f,\, \tilde g \in \mathcal{A}$ tels que $\tilde f\,(h) \geq \widetilde{\Phi}\,(h) - \varepsilon$ et $\tilde f\,(k) \geq \widetilde{\Phi}\,(k) - \varepsilon$;

on a donc $\widetilde{\Phi}\,(h) + \widetilde{\Phi}\,(k) - 2\,\varepsilon \leq \tilde f\,(h) + \tilde g\,(k) \leq (\tilde f \vee \tilde g)\,(h) + (\tilde f \vee \tilde g)\,(k)$ $\leq (\tilde f \vee \tilde g)\,(h+k) \leq \Phi\,(h+k)$. On en déduit $\widetilde{\Phi}\,(h+k) = \widetilde{\Phi}\,(h) + \widetilde{\Phi}\,(k)$.

De plus soit $\tilde f_0 \in \mathcal{A}$; on a $\forall\, \tilde f \in \mathcal{A} \quad \forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad \tilde f_0(h) \leq \tilde f\,(h) \leq \widetilde{F}\,(h)$,

donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \quad \tilde f_0(h) \leq \widetilde{\Phi}(h) \leq \widetilde{F}\,(h)$, donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$

$|\widetilde{\Phi}(h)| \leq \max \big\{ |\tilde f_0(h)|\,,\, |\widetilde{F}\,(h)| \big\} \leq \max \big\{ \|\tilde f_0\|_\star\,,\, \|\widetilde{F}\|_\star \big\}\, \|h\|$.

<u>Notation</u> : On note encore $\widetilde{\Phi}$ le prolongement de $\widetilde{\Phi}$ à $\mathcal{E}$.

10.3.* <u>Théorème</u> :

1) $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{PM}$ 3) $\forall\, \tilde f \in \mathcal{A} \quad \tilde f \leq \widetilde{\Phi}$

2) $\widetilde{\Phi} \leq \widetilde{F}$ 4) $\forall\, \widetilde{G} \in \mathcal{PM}$ on a $\Big[\big(\forall\, \tilde f \in \mathcal{A} \quad \tilde f \leq \widetilde{G} \big) \Rightarrow \widetilde{\Phi} \leq \widetilde{G} \Big]$.

On pose $\boxed{\widetilde{\Phi} = \operatorname{Sup} \mathcal{A} = \operatorname*{Sup}_{\tilde f \in \mathcal{A}} \tilde f}$.

Si $\mathcal{A}$ est dominée inférieurement et stable par $\wedge$, on définit $\operatorname{Inf} \mathcal{A} = \operatorname*{Inf}_{\tilde f \in \mathcal{A}} \tilde f$ de manière analogue. $\operatorname{Sup} \mathcal{A}$ se nomme le <u>Suprémum</u> de $\mathcal{A}$ et $\operatorname{Inf} \mathcal{A}$ se nomme l'<u>Infimum</u> de $\mathcal{A}$.

10.4. <u>Théorème</u> : $\boxed{\inf_{\tilde f \in \mathcal{A}} \|\widetilde{\Phi} - \tilde f\|_\star = 0}$

<u>Dém</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{A}$ on a $\|\widetilde{\Phi} - \tilde f\|_\star = (\widetilde{\Phi} - \tilde f\,)(\mathbb{1}) = \widetilde{\Phi}(\mathbb{1}) - \tilde f\,(\mathbb{1})$, donc

$$\inf_{\tilde f \in \mathcal{A}} \|\widetilde{\Phi} - \tilde f\|_\star = \inf_{\tilde f \in \mathcal{A}} \big[\widetilde{\Phi}(\mathbb{1}) - \tilde f\,(\mathbb{1}) \big] = \widetilde{\Phi}(\mathbb{1}) - \sup_{\tilde f \in \mathcal{A}} \tilde f\,(\mathbb{1}) = 0\,.$$

10.5.* <u>Corollaire</u> : $\|\widetilde{\Phi}\|_\star = \lim_{\tilde f \in \mathcal{A}} \|\tilde f\|_\star$ (au sens d'une limite généralisée).

10.6.* <u>Corollaire</u> : Si $\mathcal{A}$ est inclus à un sous-espace fermé de $\mathcal{PM}$, alors $\operatorname{Sup} \mathcal{A}$ et $\operatorname{Inf} \mathcal{A}$ appartiennent aussi à ce sous-espace.

10.7. <u>Définition</u> : Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{PM}$ dominée supérieurement. On pose

$$\mathcal{AA} = \{ \tilde{f}_1 \vee \tilde{f}_2 \vee \ldots \vee \tilde{f}_n \parallel n \in \mathbb{N}^* \ \underline{\text{et}} \ \ \tilde{f}_1 , \tilde{f}_2 , \ldots \tilde{f}_n \in \mathcal{A} \} .$$

Alors $\mathcal{AA}$ est encore dominée supérieurement et de plus stable pour la loi $\vee$;

on peut donc poser $\boxed{\text{Sup } \mathcal{A} = \text{Sup } \mathcal{AA}}$. Idem pour Inf $\mathcal{A}$.

<u>Chapitre II</u> : <u>Espaces de Riesz</u>

<u>Contenu</u> : Un *espace de Riesz* est un espace ordonné possédant une *valeur absolue* (à valeurs dans l'espace lui-même). $\mathbb{R}$ en est l'exemple minimal et paradigmatique. De nombreux espaces de fonctions, les espaces $\mathcal{PM}$ et $\mathcal{L}^1$, ainsi que la plupart des espaces définis dans les chapitres suivants, sont des espaces de Riesz.

§ 1. <u>Définition et propriétés</u>

1.1. <u>Définition</u> : Un espace ordonné V est un <u>espace de Riesz</u> ss'il existe une application $|\ | : \mathrm{V} \to \mathrm{V}^+$, appelée <u>valeur absolue</u> telle que

$$\boxed{\forall\, u \in \mathrm{V} \quad \forall\, v \in \mathrm{V}^+ \quad \Big[\ |u| \leq v \ \Leftrightarrow\ -v \leq u \leq v\ \Big]}\ .$$

1.2. <u>Théorème</u> : Dans un espace de Riesz V on a $(u\,,\, v \in \mathrm{V})$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & -|u| \leq u \leq |u| \\ 2) & u \geq 0 \ \Leftrightarrow\ u = |u| \\ 3) & \forall\,\lambda \in \mathbb{R} \quad |\lambda\, u| = |\lambda|\,|u| \\ 4) & |u+v| \leq |u| + |v| \\ 5) & \big|\,|u| - |v|\,\big| \leq |u - v| \end{array}}$$

<u>Dém</u> :

1) $\forall\, u \in \mathrm{V}$ on a $|u| \in \mathrm{V}^+$ et $|u| \leq |u|$, donc $-|u| \leq u \leq |u|$.

2) a) $\Rightarrow$: Soit $u \geq 0$; on a $-u \leq u \leq u$, donc $|u| \leq u$; or $u \leq |u|$, donc $u = |u|$.

b) $\Leftarrow$: Trivial.

3) $\forall\, u \in \mathrm{V}$ on a $-|u| \leq u \leq |u|$, donc $-|u| \leq -u \leq |u|$, donc $|-u| \leq |u|$, donc aussi $|u| = |-(-u)| \leq |-u|$, donc $|-u| = |u|$.

D'autre part soit $\lambda > 0$; on a $-|u| \leq u \leq |u|$, donc $-\lambda\,|u| \leq \lambda\, u \leq \lambda\,|u|$, or $\lambda\,|u| \in \mathrm{V}^+$, donc $|\lambda\, u| \leq \lambda\,|u|$; on a donc aussi $\lambda\,|u| = \lambda\,\big|(1/\lambda)\,\lambda\, u\big|$ $\leq \lambda\,(1/\lambda)\,|\lambda\, u| = |\lambda\, u|$; donc $|\lambda\, u| = \lambda\,|u|$.

4) $\forall\, u\,, v \in \mathrm{V}$ on a $-|u| - |v| \leq u + v \leq |u| + |v|$, donc $|u+v| \leq |u| + |v|$.

5) $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}$ on a $|u| = |v + u - v| \leq |v| + |u - v|$; en intervertissant u et v on a $|v| \leq |u| + |u - v|$, donc $-|u - v| \leq |u| - |v| \leq |u - v|$, donc $\big||u| - |v|\big| \leq |u - v|$.

Exemples d'espaces de Riesz : $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{M}_D$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{PM}$.

1.3. Théorème : Il existe au plus une valeur absolue dans un espace ordonné.

Dém : Soit V un espace ordonné et soient $|\ \ |_1$ et $|\ \ |_2$ deux valeurs absolues dans V ; on a $\forall\, u \in \mathrm{V}\ \ -|u|_1 \leq u \leq |u|_1$, donc $|u|_2 \leq |u|_1$; de même on trouve $|u|_1 \leq |u|_2$, donc $|u|_1 = |u|_2$.

1.4. Définition : Soit V un espace de Riesz ; $\forall\ u\,,\, v \in \mathrm{V}$ on pose

$$\boxed{u \vee v = \tfrac{1}{2}\big(u + v + |u - v|\big)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u \wedge v = \tfrac{1}{2}\big(u + v - |u - v|\big)}.$$

1.5. Définition : Soit V un espace de Riesz ; $\forall\, u \in \mathrm{V}$ on pose

$$\boxed{u^+ = u \vee 0 = \tfrac{1}{2}\big(|u| + u\big)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u^- = (-u)^+ = (-u) \vee 0 = \tfrac{1}{2}\big(|u| - u\big)}.$$

u^+ et u^- s'appellent la partie positive et la partie négative de u.

1.6. Théorème : Propriétés des lois $\wedge$ et $\vee$ dans un espace de Riesz V $(u\,,\, v\,,\, w\,,\, x \in \mathrm{V})$

1) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+\quad (\lambda\, u)^+ = \lambda\, u^+$ et $(\lambda\, u)^- = \lambda\, u^-$

2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+\quad \lambda\,(u \wedge v) = (\lambda\, u) \wedge (\lambda\, v)$ et $\lambda\,(u \vee v) = (\lambda\, u) \vee (\lambda\, v)$

3) $-\,(u \wedge v) = (-u) \vee (-v)$ et $-\,(u \vee v) = (-u) \wedge (-v)$

4) $(u + v) \vee (u + w) = u + (u \vee w)$ et $(u + v) \wedge (u + w) = u + (u \wedge w)$

5) $u \wedge v \leq u \leq u \vee v$

6) $u \vee u = u \wedge u = u$ (idempotence)

7) $u \vee v = v \vee u$ et $u \wedge v = v \wedge u$ (commutativité)

8) $(u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w)$ et $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$ (associativité)

9) $u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (u \wedge w)$ et $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge (u \vee w)$ (distributivité)

10) $v \leq w \;\Rightarrow\; \big(u \vee v \leq u \vee w \quad \text{et} \quad u \wedge v \leq u \wedge w\big)$ (monotonie)

11) $u \wedge v \leq u \leq u \vee v$

12) $\big(u \leq v \quad \text{et} \quad u \leq w\big) \;\Rightarrow\; u \leq v \wedge w$ $\big[\, u \wedge v$ est la borne inférieure de u et $v \,\big]$

13) $\big(u \leq w \quad \text{et} \quad v \leq w\big) \;\Rightarrow\; u \vee v \leq w$ $\big[\, u \vee v$ est la borne supérieure de u et $v \,\big]$

14) $u \leq v \;\Leftrightarrow\; u \wedge v = u$

15) $u \leq v \;\Leftrightarrow\; u \vee v = v$

16) $u \vee v + u \wedge v = u + v$ et $u \vee v - u \wedge v = |u - v|$

17) $u \vee (-u) = |u|$ et $u \wedge (-u) = -|u|$

18) $u^+ \wedge u^- = 0$

19) $u = u^+ - u^-$

20) $|u| = u^+ + u^- = u^+ \vee u^-$

21) $u \leq v \;\Leftrightarrow\; \big(u^+ \leq v^+ \quad \text{et} \quad u^- \geq v^-\big)$

22) $2\,(u \wedge v)^+ \leq (u+v)^+ \leq u^+ + v^+$ et $2\,(u \vee v)^- \leq (u+v)^- \leq u^- + v^-$

23) $(u \wedge v)^+ = u^+ \wedge v^+$ et $(u \wedge v)^- = u^- \wedge v^-$

24) $(u \vee v)^+ = u^+ \vee v^+$ et $(u \vee v)^- = u^- \vee v^-$.

25) $u \vee v = u^+ \vee v^+ - u^- \wedge v^-$ et $u \wedge v = u^+ \wedge v^+ - u^- \vee v^-$

26) $|u \vee v| \leq |u| \vee |v|$ et $|u \wedge v| \leq |u| \vee |v|$

27) $|u+v| \vee |u-v| = |u| + |v|$

28) $|u| \wedge |v| = 0 \;\Rightarrow\; |u+v| = |u| + |v|$

29) $|u \vee v - w \vee x| \leq |u-w| + |v-x|$ et $|u \wedge v - w \wedge x| \leq |u-v| + |w-x|$

30) $u \leq w \;\Rightarrow\; u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w \overset{\text{déf}}{=} \boxed{u \vee v \wedge w}$

31) $\forall\, u\,,\, v\,,\, w \in \mathrm{V}^+ \quad u \wedge (v+w) \leq u \wedge v + u \wedge w$

32) $\forall\, v\,,\, w \in \mathrm{V}^+ \;\Big[\big(u = v - w \quad \text{et} \quad v \wedge w = 0\big) \;\Leftrightarrow\; \big(v = u^+ \quad \text{et} \quad w = u^-\big)\Big]$.

Tous ces résultats sont de démonstration élémentaire (voir [34]). Nous les utiliserons librement dans la suite.

1.7. Théorème de balayage dans $\mathcal{L}^1$: $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{\displaystyle \overset{1}{\lim_{\alpha \to +\infty}}\ \alpha \wedge \tilde f = \tilde f}$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $g \in \mathcal{E}$ tel que $\|\tilde f - g\|_1 \le \varepsilon$; on a $\forall\, \alpha > 0$

$\|\alpha \wedge \tilde f - \tilde f\|_1 \le \|\alpha \wedge \tilde f - \alpha \wedge g\|_1 + \|\tilde f - g\|_1 + \|\alpha \wedge g - g\|_1$

$\le 2\,\|\tilde f - g\|_1 + \|\alpha \wedge g - g\|_1 \le 2\,\varepsilon + \|\alpha \wedge g - g\|_1$; or $\forall\, \alpha \ge \|g\|$ on a $\alpha \wedge g = g$;

donc $\forall\, \alpha \ge \|g\|$ on a $\|\alpha \wedge \tilde f - \tilde f\|_1 \le 2\,\varepsilon$.

1.8.* Corollaire : $\boxed{\displaystyle \overset{1}{\lim_{\alpha \to +\infty}}\ (-\alpha) \vee \tilde f \wedge \alpha = \tilde f}$.

§ 2. Treillis

2.1. Définition I : Un *ensemble ordonné* E est un treillis ssi $\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{E}$ la paire $\{a\,,\, b\}$ possède un *majorant minimum* (noté $a \vee b$) et un *minorant maximum* (noté $a \wedge b$).

On en déduit $\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{T}$ $\boxed{a \wedge b \le a \le a \vee b}$.

2.2. Définition équivalente II : Un ensemble E est un treillis ss'il existe deux opérations sur E, notées $\vee$ et $\wedge$, *commutatives*, *associatives* et *idempotentes*, telles que

$$\boxed{\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{E} \quad \big[\, a \wedge b = a \;\Leftrightarrow\; a \vee b = b \,\big]}\,.$$

On peut alors définir un ordre sur E par la condition $\boxed{\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{E} \quad a \le b \;\Leftrightarrow\; a \wedge b = a}$.

Pour cet ordre $\vee$ et $\wedge$ constituent effectivement les opérations de « majorant minimum » et de « minorant maximum ».

2.3. Définition équivalente III : Un ensemble E est un treillis ss'il existe deux opérations sur E, notées $\vee$ et $\wedge$, *commutatives* et *associatives*, vérifiant la propriété d'absorption

$$\boxed{\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{E} \quad a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a}\,.$$

Remarque :

La propriété d'absorption *à elle seule* implique déjà l'idempotence des lois $\vee$ et $\wedge$;

en effet on peut alors écrire $\forall\, a \in \mathrm{T}$: $a \vee a = a \vee \big[a \wedge (a \vee a)\big] = a$

$$a \wedge a = a \wedge \big[a \vee (a \wedge a)\big] = a\,.$$

2.4. Théorème fondamental

$\boxed{\text{Un espace ordonné est un treillis ssi c'est un espace de Riesz.}}$

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit V un espace ordonné posédant une structure de treillis ; on pose $\boxed{\forall\, u \in \mathrm{V} \quad |u| = u \vee (-u)}$; montrons que $|\ \ |$ est une valeur absolue sur V.

On a $\forall\, u \in \mathrm{V} \quad |u| \geq u$ et $|u| \geq -u$, donc $2\,|u| \geq u + (-u) = 0$, donc $|u| \geq 0$.

D'autre part on peut écrire $\forall\, u \in \mathrm{V} \quad \forall\, v \in \mathrm{V}^+ :$

$$\begin{aligned} |u| \leq v \quad &\Leftrightarrow \quad u \vee (-u) \leq v \\ &\Leftrightarrow \quad \big(u \leq v \quad \text{et} \quad -u \leq v\big) \\ &\Leftrightarrow \quad -v \leq u \leq v\,. \end{aligned}$$

b) $\Leftarrow$: Conséquence des propriétés 6), 11), 12), 13).

§ 3. Sous-espaces d'un espace de Riesz

3.1. Définition : Soit V un espace de Riesz ; un sous-espace W de V est cohérent ssi W est stable pour les lois $\vee$ et $\wedge$.

Remarque :

W étant un sous-espace, la stabilité pour l'une des lois implique la stabilité pour l'autre.

3.2. Théorème : W est cohérent ssi $\forall\, u \in \mathrm{V}$ on a $\boxed{u \in \mathrm{W} \Rightarrow |u| \in \mathrm{W}}$.

Dém : a) $\Rightarrow$: Si $u \in \mathrm{W}$ on a $|u| = u \vee (-u) \in \mathrm{W}$.

b) $\Leftarrow$: Si $u\,,\, v \in \mathrm{W}$ on a $u \vee v = \frac{1}{2}\big(u + v + |u - v|\big) \in \mathrm{W}$.

3.3.* Théorème : Soient V un espace de Riesz et W un sous-espace de V ; alors W est un espace de Riesz (pour la structure induite) ssi W est cohérent.

3.4.* Théorème : $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_D$ sont des sous-espaces cohérents et $\boxed{\text{intégraux}}$ de $\mathcal{PM}$.

3.5. Théorème :

Soient V un espace de Riesz et W un sous-espace cohérent et intégral de V ; alors V/W possède une structure naturelle d'espace de Riesz en posant $\forall\, \widehat{u} \in \mathrm{V}/\mathrm{W}$ $\boxed{|\widehat{u}| = \widehat{|u|}}$.

Dém : Montrons d'abord que cette définition est indépendante des représentants choisis, c-à-d que $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad \big(\widehat{u} = \widehat{v} \Rightarrow \widehat{|u|} = \widehat{|v|}\big)$, c-à-d encore $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}$ $\big(u - v \in \mathrm{W} \Rightarrow |u| - |v| \in \mathrm{W}\big)$. Soient donc $v \in \mathrm{V}$ et $w \in \mathrm{W}$; il faut montrer que $|v + w| - |v| \in \mathrm{W}$; or on a $|v + w| - |v| \leq |v| + |w| - |v| = |w|$; de plus $|w| \in \mathrm{W}$

car W est cohérent ; on en déduit $|v+w|-|v| \in \mathrm{W}$ car W est intégral.

Démontrons ensuite que $|\ |$ est bien une valeur absolue sur V/W, c-à-d que
$\forall\, \widehat{u} \in \mathrm{V/W} \quad \forall\, \widehat{v} \in (\mathrm{V/W})^+ \quad \Big[\, |\widehat{u}| \leq \widehat{v} \;\Leftrightarrow\; -\widehat{v} \leq \widehat{u} \leq \widehat{v} \,\Big]$.

a) $\Rightarrow$: Supposons $|\widehat{u}| \leq \widehat{v}$; alors il existe $w \in \mathrm{W}$ tel que $|u| \leq v + w$, c-à-d
$-v-w \leq u \leq v+w$; on en déduit $-v \leq u+w$ et $u \leq v+w$, donc $-\widehat{v} \leq \widehat{u} \leq \widehat{v}$.

b) $\Leftarrow$: Supposons $-\widehat{v} \leq \widehat{u} \leq \widehat{v}$; alors il existe $w_1, w_2 \in \mathrm{W}$ tels que $-v \leq u + w_1$
et $u \leq v + w_2$; on en déduit $-v - w_1 \leq u \leq v + w_2$, donc
$-v-(w_1 \vee w_2) \leq u \leq v + (w_1 \vee w_2)$, donc $|u| \leq v + (w_1 \vee w_2)$, donc $|\widehat{u}| \leq \widehat{v}$.

§ 4. Domaines de Riesz sur un espace de Riesz

4.1. Définition :

Soient A et V deux espaces de Riesz ; on dit que V est un domaine de Riesz sur A ss'il est muni d'une application bilinéaire (notée multiplicativement)
$\mathrm{A} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V} \;:\; (a, u) \mapsto a\,u$ telle que $\boxed{\forall\, a \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad |a\,u| = |a|\,|u|}$.

4.2. Théorème : Dans un domaine de Riesz V sur A on a

1) $\forall\, a \in \mathrm{A}^+ \quad \forall\, u \in \mathrm{V}^+ \quad a\,u \in \mathrm{V}^+$
2) $\forall\, a, b \in \mathrm{A}^+ \quad \forall\, u, v \in \mathrm{V}^+ \quad \big[\big(a \leq b \;\text{ et }\; u \leq v\big) \Rightarrow a\,u \leq b\,v\big]$
3) $\forall\, a, b \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V}^+ \quad (a \wedge b)\,u = (a\,u) \wedge (b\,u)$ et $(a \vee b)\,u = (a\,u) \vee (b\,u)$
4) $\forall\, a \in \mathrm{A}^+ \quad \forall\, u, v \in \mathrm{V} \quad a\,(u \wedge v) = (a\,u) \wedge (a\,v)$ et $a\,(u \vee v) = (a\,u) \vee (a\,v)$

Dém :

1) $a\,u = |a|\,|u| = |a\,u| \in \mathrm{V}^+$.

2) $(b-a)\,u \geq 0$, donc $b\,u \geq a\,u$; de même $b\,(v-u) \geq 0$, donc $b\,v \geq b\,u$;
donc $b\,v \geq b\,u \geq a\,u$.

3) $(a \wedge b)\,u = \frac{1}{2}\big(a+b-|a-b|\big)\,u = \frac{1}{2}\big(a\,u + b\,v - |a-b|\,u\big)$
$= \frac{1}{2}\big(a\,u + b\,v - |(a-b)\,u|\big) = \frac{1}{2}\big(a\,u + b\,v - |a\,u - b\,u|\big) = (a\,u) \wedge (b\,u)$.

4) Idem.

Exemples : $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{M}_D$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{PM}$ sont des domaines de Riesz sur $\mathcal{R}$.

§ 5. Espaces semi-normés de Riesz

5.1. Définition : Un espace de Riesz V muni d'une semi-norme (resp. norme) $\| \, \|_s$ est un espace semi-normé (resp. normé) de Riesz ssi

$$\boxed{\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad |u| \leq |v| \Rightarrow \|u\|_s \leq \|v\|_s}\,.$$

5.2. Théorème : Dans un espace semi-normé de Riesz V on a $(u\,,\, v \in \mathrm{V})$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ |u| = |v| \ \Rightarrow \|u\|_s = \|v\|_s \\ 2)\ \ \big\| |u| \big\|_s = \|u\|_s \\ 3)\ \ \big\| |u| - |v| \big\|_s \leq \|u - v\|_s \end{array}}$$

Dém :

Démontrons par exemple 2) : on a $\forall\, u \in \mathrm{V} \quad \big| |u| \big| = |u|$, donc $\big\| |u| \big\|_s = \|u\|_s$.

5.3.* Théorème : $\boxed{\text{Un espace normé de Riesz est archimédien.}}$

5.4. Définition : Un espace normé de Riesz V est un espace de Riesz-Banach (ou treillis de Banach) ssi V est complet pour la norme. Si de plus V est un espace de Hilbert on parle d'un espace de Riesz-Hilbert.

Exemples d'espaces de Riesz-Banach :

$(\mathcal{C}\,, |\ \,|, \|\ \,\|)$, $(\mathcal{F}, |\ \,|, \|\ \,\|)$, $(\mathcal{L}^1, |\ \,|, \|\ \,\|_1)$, $(\mathcal{M}\,, |\ \,|, \|\ \,\|_\star)$, $(\mathcal{PM}\,, |\ \,|, \|\ \,\|_\star)$.

§ 6. N-dual d'un espace semi-normé de Riesz

Nous nous proposons de généraliser à un espace semi-normé de Riesz quelconque la construction qui nous a permis d'obtenir $\mathcal{PM}$ à partir de $\mathcal{E}$.

6.1. Définition : Soit V un espace semi-normé de Riesz et soit $\mathrm{V}^\star$ le N-dual de V ; $\mathrm{V}^\star$ est un espace de Banach pour la norme duale $\| \, \|_\star$ définie par

$$\boxed{\forall\, \phi \in \mathrm{V}^\star \quad \|\phi\|_\star = \sup_{u \in \mathrm{V},\, \|u\|_s = 1} \big|\phi\,(u)\big| = \sup_{u \in \mathrm{V},\, \|u\|_s \leq 1} \phi\,(u)}$$

6.2. Définition : On définit un ordre dans $V^\star$ de la manière suivante :

$$\forall\, \phi\,,\, \psi \in V^\star \ \text{ on pose } \ \boxed{\phi \leq \psi \quad \text{ssi} \quad \forall\, u \in V^+ \ \ \phi\,(u) \leq \psi\,(u)}\,.$$

6.3.* Théorème : $V^\star$ est un espace ordonné.

6.4. Définition : On pose $\forall\, \phi \in V^\star$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad \forall\, u \in V^+ \quad |\phi|\,(u) \;=\; \sup\limits_{v\,\in\, V,\, |v|\,\leq\, u} \phi\,(v) \;=\; \sup\limits_{v\,\in\, V,\, |v|\,\leq\, u} |\phi\,(v)| \\ \bullet \quad \forall\, u \in V \quad\;\; |\phi|\,(u) \;=\; |\phi|\,(u^+) - |\phi|\,(u^-) \end{array}}$$

6.5. Théorème : $|\ \ |$ est une valeur absolue sur $V^\star$, qui est donc un espace de Riesz.

Dém : Identique à la démonstration faite dans le cas de $\mathcal{PM}$.

6.6. Théorème : $\forall\, \phi \in V^\star \quad \forall\, u \in V$ on a $\big|\phi\,(u)\big| \leq |\phi|\big(|u|\big)$.

Dém : Identique à la démonstration faite dans le cas de $\mathcal{PM}$.

6.7. Théorème : $\forall\, \phi \in V^\star$ on a $\boxed{\big\|\,|\phi|\,\big\|_\star = \|\phi\|_\star}$.

Dém : Soit $\phi \in V^\star$; on a $\|\phi\|_\star = \sup\limits_{u\,\in\, V,\, \|u\|_s\,=\,1} |\phi\,(u)| \leq \sup\limits_{u\,\in\, V,\, \|u\|_s\,=\,1} |\phi|\big(|u|\big)$ $= \sup\limits_{u\,\in\, V^+,\, \|u\|_s\,=\,1} |\phi|\,(u) = \big\|\,|\phi|\,\big\|_\star$; on a donc $\|\phi\|_\star \leq \big\|\,|\phi|\,\big\|_\star$; soit $\varepsilon > 0$; choisissons $u \in V^+$ tel que $\|u\|_s = 1$ et $\big\|\,|\phi|\,\big\|_\star \leq |\phi|\,(u) + \varepsilon$; choisissons ensuite $v \in V$ tel que $|v| \leq u$ et $|\phi|\,(u) \leq |\phi\,(v)| + \varepsilon$; on a donc $\big\|\,|\phi|\,\big\|_\star \leq |\phi\,(v)| + 2\,\varepsilon$; or $|v| \leq u$, donc $\|v\|_s \leq \|u\|_s = 1$, donc $|\phi\,(v)| \leq \|\phi\|_\star$, donc $\big\|\,|\phi|\,\big\|_\star \leq \|\phi\|_\star + 2\,\varepsilon$; on en déduit $\big\|\,|\phi|\,\big\|_\star \leq \|\phi\|_\star$.

6.8.* Corollaire : $\forall\, \phi\,,\, \psi \in V^\star$ on a $|\phi| \leq |\psi| \Rightarrow \|\phi\|_\star \leq \|\psi\|_\star$.

En conclusion on obtient le

6.9.* Théorème :

$$\boxed{\text{Le N-dual d'un espace semi-normé de Riesz est un espace de Riesz-Banach.}}$$

§ 7. Morphismes et isométries de Riesz

7.1. Définition : Soient V et V' deux espaces de Riesz ; le morphisme linéaire $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est croissant ssi $\boxed{\forall\, u \in \mathrm{V} \quad \big[\, u \geq 0 \;\Rightarrow\; \phi\,(u) \geq 0 \,\big]}$.

ϕ est un morphisme de Riesz ssi $\boxed{\forall\, u \in \mathrm{V} \quad |\,\phi\,(u)| \,=\, \phi\,(|u|)}$.

7.2.* Théorème : Si $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est un morphisme de Riesz on a $(u\,,\, v \in \mathrm{V})$

1) $u \geq 0 \Rightarrow \phi\,(u) \geq 0$	3) $\phi\,(u \wedge v) = \phi\,(u) \wedge \phi\,(v)$
2) $u \leq v \Rightarrow \phi\,(u) \leq \phi\,(v)$	4) $\phi\,(u \vee v) = \phi\,(u) \vee \phi\,(v)$

Exemples :

$\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^+$ l'application $\boxed{\mathcal{R} \to \mathcal{PM} \;:\; f \mapsto f\,.\,\tilde{\mu}}$ est un morphisme de Riesz.

$\forall\, f \in \mathcal{R}^+$ l'application $\boxed{\mathcal{PM} \to \mathcal{PM} \;:\; \tilde{\mu} \mapsto f\,.\,\tilde{\mu}}$ est un morphisme de Riesz.

7.3. Définition : Soient V et V' deux espaces semi-normés de Riesz ; le morphisme de Riesz $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est une isométrie de Riesz ssi $\boxed{\forall\, u \in \mathrm{V} \quad \|\,\phi\,(u)\,\|_s = \|\,u\,\|_s}$.

Si V et V' sont des espaces de Riesz-Banach on parle d'une isométrie de Riesz-Banach.

Remarque : Une isométrie de Riesz-Banach est toujours *injective* ; elle n'est pas nécessairement *bijective*.

Contenu :

Les fonctions *positives semi-continues supérieurement* constituent l'outil théorique indispensable à la démonstration du théorème de *convergence dominée* de Lebesgue. En particulier le théorème de *semi-complétude* de l'ensemble de ces fonctions est à la base du théorème de *complétude* de l'espace des fonctions *universelles*.

1. Définition :

Une fonction $f : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}^+$ est semi-continue supérieurement ($\mathbf{scs}$) ssi

$$\boxed{\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,] \quad \overline{\lim_{x\to c}}\; f(x) \;\le\; f(c)}\;.$$

2. Théorème : Si $f : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}^+$ est $\mathbf{scs}$, alors f est $\boxed{\text{bornée}}$, c-à-d $f \in \mathcal{F}^+$, et f atteint sa borne supérieure.

Dém : Supposons que f ne soit pas bornée et soit une suite $x_n \in [\,a\,,\,b\,]$ telle que $f(x_n) \to +\infty$. Par compacité de $[\,a\,,\,b\,]$, il existe une sous-suite $x_{n'}$ qui est convergente ; posons $c = \lim\; x_{n'}$; alors on a $+\infty = \lim\; f(x_{n'}) \le f(c)$, ce qui est contradictoire.
Soit M la borne supérieure de f ; alors il existe une suite $x_n \in [\,a\,,\,b\,]$ telle que $f(x_n) \to M$. Par compacité de $[\,a\,,\,b\,]$, il existe une sous-suite $x_{n'}$ qui est convergente ; posons $c = \lim\; x_{n'}$; alors on a $M = \lim\; f(x_{n'}) \le f(c)$, donc $f(c) = M$.

On note $\mathcal{S} = \{\, f \in \mathcal{F}^+ \,\|\, f\ \mathbf{scs} \,\}$, $\mathcal{ES} = \{\, f \in \mathcal{E}^+ \,\|\, f\ \mathbf{scs} \,\} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$

et $\mathcal{RS} = \{\, f \in \mathcal{R}^+ \,\|\, f\ \mathbf{scs} \,\} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

On a clairement $\boxed{\mathcal{ES} \subset \mathcal{RS} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{F}^+}$ et $\boxed{\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{RS}}$.

3. Théorème : $\mathcal{ES}$, $\mathcal{RS}$ et $\mathcal{S}$ sont stables pour les lois $+$, « $\cdot$ », $\vee$, $\wedge$ et pour la multiplication par un réel positif.

Dém : Il suffit de montrer le théorème pour $\mathcal{S}$:

a) Soient $f, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f + g$; on a $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\overline{\lim_{c}}\; h \le (\overline{\lim_{c}}\; f) + (\overline{\lim_{c}}\; g)$
$\le f(c) + g(c) = h(c)$.

b) Soient $f, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f\, g$; on a $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\overline{\lim_{c}}\; h \le (\overline{\lim_{c}}\; f)\,(\overline{\lim_{c}}\; g)$
$\le f(c)\, g(c) = h(c)$.

c) Soient $f,\, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f \vee g$; on a $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\overline{\lim_{c}}\ h = (\overline{\lim_{c}}\ f) \vee (\overline{\lim_{c}}\ g)$ $\leq f(c) \vee g(c) = h(c)$.

d) Soient $f,\, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f \wedge g$; on a $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\overline{\lim_{c}}\ h \leq \overline{\lim_{c}}\ f \leq f(c)$; de même $\overline{\lim_{c}}\ h \leq g(c)$; donc $\overline{\lim_{c}}\ h \leq f(c) \wedge g(c) = h(c)$.

e) Soit $f \in \mathcal{S}$ et $\lambda \geq 0$; on a $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\overline{\lim_{c}}\ \lambda f = \lambda\, \overline{\lim_{c}}\ f \leq \lambda f(c)$.

4. Théorème : Soit $f \in \mathcal{F}^+$; alors $f \in \mathcal{S}$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ l'ensemble $\{\, x \in [\,a\,,\,b\,] \parallel f(x) < \varepsilon \,\}$ est ouvert dans $[\,a\,,\,b\,]$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit $\varepsilon > 0$; il faut montrer que l'ensemble $\mathrm{E} = \{\, x \in [\,a\,,\,b\,] \parallel f(x) < \varepsilon \,\}$ est ouvert dans $[\,a\,,\,b\,]$; soit $c \in \mathrm{E}$; comme $f(c) < \varepsilon$ il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall\, x \in \mathrm{I}$ $f(x) < f(c) + [\varepsilon - f(c)] = \varepsilon$; donc $\mathrm{I} \subset \mathrm{E}$, ce qui montre que E est ouvert.

b) $\Leftarrow$: Soit $c \in [\,a\,,\,b\,]$; il faut montrer que $\overline{\lim_{x \to c}}\ f(x) \leq f(c)$, c-à-d que $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall\, x \in \mathrm{I}$ $f(x) < f(c) + \varepsilon$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $\mathrm{E} = \{\, x \in [\,a\,,\,b\,] \parallel f(x) < f(c) + \varepsilon \,\}$; E est ouvert et $c \in \mathrm{E}$; il existe donc bien un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subset [\,a\,,\,b\,]$ tel que $c \in \mathrm{I} \subset \mathrm{E}$.

5. Théorème de semi-complétude de $\mathcal{S}$

$$\boxed{\text{Soit } f_n \in \mathcal{S},\ f_n \text{ suite } \underline{\text{décroissante}},\ f_n \xrightarrow{\bullet} f \in \mathcal{F}^+ ;\ \text{alors } f \in \mathcal{S}}.$$

Dém : Posons $f = \inf_{n} f_n \in \mathcal{F}^+$; soit $c \in [\,a\,,\,b\,]$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\overline{\lim_{c}}\ f \leq \overline{\lim_{c}}\ f_n \leq f_n(c)$; donc $\overline{\lim_{c}}\ f \leq \inf_{n} f_n(c) = f(c)$.

Enoncé équivalent : $\boxed{\text{Pour toute suite } f_n \in \mathcal{S} \text{ on a } \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{S}}.$

6. Théorème de convergence uniforme dans $\mathcal{S}$ (Généralisation du théorème de Dini)

$$\boxed{\text{Soit } f_n \in \mathcal{S},\ f_n \text{ suite } \underline{\text{décroissante}},\ f_n \xrightarrow{\bullet} 0 ;\ \text{alors } f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} 0}.$$

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{E}_n = \{\, x \in [\,a\,,\,b\,] \parallel f_n(x) < \varepsilon \,\}$; on a

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ E_n est ouvert dans $[\,a\,,\,b\,]$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_{n+1}$

c) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}_n = [\,a\,,\,b\,]$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{E}_N = [\,a\,,\,b\,]$; donc $\forall\, x \in [\,a\,,\,b\,] \quad f_N(x) < \varepsilon$; donc $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} 0$.

7. <u>Théorème de stabilité</u> (Riesz-Nagy [22] p. 34)

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{F}^+$ stable pour la loi $\wedge$; on note $\mathcal{A}_\downarrow$ l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathcal{F}^+$ qui sont limites simples de suites décroissantes de $\mathcal{A}$; alors on a

1) $\mathcal{A}_\downarrow$ est stable pour la loi $\wedge$

2) $\boxed{(\mathcal{A}_\downarrow)_\downarrow = \mathcal{A}_\downarrow}$

3) Si $\mathcal{A}$ est stable pour les lois $+$, « $\cdot$ » , $\vee$ ou pour la multiplication par un réel positif, il en est de même de $\mathcal{A}_\downarrow$.

<u>Dém</u> :

1) Soient $f_n\,,\, g_n \in \mathcal{A}$ des suites décroissantes ; posons $f = \inf\limits_n f_n \in \mathcal{A}_\downarrow$ et $g = \inf\limits_n g_n \in \mathcal{A}_\downarrow$. On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq f_n \wedge g_n - f \wedge g \leq (f_n - f) + (g_n - g)$, donc $f \wedge g = \inf\limits_n\, (f_n \wedge g_n) \in \mathcal{A}_\downarrow$.

2) Soit $f_n \in \mathcal{A}_\downarrow$ une suite décroissante et posons $f = \inf\limits_n f_n \in \mathcal{F}^+$;
soit $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_{nk} \in \mathcal{A}$ une suite décroissante telle que $f_n = \inf\limits_k f_{nk}$;
posons $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad g_k = f_{0k} \wedge f_{1k} \wedge \ldots \wedge f_{kk} \in \mathcal{A}$; la suite g_k est décroissante, donc $g = \inf\limits_k g_k \in \mathcal{A}_\downarrow$; alors

a) on a $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad g_k \geq f_0 \wedge f_1 \ldots \wedge f_k = f_k$; donc $g \geq f$;

b) on a $\forall\, n \leq k \quad g_k \leq f_{nk}$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g \leq f_n$; donc $g \leq f$.

En conclusion $f = g \in \mathcal{A}_\downarrow$.

3) Evident .

<u>Schéma symbolique de la démonstration</u>

$$\begin{array}{cccc}
f_{00} & f_{10} & f_{n0} & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
f_{01} & f_{11} & f_{n1} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
f_{0k} & f_{1k} & f_{nk} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
f_0 \;\rightarrow & f_1 \;\ldots & f_n & \ldots\; f
\end{array}$$

Remarque : Le théorème de semi-complétude de $\mathcal{S}$ est une conséquence triviale du théorème de stabilité et peut d'ailleurs s'exprimer sous la forme $\boxed{\mathcal{S}_{\downarrow} = \mathcal{S}}$.

8.* Lemme : Soit F un *intervalle* fermé de $[a, b]$; alors $\mathbb{1}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{ES}$.

9. Théorème : Soit F un fermé de $[a, b]$; alors $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{ES}_{\downarrow}}$.

Dém :

Soit Ω l'ouvert complémentaire de F dans $[a, b]$; on peut écrire $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^{\star}} \Omega_n$ avec $\Omega_n =$ réunion (finie) des intervalles maximaux de Ω de longueur $\geq \dfrac{1}{n}$.

Notons $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ F_n le complémentaire de Ω_n dans $[a, b]$; alors on a

a) $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ $\mathbb{1}_{\mathrm{F}_n} \in \mathcal{ES}$ car F_n est une réunion finie d'intervalles fermés de $[a, b]$.

b) la suite $\mathbb{1}_{\mathrm{F}_n}$ est décroissante car la suite Ω_n est croissante ; .

c) $\mathrm{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^{\star}} \mathrm{F}_n$, donc $\mathbb{1}_{\mathrm{F}} = \inf_n \mathbb{1}_{\mathrm{F}_n}$.

En conclusion $\mathbb{1}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{ES}_{\downarrow}$.

10. Théorème : $\boxed{\mathcal{ES}_{\downarrow} = \mathcal{S}}$.

Dém : On a déjà $\mathcal{ES}_{\downarrow} \subset \mathcal{S}_{\downarrow} = \mathcal{S}$. Il reste à montrer l'inclusion opposée.

Soit $f \in \mathcal{S}$; en considérant éventuellement $f / \|f\|$ on peut supposer $f \leq 1$;

on pose $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $\mathrm{F}_{nk} = \{ x \in [a, b] \,\|\, f(x) \geq k/n \}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ $f_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\mathrm{F}_{nk}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ $\forall k \in [\![0, n]\!]$ F_{nk} est un fermé de $[a, b]$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ $f_n \in \mathcal{ES}_{\downarrow}$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $\forall x \in [a, b]$ on a

$k/n \leq f(x) < (k+1)/n \Rightarrow f_n(x) = (k+1)/n > f(x)$; donc $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ on a $f \leq f_n$ et $\| f_n - f \| \leq \dfrac{1}{n}$; on en déduit $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n = f_0 \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \in \mathcal{ES}_{\downarrow}$; la suite g_n est décroissante et on a $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$ $f \leq g_n \leq f_n$; donc $g_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$, donc $f \in (\mathcal{ES}_{\downarrow})_{\downarrow} = \mathcal{ES}_{\downarrow}$.

Chapitre IV : Théorème de Lebesgue sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème de *convergence dominée presque partout* sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. En fait nous démontrons un théorème de *convergence bornée partout* sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, que nous appelons simplement *théorème de Lebesgue* ; nous expliquons à la fin du chapitre pourquoi, malgré les apparences, il n'y a aucune perte de généralité.

Chemin faisant nous construisons deux extensions successives fondamentales de l'espace des fonctions réglées : d'abord l'espace des fonctions *pseudo-réglées*, puis l'espace des fonctions *universelles*.

§ 1. Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{R}$

1.1. Lemme : Soient deux suites $\widetilde{\phi}_n , \widetilde{\psi}_n \in \mathcal{PM}^+$; alors on a

$$\boxed{\operatorname*{Inf}_n \widetilde{\psi}_n \leq \sum_{r=0}^{\infty} \left|\widetilde{\psi}_r - \widetilde{\phi}_r\right| + \operatorname*{Inf}_n \widetilde{\phi}_n}$$

Dém : On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\psi}_0 \wedge \widetilde{\psi}_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{\psi}_n \leq \left|\widetilde{\psi}_0 \wedge \widetilde{\psi}_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{\psi}_n - \widetilde{\phi}_0 \wedge \widetilde{\phi}_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{\phi}_n\right| + \widetilde{\phi}_0 \wedge \widetilde{\phi}_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{\phi}_n$$

$$\leq \sum_{r=0}^{\infty} \left|\widetilde{\psi}_r - \widetilde{\phi}_r\right| + \widetilde{\phi}_0 \wedge \widetilde{\phi}_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{\phi}_n ;$$

on en déduit $\operatorname*{Inf}_n \widetilde{\psi}_n \leq \sum_{r=0}^{\infty} \left|\widetilde{\psi}_r - \widetilde{\phi}_r\right| + \operatorname*{Inf}_n \widetilde{\phi}_n$.

1.2. Lemme de convergence fine dans $\mathcal{RS}$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{RS}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} 0$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^+$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} 0$.

En conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) = \|\, f_n\, \tilde{\mu}\,\|_\star \to 0$.

Dém :

La suite $f_n\, \tilde{\mu}$ est dominée car la suite f_n est bornée ; soit $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\widetilde{\psi}_n = \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p}\, \tilde{\mu}) \in \mathcal{M}^+$; il faut démontrer $\widetilde{\psi}_n \xrightarrow{\star} 0$. Posons $\forall\, n, p \in \mathbb{N}$

$g_{n\,p} = f_n \vee f_{n+1} \vee \ldots \vee f_{n+p} \in \mathcal{RS}$; on a $g_{n\,p}\, \tilde{\mu} = (f_n\, \tilde{\mu}) \vee (f_{n+1}\, \tilde{\mu}) \vee \ldots \vee (f_{n+p}\, \tilde{\mu})$,

donc pour n fixé $g_{n\,p}\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\star} \widetilde{\psi}_n$ quand $p \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$; choisissons $\forall\, n \in \mathbb{N}$

un indice $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|\, \widetilde{\psi}_n - g_{n\,p}\, \tilde{\mu}\,\|_\star \leq \varepsilon_n$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $g_n = g_{n\,p} \in \mathcal{RS}$;

on a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\, \widetilde{\psi}_n - g_n\, \tilde{\mu}\,\|_\star \leq \varepsilon_n$; d'autre part $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $g_n \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p}$;

or quand $n \to +\infty$ on a $\sup\limits_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \overset{\bullet}{\to} \overline{\lim\limits_{n}}\, f_n = 0$, donc $g_n \overset{\bullet}{\to} 0$.

Posons $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad h_n = g_0 \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_n \in \mathcal{RS}$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad h_n \le g_n$,

donc $h_n \overset{\bullet}{\to} 0$; de plus la suite h_n est décroissante, donc $h_n \overset{\mathbf{u}}{\to} 0$;

enfin par définition on peut écrire $\operatorname*{Inf}_n \big(h_n\, \tilde{\mu}\big) = \operatorname*{Inf}_n \big(g_n\, \tilde{\mu}\big)$.

En appliquant le lemme précédent on obtient donc

$$\big\| \operatorname*{Inf}_n \widetilde{\psi}_n \big\|_\star \le \sum_{r=0}^{\infty} \big\| \widetilde{\psi}_r - g_r\, \tilde{\mu} \big\|_\star + \big\| \operatorname*{Inf}_n \big(g_n\, \tilde{\mu}\big) \big\|_\star \le \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r + \big\| \operatorname*{Inf}_n \big(h_n\, \tilde{\mu}\big) \big\|_\star$$

$$= \varepsilon + \inf_n \| h_n\, \tilde{\mu} \|_\star \le \varepsilon + \big(\inf_n \| h_n \| \big) \, \| \tilde{\mu} \|_\star = \varepsilon \; ;$$

comme ε est arbitraire on en déduit $\operatorname*{Inf}_n \widetilde{\psi}_n = 0$.

1.3. Lemme d'approximation dans $\mathcal{E}^+$

$\forall\, f \in \mathcal{E}^+ \;\; \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \;\; \forall\, \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{ES}$ tel que $g \le f$ et $\tilde{\mu}\,(f - g) \le \varepsilon$.

Dém : Soit $f \in \mathcal{E}^+$ et $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$; on construit $g \in \mathcal{ES}$ de la manière suivante : on annule f dans des intervalles ouverts contenant ses points de discontinuité, *sans changer ses valeurs aux points de discontinuité eux-mêmes* ; on obtient ainsi une fonction $g \in \mathcal{ES}$ avec $g \le f$; en vertu de l'*hypercontinuité* de $\tilde{\mu}$, on peut rendre ces intervalles suffisamment petits pour que $\tilde{\mu}\,(f - g) \le \varepsilon$.

Remarque : **C'est ici qu'intervient la condition $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ au lieu de $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^+$** ; l'extension du lemme de convergence fine à des espaces plus généraux que $\mathcal{RS}$ ne s'obtient que pour les *mesures* .

1.4. Lemme d'approximation dans $\mathcal{R}^+$

$\forall\, f \in \mathcal{R}^+ \;\; \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \;\; \forall\, \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{ES}$ tel que $g \le f$ et $\tilde{\mu}\,(f - g) \le \varepsilon$.

Dém : Soit $f \in \mathcal{R}^+$; soit $h \in \mathcal{E}^+$ tel que $h \le f$ et $\| f - h \| \le \varepsilon / \| \tilde{\mu} \|_\star$;
soit $g \in \mathcal{ES}$ tel que $g \le h$ et $\tilde{\mu}\,(h - g) \le \varepsilon$; alors on a $g \le f$ et
$\tilde{\mu}\,(f - g) = \tilde{\mu}\,(f - h) + \tilde{\mu}\,(h - g) \le 2\,\varepsilon$.

1.5. Lemme de convergence fine dans $\mathcal{R}^+$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}^+$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} 0$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \overset{\times}{\to} 0$;
en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) = \| f_n\, \tilde{\mu} \|_\star \to 0$.

Dém :

Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$; choisissons $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_n \in \mathcal{ES}$

tel que $g_n \leq f_n$ et $\tilde{\mu}\,(f_n - g_n) \leq \varepsilon_n$;

on a $g_n \xrightarrow{\text{b}} 0$, donc $g_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\times} 0$; on peut écrire $\forall\, n\,,\, p \in \mathbb{N}$

$$\big\|\,\big(f_n \vee f_{n+1} \vee \ldots \vee f_{n+p}\big)\,\tilde{\mu} - \big(g_n \vee g_{n+1} \vee \ldots \vee g_{n+p}\big)\,\tilde{\mu}\,\big\|_\star \leq \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}\,(f_{n+r} - g_{n+r})$$

$$\leq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_{n+r} = \sum_{r=n}^{\infty} \varepsilon_r \;;$$

donc quand $p \to +\infty$ $\quad \big\|\, \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}}\,(f_{n+p}\,\tilde{\mu}) - \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}}\,(g_{n+p}\,\tilde{\mu})\,\big\|_\star \leq \sum_{r=n}^{\infty} \varepsilon_r$;

donc quand $n \to +\infty$ $\quad \overline{\operatorname*{Lim}_{n}}\,(f_n\,\tilde{\mu}) = \overline{\operatorname*{Lim}_{n}}\,(g_n\,\tilde{\mu}) = 0$.

1.6. Corollaire : Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{R}$

> Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f \in \mathcal{R}$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $f_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\,\tilde{\mu}$;
> en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) \to \tilde{\mu}\,(f)$.

Dém : On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |f_n\,\tilde{\mu} - f\,\tilde{\mu}| \leq |f_n - f|\,|\tilde{\mu}|$; or $|f_n - f| \xrightarrow{\text{b}} 0$,
donc $|f_n - f|\,|\tilde{\mu}| \xrightarrow{\times} 0$, donc $f_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\,\tilde{\mu}$.

§ 2. Fonctions pseudo-réglées. Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{PR}$

Contenu : Supposons $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}$; pour l'instant le produit $f\,\tilde{\mu}$ et le réel $\tilde{\mu}\,(f)$ n'ont de sens que si $f \in \mathcal{R}$; ce paragraphe et le suivant vont nous permettre d'étendre la validité de ces expressions à des fonctions f de plus en plus générales.

2.1.* Théorème :

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour une fonction $f \in \mathcal{F}$:

1) Il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$.
2) Il existe une suite $f_n \in \mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$.

2.2. Définition : Une fonction $f \in \mathcal{F}$ qui vérifie ces propriétés est dite pseudo-réglée.

On note $\mathcal{PR} = \{\, f \in \mathcal{F} \parallel f \text{ pseudo-réglée} \,\} \supset \mathcal{R}$.

2.3.* Théorème : $\mathcal{PR}$ est une sous-algèbre cohérente de $\mathcal{F}$.

2.4. Théorème : $\boxed{\mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+}$.

Dém : On a $\mathcal{S} = \mathcal{ES}_{\downarrow}$; or $\mathcal{ES} \subset \mathcal{R}^+$, donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+$.

2.5. Théorème de fermeture uniforme (Baire [1] p. 112 - 114)

Soit Ω un ensemble quelconque ; on note $\mathcal{F}(\Omega)$ l'espace de Riesz des fonctions *bornées* de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit V un sous-espace cohérent de $\mathcal{F}(\Omega)$ tel que $\mathbb{1} \in \mathrm{V}$; on note $\widehat{\mathrm{V}}$ le sous-espace des fonctions $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ pour lesquelles il existe une suite $f_n \in \mathrm{V}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$. Alors $\boxed{\widehat{\mathrm{V}} \text{ est fermé pour la convergence uniforme}}$.

Ce théorème se démontre à l'aide de deux lemmes.

Lemme 1 : Soit une suite $f_n \in \mathcal{F}(\Omega)$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f \in \mathcal{F}(\Omega)$ et soit une suite décroissante $\varepsilon_n > 0$; alors il existe une sous-suite f_{n_p} telle que $\| f_{n_{p+1}} - f_{n_p} \| \leq \varepsilon_p$.

Dém :

On choisit une suite croissante $n_p \in \mathbb{N}$ telle que $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \| f_{n_p} - f \| \leq \varepsilon_p / 2$;
on a alors $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \| f_{n_{p+1}} - f_{n_p} \| \leq \| f_{n_{p+1}} - f \| + \| f_{n_p} - f \| \leq \varepsilon_{p+1}/2 + \varepsilon_p/2 \leq \varepsilon_p$.

Lemme 2 : Soit une suite $f_n \in \widehat{\mathrm{V}}$; alors il existe des suites $g_{n,p} \in \mathrm{V}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_{n,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f_n$ et $\forall\, n, p \in \mathbb{N} \quad \| g_{n+1,p} - g_{n,p} \| \leq \| f_{n+1} - f_n \|$.

Dém :

Choisissons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ une suite $f_{n,p} \in \mathrm{V}$ telle que $f_{n,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f_n$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = \| f_{n+1} - f_n \|$ et on définit $\forall\, p \in \mathbb{N}$

$$g_{0,p} = f_{0,p}$$

$$g_{1,p} = g_{0,p} + (-\alpha_0) \vee (f_{1,p} - g_{0,p}) \wedge \alpha_0$$

$$g_{2,p} = g_{1,p} + (-\alpha_1) \vee (f_{2,p} - g_{1,p}) \wedge \alpha_1$$

$$g_{3,p} = g_{2,p} + (-\alpha_2) \vee (f_{3,p} - g_{2,p}) \wedge \alpha_2$$

....
....

On a bien $\forall\, n, p \in \mathbb{N} \quad g_{n,p} \in \mathrm{V}$ et $\| g_{n+1,p} - g_{n,p} \| \leq \alpha_n = \| f_{n+1} - f_n \|$;
par ailleurs on peut écrire quand $p \to +\infty$

$g_{0,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f_0$

$g_{1,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f_0 + (-\alpha_0) \vee (f_1 - f_0) \wedge \alpha_0 = f_0 + (f_1 - f_0) = f_1$ car $-\alpha_0 \leq f_1 - f_0 \leq \alpha_0$

$g_{2,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f_1 + (-\alpha_1) \vee (f_2 - f_1) \wedge \alpha_1 = f_1 + (f_2 - f_1) = f_2$ car $-\alpha_1 \leq f_2 - f_1 \leq \alpha_1$

$g_{3,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f_2 + (-\alpha_2) \vee (f_3 - f_2) \wedge \alpha_2 = f_2 + (f_3 - f_2) = f_3$ car $-\alpha_2 \leq f_3 - f_2 \leq \alpha_2$

....
....

<u>*Démonstration du théorème*</u> :

Soit la suite $f_n \in \widehat{\mathrm{V}}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f \in \mathcal{F}(\Omega)$; il faut montrer $f \in \widehat{\mathrm{V}}$.

Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$; en vertu du lemme 1 on peut supposer $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_{n+1} - f_n\| \leq \varepsilon_n$.

En vertu du lemme 2 il existe des suites $g_{n,p} \in \mathrm{V}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_{n,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f_n$ et $\forall n, p \in \mathbb{N}$ $\|g_{n+1,p} - g_{n,p}\| \leq \|f_{n+1} - f_n\| \leq \varepsilon_n$; nous allons prouver $g_{p,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f$, ce qui démontrera le théorème.

Soit $\varepsilon > 0$; choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{r=N}^{\infty} \varepsilon_r \leq \varepsilon$ et $\|f_N - f\| \leq \varepsilon$;

on a $\forall p > N$ $g_{p,p} - f = (g_{N,p} - f_N) + (f_N - f)$

$$+ (g_{N+1,p} - g_{N,p}) + (g_{N+2,p} - g_{N+1,p}) + \dots + (g_{p,p} - g_{p-1,p}),$$

donc $|g_{p,p} - f| = |g_{N,p} - f_N| + \|f_N - f\| + \sum\limits_{r=N}^{p-1} \varepsilon_r \leq |g_{N,p} - f_N| + 2\varepsilon$;

on trouve donc $\overline{\lim\limits_{p \to +\infty}} |g_{p,p} - f| \leq 2\varepsilon$; comme ε est arbitraire on en déduit $g_{p,p} \xrightarrow{\bullet} f$; de plus on a $\forall p > N$ $g_{p,p} = g_{N,p} + (g_{N+1,p} - g_{N,p})$

$$+ (g_{N+2,p} - g_{N+1,p}) + \dots + (g_{p,p} - g_{p-1,p}),$$

donc $\|g_{p,p}\| \leq \|g_{N,p}\| + \sum\limits_{r=N}^{p-1} \varepsilon_r \leq \|g_{N,p}\| + \varepsilon$; comme $g_{N,p}$ est une suite bornée il en est de même de la suite $g_{p,p}$, donc $g_{p,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} f$.

2.6.* <u>Corollaire</u> : $\boxed{\mathcal{PR} \text{ est un espace de Riesz-Banach pour la convergence uniforme.}}$

2.7. <u>Théorème d'extension</u>

Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f \in \mathcal{PR}$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ $f_n\, \tilde{\mu}$ converge finement dans $\mathcal{M}$ vers une limite qui ne dépend que de f (et non de la suite f_n).

<u>Dém</u> :

La suite $f_n\, \tilde{\mu}$ est dominée car la suite f_n est bornée ; soit $\forall n \in \mathbb{N}$

$\widetilde{\phi}_n = \operatorname*{Inf}\limits_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p}\, \tilde{\mu}) \in \mathcal{M}$ et $\widetilde{\psi}_n = \operatorname*{Sup}\limits_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p}\, \tilde{\mu}) \in \mathcal{M}$; posons $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$g_{np} = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \dots \wedge f_{n+p} \in \mathcal{R}$ et $h_{np} = f_n \vee f_{n+1} \vee \dots \vee f_{n+p} \in \mathcal{R}$.

Pour n fixé on a $g_{np}\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\star} \widetilde{\phi}_n$ et $h_{np}\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\star} \widetilde{\psi}_n$ quand $p \to +\infty$; soit $\varepsilon > 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ choisissons $p \in \mathbb{N}$ tel que $\| \widetilde{\phi}_n - g_{np}\, \tilde{\mu} \|_\star \leq \varepsilon$ et $\| \widetilde{\psi}_n - h_{np}\, \tilde{\mu} \|_\star \leq \varepsilon$;

on pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = g_{np}$ et $h_n = h_{np}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \inf\limits_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq \sup\limits_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p}$; or $\inf\limits_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \xrightarrow{\bullet} f$

et $\sup\limits_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \xrightarrow{\bullet} f$ quand $n \to +\infty$, donc $g_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$ et $h_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$; on en déduit

$k_n = h_n - g_n \xrightarrow{\mathrm{b}} 0$; donc $k_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\star} 0$; or on peut écrire

$\| \widetilde{\psi}_n - \widetilde{\phi}_n \|_\star \leq \| \widetilde{\psi}_n - h_n\, \tilde{\mu} \|_\star + \| k_n\, \tilde{\mu} \|_\star + \| \widetilde{\phi}_n - g_n\, \tilde{\mu} \|_\star \leq \| k_n\, \tilde{\mu} \|_\star + 2\,\varepsilon$,

donc $\left\| \overline{\mathrm{Lim}}_n\, (f_n\, \tilde{\mu}) - \underline{\mathrm{Lim}}_n\, (f_n\, \tilde{\mu}) \right\|_\star \leq 2\,\varepsilon$; on a donc $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, (f_n\, \tilde{\mu}) = \underline{\mathrm{Lim}}_n\, (f_n\, \tilde{\mu})$,

ce qui prouve que la suite $f_n\, \tilde{\mu}$ converge finement dans $\mathcal{M}$.

Montrons que cette limite ne dépend pas de la suite f_n mais seulement de f ;

soit une suite $\varphi_n \in \mathcal{R}$ telle que $\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$; on a $\varphi_n - f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} 0$, donc $(\varphi_n - f_n)\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} 0$,

donc $\mathrm{Lim}_n \left(\varphi_n\, \tilde{\mu}\right) = \mathrm{Lim}_n \left(f_n\, \tilde{\mu}\right)$.

2.8. <u>Définition</u> : $\forall f \in \mathcal{PR} \;\; \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ nous pouvons donc définir $f\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ de la manière suivante : $\boxed{f\, \tilde{\mu} = \mathrm{Lim}_n \left(f_n\, \tilde{\mu}\right)}$ où f_n est n'importe quelle suite dans $\mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$.

2.9. <u>Définition</u> : Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ s'étend canoniquement à $\mathcal{PR}$ en posant

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{PR} \quad \tilde{\mu}\,(f) = (f\, \tilde{\mu})\,(\mathbb{1})}\,.$$

2.10.* <u>Théorème</u> : $\forall f \in \mathcal{PR} \;\; \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\,(f) = \lim_n \; \tilde{\mu}\,(f_n)}$ où f_n est n'importe quelle suite dans $\mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$.

2.11.* <u>Théorème</u> : $\forall f \in \mathcal{PR} \;\; \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a

1) $|\, f\, \tilde{\mu}\, | = |f|\, |\, \tilde{\mu}\, |$

2) $|\, \tilde{\mu}\,(f)| \leq |\, \tilde{\mu}|\,(|f|) \leq \|\, \tilde{\mu}\, \|_\star\, \|f\|$

3) $\|\, f\, \tilde{\mu}\, \|_\star \leq \|f\|\, \|\, \tilde{\mu}\, \|_\star$

2.12.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_D$, $\mathcal{L}^1$ sont des $\boxed{\text{domaines de Riesz}}$ sur $\mathcal{PR}$.

2.13. Lemme de convergence fine dans $\mathcal{S}$

Soit $f \in \mathcal{S}$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{S}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} 0$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} 0$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) = \|\, f_n\, \tilde{\mu}\,\|_\star \to 0$.

Dém : Même démonstration que dans $\mathcal{RS}$.

2.14. Lemme d'approximation dans $\mathcal{PR}^+$

$\forall\, f \in \mathcal{PR}^+ \quad \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \quad \forall\, \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $g \leq f$ et $\tilde{\mu}\,(f - g) \leq \varepsilon$.

Dém : Soit $f_n \in \mathcal{R}^+$ une suite telle que $f_n \xrightarrow{b} f$; par définition de $f\,\tilde{\mu}$ on a $\operatorname*{Inf}_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p}\, \tilde{\mu}) \xrightarrow{\star} f\, \tilde{\mu}$; en négligeant éventuellement un nombre fini de termes de la suite f_n on peut dès lors supposer $\left\|\, f\,\tilde{\mu} - \operatorname*{Inf}_{n \in \mathbb{N}} (f_n\, \tilde{\mu})\right\|_\star \leq \varepsilon$.

Posons $\phi = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{PR}^+$; on a $\phi \leq f$; de plus par définition de $\phi\,\tilde{\mu}$ on a $\phi\,\tilde{\mu} = \operatorname*{Inf}_{n \in \mathbb{N}} (f_n\, \tilde{\mu})$, donc $\tilde{\mu}\,(f - \phi) \leq \varepsilon$.

Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$; soit $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_n \in \mathcal{ES}$ tel que $g_n \leq f_n$ et $\tilde{\mu}\,(f_n - g_n) \leq \varepsilon_n$; posons $g = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+$;

on a $g \leq \phi \leq f$ et par définition de $\tilde{\mu}\,(\phi - g)$ on peut écrire

$\tilde{\mu}\,(\phi - g) = \lim_{n \to +\infty} \tilde{\mu}\,\big(f_0 \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge f_n - g_0 \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_n\big) \leq \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}\,(f_r - g_r)$

$\leq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r \leq \varepsilon$; on en déduit $\tilde{\mu}\,(f - g) \leq \tilde{\mu}\,(f - \phi) + \tilde{\mu}\,(\phi - g) \leq 2\,\varepsilon$.

2.15. Lemme de convergence fine dans $\mathcal{PR}^+$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{PR}^+$ telle que $f_n \xrightarrow{b} 0$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} 0$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) = \|\, f_n\, \tilde{\mu}\,\|_\star \to 0$.

Dém : Même démonstration que dans $\mathcal{R}^+$.

2.16. Corollaire : Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{PR}$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{PR}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{PR}$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\, \tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) \to \tilde{\mu}\,(f)$.

Dém : Même démonstration que dans $\mathcal{R}$.

§ 3. Fonctions universelles. Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}$

3.1. Définition : Une fonction $f \in \mathcal{F}$ est universelle ssi

$$\boxed{\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{+} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad g\,,\, h \in \mathcal{PR} \quad \text{tels que} \quad g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}\,(h - g) \leq \varepsilon}\,.$$

On note $\mathcal{W} = \{\, f \in \mathcal{F} \,\|\, f \text{ universelle} \,\} \supset \mathcal{PR}$.

3.2.* Théorème : $\mathcal{W}$ est une sous-algèbre cohérente de $\mathcal{F}$.

3.3. Théorème de complétude de $\mathcal{W}$

$$\boxed{\text{Soit} \quad f_n \in \mathcal{W}\,, \quad f_n \xrightarrow{\text{b}} f \in \mathcal{F}\ ; \quad \text{alors} \quad f \in \mathcal{W}}\,.$$

Dém : On peut supposer f_n monotone car $\lim\limits_{n} f_n = \sup\limits_{n} \big(\inf\limits_{p} f_{n+p} \big)$.

a) f_n décroissante

Il est loisible de supposer $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n \in \mathcal{W}^{+}$; soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{+}$ et $\varepsilon > 0$;
soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$; soient $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_n\,,\, h_n \in \mathcal{PR}^{+}$
tels que $g_n \leq f_n \leq h_n$ et $\tilde{\mu}\,(h_n - g_n) \leq \varepsilon_n$; soit enfin $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad k_n \in \mathcal{S}$ tel que
$k_n \leq g_n$ et $\tilde{\mu}\,(g_n - k_n) \leq \varepsilon_n$; on a donc $\tilde{\mu}\,(h_n - k_n) \leq 2\,\varepsilon_n$; posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$H_n = h_0 \wedge h_1 \ldots \wedge h_n \in \mathcal{PR}^{+}$ et $K_n = k_0 \wedge k_1 \ldots \wedge k_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^{+}$; posons de plus
$K = \inf\limits_{n} k_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^{+}$; on a $K_n \xrightarrow{\text{b}} K$, donc $\tilde{\mu}\,(K_n - K) \to 0$; soit $N \in \mathbb{N}$
tel que $\tilde{\mu}\,(K_N - K) \leq \varepsilon$; on a $K \leq f \leq H_N$ et $K \leq K_N \leq H_N$; on peut alors écrire

$$\tilde{\mu}\,(H_N - K) = \tilde{\mu}\,(H_N - K_N) + \tilde{\mu}\,(K_N - K) \leq \sum_{r=0}^{N} \tilde{\mu}\,(h_r - k_r) + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{r=0}^{\infty} 2\,\varepsilon_r + \varepsilon \leq 3\,\varepsilon\,;$$ donc $f \in \mathcal{W}$.

b) f_n croissante

On raisonne sur la suite $-f_n$ qui est décroissante ; donc $-f \in \mathcal{W}$, donc $f \in \mathcal{W}$.

3.4.* Corollaire : $\mathcal{W}$ est un espace de Riesz-Banach pour la convergence uniforme.

3.5. Définition : $\forall\, f \in \mathcal{W} \quad \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on définit $f\,\tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ en posant

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bullet \quad \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{+} & f\,\tilde{\mu} = \operatorname*{Sup}\limits_{g \in \mathcal{PR}\,,\, g \leq f} (g\,\tilde{\mu}) = \operatorname*{Inf}\limits_{h \in \mathcal{PR}\,,\, h \geq f} (h\,\tilde{\mu}) \\ \bullet \quad \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M} & f\,\tilde{\mu} = f\,\tilde{\mu}^{+} - f\,\tilde{\mu}^{-} \end{array}}$$

3.6. Définition : Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ s'étend canoniquement à $\mathcal{W}$ en posant $\forall f \in \mathcal{W}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet \;\; \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ & \tilde{\mu}(f) = (f\tilde{\mu})(\mathbb{1}) = \sup\limits_{g \in \mathcal{PR},\, g \le f} \tilde{\mu}(g) = \inf\limits_{h \in \mathcal{PR},\, h \ge f} \tilde{\mu}(h) \\ \bullet \;\; \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M} & \tilde{\mu}(f) = (f\tilde{\mu})(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}^+(f) - \tilde{\mu}^-(f) \end{array}}$$

Notation intégrale :

$\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M} \quad \forall f \in \mathcal{W}$ on note $\boxed{\tilde{\mu}(f) = \int_a^b (f\tilde{\mu})(x) = \int_a^b f(x)\,\tilde{\mu}(x)}$.

3.7.* Théorème : $\forall f \in \mathcal{W} \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a 1) $|f\tilde{\mu}| = |f|\,|\tilde{\mu}|$

2) $|\tilde{\mu}(f)| \le |\tilde{\mu}|\big(|f|\big) \le \|\tilde{\mu}\|_\star \|f\|$

3) $\|f\tilde{\mu}\|_\star \le \|f\|\,\|\tilde{\mu}\|_\star$

3.8.* Théorème : $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_D$, $\mathcal{L}^1$ sont des $\boxed{\text{domaines de Riesz}}$ sur $\mathcal{W}$.

3.9. Lemme de convergence fine dans $\mathcal{W}^+$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}^+$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} 0$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n\tilde{\mu} \xrightarrow{\times} 0$;

en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) = \|f_n\tilde{\mu}\|_\star \to 0$.

Dém :

Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$; soient $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n, h_n \in \mathcal{PR}^+$

tels que $g_n \le f_n \le h_n$ et $\tilde{\mu}(h_n - g_n) \le \varepsilon_n$; on a $g_n \xrightarrow{\text{b}} 0$, donc $g_n\tilde{\mu} \xrightarrow{\times} 0$;

on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Big\| \operatorname*{Sup}\limits_{p \in \mathbb{N}} (h_{n+p}\tilde{\mu}) - \operatorname*{Sup}\limits_{p \in \mathbb{N}} (g_{n+p}\tilde{\mu}) \Big\|_\star \le \sum\limits_{r=0}^{\infty} \varepsilon_{n+r} = \sum\limits_{r=n}^{\infty} \varepsilon_r$,

donc quand $n \to +\infty$ $\overline{\operatorname*{Lim}\limits_n}\,(h_n\tilde{\mu}) = \overline{\operatorname*{Lim}\limits_n}\,(g_n\tilde{\mu}) = 0$;

or on a $\overline{\operatorname*{Lim}\limits_n}\,(f_n\tilde{\mu}) \le \overline{\operatorname*{Lim}\limits_n}\,(h_n\tilde{\mu})$, donc $\overline{\operatorname*{Lim}\limits_n}\,(f_n\tilde{\mu}) = 0$.

3.10. Corollaire : Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f \in \mathcal{W}$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $f_n\tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\tilde{\mu}$;
en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) \to \tilde{\mu}(f)$.

Dém : Même démonstration que dans $\mathcal{R}$.

Remarque : Notre version du théorème de Lebesgue paraît a priori moins générale que la version classique. C'est une illusion ! En effet :

1) Nous supposons la convergence *partout* au lieu de la convergence *presque partout*.

Il suffit simplement de décider que les fonctions de la suite sont nulles aux points où il n'y a pas convergence pour retrouver le cas de la convergence partout.

2) Nous supposons la convergence *bornée* au lieu de la convergence *dominée*.

Soit donc une suite de fonctions f_n convergeant partout vers une fonction f, et soit F une fonction positive sommable pour $\tilde{\mu}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \leq F$; on peut supposer que $\forall\, x \in [\,a\,,\,b\,] \quad \mathrm{F}\,(x) \neq 0$; la suite $\dfrac{f_n}{F}$ est donc bornée ; en appliquant dès lors la version « bornée » du théorème de Lebesgue à la suite $\dfrac{f_n}{F}$ et à la mesure $F\,\tilde{\mu}$, on obtient

$$\int_a^b f_n\,\tilde{\mu} = \int_a^b \frac{f_n}{F}\,F\,\tilde{\mu} \;\to\; \int_a^b \frac{f_n}{F}\,F\,\tilde{\mu} = \int_a^b f\,\tilde{\mu}\,.$$

Remarquons aussi que nous formulons le théorème de Lebesgue de manière plus précise qu'habituellement, puisque nous affirmons la *convergence fine des mesures* $f_n\,\tilde{\mu}$ et pas seulement la convergence des intégrales $\tilde{\mu}\,(f_n) = \displaystyle\int_a^b f_n\,\tilde{\mu}$.

****

Récapitulatif : Pour faciliter la compréhension de notre travail, nous présentons le schéma d'inclusion des principaux espaces de fonctions, fonctionnelles, mesures et pseudo-mesures sur [a,b], déjà définis dans les chapitres précédents ou à définir dans les chapitres suivants :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \mathcal{F} & & & & & & \mathcal{FO} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cup & & & & & & \cup & & & & & & \\
\mathcal{E} & \subset & \mathcal{R} & \subset & \mathcal{BA} & \subset & \mathcal{PR} & \subset & \mathcal{W} & \hookrightarrow & \mathcal{B} & \subset & \mathcal{L}^2 & \subset & \mathcal{L}^1 & \subset & \mathcal{M}_D & \subset & \mathcal{M} & \subset & \mathcal{PM} \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & & & & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & & \mathcal{C} & & \mathcal{S} & & & & \mathcal{Z} & & \mathcal{K} & & & & & & \mathcal{N}_D & \subset & \mathcal{N} & \subset & \mathcal{PN} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathcal{A} & \subset & \mathcal{PA}
\end{array}$$

Chapitre V : Algèbres de Riesz

Contenu : Une *algèbre de Riesz* est un espace de Riesz muni d'une multiplication vérifiant des propriétés analogues à la multiplication dans $\mathbb{R}$. De nombreux espaces de fonctions constituent des algèbres de Riesz ; il en est de même de certains espaces de fonctionnelles, comme nous le verrons plus loin.

§ 1. Algèbres de Riesz

1.1. Définition :

Une algèbre est dite standard ssi elle est associative, commutative et unitaire.

1.2. Définition : Un espace de Riesz V muni d'une structure d'algèbre standard est une algèbre de Riesz ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \forall\, u, v \in V^+ \quad u\,v \in V^+ \\ 2)\ \forall\, u, v \in V^+ \ \left(u\,v = 0 \ \Leftrightarrow \ u \wedge v = 0 \right) \end{array}}$$

Exemples : $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ sont des algèbres de Riesz.

1.3. Théorème : Dans une algèbre de Riesz V on a

1) $\forall\, u \in V^+ \ \ \forall\, v, w \in V \quad \left(v \leq w \Rightarrow u\,v \leq u\,w \right)$

2) $\forall\, u, v \in V \quad |u\,v| = |u|\,|v|$

3) $\forall\, u \in V \quad u^2 = (v^+)^2 + (v^-)^2 = |u|^2 \in V^+$

4) $\forall\, u, v \in V \quad u\,v = (u \wedge v)\,(u \vee v)$

5) $\forall\, u \in V^+ \ \ \forall\, v, w \in V \quad u\,(v \wedge w) = (u\,v) \wedge (u\,w) \quad \text{et} \quad u\,(v \vee w) = (u\,v) \vee (u\,w)$

6) $\forall\, u, v \in V^+ \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad (u \wedge v)^n = u^n \wedge v^n \quad \text{et} \quad (u \vee v)^n = u^n \vee v^n$

7) $\forall\, u \in V^+ \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{1} \wedge u^n \leq u \leq \mathbb{1} \vee u^n$

8) $\forall\, u \in V \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \left(u^n = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0 \right)$

9) $\forall\, u, v, w \in V^+ \quad \left[\left(u \leq w \quad \text{et} \quad v \leq w \quad \text{et} \quad u\,w \leq v\,w \right) \Rightarrow u \leq v \right]$

10) $\forall\, u, v \in V^+ \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \left(u^n \leq v^n \ \Leftrightarrow \ u \leq v \right)$

Dém :

1) $v-u \geq 0$, donc $(v-u)\,x \geq 0$; de même $y-x \geq 0$, donc $v\,(y-x) \geq 0$, donc $u\,x \leq v\,x \leq v\,y$.

2) $u\,v = (u^+ - u^-)(v^+ - v^-) = \overbrace{(u^+v^+ + u^-v^-)}^{x} - \overbrace{(u^+v^- + u^-v^+)}^{y}$;
on a $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x\,y = 0$, donc aussi $x \wedge y = 0$, donc $|u\,v| = |x-y| = x+y$
$= (u^+v^+ + u^-v^-) + (u^+v^- + u^-v^+) = (u^+ + u^-)(v^+ + v^-) = |u|\,|v|$.

3) $u^2 = (u^+ - u^-)^2 = (u^+)^2 + (u^-)^2 + 2\,u^+u^- = (u^+)^2 + (u^-)^2 \geq 0$, de même
$|u|^2 = (u^+ + u^-)^2 = (u^+)^2 + (u^-)^2 + 2\,u^+u^- = (u^+)^2 + (u^-)^2$.

4) $(u \wedge v)(u \vee v) = \frac{1}{2}\big(u+v-|u-v|\big)\ \frac{1}{2}\big(u+v+|u-v|\big) = \frac{1}{4}\big[(u+v)^2 - |u-v|^2\big]$
$= \frac{1}{4}\big[(u+v)^2 - (u-v)^2\big] = u\,v$.

5) $u\,(v \wedge w) = \frac{1}{2}\,u\,\big(v+w-|v-w|\big) = \frac{1}{2}\big(u\,v + u\,w - u\,|v-w|\big)$
$= \frac{1}{2}\big(u\,v + u\,w - |u|\,|v-w|\big) = \frac{1}{2}\big(u\,v + u\,w - |u\,v - u\,w|\big) = (u\,v) \wedge (u\,w)$.

6) $n = 2$: $u^2 \wedge v^2 \leq (u\,v) \vee (u^2 \wedge v^2) = (u\,v \vee u^2) \wedge (u\,v \vee v^2)$
$= \big[u\,(u \vee v)\big] \wedge \big[v\,(u \vee v)\big] = (u \wedge v)\,(u \vee v) = u\,v$; donc $u^2 \wedge v^2 = (u\,v) \wedge (u^2 \wedge v^2)$
$= (u\,v \wedge u^2) \wedge (u\,v \wedge v^2) = \big[u\,(u \wedge v)\big] \wedge \big[v\,(u \wedge v)\big] = (u \wedge v)^2$.

$n \geq 3$: *Par récurrence sur* n :
$u^n \wedge v^n \leq \big[(u \vee v)\,u^{n-1}\big] \wedge \big[(u \vee v)\,v^{n-1}\big] = (u \vee v)\,\big[u^{n-1} \wedge v^{n-1}\big] = (u \vee v)\,(u \wedge v)^{n-1}$
$= u\,v\,(u \wedge v)^{n-2}$; donc $u^n \wedge v^n = \big[u\,v\,(u \wedge v)^{n-2}\big] \wedge u^n \wedge v^n$
$= \big[u\,v\,(u \wedge v)^{n-2} \wedge u^n\big] \wedge \big[u\,v\,(u \wedge v)^{n-2} \wedge v^n\big] \leq \big[(u\,v^{n-1}) \wedge u^n\big] \wedge \big[(u^{n-1})\,v \wedge v^n\big]$
$= \big[u\,(u^{n-1} \wedge v^{n-1})\big] \wedge \big[v\,(u^{n-1} \wedge v^{n-1})\big] = (u \wedge v)\,(u^{n-1} \wedge v^{n-1}) = (u \wedge v)\,(u \wedge v)^{n-1}$
$= (u \wedge v)^n$; par ailleurs $(u \wedge v)^n \leq u^n$ et $(u \wedge v)^n \leq v^n$, donc $(u \wedge v)^n \leq u^n \wedge v^n$.

7) On a $(\mathbb{1} \wedge u)^{n-1} \leq \mathbb{1} \leq (\mathbb{1} \vee u)^{n-1}$, donc
$\mathbb{1} \wedge u^n = (\mathbb{1} \wedge u)^n \leq \mathbb{1} \wedge u \leq u \leq \mathbb{1} \vee u \leq (\mathbb{1} \vee u)^n = \mathbb{1} \vee u^n$.

8) On a $\big(u^2 = 0 \Rightarrow u \wedge u = 0\big)$, c-à-d $\big(u^2 = 0 \Rightarrow u = 0\big)$; de plus soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $u^n = 0$; alors $u^{2^n} = 0$, donc $u^{2^{n-1}} = 0$, donc par récurrence $u = 0$.

9) On a $-w \leq v-u \leq w$, donc $|v-u| \leq w$; par ailleurs on a $0 \leq v\,w - u\,w$
$= (v-u)\,w = (v-u)^+\,w - (v-u)^-\,w$, donc $(v-u)^-\,w \leq (v-u)^+\,w$; donc
$(v-u)^-\,w = \big[(v-u)^+\,w\big] \wedge (v-u)^-\,w = \big[(v-u)^+ \wedge (v-u)^-\big]\,w = 0$; d'où
$[(v-u)^-]^2 \leq (v-u)^-\,|v-u| \leq (v-u)^-\,w = 0$, donc $(v-u)^- = 0$, c-à-d $v-u \geq 0$.

10) Supposons $u^n \leq v^n$; alors on a $u\,(u \vee v)^{n-1} = u\,(u^{n-1} \vee v^{n-1}) = u^n \vee (u\,v^{n-1})$ $\leq v^n \vee (u\,v^{n-1}) = v^{n-1}(u \vee v)$; en multipliant cette égalité par l'inégalité évidente $u^{n-2} \leq (u \vee v)^{n-2}$ on obtient $u^{n-1}\,(u \vee v)^{n-1} \leq v^{n-1}(u \vee v)^{n-1}$, donc par la propriété précédente $u^{n-1} \leq v^{n-1}$, donc par récurrence $u = v$.

1.4. Théorème : Un espace de Riesz V muni d'une structure d'algèbre standard est une algèbre de Riesz ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1')\ \ \forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad |u\,v| = |u|\,|v| \\ 2')\ \ \forall\, u \in \mathrm{V} \quad \big(u^2 = 0 \ \Rightarrow\ u = 0\big) \end{array}}$$

Dém : Il suffit de démontrer $\{1', 2'\} \Rightarrow \{1\,, 2\}$.

1) Si $u\,,\, v \geq 0$ on a $u\,v = |u|\,|v| = |u\,v| \geq 0$.

2) Soit $u \in \mathrm{V}$; on a $(u^+)^2 + (u^-)^2 + 2\,u^+\,u^- = (u^+ + u^-)^2 = |u|^2 = \big|u\,|u|\big|$ $= \big|(u^+)^2 - (u^-)^2\big| \leq (u^+)^2 + (u^-)^2$, donc $u^+\,u^- = 0$; donc aussi $u^2 = (u^+ - u^-)^2$ $= (u^+)^2 + (u^-)^2 = |u|^2$.

On en déduit comme au théorème précédent $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}$ $u\,v = (u \wedge v)(u \vee v)$; donc $u \wedge v = 0 \ \Rightarrow\ u\,v = 0$. Par ailleurs $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+$ $(u \wedge v)^2 = (u \wedge v)(u \wedge v) \leq u\,v$; donc $u\,v = 0 \ \Rightarrow\ u \wedge v = 0$.

1.5. Théorème : Si V est archimédien la condition 2') est redondante.

Dém : Soit $u \in \mathrm{V}$ tel que $u^2 = 0$. L'examen des démonstrations précédentes nous montre que la condition 1') permet d'obtenir les propriétés 1) à 7) du Théorème 3. En particulier la propriété 7) donne $\forall\, \lambda > 0$ $\lambda\,|u| \leq 1\!\!1 \vee \big(\lambda^2\,u^2\big) = 1\!\!1 \vee 0 = 1\!\!1$, donc $\forall\, \lambda > 0$ $\lambda\,|u| \leq 1\!\!1$, donc $|u| = 0$, c-à-d $u = 0$.

1.6. Définition : Soient V et V' deux algèbres de Riesz ; le morphisme de Riesz $\phi\ :\ \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est un algébromorphisme de Riesz ssi $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}$ $\boxed{\phi\,(u\,v) = \phi\,(u)\,\phi\,(v)}$.

1.7. Définition :

Soit V un espace de Riesz-Banach muni d'une structure d'algèbre de Riesz ; alors V est une algèbre de Riesz-Banach ssi $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}$ $\boxed{\|\,u\,v\,\|_s \leq \|u\|_s\,\|v\|_s}$.

1.8.* Théorème :

$\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ sont des algèbres de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

§ 2. **Modules de Riesz sur une algèbre de Riesz**

2.1. Définition : Soit V un domaine de Riesz sur une algèbre de Riesz A ; on dit que V est un module de Riesz sur A ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \forall\, a\,,\, b \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad a\,(b\,u) = (a\,b)\,u \\ 2)\ \forall\, a \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad \big(a^2\, u = 0 \ \Rightarrow\ a\, u = 0\big) \end{array}}$$

2.2. Théorème : Si V est archimédien la condition 2) est redondante.

Dém : Soit $a \in \mathrm{A}$ et $u \in \mathrm{V}$ tel que $a^2\, u = 0$; on a $\forall\, \lambda > 0 \quad \lambda\, |a| \leq \mathbb{1} \vee \big(\lambda^2\, a^2\big)$, donc $\lambda\, |a\, u| \leq |u| \vee \big(\lambda^2\, a^2\, |u|\big) = |u| \vee 0 = |u|$; donc $a\, u = 0$.

2.3.* Théorème : $\mathcal{R}$ et $\mathcal{PM}$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{R}$.

2.4.* Théorème : $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_D$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}$.

Chapitre VI : Fonctionnelles hilbertiennes, fonctionnelles bornées, fonctionnelles caractéristiques sur [a,b]

§ 1. Fonctionnelles hilbertiennes sur [a,b]

Contenu : L'espace $\mathcal{L}^2$ des fonctionnelles *hilbertiennes* est le N-dual de l'espace semi-normé $\left(\mathcal{E}, \|\ \|_2\right)$; rappelons que $\mathcal{L}^1$ n'est qu'un *sous-espace* du N-dual de $\left(\mathcal{E}, \|\ \|\right)$. Nous montrons, ce qui n'a a priori rien d'évident, que $\boxed{\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1}$; de plus $\mathcal{L}^2$ est un espace de Hilbert.

1.1. Définition : Une fonctionnelle hilbertienne sur [a,b] est un élément du N-dual de l'espace semi-normé $\left(\mathcal{E}, \|\ \|_2\right)$.

Ou encore :

Une fonctionnelle hilbertienne sur [a,b] est une forme linéaire $\tilde{f}$ sur $\mathcal{E}$ telle que

$$\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall\, g \in \mathcal{E} \quad |\tilde{f}(g)| \leq M \,\|g\|_2}.$$

Etant donné que $\forall\, g \in \mathcal{E} \quad \|g\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\|g\|$, on a nécessairement $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$.

On note $\mathcal{L}^2$ l'espace vectoriel des fonctionnelles hilbertiennes sur $[a, b]$.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{L}^2 \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \left(\mathcal{E}, \|\ \|_2\right)}$ et $\boxed{\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{PM}}$.

1.2.* Théorème : $\mathcal{L}^2$ constitue un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{II}}$, duale de la semi-norme $\|\ \|_2$, définie par $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{II}} = \sup\limits_{g \in \mathcal{E},\, \|g\|_2 = 1} |\tilde{f}(g)|}$.

1.3.* Théorème : $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^2$ et $\forall\, g \in \mathcal{R}$ on a $\|g\|_{\mathrm{II}} = \|g\|_2$.

On peut donc noter $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2 \quad \|\tilde{f}\|_2 = \|\tilde{f}\|_{\mathrm{II}}$.

1.4.* Lemme : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2 \quad \|\tilde{f}\|_\star \leq \sqrt{b-a}\,\|\tilde{f}\|_2$.

Notation : On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$ ssi $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_2 \to 0$ et on note $\boxed{\tilde{f} = {}^2\lim\limits_n \tilde{f}_n}$; on dit que la suite $\tilde{f}_n$ converge en norme $\|\ \|_2$ vers $\tilde{f}$.

1.5. Théorème fondamental : $\boxed{\mathcal{E} \text{ est dense dans } \mathcal{L}^2}$.

Dém : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$, $\|\tilde{f}\|_2 = 1$, et soit $\mathrm{A} = \{g \in \mathcal{E} \,\|\, \tilde{f}(g) = 1\}$; on a $\mathrm{A} \neq \emptyset$.

Posons $\alpha = \inf\limits_{g \in \mathcal{A}} \| g \|_2$; on a $\forall\, g \in \mathrm{A} \quad 1 = \tilde{f}(g) \leq \| g \|_2$, donc $\| g \|_2 \geq 1$;

on a donc aussi $\alpha \geq 1$. Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon \leq \alpha$ et choisissons $g \in \mathrm{A}$

tel que $\| g \|_2 \leq \alpha + \varepsilon$; on a donc $1 \leq \alpha \leq \| g \|_2 \leq \alpha + \varepsilon$.

Soit $\mathrm{V} = \{ h \in \mathcal{E} \,\|\, \tilde{f}(h) = 0 \}$; alors $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \forall\, h \in \mathrm{V}$ on a $g + t\, h \in \mathrm{A}$, donc

$$\alpha^2 \leq \| g + t\, h \|_2 \;=\; \| g \|_2^2 \,+\, 2\, t\, g(h) \,+\, t^2\, \| h \|_2^2$$

$$\alpha^2 \leq \alpha^2 \,+\, 2\, \alpha\, \varepsilon \,+\, \varepsilon^2 \,+\, 2\, t\, g(h) \,+\, t^2\, \| h \|_2^2$$

$$t^2\, \| h \|_2^2 \,+\, 2\, t\, g(h) \,+\, \varepsilon\, (2\, \alpha \,+\, \varepsilon) \,\geq\, 0$$

$$t^2\, \| h \|_2^2 \,+\, 2\, t\, g(h) \,+\, 3\, \alpha\, \varepsilon \,\geq\, 0 \;;$$

on en déduit $\Delta' = \big[g\,(h) \big]^2 - 3\, \alpha\, \varepsilon\, \| h \|_2^2 \,\leq\, 0$, c-à-d $|\, g\,(h)\, | \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\; \| h \|_2$.

Posons $\forall\, k \in \mathcal{E} \quad \Phi\,(k) = k - \tilde{f}(k)\, g$; on a $\tilde{f}(g) = 1$, donc $\forall\, k \in \mathcal{E} \quad \Phi\,(k) \in \mathrm{V}$;

on a donc $\forall\, k \in \mathcal{E} \quad \big|\, g\,(k) - \tilde{f}(k)\, \| g \|_2^2 \,\big| = \big|\, g\,[\Phi\,(k)] \big| \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\; \| \Phi\,(k) \|_2$

$\leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \Big(\| k \|_2 + |\tilde{f}(k)\, \| g \|_2 \Big) \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \Big(\| k \|_2 + \| g \|_2\, \| k \|_2 \Big) = \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \big(1 + \| g \|_2 \big)\, \| k \|_2$.

On en déduit $\big\|\, g - \| g \|_2^2\, \tilde{f}\, \big\|_2 \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \big(1 + \| g \|_2 \big)$; donc en posant $g_* = \dfrac{g}{\| g \|_2^2} \in \mathcal{E}$

on obtient $\| g_* - \tilde{f} \|_2 \leq \dfrac{\sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}}{\| g \|_2} \Big(\dfrac{1}{\| g \|_2} + 1 \Big) \leq 2 \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}$.

Remarque : Cette démonstration permet plus généralement d'énoncer le théorème suivant : Soit H un espace préhilbertien réel quelconque ; soit H l'espace vectoriel des formes linéaires sur H de la forme $\boxed{\widehat{u} \;:\; v \mapsto \big\langle u\,,\, v \big\rangle}$; H peut être muni d'une structure d'espace préhilbertien réel en posant $\forall\, u\,,\, v \in \underline{\mathrm{H}} \quad \big\langle \widehat{u}\,,\, \widehat{v} \big\rangle = \big\langle u\,,\, v \big\rangle$; alors le complété de H est exactement le N-dual de H .

1.6.* Corollaire : $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{L}^2$.

1.7.* Corollaire : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{L}^2$.

1.8. Corollaire : $\boxed{\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1}$ et $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2 \quad \| \tilde{f} \|_1 \leq \sqrt{b - a}\; \| \tilde{f} \|_2$.

Dém : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\| f_n - \tilde{f} \|_\star \leq \sqrt{b - a}\; \| f_n - \tilde{f} \|_2$; donc $f_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$, donc $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; de plus on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\| f_n \|_1 \leq \sqrt{b - a}\; \| f_n \|_2$, donc quand $n \to +\infty$ on obtient $\| \tilde{f} \|_1 \leq \sqrt{b - a}\; \| \tilde{f} \|_2$.

1.9.* Corollaire : Soient $\tilde f_n\,,\ \tilde f \in \mathcal{L}^2$; alors on a $\tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f \ \Rightarrow\ \tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f$.

1.10. Théorème : $\mathcal{L}^2$ est un sous-espace cohérent et $\boxed{\text{intégral}}$ de $\mathcal{PM}$.

Dém : La cohérence de $\mathcal{L}^2$ est une conséquence de la cohérence de $\mathcal{E}$ et de la densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2$.

Démontrons l'intégralité de $\mathcal{L}^2$. Soit $\tilde g \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$ et soit $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$ tel que $\tilde f \le \tilde g$;
on a $\forall\, h \in \mathcal{E}\quad |\tilde f(h)| \le \tilde f\big(|h|\big) \le \tilde g\,\big(|h|\big) \le \|g\|_2\,\|h\|_2\,,$ donc $\tilde f \in \mathcal{L}^2$.

1.11. Corollaire : $\mathcal{L}^1$ est un sous-espace cohérent et $\boxed{\text{intégral}}$ de $\mathcal{PM}$.

Dém : La cohérence de $\mathcal{L}^1$ est une conséquence de la cohérence de $\mathcal{E}$ et de la densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^1$.

Démontrons l'intégralité de $\mathcal{L}^1$. Soit $\tilde g \in \big(\mathcal{L}^1\big)^+$ et soit $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$ tel que $\tilde f \le \tilde g$.
Soit $g_n \in \mathcal{E}^+$ tel que $g_n \xrightarrow{1} \tilde g$; alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\tilde f \wedge g_n \le g_n \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$, donc
$\tilde f \wedge g_n \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+ \subset \big(\mathcal{L}^1\big)^+$; or $\tilde f \wedge g_n \xrightarrow{\star} \tilde f \wedge g = \tilde f$, donc $\tilde f \in \big(\mathcal{L}^1\big)^+$.

1.12.* Lemme : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{R}\quad \|\, f\, g\,\|_1 \le \|\, f\,\|_2\, \|\, g\,\|_2$.

1.13. Définition : Dans $\mathcal{L}^2$ on définit le produit de deux éléments par des limites de produits de fonctions de $\mathcal{E}$. Plus précisément soient $\tilde f,\, \tilde g \in \mathcal{L}^2$ et soient des suites $\tilde f_n\,,\ \tilde g_n \in \mathcal{E}$ telles que $\tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f$ et $\tilde g_n \xrightarrow{2} \tilde g$; alors on pose $\boxed{\tilde f\,\tilde g \,=\, {}^1\!\lim_n\ \tilde f_n\,\tilde g_n} \in \mathcal{L}^1$.

On montre facilement, à l'aide du lemme précédent, que le produit $\tilde f\,\tilde g$ est bien défini.

1.14.* Théorème : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{L}^2$ on a

1) $\tilde f\,\tilde g \in \mathcal{L}^1$

2) $|\,\tilde f\,\tilde g\,| = |\tilde f\,|\,|\tilde g|$

3) $\|\,\tilde f\,\tilde g\,\|_1 \le \|\,\tilde f\,\|_2\,\|\,\tilde g\,\|_2$.

1.15.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $|\,\tilde f\,|^{\,2} = \tilde f^{\,2}$.

1.16.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $\|\,\tilde f\,\|_2 = \sqrt{\|\,\tilde f^{\,2}\,\|_1}$.

1.17. Théorème : On définit le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{L}^2$ en posant

$$\forall\, \tilde f,\, \tilde g \in \mathcal{L}^2 \quad \boxed{\big\langle \tilde f,\, \tilde g \big\rangle = \big(\tilde f\,\tilde g\big)\,(\mathbb{1}) = \int_a^b \tilde f\,\tilde g\; dx}\,.$$

1.18.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2\quad \forall\, g \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{\big\langle \tilde f,\, g \big\rangle = \tilde f\,(g)}$.

1.19.* Théorème : $\left(\mathcal{L}^2, |\ \ |, \langle\ ,\ \rangle\right)$ est un espace de Riesz-Hilbert.

1.20. Théorème de balayage dans $\mathcal{L}^2$:

$$\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2 \quad \text{on a} \quad \boxed{{}^2\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha \wedge \tilde{f} = \tilde{f}} \quad \text{et} \quad \boxed{{}^2\lim_{\alpha \to +\infty} (-\alpha) \vee \tilde{f} \wedge \alpha = \tilde{f}}.$$

Dém : Analogue au cas de $\mathcal{L}^1$.

§ 2. Racine carrée d'une fonctionnelle sommable positive sur $[\,a, b\,]$

2.1. Lemme : $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^+$ on a $\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \leq |u - v|$.

Dém : $|\sqrt{u} - \sqrt{v}| \leq \sqrt{u} + \sqrt{v}$

$$|\sqrt{u} - \sqrt{v}|^2 \leq \left(\sqrt{u} + \sqrt{v}\right) |\sqrt{u} - \sqrt{v}|$$

$$\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \leq |u - v|.$$

2.2. Corollaire : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{E}^+$ on a $\|\sqrt{f} - \sqrt{g}\|_2^2 \leq \|f - g\|_1$.

Dém : On a $\forall\, t \in [\,a, b\,]$ $\left[\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}\,\right]^2 \leq |f(t) - g(t)|$,

donc $$\|\sqrt{f} - \sqrt{g}\|_2^2 = \int_a^b \left[\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}\,\right]^2 dt \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt = \|f - g\|_1.$$

2.3.* Théorème : Soit $\boxed{\tilde{f} \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+}$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$; alors la suite $\sqrt{f_n}$ converge dans $\left(\mathcal{L}^2\right)^+$ vers une limite indépendante de la suite particulière f_n. On note cette limite $\boxed{\sqrt{\tilde{f}}} \in \left(\mathcal{L}^2\right)^+$.

2.4.* Théorème :

$\forall\, \tilde{f} \in (\mathcal{L}^1)^+$ $\left(\sqrt{\tilde{f}}\right)^2 = \tilde{f}$; ce qui implique symboliquement $\boxed{\left(\mathcal{L}^2\right)^2 = \left(\mathcal{L}^1\right)^+}$.

2.5.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ $\sqrt{\tilde{f}^{\,2}} = |\tilde{f}|$.

2.6.* Théorème : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+$ $\sqrt{\tilde{f}\,\tilde{g}} = \sqrt{\tilde{f}}\,\sqrt{\tilde{g}}$.

2.7. Lemme : $\forall\, f, g \in \mathcal{L}^2$ on a $\left[\tilde{f}\,\tilde{g} = 0 \Rightarrow |\tilde{f} + \tilde{g}| = |\tilde{f}| + |\tilde{g}|\right]$.

Dém : $|\tilde{f} + \tilde{g}|^2 = \tilde{f}^2 + \tilde{g}^2 + 2\,\tilde{f}\,\tilde{g} = |\tilde{f}|^2 + |\tilde{g}|^2 + 2\,|\tilde{f}\,\tilde{g}| = \left(|\tilde{f}| + |\tilde{g}|\right)^2$;

on en déduit $|\tilde{f} + \tilde{g}| = |\tilde{f}| + |\tilde{g}|$.

2.8. Théorème : $\forall\, f, g \in \mathcal{L}^2$ on a $\left[\tilde f\,\tilde g = 0 \;\Leftrightarrow\; |\tilde f| \wedge |\tilde g| = 0\right]$.

Dém : a) $\Rightarrow$: On a $|\tilde f + \tilde g| = |\tilde f| + |\tilde g|$, donc $|\tilde f| \wedge |\tilde g| = 0$.

b) $\Leftarrow$: On a $|\tilde f + \tilde g| = |\tilde f| + |\tilde g|$ et donc aussi $|\tilde f - \tilde g| = |\tilde f| + |\tilde g|$;

donc $(\tilde f + \tilde g)^2 = (\tilde f - \tilde g)^2$, donc $\tilde f\,\tilde g = 0$.

§ 3. Fonctionnelles bornées sur [a,b]

Contenu : L'espace $\mathcal{B}$ des fonctionnelles *bornées* est le N-dual de l'espace semi-normé $\big(\mathcal{E}, \|\ \|_1\big)$. C'est aussi l'espace des fonctionnelles $\tilde f$ de $\mathcal{L}^1$ pour lesquelles il existe $M > 0$ tel que $|\tilde f| \leq M$.

3.1. Définition : Une fonctionnelle bornée sur [a,b] est un élément du N-dual de l'espace semi-normé $\big(\mathcal{E}, \|\ \|_1\big)$.

Ou encore : Une fonctionnelle bornée sur [a,b] est une forme linéaire $\tilde f$ sur $\mathcal{E}$ telle que

$$\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall\, g \in \mathcal{E} \quad |\tilde f(g)| \leq M \,\|g\|_1}\,.$$

Etant donné que $\forall\, g \in \mathcal{E} \quad \|g\|_1 \leq \sqrt{b-a}\;\|g\|_2$, on a nécessairement $\tilde f \in \mathcal{L}^2$.

On note $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des fonctionnelles bornées sur [a,b].

(Nous préférons cette notation à la notation usuelle $\mathcal{L}^\infty$, car les propriétés de l'espace $\mathcal{B}$ nous paraissent trop différentes de celles des espaces $\mathcal{L}^1$ ou $\mathcal{L}^2$).

Autrement dit $\boxed{\mathcal{B} \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E}, \|\ \|_1\big)}$ et $\boxed{\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2}$.

3.2.* Théorème : $\mathcal{B}$ constitue un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{B}}$, duale de la semi-norme $\|\ \|_1$, définie par $\boxed{\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} = \sup\limits_{g\in\mathcal{E},\ \|g\|_1 = 1} |\tilde f(g)|}$.

3.3.* Théorème : $\big(\mathcal{B}, |\ |, \|\ \|_{\mathrm{B}}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

3.4.* Théorème : $\mathcal{R} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2$ et on a $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B} \quad \|\tilde f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\;\|\tilde f\|_{\mathrm{B}}$.

3.5.* Théorème : 1) $\forall\, f \in \mathcal{R}$ $\boxed{\|f\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|}$ 2) $\forall\, f \in \mathcal{C}$ $\boxed{\|f\|_{\mathrm{B}} = \|f\|}$.

Remarque : $\mathcal{E}$ n'est pas dense dans $\mathcal{B}$ pour la topologie induite par la norme $\|\ \|_{\mathrm{B}}$, ce qui limite fortement l'intérêt de cette topologie ; en fait la norme $\|\ \|_{\mathrm{B}}$ est plus utile comme *borne* que comme *norme* .

3.6. * Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B}$ $\boxed{|\tilde f| \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}}$ et $\boxed{\|\tilde f\|_2^2 \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}\, \|\tilde f\|_1}$.

3.7. * Corollaire : Soit une suite $\tilde f_n \in \mathcal{B}$ telle que $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f \in \mathcal{L}^1$; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|\tilde f_n| \le M$; alors on a $\boxed{\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \le M \quad \text{et} \quad \tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f}$.

3.8. Théorème : Soit une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^2$ telle que $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f \in \mathcal{L}^1$; supposons qu'il existe $\widetilde F \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|\tilde f_n| \le \widetilde F$; alors on a $\boxed{\tilde f \in \mathcal{L}^2 \quad \text{et} \quad \tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f}$.

Dém :

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $-\widetilde F \le \tilde f_n \le \widetilde F$, donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$ $-\widetilde F(h) \le \tilde f_n(h) \le \widetilde F(h)$;
or $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\tilde f_n(h) \to \tilde f(h)$; donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+$ $-\widetilde F(h) \le \tilde f(h) \le \widetilde F(h)$,
donc $-\widetilde F \le \tilde f \le \widetilde F$, donc $|\tilde f| \le \widetilde F$, donc $\tilde f \in \mathcal{L}^2$; posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\tilde g_n = |\tilde f_n - \tilde f| \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$; on a $\tilde g_n \xrightarrow{1} 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde g_n \le 2\,\widetilde F = \widetilde G \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$.
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|\widetilde G - (k \wedge \widetilde G)\|_2 \le \varepsilon$;
on a $\|\tilde g_n\|_2 \le \|k \wedge \tilde g_n\|_2 + \|\tilde g_n - (k \wedge \tilde g_n)\|_2$; or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a
$0 \le k \wedge \widetilde G - k \wedge \tilde g_n \le \widetilde G - \tilde g_n$; donc $\tilde g_n - (k \wedge \tilde g_n) \le \widetilde G - (k \wedge \widetilde G)$,
donc $\|\tilde g_n - (k \wedge \tilde g_n)\|_2 \le \|\widetilde G - (k \wedge \widetilde G)\|_2 \le \varepsilon$; donc $\|\tilde g_n\|_2 \le \|k \wedge \tilde g_n\|_2 + \varepsilon$;
or la suite $k \wedge \tilde g_n$ est bornée (par k) et on a $k \wedge \tilde g_n \xrightarrow{1} 0$, donc $k \wedge \tilde g_n \xrightarrow{2} 0$;
donc $\overline{\lim_n}\, \|\tilde g_n\|_2 \le \varepsilon$; comme ε est arbitraire on a $\tilde g_n \xrightarrow{2} 0$, c-à-d $\tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f$.

3.9. * Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B}$ $\forall\, \tilde g \in \mathcal{L}^2$ on a $\|\tilde f\, \tilde g\|_2 \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}\, \|\tilde g\|_2$.

3.10. * Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{B}$ on a 1) $\tilde f\, \tilde g \in \mathcal{B}$

2) $\|\tilde f\, \tilde g\|_{\mathrm{B}} \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}\, \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$.

3.11. * Théorème : $\mathcal{B}$ est un sous-espace cohérent et $\boxed{\text{intégral}}$ de $\mathcal{M}$.

3.12. * Théorème : $\mathcal{B}$ est une $\boxed{\text{algèbre de Riesz-Banach}}$ pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{B}}$.

3.13. * Théorème : $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}$.

3.14. Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^2$:

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^2$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\tilde{f}_n\|_2 \leq M$; alors $\tilde{f}_n$ converge en norme $\|\ \|_2$ vers une fonctionnelle $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$; on a donc aussi $\lim\limits_n \|\tilde{f}_n\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$.

Dém : On peut supposer la suite $\tilde{f}_n$ croissante et positive ; on démontre comme dans le cas de $\mathcal{PM}$ que $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\tilde{f}_n(h)$ converge dans $\mathbb{R}$; on définit $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\tilde{f}(h) = \lim\limits_n \tilde{f}_n(h)$; $\tilde{f}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$; de plus $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$ et $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $|\tilde{f}(h)| = \lim\limits_n |\tilde{f}_n(h)| \leq M\,\|h\|_2$; donc $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$; on peut donc écrire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \tilde{f}_n \leq \tilde{f} \in \mathcal{L}^2$; on en déduit $\tilde{f}_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$, d'après le Théorème 3.8.

3.15.* Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{M}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ ss'il existe $M > 0$ tel que $|\tilde{f}| \leq M$.

3.16.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}$ on a $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} = \inf\limits_{\substack{M \in \mathbb{R}^+ \\ M \geq |\tilde{f}|}} M}$.

3.17. Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$; alors on a $\boxed{\tilde{f}^2 \leq \tilde{f} \ \Leftrightarrow\ 0 \leq \tilde{f} \leq 1}$.

Dém :

On a $\tilde{f} \geq \tilde{f}^2 \geq 0$; par ailleurs $(1 - \tilde{f})^2 = 1 - 2\,\tilde{f} + \tilde{f}^2 \leq 1 - \tilde{f}$; donc $1 - \tilde{f} \geq 0$.

3.18.* Lemme : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{R}$ $\|\, f\, g\,\|_1 \leq \|\, f\,\|_{\mathrm{B}}\, \|g\|_1$.

3.19. Définition :

$\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}$ et $\forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$ on définit le produit $\tilde{f}\,\tilde{g}$ de la manière suivante : soit une suite $g_n \in \mathcal{E}$ telle que $g_n \xrightarrow{1} \tilde{g}$; alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\,\tilde{f}\, g_n - \tilde{f}\,\tilde{g}\,\|_1 \leq \|\,\tilde{f}\,\|_{\mathrm{B}}\, \|\, g_n - \tilde{g}\,\|_1$; $\tilde{f}\, g_n$ étant une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$ on peut donc poser $\boxed{\tilde{f}\,\tilde{g} = {}^1\!\lim\limits_n \tilde{f}\, g_n} \in \mathcal{L}^1$.

On montre facilement que le produit $\tilde{f}\,\tilde{g}$ ne dépend pas de la suite particulière $g_n \xrightarrow{1} \tilde{g}$.

3.20.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}$ $\forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$ on a

1) $\tilde{f}\,\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$

2) $|\tilde{f}\,\tilde{g}\,| = |\tilde{f}|\,|\tilde{g}|$

3) $\|\,\tilde{f}\,\tilde{g}\,\|_1 \leq \|\,\tilde{f}\,\|_{\mathrm{B}}\, \|\,\tilde{g}\,\|_1$.

§ 4. **Fonctions *versus* fonctionnelles**

4.1. Définition : $\forall\, f \in \mathcal{W}$ on pose $\boxed{\{f\} = f.\{\mathbb{1}\}} \in \mathcal{M}$;

$\{f\}$ est donc la mesure $\boxed{\mathcal{E} \to \mathbb{R} \;:\; g \mapsto \int_a^b f\, g\, dx}$.

Nous verrons plus loin qu'en fait $\forall\, f \in \mathcal{W}$ $\{f\} \in \mathcal{L}^1$; on appelle $\{f\}$ la fonctionnelle associée à f.

Comme dans $\underline{\mathcal{R}}$ on remplacera communément la notation $\{f\}$ par la notation f.

4.2.* Théorème :

L'application $\boxed{\mathcal{W} \to \mathcal{M} \;:\; f \mapsto \{f\}}$ est un morphisme de Riesz.

4.3.* Corollaire : $\boxed{\forall\, f, g \in \mathcal{W} \quad \{f \vee g\} = \{f\} \vee \{g\} \quad \text{et} \quad \{f \wedge g\} = \{f\} \wedge \{g\}}$.

4.4. Théorème : $\boxed{\text{Soient } f_n\,,\ f \in \mathcal{W} \text{ tels que } f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f\ ;\ \text{alors } \{f_n\} \xrightarrow{\times} \{f\}}$.

Dém : C'est le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}$ appliqué à $\tilde{\mu} = \{\mathbb{1}\}$.

Notation : On note $\underline{\mathcal{W}} = \big\{ \{f\} \in \mathcal{M} \,\big\|\, f \in \mathcal{W} \big\} \subset \mathcal{M}$; c'est l'image du morphisme du Théorème 4.2. On utilise une notation analogue pour tous les *sous-ensembles* de $\mathcal{W}$.

4.5. Théorème : $\boxed{\underline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{B}}$ et $\forall\, f \in \mathcal{W}$ $\boxed{\|f\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|}$.

Dém : Soit d'abord $f \in \mathcal{PR}$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|$; alors on a $\{f_n\} \xrightarrow{\star} \{f\}$, donc $\{f\} \in \mathcal{L}^1$; de plus $\|\{f\}\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|$, donc $\{f\} \in \mathcal{B}$.

Soit ensuite $f \in \mathcal{W}$ et soit $\mathcal{A} = \big\{ \{g\} \,\|\, g \in \mathcal{PR} \text{ et } g \leq f \big\} \subset \mathcal{L}^1$; comme $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{L}^1$ dominée supérieurement et stable pour la loi $\vee$, on a par définition $\{f\} = \operatorname{Sup} \mathcal{A}$; il existe donc une suite $g_n \in \mathcal{PR}$ telle que $\{g_n\} \xrightarrow{\star} \{f\}$; donc $\{f\} \in \mathcal{L}^1$. De plus $\forall\, g \in \mathcal{A}$ on a $\|g\|_{\mathrm{B}} \leq \|g\| \leq \|f\|$, donc $\|\{f\}\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|$, donc $\{f\} \in \mathcal{B}$.

4.6. Théorème : $\boxed{\underline{\mathcal{W}} = \mathcal{B}}$.

Ce théorème signifie que l'application $\mathcal{W} \to \mathcal{B} \;:\; f \mapsto \{f\}$ est surjective.

Plus précisément tout $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ peut être représentée comme une limite simple bornée de fonctions pseudo-réglées.

Dém : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{B}$; soit une suite bornée $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $\{f_n\} \xrightarrow{1} \tilde{f}$;

en considérant éventuellement une sous-suite on peut supposer $\boxed{\{f_n\} \xrightarrow{\times} \tilde{f}}$.

Posons $\forall\, p \geq n \in \mathbb{N} \quad g_{n\,,\,p} = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \ldots \wedge f_p \in \mathcal{E}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$g_n = \inf\limits_{r \geq n} f_r \in \mathcal{PR}$; quand $p \to +\infty$ on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_{n\,,\,p} \xrightarrow{\text{b}} g_n$, donc

$\{g_{n\,,\,p}\} \xrightarrow{\times} \{g_n\}$, c-à-d $\{f_n\} \wedge \{f_{n+1}\} \wedge \ldots \wedge \{f_p\} \xrightarrow{\times} \{g_n\}$, c-à-d $\operatorname*{Inf}\limits_{r \geq n} \{f_r\} = \{g_n\}$.

Posons $g = \sup\limits_n g_n = \underline{\lim\limits_n}\, f_n \in \mathcal{W}$; on a $g_n \xrightarrow{\text{b}} g$, donc $\{g_n\} \xrightarrow{\times} \{g\}$, c-à-d $\operatorname*{Sup}\limits_n \{g_n\} = \{g\}$, c-à-d $\underline{\operatorname*{Lim}\limits_n}\, \{f_n\} = \operatorname*{Sup}\limits_n \left(\operatorname*{Inf}\limits_{r \geq n} \{f_r\} \right) = \{g\}$; or $\{f_n\} \xrightarrow{\times} \tilde{f}$,

donc $\tilde{f} = \underline{\operatorname*{Lim}\limits_n}\, \{f_n\} = \{g\} \in \underline{\mathcal{W}}$. La fonctionnelle bornée $\tilde{f}$ peut donc être représentée par $g \in \mathcal{W}$ qui est limite simple bornée des fonctions $g_n \in \mathcal{PR}$.

4.7.* Théorème :

L'application $\boxed{\mathcal{W} \to \mathcal{B} \;:\; f \mapsto \{f\}}$ est un algébromorphisme de Riesz.

4.8.* Corollaire : $\boxed{\forall\, f,\, g \in \mathcal{W} \quad \{f\,g\} = \{f\}\,\{g\} = f\,.\,\{g\}}$.

4.9.* Théorème : $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{B}$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}$.

4.10.* Théorème : $\underline{\mathcal{R}}$ et $\underline{\mathcal{PR}}$ sont des sous-algèbres de Riesz de $\mathcal{B}$.

4.11. Définition : On pose $\mathcal{Z} = \left\{ f \in \mathcal{W} \;\middle\|\; \{f\} = 0 \right\}$; c'est l'espace des fonctions universelles *nulles presque partout*.

4.12.* Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{W}$ on a $\left[f \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b |f|\, dx = 0 \right]$.

4.13.* Théorème : $\mathcal{Z}$ est un idéal et un sous-espace cohérent et intégral de $\mathcal{W}$; de plus on a $\boxed{\mathcal{B} \cong \mathcal{W}/\mathcal{Z}}$.

§ 5. Fonctionnelles caractéristiques sur [a,b]

Contenu : Les fonctionnelles *caractéristiques* jouent dans notre théorie le rôle des (classes de) sous-ensembles mesurables de [a,b].

5.1. <u>Définition</u> : $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$ est une fonctionnelle <u>caractéristique</u> sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ssi $\boxed{\tilde{f}^{\,2} = \tilde{f}}$.

On note $\mathcal{K} = \{\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2 \parallel \tilde{f}^{\,2} = \tilde{f}\,\}$.

5.2. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{K}$ on a $0 \leq \tilde{f} \leq 1$ et $1 - \tilde{f} \in \mathcal{K}$.

<u>Dém</u> : On a $\tilde{f} = \tilde{f}^{\,2} \geq 0$; de plus $(1-\tilde{f})^2 = 1 - 2\,\tilde{f} + \tilde{f}^{\,2} = 1 - \tilde{f}$, donc $1 - \tilde{f} \in \mathcal{K}$ et $1 - \tilde{f} \geq 0$.

5.3. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{K}$ on a $\tilde{f} \leq \tilde{g} \;\Leftrightarrow\; \tilde{f}\,\tilde{g} = \tilde{f}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: On a $\tilde{g} \leq 1\!\!1$, donc $\tilde{f}\,\tilde{g} \leq \tilde{f}$; par ailleurs $\tilde{f}\,(\tilde{g} - \tilde{f}) \geq 0$, donc $\tilde{f}\,\tilde{g} \geq \tilde{f}$.

b) $\Leftarrow$: On a $\tilde{g} - \tilde{f} = \tilde{g} - \tilde{f}\,\tilde{g} = \tilde{g}\,(1 - \tilde{f}) \geq 0$.

5.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{K}$ on a $\tilde{f} \leq \tilde{g} \;\Leftrightarrow\; \tilde{g} - \tilde{f} \in \mathcal{K}$.

<u>Dém</u> : On a $(\tilde{g} - \tilde{f})^2 - (\tilde{g} - \tilde{f}) = \tilde{f} + \tilde{g} - 2\,\tilde{f}\,\tilde{g} - \tilde{g} + \tilde{f} = 2\,(\tilde{f} - \tilde{f}\,\tilde{g})$, donc $\tilde{g} - \tilde{f} \in \mathcal{K}$ ssi $\tilde{f}\,\tilde{g} = \tilde{f}$, c-à-d ssi $\tilde{f} \leq \tilde{g}$.

5.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{K}$ on a $\tilde{f} \vee \tilde{g} \in \mathcal{K}$, $\tilde{f} \wedge \tilde{g} \in \mathcal{K}$ et $|\tilde{f} - \tilde{g}| \in \mathcal{K}$.

<u>Dém</u> : $(\tilde{f} \vee \tilde{g})^2 = \tilde{f}^{\,2} \vee \tilde{g}^{\,2} = \tilde{f} \vee \tilde{g}$ et $(\tilde{f} \wedge \tilde{g})^2 = \tilde{f}^{\,2} \wedge \tilde{g}^{\,2} = \tilde{f} \wedge \tilde{g}$; d'autre part $|\tilde{f} - \tilde{g}| = \tilde{f} \vee \tilde{g} - \tilde{f} \wedge \tilde{g}$, or $\tilde{f} \wedge \tilde{g} \leq \tilde{f} \vee \tilde{g}$, donc $|\tilde{f} - \tilde{g}| \in \mathcal{K}$.

5.6. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{K}$ on a $\tilde{f}\,\tilde{g} = \tilde{f} \wedge \tilde{g}$.

<u>Dém</u> : On a $|\tilde{f} - \tilde{g}| = |\tilde{f} - \tilde{g}|^2 = (\tilde{f} - \tilde{g})^2 = \tilde{f} + \tilde{g} - 2\,\tilde{f}\,\tilde{g}$, donc $\tilde{f}\,\tilde{g} = \frac{1}{2}\big(\,\tilde{f} + \tilde{g} - |\tilde{f} - \tilde{g}|\,\big) = \tilde{f} \wedge \tilde{g}$.

5.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{K}$ on a $\boxed{\|\tilde{f}\|_1 = \|\tilde{f}\|_2^2}$.

5.8.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}_n\,, \tilde{f} \in \mathcal{K}$ on a $\boxed{\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \;\Leftrightarrow\; \tilde{f}_n \xrightarrow{2} \tilde{f}}$.

5.9.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{K}$ est une partie <u>fermée</u> de $\mathcal{L}^2$ et de $\mathcal{L}^1$.

<u>Dém</u> : Soit $f_n \in \mathcal{K}$ convergeant en norme $\|\;\|_2$ vers $f \in \mathcal{L}^2$; alors $f_n\,(1 - f_n)$ converge en norme $\|\;\|_1$ vers $f\,(1-f) \in \mathcal{L}^1$; or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f_n\,(1 - f_n) = 0$; donc $f\,(1-f) = 0$ et $f \in \mathcal{K}$.

5.10.* <u>Corollaire</u> : Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{K}$; alors $\operatorname{Inf} \mathcal{A} \in \mathcal{K}$ et $\operatorname{Sup} \mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

5.11. <u>Définition</u> : On note $\boxed{\mathcal{E}\mathcal{K} = \{ f \in \mathcal{E} \parallel f^2 = f \} = \{ f \in \mathcal{R} \parallel f^2 = f \}}$.

5.12. <u>Théorème</u> : $\boxed{\underline{\mathcal{E}\mathcal{K}} \text{ est dense dans } \mathcal{K}}$.

<u>Dém</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{K}$; soient $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{E}^+$ tel que $\| \tilde{f} - g \|_1 \le \varepsilon$;

posons $h = 1\!\!1 \wedge g$; on a $\| \tilde{f} - h \|_1 = \| 1\!\!1 \wedge \tilde{f} - 1\!\!1 \wedge g \|_1 \le \| \tilde{f} - g \|_1 \le \varepsilon$;

on peut écrire $h = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r 1_{\mathrm{I}_r}$, où les I_r sont des intervalles formant une <u>partition</u> de $[a, b]$ et où $\forall r \in [\![1, n]\!] \quad \alpha_r \in [0, 1]$.

On a $\forall r \in [\![1, n]\!] \quad (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} = (1 - \alpha_r) \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} - \alpha_r (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r}$;

or $\tilde{f} \wedge (1 - \tilde{f}) = 0$, donc $\left| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right| = (1 - \alpha_r) \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} + \alpha_r (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r}$,

donc $\left\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 = (1 - \alpha_r) \left\| \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 + \alpha_r \left\| (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1$.

Par convexité on a

$$\boxed{\text{soit } \left\| \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 \le \left\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1, \text{ soit } \left\| (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 \le \left\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1} \; ;$$

$\forall r \in [\![1, n]\!]$ posons $\beta_r = 0$ ou 1 suivant que

$$\boxed{\left\| \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 \le \left\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 \quad \text{ou} \quad \left\| (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 \le \left\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1} \; ;$$

on a donc $\forall r \in [\![1, n]\!] \quad \left\| (\tilde{f} - \beta_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 \le \left\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1$;

posons $k = \sum_{r=1}^{n} \beta_r 1_{\mathrm{I}_r} \in \mathcal{E}\mathcal{K}$; on a $\tilde{f} - k = \sum_{r=1}^{n} (\tilde{f} - \beta_r) 1_{\mathrm{I}_r}$, donc

$\| \tilde{f} - k \|_1 = \sum_{r=1}^{n} \left\| (\tilde{f} - \beta_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 \le \sum_{r=1}^{n} \left\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \right\|_1 = \| \tilde{f} - h \|_1 \le \varepsilon$.

5.13. <u>Théorème</u> :

Soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$; alors $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\sigma_n \tilde{f} \xrightarrow{1} 0$.

<u>Dém</u> : Soit $\varepsilon > 0$; soit $\alpha > 0$ tel que $\left\| |\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha \right\|_1 \le \varepsilon$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \ge N \quad \| \sigma_n \|_1 \le \varepsilon / \alpha$; on a $\sigma_n |\tilde{f}| = \sigma_n \left(|\tilde{f}| \wedge \alpha \right) + \sigma_n \left(|\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha \right)$

$\le \sigma_n \alpha + |\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha$; on en déduit $\forall n \ge N$

$\| \sigma_n \tilde{f} \|_1 \le \alpha \| \sigma_n \|_1 + \left\| |\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha \right\|_1 \le 2 \varepsilon$; donc $\sigma_n \tilde{f} \xrightarrow{1} 0$.

§ 6. Pseudo-mesures booléennes

6.1. Définition : Un treillis T est distributif ss'il vérifie la double distributivité :

$$\boxed{\forall\, a\,,\, b\,,\, c \in \mathrm{T} \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{et} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)}\,.$$

6.2. Théorème : Chacune des deux distributivités implique l'autre.

Dém : Supposons la première distributivité vérifiée ; alors on peut écrire $\forall\, a\,,\, b\,,\, c \in \mathrm{T}$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [\,(a \vee b) \wedge a\,] \vee [\,(a \vee b) \wedge c\,] = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

$$= a \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)\,.$$

6.3. Définition :

Un treillis *distributif* T est un treillis de Boole ss'il satisfaisant aux conditions suivantes :

1) T possède un élément minimum noté $\mathbf{0}$ et un élément maximum noté $\mathbf{1}$.

2) $\forall\, a \in \mathrm{T}$ il existe $b \in \mathrm{T}$ tel que $\boxed{a \wedge b = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad a \vee b = \mathbf{1}}$;

(b est totalement déterminé par a et se note $\bar{a}$).

Exemples : $\mathcal{EK}$ et $\mathcal{K}$ sont des treillis de Boole.

6.4. Définition : Une fonction additive bornée sur un treillis de Boole T est une application $\phi : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{T}$ $\boxed{a \wedge b = 0 \;\Rightarrow\; \phi\,(a \vee b) = \phi\,(a) + \phi\,(b)}$;

en particulier $\boxed{\phi\,(\mathbf{0}) = 0}$.

2) Il existe $M > 0$ tel que $\boxed{\forall\, a \in \mathrm{T} \quad |\phi\,(a)| \leq M}$.

La condition 1) implique $\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{T}$ $\boxed{\phi\,(a \vee b) + \phi\,(a \wedge b) = \phi\,(a) + \phi\,(b)}$.

6.5. Définition : Une pseudo-mesure booléenne sur $[\,\mathrm{a},\mathrm{b}\,]$ est une fonction additive bornée sur le $\boxed{\text{treillis de Boole } \mathcal{EK}}$.

Notation : On note $\mathcal{PM}_B$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures booléennes sur $[\,\mathrm{a},\mathrm{b}\,]$.

6.6. Théorème : Toute pseudo-mesure booléenne sur $[\,\mathrm{a},\mathrm{b}\,]$ s'étend de manière unique en une pseudo-mesure sur $[a,b]$.

Dém :

Soit $\phi \in \mathcal{PM}_B$; soit $h \in \mathcal{EK}$; on peut écrire $h = \sum_r \alpha_r 1_{\mathrm{I}_r}$ (avec $\forall r \;\; \alpha_r \in \mathbb{R}$), où les I_r sont des intervalles disjoints deux à deux ; on pose alors $\boxed{\phi(h) = \sum_r \alpha_r \phi(1_{\mathrm{I}_r})}$;

on voit, grâce à la propriété 1), que cette valeur est indépendante de la décomposition choisie pour h. De plus on a $|\tilde{f}(h)| \leq \sum_r |\alpha_r| \, |\phi(1_{\mathrm{I}_r})| \leq \|h\| \sum_r |\phi(1_{\mathrm{I}_r})| \leq M \|h\|$.

Il n'est pas difficile de montrer que cette extension de $\tilde{f}$ à $\mathcal{E}$ est linéaire ; donc $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$.

L'unicité est évidente car $\forall \phi \in \mathcal{PM}$ on a nécessairement $\phi(h) = \sum_r \alpha_r \phi(1_{\mathrm{I}_r})$.

6.7. Corollaire :

L'application $\mathcal{PM} \to \mathcal{PM}_B \;:\; \tilde{f} \to \tilde{f}|_{\mathcal{EK}}$ est un isomorphisme linéaire.

Autrement dit une pseudo-mesure booléenne n'est ni plus ni moins que la restriction d'une pseudo-mesure à $\mathcal{EK}$, ce qui peut s'écrire $\boxed{\mathcal{PM}_B = \mathcal{PM}|_{\mathcal{EK}}}$

Notation : Soit a_n une suite dans un treillis de Boole ; *en cas d'existence*, on note $\bigvee_n a_n$ le majorant minimum de a_n et $\bigwedge_n a_n$ le minorant maximum de a_n.

6.8. Définition : Un treillis de Boole T est complet ssi $\bigvee_n a_n$ et $\bigwedge_n a_n$ existent pour toute suite $a_n \in \mathrm{T}$.

Exemple : $\mathcal{K}$ est un treillis complet de Boole .

6.9. Définition : Une fonction additive bornée ϕ sur un treillis *complet* de Boole T est σ-additive ssi elle satisfait l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

Condition (1) :

Soit une suite $a_n \in \mathrm{T}$ *telle que* $\forall i \neq j \;\; a_i \wedge a_j = 0$; *alors* $\phi\left(\bigvee_n a_n\right) = \sum_n \phi(a_n)$.

Condition (2) : *Soit une suite* $a_n \in \mathrm{T}$, *décroissante* ; *alors* $\phi\left(\bigwedge_n a_n\right) = \lim_n \phi(a_n)$.

Condition (3) : *Soit une suite* $a_n \in \mathrm{T}$, *décroissante et telle que* $\boxed{\bigwedge_n a_n = \mathbf{0}}$; *alors* $\phi(a_n) \to 0$.

La condition (3) est remarquable car, contrairement aux deux autres, elle a un sens pour n'importe quel treillis de Boole, complet ou non.

Appliquée au treillis de Boole $\mathcal{EK}$, cette condition s'écrit :

6.10. Définition :

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f}$ est σ-additive ssi $\tilde{f}$ vérifie la condition suivante :

Condition (4) :

Soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$, *décroissante et telle que* $\boxed{\sigma_n \xrightarrow{\bullet} 0}$; *alors* $\tilde{f}(\sigma_n) \to 0$.

Par ailleurs la condition d'hypercontinuité, donnée au I 8.1, peut se réécrire :

6.11. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ ssi $\tilde{f}$ vérifie la condition suivante :

Condition (5) : *Soit une suite décroissante d'intervalles d'ouverts* $\mathrm{J}_n \subset [a, b]$, *telle que* $\bigcap_n \mathrm{J}_n = \emptyset$ $\big($*c-à-d* $\mathbb{1}_{\mathrm{J}_n} \xrightarrow{\bullet} 0\big)$; *alors* $\tilde{f}(\mathbb{1}_{\mathrm{J}_n}) \to 0$.

Le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{E}$ nous assure que la condition (5), a priori plus faible que la condition (4), lui est en fait équivalente.

On en tire la conclusion suivante :

6.12. Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \tilde{f} \text{ est } \sigma\text{-additive}}$.

Le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{E}$ nous permet aussi d'énoncer le théorème suivant :

6.13. Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{\bullet} 0 \;\Rightarrow\; \tilde{f}(\sigma_n) \to 0}.$$

§ 7. Support d'une pseudo-mesure

Contenu : Le *support* d'une fonctionnelle constitue l'analogue de l'ensemble sur lequel une fonction est *non nulle*. C'est un concept fondamental pour l'étude des fonctionnelles.

Par ailleurs nous étendons la notion de support à toutes les pseudo-mesures. Cette extension se révèlera indispensable à la bonne compréhension (et à la démonstration) du théorème de Radon-Nikodym.

7.1. Définition : On pose $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f}) = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1} \wedge \big(n\,|\tilde{f}|\big)}$.

$\mathrm{S}(\tilde{f})$ est bien défini par le théorème de convergence monotone car $\mathbb{1} \wedge (n\,|\tilde{f}|)$ est une suite croissante et majorée par $\mathbb{1}$ dans $\mathcal{PM}^+$; de plus $\mathrm{S}(\tilde{f}) \le \mathbb{1} \in \mathcal{B}^+$, donc $\mathrm{S}(\tilde{f}) \in \mathcal{B}^+$.

$\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ $\mathrm{S}(\tilde{f})$ se nomme le <u>support</u> de $\tilde{f}$.

7.2.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a 1) $\boxed{0 \le \mathrm{S}(\tilde{f}) \le \mathbb{1}}$

2) $\boxed{\mathrm{S}\big(|\tilde{f}|\big) = \mathrm{S}(\tilde{f})}$

3) $\boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^\star \;\; \mathrm{S}(\lambda\,\tilde{f}) = \mathrm{S}(\tilde{f})}$

4) $\boxed{\mathrm{S}\big(\mathbb{1} \wedge |\tilde{f}|\big) = \mathrm{S}(\tilde{f})}$.

7.3. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a 1) $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f} \wedge \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) \wedge \mathrm{S}(\tilde{g})}$

2) $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) \vee \mathrm{S}(\tilde{g})}$.

<u>Dém</u> :

1) $1 \wedge \big[n\,\big(\tilde{f} \wedge \tilde{g}\big)\big] = \big[1 \wedge (n\,\tilde{f})\big] \wedge \big[1 \wedge (n\,\tilde{g})\big]$, donc $\mathrm{S}(\tilde{f} \wedge \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) \wedge \mathrm{S}(\tilde{g})$

2) $1 \wedge \big[n\,\big(\tilde{f} \vee \tilde{g}\big)\big] = \big[1 \wedge (n\,\tilde{f})\big] \vee \big[1 \wedge (n\,\tilde{g})\big]$, donc $\mathrm{S}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) \vee \mathrm{S}(\tilde{g})$.

7.4.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a $\Big[\, \tilde{f} \le \tilde{g} \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(\tilde{f}) \le \mathrm{S}(\tilde{g}) \Big]$.

7.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f} + \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) \vee \mathrm{S}(\tilde{g}) \le \mathrm{S}(\tilde{f}) + \mathrm{S}(\tilde{g})}$.

<u>Dém</u> : On a $\tilde{f} \vee \tilde{g} = \frac{1}{2}\big(\tilde{f} + \tilde{g} + |\tilde{f} + \tilde{g}|\big) \le \frac{1}{2}(\tilde{f} + \tilde{g} + \tilde{f} + \tilde{g}) = \tilde{f} + \tilde{g}$,
donc $\mathrm{S}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) \le \mathrm{S}(\tilde{f} + \tilde{g})$; de plus on a clairement $\tilde{f} \vee \tilde{g} \ge \frac{1}{2}(\tilde{f} + \tilde{g})$;
donc $\mathrm{S}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) = \mathrm{S}\big[\frac{1}{2}(\tilde{f} \vee \tilde{g})\big] \le \mathrm{S}(\tilde{f} + \tilde{g}) \le \mathrm{S}(\tilde{f} \vee \tilde{g})$.

7.6. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a $\Big[\, \tilde{f} \wedge \tilde{g} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(\tilde{f} + \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) + \mathrm{S}(\tilde{g}) \Big]$.

<u>Dém</u> : $\mathrm{S}(\tilde{f} + \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) \vee \mathrm{S}(\tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) + \mathrm{S}(\tilde{g}) - \mathrm{S}(\tilde{f}) \wedge \mathrm{S}(\tilde{g})$
$= \mathrm{S}(\tilde{f}) + \mathrm{S}(\tilde{g}) - \mathrm{S}(\tilde{f} \wedge \tilde{g}) = \mathrm{S}(\tilde{f}) + \mathrm{S}(\tilde{g})$.

7.7.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f}) = \mathrm{S}(\tilde{f}^+) \vee \mathrm{S}(\tilde{f}^-) = \mathrm{S}(\tilde{f}^+) + \mathrm{S}(\tilde{f}^-)}$.

7.8. <u>Lemme</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\mathbb{1} \wedge \tilde{f}^2 \le \mathbb{1} \wedge |\tilde{f}| \le \mathbb{1} \vee |\tilde{f}| \le \mathbb{1} \vee \tilde{f}^2}$.

<u>Dém</u> : Vrai dans $\mathcal{E}$, donc vrai dans $\mathcal{L}^2$ par densité.

7.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\big[\mathrm{S}(\tilde f)\big]^2 = \mathrm{S}(\tilde f^2) = \mathrm{S}(\tilde f)}$.

<u>Dém</u> : $\big[\mathrm{S}(\tilde f)\big]^2 = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{1} \wedge n|\tilde f|)^2 = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1} \wedge (n^2 \tilde f^2) = \mathrm{S}(\tilde f^2)$;

or $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \mathbb{1} \wedge (n^2 \tilde f^2) \leq \mathbb{1} \wedge (n|\tilde f|)$, donc $\mathrm{S}(\tilde f^2) \leq \mathrm{S}(\tilde f)$;

par ailleurs $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ n^2|\tilde f| \leq \mathbb{1} \vee (n^4 \tilde f^2)$, donc $n|\tilde f| \leq (1/n) \vee \big(n^3 \tilde f^2\big)$,

donc $\mathbb{1} \wedge (n|\tilde f|) \leq \mathbb{1} \wedge \big[(1/n) \vee \big(n^3 \tilde f^2\big)\big] = \big[\mathbb{1} \wedge (1/n)\big] \vee \big[\mathbb{1} \wedge \big(n^3 \tilde f^2\big)\big]$

$= (1/n) \vee \big[\mathbb{1} \wedge \big(n^3 \tilde f^2\big)\big]$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\mathrm{S}(\tilde f) \leq 0 \vee \mathrm{S}(\tilde f^2) = \mathrm{S}(\tilde f^2)$.

7.10.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{K}}$.

7.11. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{K}}$.

<u>Dém</u> : On a $\mathbb{1} \wedge |\tilde f| \in \mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{S}\big(\mathbb{1} \wedge |\tilde f|\big) \in \mathcal{K}$.

7.12.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(\tilde f \wedge \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f)\, \mathrm{S}(\tilde g)$.

7.13. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{1)\ \ \tilde f \in \mathcal{K} \qquad 2)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathbb{1} \wedge (n\tilde f) = \tilde f \qquad 3)\ \ \mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f}\,.$$

<u>Dém</u> :

a) $(1) \Rightarrow (2)$: vrai dans $\mathcal{EK}$, donc vrai dans $\mathcal{K}$.

b) $(2) \Rightarrow (3)$: on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathbb{1} \wedge (n\tilde f) = \tilde f$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f$.

c) $(3) \Rightarrow (1)$: $\tilde f = \mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{K}$.

7.14. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1} \wedge |\tilde f| = 0}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: $\mathbb{1} \wedge |\tilde f| \leq \mathrm{S}(\tilde f) = 0$.

b) $\Leftarrow$: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathbb{1} \wedge (n|\tilde f|) \leq n \wedge (n|\tilde f|) = n(\mathbb{1} \wedge |\tilde f|) = 0$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) = 0$.

7.15. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$ on a $\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f$.

<u>Dém</u> :

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \tilde f \geq \tilde f \wedge (n \tilde f^2) = \tilde f\big[\mathbb{1} \wedge (n\tilde f)\big]$, donc $\tilde f \geq \tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f)$; par ailleurs on a

$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; n\,\tilde f \le 1\!\!1 \vee (n^2 \tilde f^2)$, donc $\tilde f \le \tilde f \wedge \big[(1/n) \vee (n\,\tilde f^2)\big] = \big[(1/n) \wedge \tilde f\big] \vee \big[\tilde f \wedge (n\,\tilde f^2)\big]$,

donc $\tilde f \le (0 \wedge \tilde f) \vee \big[\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f)\big] = 0 \vee \big[\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f)\big] = \tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f)$.

7.16. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2$ on a $\big[\, \tilde f\, \tilde g = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde f\, \mathrm{S}(\tilde g) = 0 \,\big]$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: On a $\forall n \in \mathbb{N} \;\; 0 = |\tilde f| \wedge \big(n\,|\tilde f\,\tilde g|\big) = |\tilde f|\,\big[1\!\!1 \wedge (n\,|\tilde g|)\big]$; donc $\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde g) = 0$.

b) $\Leftarrow$: On a $0 = \big|\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde g)\big| = |\tilde f|\, \mathrm{S}(|\tilde g|)$; donc $0 = |\tilde f|\,|\tilde g|\, \mathrm{S}(|\tilde g|) = |\tilde f|\,|\tilde g| = |\tilde f\,\tilde g|$; donc $\tilde f\, \tilde g = 0$.

7.17. <u>Lemme</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f$.

<u>Dém</u> :

$$\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f) = (\tilde f^+ - \tilde f^-)\, \mathrm{S}(\tilde f^+ - \tilde f^-) = (\tilde f^+ - \tilde f^-)\,\big[\mathrm{S}(\tilde f^+) + \mathrm{S}(\tilde f^-)\big] = \tilde f^+\, \mathrm{S}(\tilde f^+) - \tilde f^-\, \mathrm{S}(\tilde f^-)$$
$$= \tilde f^+ - \tilde f^- = \tilde f\,.$$

7.18. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f}$.

<u>Dém</u> : Posons $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \tilde g_n = n \wedge \tilde f^+ - n \wedge \tilde f^- \in \mathcal{B}$; on a $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \tilde g_n\, \mathrm{S}(\tilde g_n) = \tilde g_n$; or $\mathrm{S}(\tilde g_n) = \mathrm{S}(n \wedge \tilde f^+) + \mathrm{S}(n \wedge \tilde f^-) = \mathrm{S}(\tilde f^+) + \mathrm{S}(\tilde f^-) = \mathrm{S}(\tilde f)$; donc $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \tilde g_n\, \mathrm{S}(\tilde f) = \tilde g_n$; de plus $\tilde g_n \xrightarrow{1} \tilde f^+ - \tilde f^- = \tilde f$, donc $\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f$.

7.19.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\big[\, \mathrm{S}(\tilde f) = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde f = 0 \,\big]$.

7.20. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde f \in \big(\mathcal{L}^1\big)^+$ et $\tilde g \in \mathcal{PM}^+$; alors on a $\boxed{\operatorname{Sup}_n \big[\tilde f \wedge (n\,\tilde g)\big] = \tilde f\, \mathrm{S}(\tilde g)}$.

<u>Dém</u> : C'est évident si $\tilde f \in \mathcal{E}^+$; soit alors $\tilde f \in \big(\mathcal{L}^1\big)^+$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}^+$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde f$; on a $\forall n, p \in \mathbb{N} \;\; \big|f_n \wedge (p\,\tilde g) - \tilde f \wedge (p\,\tilde g)\big| \le |f_n - \tilde f|$; on pose $\tilde h = \operatorname{Sup}_n \big[\tilde f \wedge (n\,\tilde g)\big]$; quand $p \to +\infty$ on trouve $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \big|f_n\, \mathrm{S}(\tilde g) - \tilde h\big| \le |f_n - \tilde f|$, et quand $n \to +\infty$ on trouve $\big|\tilde f\, \mathrm{S}(\tilde g) - \tilde h\big| = 0$, c-à-d $\tilde h = \tilde f\, \mathrm{S}(\tilde g)$.

7.21. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde f_n, \tilde f \in \mathcal{PM}$, $\tilde f_n \xrightarrow{\star} \tilde f$; alors on a $\boxed{\big\|\mathrm{S}(\tilde f)\big\|_1 \le \underline{\lim}_n \big\|\mathrm{S}(\tilde f_n)\big\|_1}$.

<u>Dém</u> :

On a $\forall n, p \in \mathbb{N} \;\; 1 \wedge \big(p\,|\tilde f_n|\big) \le \mathrm{S}(|\tilde f_n|)$, donc $\big\|1 \wedge \big(p\,|\tilde f_n|\big)\big\|_1 \le \big\|\mathrm{S}(|\tilde f_n|)\big\|_1$; donc $\forall p \in \mathbb{N} \;\; \big\|1 \wedge \big(p\,|\tilde f|\big)\big\|_1 \le \underline{\lim}_n \big\|\mathrm{S}(|\tilde f_n|)\big\|_1$; en faisant $p \to +\infty$ on obtient $\big\|\mathrm{S}(\tilde f)\big\|_1 \le \underline{\lim}_n \big\|\mathrm{S}(\tilde f_n)\big\|_1$.

7.22. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{f}_n\,,\,\tilde{f}\in\mathcal{PM}\,,\ \ \tilde{f}_n\xrightarrow{\star}\tilde{f}$; alors on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f})\le\overline{\mathrm{Lim}}_n\ \mathrm{S}(\tilde{f}_n)}$.

<u>Dém</u> :

On a $\forall\,n\,,\,p\in\mathbb{N}\ \ 1\wedge\big(p\,|\tilde{f}_n|\big)\le\mathrm{S}(|\tilde{f}_n|)$, donc $1\wedge\big(p\,|\tilde{f}_n|\big)\le\operatorname*{Sup}_{r\ge n}\ \mathrm{S}(|\tilde{f}_r|)$;

donc $\forall\,p\in\mathbb{N}\ \ 1\wedge\big(p\,|\tilde{f}|\big)\le\overline{\mathrm{Lim}}_n\ \mathrm{S}(|\tilde{f}_n|)$; en faisant $p\to+\infty$ on obtient

$\mathrm{S}(\tilde{f})\le\overline{\mathrm{Lim}}_n\ \mathrm{S}(\tilde{f}_n)$.

7.23. <u>Corollaire</u> :

Soient $\tilde{f}_n\,,\,\tilde{f}\in\mathcal{PM}^+\,,\ \ \tilde{f}_n\xrightarrow{\star}\tilde{f}\,,\ \ \tilde{f}_n$ suite <u>croissante</u> ; alors on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f}_n)\xrightarrow{1}\mathrm{S}(\tilde{f})}$.

<u>Dém</u> : La suite $\mathrm{S}(\tilde{f}_n)$ est croissante, donc $\forall\,n\in\mathbb{N}\ \ \mathrm{S}(\tilde{f}_n)\le\mathrm{S}(\tilde{f})$,

donc $\operatorname*{Sup}_n\ \mathrm{S}(\tilde{f}_n)\le\mathrm{S}(\tilde{f})$; par ailleurs $\mathrm{S}(\tilde{f})\le\overline{\mathrm{Lim}}_n\ \mathrm{S}(\tilde{f}_n)=\operatorname*{Sup}_n\ \mathrm{S}(\tilde{f}_n)$.

7.24. <u>Lemme</u> : $\forall\,\tilde{f},\,\tilde{g}\in\big(\mathcal{L}^2\big)^+$ on a $(\tilde{f}\wedge\tilde{g})^2\le\tilde{f}\,\tilde{g}=(\tilde{f}\vee\tilde{g})\,(\tilde{f}\wedge\tilde{g})$.

<u>Dém</u> : Vrai dans $\mathcal{E}^+$, donc vrai dans $\big(\mathcal{L}^2\big)^+$.

7.25. <u>Lemme</u> : $\forall\,\tilde{f},\,\tilde{g}\in\mathcal{B}^+$ on a $\mathrm{S}(\tilde{f}\,\tilde{g})=\mathrm{S}(\tilde{f})\,\mathrm{S}(\tilde{g})$.

<u>Dém</u> : Soit $M\in\mathbb{R}\,,\ M>0$ tel que $\tilde{f}\vee\tilde{g}\le M$; alors on a $\forall\,n\in\mathbb{N}$

$\mathbb{1}\wedge\big[n\,(\tilde{f}\wedge\tilde{g})^2\big]\le\mathbb{1}\wedge\big[n\,(\tilde{f}\,\tilde{g})\big]\le\mathbb{1}\wedge\big[n\,M\,(\tilde{f}\wedge\tilde{g})\big]$; donc quand $n\to+\infty$ on obtient

$\mathrm{S}\big[(\tilde{f}\wedge\tilde{g})^2\big]\le\mathrm{S}(\tilde{f}\,\tilde{g})\le\mathrm{S}(\tilde{f}\wedge\tilde{g})$; or on a $\mathrm{S}\big[(\tilde{f}\wedge\tilde{g})^2\big]=\mathrm{S}(\tilde{f}\wedge\tilde{g})=\mathrm{S}(\tilde{f})\,\mathrm{S}(\tilde{g})$,

donc $\mathrm{S}(\tilde{f}\,\tilde{g})=\mathrm{S}(\tilde{f})\,\mathrm{S}(\tilde{g})$.

7.26. <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde{f},\,\tilde{g}\in\mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f}\,\tilde{g})=\mathrm{S}(\tilde{f})\,\mathrm{S}(\tilde{g})}$.

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $\tilde{f},\,\tilde{g}\in\big(\mathcal{L}^2\big)^+$; posons $\forall\,n\in\mathbb{N}\ \ \tilde{f}_n=n\wedge\tilde{f}\in\mathcal{B}^+$

et $\tilde{g}_n=n\wedge\tilde{g}\in\mathcal{B}^+$; on a $\forall\,n\in\mathbb{N}\ \ \mathrm{S}(\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n)=\mathrm{S}(\tilde{f}_n)\,\mathrm{S}(\tilde{g}_n)$; or on sait que

$\tilde{f}_n\xrightarrow{2}\tilde{f}\,,\ \tilde{g}_n\xrightarrow{2}\tilde{g}$ et donc $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n\xrightarrow{1}\tilde{f}\,\tilde{g}$; de plus ces trois suites sont croissantes,

donc $\mathrm{S}(\tilde{f}\,\tilde{g})=\mathrm{S}(\tilde{f})\,\mathrm{S}(\tilde{g})$.

Soient alors $\tilde{f}\,,\,\tilde{g}\in\mathcal{L}^2$; on a $\mathrm{S}(\tilde{f}\,\tilde{g})=\mathrm{S}(|\tilde{f}\,\tilde{g}|)=\mathrm{S}(|\tilde{f}|)\,\mathrm{S}(|\tilde{g}|)=\mathrm{S}(\tilde{f})\,\mathrm{S}(\tilde{g})$.

7.27. <u>Corollaire</u> : $\forall\,\tilde{f}\in\big(\mathcal{L}^1\big)^+$ on a $\boxed{\mathrm{S}\Big(\sqrt{\tilde{f}}\Big)=\mathrm{S}(\tilde{f})}$.

<u>Dém</u> : $\sqrt{\tilde{f}}\in\big(\mathcal{L}^2\big)^+$, donc $\mathrm{S}(\tilde{f})=\mathrm{S}\Big[\Big(\sqrt{\tilde{f}}\Big)^2\Big]=\Big[\mathrm{S}\Big(\sqrt{\tilde{f}}\Big)\Big]^2=\mathrm{S}\Big(\sqrt{\tilde{f}}\Big)$.

7.28. <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde f \in \mathcal{B} \quad \forall\,\tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f\,\tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f)\,\mathrm{S}(\tilde g)}$.

<u>Dém</u> : analogue à la précédente.

7.29. <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{Inf}\,\{\sigma \in \mathcal{K} \parallel \sigma\tilde f = \tilde f\}$.

<u>Dém</u> : Posons $\tilde h = \mathrm{Inf}\,\{\sigma \in \mathcal{K} \parallel \sigma\tilde f = \tilde f\}$; on a $\mathrm{S}(\tilde f)\,\tilde f = \tilde f$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) \geq \tilde h$; par ailleurs soit $\sigma \in \mathcal{K}$ tel que $\sigma\tilde f = \tilde f$; on a $\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{S}(\sigma\tilde f) = \mathrm{S}(\sigma)\,\mathrm{S}(\tilde f)$ $= \sigma\,\mathrm{S}(\tilde f) \leq \sigma$; donc $\mathrm{S}(\tilde f) \leq \tilde h$.

7.30. <u>Théorème</u> : $\forall\,f \in \mathcal{R} \quad \forall\,\tilde g \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f\,\tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f)\,\mathrm{S}(\tilde g)}$.

Pour démontrer le théorème on utilise les lemme suivants :

<u>*Lemme 1*</u> : $\forall\,\sigma \in \mathcal{EK} \quad \forall\,\tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathbb{1} \wedge (\sigma\,\tilde g) = \sigma \wedge \tilde g$.

<u>Dém</u> :

On a $\mathbb{1} \wedge (\sigma\,\tilde g) = (\sigma + \mathbb{1} - \sigma) \wedge (\sigma\,\tilde g) = \sigma \wedge (\sigma\,\tilde g) + (\mathbb{1} - \sigma) \wedge (\sigma\,\tilde g) = \sigma \wedge (\sigma\,\tilde g)$;
de même $\sigma \wedge \tilde g = \sigma \wedge [(\sigma + \mathbb{1} - \sigma)\,\tilde g] = \sigma \wedge (\sigma\,\tilde g) + \sigma \wedge [(\mathbb{1} - \sigma)\,\tilde g] = \sigma \wedge (\sigma\,\tilde g)$.

<u>*Lemme 2*</u> : $\forall\,\sigma \in \mathcal{EK} \quad \forall\,\tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(\sigma\,\tilde g) = \mathrm{S}(\sigma)\,\mathrm{S}(\tilde g)$.

<u>Dém</u> : $\mathrm{S}(\sigma\,\tilde g) = \mathrm{S}\big[\mathbb{1} \wedge (\sigma\,\tilde g)\big] = \mathrm{S}(\sigma \wedge \tilde g) = \mathrm{S}(\sigma)\,\mathrm{S}(\tilde g)$.

<u>*Lemme 3**</u> : $\forall\,f \in \mathcal{E}^+ \quad \forall\,\tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(f\,\tilde g) = \mathrm{S}(f)\,\mathrm{S}(\tilde g)$.

<u>*Lemme 4**</u> : $\forall\,f \in \mathcal{R}^+ \quad \forall\,\tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(f\,\tilde g) = \mathrm{S}(f)\,\mathrm{S}(\tilde g)$.

7.31. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ tel que $|\tilde f| \geq 1$; alors il existe un unique $\tilde g \in \mathcal{B}$ tel que $\tilde f\,\tilde g = 1$; on note $\boxed{\tilde g = \dfrac{1}{\tilde f}}$. On a de plus $\left|\dfrac{1}{\tilde f}\right| = \dfrac{1}{|\tilde f|} \leq 1$ et $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\tilde f}\right) = 1$.

<u>Dém</u> : Montrons d'abord l'unicité ; soient $\tilde g_1\,,\,\tilde g_2 \in \mathcal{B}$ tels que $\tilde f\,\tilde g_1 = \tilde f\,\tilde g_2 = 1$; on en déduit $\tilde f\,(\tilde g_1 - \tilde g_2) = 0$, donc $\mathrm{S}(\tilde f)\,\mathrm{S}(\tilde g_1 - \tilde g_2) = \mathrm{S}(\tilde g_1 - \tilde g_2) = 0$, donc $\tilde g_1 = \tilde g_2$.
Montrons maintenant l'existence. Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde f$ et telle que $\forall\,n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \geq 1$; on a $\forall\,n \in \mathbb{N} \quad \left|\dfrac{1}{f_n}\right| \leq 1$ et $\forall\,m\,,\,n \in \mathbb{N} \quad \left\|\dfrac{1}{f_m} - \dfrac{1}{f_n}\right\|_1 = \left\|\dfrac{f_m - f_n}{f_m\,f_n}\right\|_1$ $\leq \|f_m - f_n\|_1$; on en déduit que $\dfrac{1}{f_n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$, donc convergente

vers un élément $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$; on a $|\tilde{g}| \leq 1$, donc $\tilde{g} \in \mathcal{B}$; de plus $\tilde{f}\,\tilde{g} = {}^1\lim_n \tilde{f}_n \dfrac{1}{f_n} = 1$.

Par ailleurs $|\tilde{f}|\,|\tilde{g}| = |\tilde{f}\,\tilde{g}| = 1$, donc par unicité $\dfrac{1}{|\tilde{f}|} = |\tilde{g}| = \left|\dfrac{1}{\tilde{f}}\right|$; enfin on a

$1 = \mathrm{S}\,(\tilde{f}\,\tilde{g}) = \mathrm{S}\,(\tilde{f})\,\mathrm{S}\,(\tilde{g}) = \mathrm{S}\,(\tilde{g})$.

Contenu : Le théorème de *Radon-Nikodym* affirme que l'espace des pseudo-mesures de support nul est un supplémentaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{PM}$.

§ 1. Théorème de Radon-Nikodym

1.1. Définition : On pose $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}^+$ $\boxed{\tilde f^\bullet = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (n \wedge \tilde f)}$.

$\tilde f^\bullet$ est bien défini par le théorème de convergence monotone car $n \wedge \tilde f$ est une suite croissante et dominée par $\tilde f$ dans $\mathcal{PM}^+$; de plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde f_n \le n \in \mathcal{L}^1_+$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde f_n \in (\mathcal{L}^1)^+$, donc $\tilde f^\bullet \in (\mathcal{L}^1)^+$.

1.2. Définition : On pose $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde f^\bullet = (\tilde f^+)^\bullet - (\tilde f^-)^\bullet} \in \mathcal{L}^1$.

$\tilde f^\bullet$ se nomme la partie fonctionnelle de $\tilde f$.

1.3. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $|\tilde f^\bullet| = |\tilde f|^\bullet \le |\tilde f|$.

Dém :

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|\tilde f| \ge n \wedge |\tilde f| = n \wedge \tilde f^+ + n \wedge \tilde f^-$; donc $|\tilde f| \ge |\tilde f|^\bullet = (\tilde f^+)^\bullet + (\tilde f^-)^\bullet$; or $(\tilde f^+)^\bullet \wedge (\tilde f^-)^\bullet \le \tilde f^+ \wedge \tilde f^- = 0$, donc $(\tilde f^+)^\bullet \wedge (\tilde f^-)^\bullet = 0$, donc $|\tilde f|^\bullet = |\tilde f^\bullet|$.

1.4. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde f^\bullet = \tilde f$.

Dém : $(\tilde f^+)^\bullet = \tilde f^+$ et $(\tilde f^-)^\bullet = \tilde f^-$, donc $\tilde f^\bullet = (\tilde f^+)^\bullet - (\tilde f^-)^\bullet = \tilde f$.

1.5. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\mathrm{S}(\tilde f^\bullet) = \mathrm{S}(\tilde f)$.

Dém : Soit d'abord $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$; on a $\tilde f^\bullet \le \tilde f$, donc $\mathrm{S}(\tilde f^\bullet) \le \mathrm{S}(\tilde f)$; par ailleurs $\tilde f^\bullet \ge 1 \wedge \tilde f$, donc $\mathrm{S}(\tilde f^\bullet) \ge \mathrm{S}(1 \wedge \tilde f) = \mathrm{S}(\tilde f)$.

Soit alors $\tilde f \in \mathcal{PM}$; on a $\mathrm{S}(\tilde f^\bullet) = \mathrm{S}\big[(\tilde f^+)^\bullet - (\tilde f^-)^\bullet\big] = \mathrm{S}\big[(\tilde f^+)^\bullet + (\tilde f^-)^\bullet\big]$
$= \mathrm{S}\big[(\tilde f^+)^\bullet\big] + \mathrm{S}\big[(\tilde f^-)^\bullet\big] = \mathrm{S}(\tilde f^+) + \mathrm{S}(\tilde f^-) = \mathrm{S}(\tilde f)$.

1.6. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}^+$ on a $\tilde f^\bullet = \operatorname{Sup}\{\tilde g \in (\mathcal{L}^1)^+ \parallel \tilde g \le \tilde f\}$.

Dém :

On a $\tilde f^\bullet \in (\mathcal{L}^1)^+$ et $\tilde f^\bullet \le \tilde f$, donc $\tilde f^\bullet \le \operatorname{Sup}\{\tilde g \in (\mathcal{L}^1)^+ \parallel \tilde g \le \tilde f\}$; par ailleurs soit $\tilde g \in \mathcal{L}^1_+$ tel que $\tilde g \le \tilde f$; alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $n \wedge \tilde g \le n \wedge \tilde f$; on trouve donc $\tilde g = \tilde g^\bullet \le \tilde f^\bullet$;

donc $\text{Sup}\,\{\,\tilde g \in (\mathcal{L}^1)^+ \parallel \tilde g \le \tilde f\,\} \le \tilde f^\bullet$.

1.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\mathrm{S}\,(\tilde f - \tilde f^\bullet) = 0$.

<u>Dém</u> :

Soit d'abord $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$; posons $\tilde h = \tilde f - \tilde f^\bullet \in \mathcal{PM}^+$ et supposons $\mathrm{S}\,(\tilde h) \neq 0$; on a donc aussi $\mathrm{S}\,(\mathbb{1} \wedge \tilde h) = \mathrm{S}\,(\tilde h) \neq 0$, donc $\mathbb{1} \wedge \tilde h \neq 0$; par ailleurs $\tilde f^\bullet + \mathbb{1} \wedge \tilde h \in \mathcal{L}^1_+$ et $\tilde f^\bullet + \mathbb{1} \wedge \tilde h \le \tilde f^\bullet + \tilde h = \tilde f$, donc $\tilde f^\bullet + \mathbb{1} \wedge \tilde h \le \tilde f^\bullet$; contradiction.

Soit alors $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$; on a $\mathrm{S}\,(\tilde f - \tilde f^\bullet) = \mathrm{S}\left[\tilde f^+ - (\tilde f^+)^\bullet - \tilde f^- + (\tilde f^-)^\bullet\right]$
$= \mathrm{S}\left[\tilde f^+ - (\tilde f^+)^\bullet\right] + \mathrm{S}\left[\tilde f^- - (\tilde f^-)^\bullet\right] = 0$.

1.8. <u>Définition</u> : $\tilde f \in \mathcal{PM}$ est <u>totalement singulière</u> ssi $\mathrm{S}\,(\tilde f) = 0$, c-à-d ssi $\mathbb{1} \wedge |\tilde f| = 0$.

On note $\mathcal{PN} = \{\,\tilde f \in \mathcal{PM} \parallel \tilde f$ totalement singulière$\,\}$.

1.9.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{PN}$ est un sous-espace cohérent, $\boxed{\text{intégral}}$ et <u>fermé</u> de $\mathcal{PM}$; $\mathcal{PN}$ est donc un espace de Riesz-Banach.

1.10.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{PN}$ est un module de Riesz sur $\mathcal{R}$.

1.11. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\left[\,\tilde f \in \mathcal{PN} \;\Leftrightarrow\; \tilde f^\bullet = 0\,\right]$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $n \wedge \tilde f^+ \le n \wedge (n\,\tilde f^+) \le n \wedge (n\,|\tilde f|) = n\,(\mathbb{1} \wedge |\tilde f|) = 0$;
donc $(\tilde f^+)^\bullet = 0$; de même $(\tilde f^-)^\bullet = 0$; donc $\tilde f^\bullet = 0$.

b) $\Leftarrow$: $\mathbb{1} \wedge |\tilde f| = \mathbb{1} \wedge (\tilde f^+ + \tilde f^-) \le \mathbb{1} \wedge \tilde f^+ + \mathbb{1} \wedge \tilde f^- \le (\tilde f^+)^\bullet + (\tilde f^-)^\bullet = 0$.

1.12. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde g \in (\mathcal{L}^1)^+ \;\; \forall\, \tilde h \in \mathcal{PN}^+$ on a $\tilde g \wedge \tilde h = 0$.

<u>Dém</u> : On a $\tilde g \wedge \tilde h \in (\mathcal{L}^1)^+$ et $\tilde g \wedge \tilde h \le \tilde h$, donc $\tilde g \wedge \tilde h \le \tilde h^\bullet = 0$, donc $\tilde g \wedge \tilde h = 0$.

1.13. <u>Théorème</u> : $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{PN} = \{0\}$.

<u>Dém</u> : Si $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{S}\,(\tilde f) = 0$ on a $\tilde f = 0$.

1.14. <u>Théorème de Radon-Nikodym</u> : $\boxed{\mathcal{PM} = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{PN}}$

<u>Dém</u> :

On a $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{PN} = \{0\}$; de plus si $\tilde f \in \mathcal{PM}$, alors $\tilde f = \tilde f^\bullet + \tilde f - \tilde f^\bullet \in \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{PN}$.

Notation : On pose $\boxed{\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{PN}}$ et $\boxed{\mathcal{N}_D = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_D}$.

1.15.* Théorème :

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_D$ sont des sous-espaces cohérents, $\boxed{\text{intégraux}}$ et fermés de $\mathcal{PM}$.

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_D$ sont des espaces de Riesz-Banach.

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_D$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}$.

1.16.* Théorème de Radon-Nikodym : $\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{N}}$ et $\boxed{\mathcal{M}_D = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{N}_D}$.

§ 2. Théorèmes divers

Contenu : Nous donnons, entre autres résultats, des caractérisations remarquables des *fonctionnelles sommables* et des pseudo-mesures *totalement singulières*.

2.1. Théorème : Soient $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ et $h \in \mathcal{E}^+$; alors on a $\boxed{\tilde{f}^+(h) \;=\; \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}^+ \\ k \leq h}} \tilde{f}(k)}$

Dém :

$$\tilde{f}^+(h) = \tfrac{1}{2}\left[\tilde{f}(h) + |\tilde{f}|(h)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\tilde{f}(h) + \sup_{\substack{k \in \mathcal{E} \\ |k| \leq h}} \tilde{f}(k)\right] = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E} \\ |k| \leq h}} \tilde{f}\left[\tfrac{1}{2}(h+k)\right] = \sup_{\substack{\ell \in \mathcal{E}^+ \\ \ell \leq h}} \tilde{f}(\ell).$$

2.2. Corollaire : Soient $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ et $h \in \mathcal{E}^+$; alors on a

$$\boxed{\begin{aligned} (\tilde{f} \vee \tilde{g})(h) &= \sup_{\substack{h_1, h_2 \in \mathcal{E}^+ \\ h_1 + h_2 = h}} \left[\tilde{f}(h_1) + \tilde{g}(h_2)\right] \\ (\tilde{f} \wedge \tilde{g})(h) &= \inf_{\substack{h_1, h_2 \in \mathcal{E}^+ \\ h_1 + h_2 = h}} \left[\tilde{f}(h_1) + \tilde{g}(h_2)\right] \end{aligned}}$$

Dém :

$$(\tilde{f} \vee \tilde{g})(h) = \tilde{f}(h) + (\tilde{g} - \tilde{f})^+(h) = \tilde{f}(h) + \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}^+ \\ k \leq h}} \left[\tilde{g}(k) - \tilde{f}(k)\right] = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}^+ \\ k \leq h}} \left[\tilde{f}(h-k) + \tilde{g}(k)\right]$$

$$= \sup_{\substack{h_1, h_2 \in \mathcal{E}^+ \\ h_1 + h_2 = h}} \left[\tilde{f}(h_1) + \tilde{g}(h_2)\right].$$

2.3. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\|\tilde{f}^+\|_\star \;=\; \sup_{\sigma \in \mathcal{EK}} \tilde{f}(\sigma)}$.

Dém :

On a $\|\tilde f^+\|_\star = \tilde f^+(\mathbb{1}) = \sup\limits_{\substack{h\in\mathcal{E}^+\\ h\le 1}} \tilde f(h) \ge \sup\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \tilde f(\sigma)$; par ailleurs soit $\varepsilon > 0$

et $h \in \mathcal{E}^+$ tel que $h \le 1$ et $\tilde f(h) \ge \tilde f^+(\mathbb{1}) - \varepsilon$; on a $h = \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$ où les 1_{I_r}

sont des intervalles formant une <u>partition</u> de $[\,a\,,b\,]$ et où $\forall\, r \in [[\,0\,,n\,]]$ $\alpha_r \in [\,0\,,1\,]$;

posons $\forall\, r \in [[\,1\,,n\,]]$ $\gamma_r = 0$ si $\tilde f(1_{\mathrm{I}_r}) \le 0$ et $\gamma_r = 1$ si $\tilde f(1_{\mathrm{I}_r}) \ge 0$; posons de plus

$\sigma = \sum\limits_{r=1}^{n} \gamma_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$; on a $\sigma \in \mathcal{EK}$ et $\tilde f(\sigma) \ge \tilde f(h) \ge \tilde f^+(\mathbb{1}) - \varepsilon$;

donc $\sup\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \tilde f(\sigma) \ge \tilde f^+(\mathbb{1}) - \varepsilon$; comme ε est arbitraire on a $\sup\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \tilde f(\sigma) \ge \tilde f^+(\mathbb{1})$.

<u>*Notation*</u> : On note $\mathcal{EU} = \{\, h \in \mathcal{E} \;\|\; |h| = 1\} = 1 - 2\,\mathcal{EK}$.

2.4. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\|\tilde f\|_\star = \sup\limits_{h\in\mathcal{EU}} \tilde f(h) = \sup\limits_{h\in\mathcal{EU}} |\tilde f(h)|}$.

<u>Dém</u> : On a $|\tilde f| = \tilde f + 2\,\tilde f^- = \tilde f + 2\,(-\tilde f)^+$, donc $\|\tilde f\|_\star = |\tilde f|(\mathbb{1})$

$= \tilde f(\mathbb{1}) + 2\,(-\tilde f)^+(\mathbb{1}) = \tilde f(\mathbb{1}) + 2 \sup\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} (-\tilde f)(\sigma) = \sup\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \tilde f(\mathbb{1} - 2\,\sigma) = \sup\limits_{h\in\mathcal{EU}} \tilde f(h)$.

2.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde f^+ = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \sigma \tilde f}$.

<u>Dém</u> :

$\forall\, \sigma \in \mathcal{EK}$ on a $\sigma \tilde f = \sigma \tilde f^+ - \sigma \tilde f^- \le \sigma \tilde f^+ \le \tilde f^+$, donc $\operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \sigma \tilde f \le \tilde f^+$;

par ailleurs soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\tilde f(\sigma_n) \to \|\tilde f^+\|_\star$; alors on a

$\|\tilde f^+ - \sigma_n \tilde f\|_\star = (\tilde f^+ - \sigma_n \tilde f)(\mathbb{1}) = \tilde f^+(\mathbb{1}) - \sigma_n \tilde f(\mathbb{1}) = \|\tilde f^+\|_\star - \tilde f(\sigma_n) \to 0$;

donc $\sigma_n \tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f^+$; or on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \sigma \tilde f \ge \sigma_n \tilde f$, donc $\operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \sigma \tilde f \ge \tilde f^+$.

2.6. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde f \vee \tilde g = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \big[\sigma \tilde f + (1-\sigma)\,\tilde g\big]}$

et $\boxed{\tilde f \wedge \tilde g = \operatorname*{Inf}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \big[\sigma \tilde f + (1-\sigma)\,\tilde g\big]}$.

<u>Dém</u> :

$\tilde f \vee \tilde g = \tilde f + (\tilde g - \tilde f)^+ = \tilde f + \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \sigma\,(\tilde g - \tilde f) = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \big(\tilde f + \sigma \tilde g - \sigma \tilde f\big) = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma\in\mathcal{EK}} \big[\sigma \tilde f + (1-\sigma)\,\tilde g\big]$.

2.7. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{|\tilde f| = \operatorname*{Sup}\limits_{h\in\mathcal{EU}} h \tilde f}$.

<u>Dém</u> :

$$|\tilde f| = \tilde f + 2\,\tilde f^- = \tilde f + 2\,(-\tilde f)^+ = \tilde f + 2 \sup_{\sigma\in\mathcal{EK}} (-\sigma\tilde f) = \sup_{\sigma\in\mathcal{EK}} (1-2\,\sigma)\,\tilde f = \sup_{h\in\mathcal{EU}} h\tilde f\,.$$

2.8. Théorème : Caractérisation des éléments de $\mathcal{PN}$

Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{PN}$ ss'il existe une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \quad \text{et} \quad \sigma_n\,\tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f}\,.$$

Dém :

a) $\Rightarrow$: On a $0 = 1\!\!1 \wedge \tilde f^+ = \inf_{\sigma\in\mathcal{EK}} \left[\sigma + (1-\sigma)\,\tilde f^+\right]$; il existe donc une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n + (1-\sigma_n)\,\tilde f^+ \xrightarrow{\star} 0$; on a donc aussi $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $(1-\sigma_n)\,\tilde f^+ \xrightarrow{\star} 0\,,$ c-à-d $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $\sigma_n\,\tilde f^+ \xrightarrow{\star} \tilde f^+$; de même il existe une suite $\tau_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\tau_n \xrightarrow{1} 0$ et $\tau_n\,\tilde f^- \xrightarrow{\star} \tilde f^-$; posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\chi_n = \sigma_n \vee \tau_n$; on a $\chi_n \xrightarrow{1} 0$; de plus $\sigma_n\,\tilde f^+ \le \chi_n\,\tilde f^+ \le \tilde f^+\,,$ donc $\chi_n\,\tilde f^+ \xrightarrow{\star} \tilde f^+$; de même $\chi_n\,\tilde f^- \xrightarrow{\star} \tilde f^-\,,$ donc $\chi_n\,\tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f\,.$

b) $\Leftarrow$: Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; par le théorème de Radon-Nikodym il existe $\tilde g \in \mathcal{L}^1$ et $\tilde h \in \mathcal{PN}$ tels que $\tilde f = \tilde g + \tilde h$; soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $\sigma_n\,\tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f$; on a alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n\,\tilde f = \sigma_n\,\tilde g + \sigma_n\,\tilde h$; quand $n \to +\infty$ on obtient donc $\sigma_n\,\tilde h \xrightarrow{\star} \tilde f$; or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n\,\tilde h \in \mathcal{PN}\,,$ donc $\tilde f \in \mathcal{PN}\,.$

2.9. Corollaire :

Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{PN}$ ss'il existe une suite $\tau_n \in \mathcal{EK}$ telle que

$$\boxed{\tau_n \xrightarrow{1} 1\!\!1 \quad \text{et} \quad |\tilde f|\,(\tau_n) \to 0}\,.$$

Dém :
$$\begin{aligned} \sigma_n\,\tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f \;&\Leftrightarrow\; (1-\sigma_n)\,\tilde f \xrightarrow{\star} 0 \\ &\Leftrightarrow\; (1-\sigma_n)\,|\tilde f| \xrightarrow{\star} 0 \\ &\Leftrightarrow\; \left[(1-\sigma_n)\,|\tilde f|\right](1\!\!1) \to 0 \\ &\Leftrightarrow\; |\tilde f|\,(1-\sigma_n) \to 0\,. \end{aligned}$$

2.10. Théorème : Caractérisation des éléments de $\mathcal{L}^1$

Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\Rightarrow\; \sigma_n\,\tilde f \xrightarrow{\star} 0}\,.$$

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$; soit $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{E}$ tel que

$\| \tilde{f} - g \|_1 \leq \varepsilon$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N \quad \| \sigma_n\, g \|_1 \leq \| g \| \, \| \sigma_n \|_1 \leq \varepsilon$; on a donc $\forall\, n \geq N \quad \| \sigma_n \tilde{f} \|_1 \leq \| \sigma_n\, g \|_1 + \big\| \sigma_n (\tilde{f} - g) \big\|_1 \leq \varepsilon + \| \tilde{f} - g \|_1 \leq 2\, \varepsilon$; donc $\sigma_n \tilde{f} \xrightarrow{1} 0$.

b) $\Leftarrow$: Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; par le théorème de Radon-Nikodym il existe $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$ et $\tilde{h} \in \mathcal{PN}$ tels que $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$; il existe de plus une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $\sigma_n \tilde{h} \xrightarrow{\star} \tilde{h}$; on a alors $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \tilde{f} = \sigma_n \tilde{g} + \sigma_n \tilde{h}$; quand $n \to +\infty$ on obtient donc $0 = \tilde{h}$, donc $\tilde{f} = \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$.

2.11. <u>Corollaire</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\Rightarrow\; |\tilde{f}|(\sigma_n) \to 0}\,.$$

<u>Dém</u> : $\sigma_n \tilde{f} \xrightarrow{\star} 0 \;\Leftrightarrow\; \sigma_n |\tilde{f}| \xrightarrow{\star} 0$

$$\Leftrightarrow\; \big[\, \sigma_n |\tilde{f}| \,\big] (\mathbb{1}) \to 0$$

$$\Leftrightarrow\; |\tilde{f}|(\sigma_n) \to 0\,.$$

2.12. <u>Lemme</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ $\big[\, \sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\Rightarrow\; |\tilde{f}|(\sigma_n) \to 0 \,\big]$

(2) Pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ $\big[\, \sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\Rightarrow\; \tilde{f}(\sigma_n) \to 0 \,\big]$.

<u>Dém</u> : (1) $\Rightarrow$ (2) est évident ; montrons (2) $\Rightarrow$ (1).

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{EU}$ tel que $\| \tilde{f} \|_\star \leq \tilde{f}(h) + \varepsilon$; soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$; on a $|\tilde{f}|(\sigma_n) + |\tilde{f}|(1 - \sigma_n) = |\tilde{f}|(\mathbb{1}) = \| \tilde{f} \|_\star \leq \tilde{f}(h) + \varepsilon$
$= \tilde{f}(h\, \sigma_n) + \tilde{f}\big[h\,(1 - \sigma_n)\big] + \varepsilon \leq \tilde{f}(h\, \sigma_n) + |\tilde{f}|(1 - \sigma_n) + \varepsilon$;
donc $|\tilde{f}|(\sigma_n) \leq \tilde{f}(h\, \sigma_n) + \varepsilon = \tilde{f}(h^+ \sigma_n) + \tilde{f}(h^- \sigma_n) + \varepsilon$; or $h^+, h^- \in \mathcal{EK}$;
de plus $h^+ \sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $h^- \sigma_n \xrightarrow{1} 0$, donc $\tilde{f}(h^+ \sigma_n) \to 0$ et $\tilde{f}(h^- \sigma_n) \to 0$;
donc $\overline{\lim_n}\; |\tilde{f}|(\sigma_n) \leq \varepsilon$; donc $|\tilde{f}|(\sigma_n) \to 0$.

2.13.* <u>Corollaire</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\Rightarrow\; \tilde{f}(\sigma_n) \to 0}\,.$$

<u>Remarque</u> : Ce dernier corollaire est à contraster avec le Théorème VI 6.13, que nous rappelons ci-dessous :

<u>*Théorème VI 6.13*</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{\bullet} 0 \ \Rightarrow \ \tilde{f}(\sigma_n) \to 0}\,.$$

2.14.* Corollaire : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall\, \sigma \in \mathcal{EK}$ $\boxed{\|\sigma\|_1 \leq \delta \ \Rightarrow \ |\tilde{f}(\sigma)| \leq \varepsilon}$.

§ 3. Mesures et pseudo-mesures atomiques

3.1. Définition : $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ on note $\delta_c \ : \ \mathcal{E} \to \mathbb{R} \ : \ h \mapsto h(c)$.

δ_c est la mesure de Dirac en c.

3.2.* Théorème : $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ on a $\boxed{\delta_c \in \mathcal{N}^+}$ et $\boxed{\delta_c \notin \mathcal{N}_D}$.

3.3. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ est une mesure atomique ssi $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [\,a\,,\,b\,]} \gamma_c\, \delta_c$, avec $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\gamma_c \in \mathbb{R}$ et $\sum\limits_{c \in [\,a\,,\,b\,]} |\gamma_c| < +\infty$;

l'ensemble $\{\, c \in [\,a\,,\,b\,] \parallel \gamma_c \neq 0\,\}$ est donc modéré (c-à-d fini ou dénombrable).

On note $\mathcal{A} = \{\, \tilde{f} \in \mathcal{M} \parallel \tilde{f} \text{ atomique}\,\}$.

3.4. Définition : On note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{F}$ telles que $\sum\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| < +\infty$; on munit $\mathcal{H}$ de la norme $\|\,f\,\|_{\mathcal{H}} = \sum\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

3.5.* Théorème : $\big(\mathcal{H}\,,\, |\ |\,,\, \|\ \|_{\mathcal{H}}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

3.6. Théorème : $\mathcal{A}$ est un sous-espace cohérent, $\boxed{\text{intégral}}$ et fermé de $\mathcal{M}$.

Dém :

a) $\mathcal{A}$ est cohérent

On a $\forall\, c \in [\,a\,,\,b\,]$ $\delta_c \wedge \delta_c = \delta_c$ et $\forall\, c_1\,,\, c_2 \in [\,a\,,\,b\,]$ avec $c_1 \neq c_2$ $\delta_{c_1} \wedge \delta_{c_2} = 0$.

b) $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{M}$

Les espaces de Riesz-Banach $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ sont canoniquement isométriques ; or $\mathcal{H}$ est complet, donc $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{M}$.

c) $\mathcal{A}$ est intégral dans $\mathcal{M}$

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{A}^+$ et $\tilde{g} \in \mathcal{M}^+$ tel que $\tilde{g} \leq \tilde{f}$; il faut montrer $\tilde{g} \in \mathcal{A}^+$; notons $\mathcal{A}_\phi$ l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* des δ_c avec $c \in [\,a\,,b\,]$; on suppose, ce qui est évident, que le théorème est vrai si $\tilde{f} \in \mathcal{A}_\phi$.

On peut écrire $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [\,a\,,b\,]} \gamma_c\,\delta_c$, avec $\forall\, c \in [\,a\,,b\,]\ \ \gamma_c \in \mathbb{R}$ et $\sum\limits_{c \in [\,a\,,b\,]} |\gamma_c| < +\infty$;

posons $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \tilde{f}_n = \sum\limits_{\substack{c \in [\,a\,,b\,] \\ |\gamma_c| \geq 1/n}} \gamma_c\,\delta_c$; on a $\tilde{f}_n \wedge (\tilde{f} - \tilde{f}_n) = 0$, donc

$\tilde{g} = \tilde{g} \wedge \tilde{f}_n + \tilde{g} \wedge (\tilde{f} - \tilde{f}_n)$; or $\tilde{g} \wedge \tilde{f}_n \leq \tilde{f}_n \in \mathcal{A}_\phi$, donc $\tilde{g} \wedge \tilde{f}_n \in \mathcal{A}_\phi^+$;

par ailleurs $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$, donc $\tilde{g} \wedge \tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{g}$; or $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{M}$, donc $\tilde{g} \in \mathcal{A}^+$.

3.7.* Théorème : $\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{M}_D \bigoplus \mathcal{A} = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{N}_D \bigoplus \mathcal{A}}$.

3.8. Définition : $\forall\, c \in [\,a\,,b\,]$ on note $\delta_c^+ : \mathcal{E} \to \mathbb{R} : h \mapsto \lim\limits_{x \to c^+} h(c) \qquad (c \neq b)$

et $\delta_c^- : \mathcal{E} \to \mathbb{R} : h \mapsto \lim\limits_{x \to c^-} h(c) \qquad (c \neq a)$.

δ_c^+ et δ_c^- sont les pseudo-mesures droites et gauches de Dirac en c.

3.9.* Théorème : $\forall\, c \in [\,a\,,b\,]$ on a $\delta_c^+\,,\,\delta_c^- \in \mathcal{PM}^+$ et $\delta_c^+\,,\,\delta_c^- \notin \mathcal{M}$.

3.10. Définition :

$\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ est une pseudo-mesure atomique droite ssi $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [\,a\,,b\,]} \gamma_c\,\delta_c^+$

atomique gauche ssi $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [\,a\,,b\,]} \gamma_c\,\delta_c^-$,

avec les mêmes conditions que pour les mesures atomiques.

On note $\mathcal{A}_+ = \{\,\tilde{f} \in \mathcal{PM} \parallel \tilde{f}$ atomique droite $\}$

et $\mathcal{A}_- = \{\,\tilde{f} \in \mathcal{PM} \parallel \tilde{f}$ atomique gauche $\}$;

de plus on pose $\boxed{\mathcal{PA} = \mathcal{A} \bigoplus \mathcal{A}_+ \bigoplus \mathcal{A}_-}$;

les éléments de $\mathcal{PA}$ sont appelés les pseudo-mesures atomiques.

3.11.* Théorème :

$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ sont des espaces de Riesz-Banach canoniquement isomorphes.

3.12.* Théorème :

$\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ sont des sous-espaces cohérents, $\boxed{\text{intégraux}}$ et fermés de $\mathcal{PM}$.

3.13.* Théorème : $\boxed{\mathcal{PM} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{A}_+ \bigoplus \mathcal{A}_- = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{N}_D \bigoplus \mathcal{PA}}$.

§ 4. Mesures de Radon sur [a,b]

Contenu : Les *mesures de Radon* constituent la définition classique, bien que malcommode, des mesures. Nous montrons que l'espace des mesures de Radon est effectivement isométrique à $\mathcal{M}$.

4.1. Définition :

Une mesure de Radon sur [a,b] est un élément du N-dual de l'espace normé $(\mathcal{C}, \| \, \|)$.

Ou encore : Une mesure de Radon sur [a,b] est une forme linéaire $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{C}$ telle que

$$\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall g \in \mathcal{C} \quad |\tilde{\mu}(g)| \leq M \|g\|}\ .$$

On note $\mathcal{M}_\odot$ l'espace vectoriel des mesures de Radon.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{M}_\odot \text{ est le N-dual de l'espace normé } (\mathcal{C}, \| \, \|)}$.

4.2.* Théorème : $\mathcal{M}_\odot$ constitue un espace de Banach pour la norme $\| \, \|_\star$, duale de la norme $\| \, \|$, définie par

$$\boxed{\|\tilde{\mu}\|_\star = \sup_{g \in \mathcal{C},\, \|g\| = 1} |\tilde{\mu}(g)| = \sup_{g \in \mathcal{C},\, \|g\| = 1} \tilde{\mu}(g)}\ .$$

On peut appliquer intégralement la théorie des Chapitres I−IV à $\mathcal{M}_\odot$ en lieu et place de $\mathcal{PM}$; nous mentionnons ci-dessous les théorèmes essentiels ainsi obtenus (les numéros de ces théorèmes sont suivis d'un $\odot$) ; ceux-ci vont nous permettre d'établir l'existence d'une isométrie bijective canonique entre $\mathcal{M}_\odot$ et $\mathcal{M}$.

4.3. $\odot$ Théorème : $(\mathcal{M}_\odot, | \ |, \| \, \|_\star)$ est un espace de Riesz-Banach.

4.4. $\odot$ Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{C}$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f \in \mathcal{C}$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f \tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) \to \tilde{\mu}(f)$.

4.5. Définition : $f \in \mathcal{F}$ est une fonction de Baire ss'il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$.

On note $\mathcal{BA} = \{ f \in \mathcal{F} \parallel f \text{ fonction de Baire} \} \supset \mathcal{C}$.

4.6. $\odot$ <u>Théorème</u> : $\mathcal{BA}$ est une algèbre de Riesz-Banach pour la convergence uniforme.

4.7. <u>Corollaire</u> : $\boxed{\mathcal{R} \subset \mathcal{BA} \subset \mathcal{PR}}$.

<u>Dém</u> : Il est facile de voir que $\mathcal{E} \subset \mathcal{BA}$; or $\mathcal{BA}$ est fermé pour la convergence uniforme, donc $\mathcal{R} \subset \mathcal{BA}$.

4.8. $\odot$ <u>Théorème d'extension</u>

Soit une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f \in \mathcal{BA}$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ $f_n\, \tilde{\mu}$ converge finement dans $\mathcal{M}_\odot$ vers une limite qui ne dépend que de f (et non de la suite f_n).

4.9. <u>Définition</u> : $\forall\, f \in \mathcal{BA}$ $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ nous pouvons donc définir $f\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ de la manière suivante : $\boxed{f\, \tilde{\mu} = \operatorname*{Lim}_n \left(f_n\, \tilde{\mu} \right)}$ où f_n est n'importe quelle suite dans $\mathcal{C}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$.

4.10. <u>Définition</u> : Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ s'étend canoniquement à $\mathcal{BA}$ en posant

$$\boxed{\forall\, f \in \mathcal{BA} \quad \tilde{\mu}\,(f) = (f\, \tilde{\mu})\,(1\!\!1)}.$$

4.11. $\odot$ <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{BA}$ $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\,(f) = \lim_n \tilde{\mu}\,(f_n)}$, où f_n est n'importe quelle suite dans $\mathcal{C}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$.

4.12. $\odot$ <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{BA}$ $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a

1) $|\, f\, \tilde{\mu}\,| = |f|\,|\, \tilde{\mu}\,|$

2) $|\, \tilde{\mu}\,(f)| \leq |\, \tilde{\mu}\,|\,(|f|) \leq \|\, \tilde{\mu}\,\|_\star\, \|f\|$

3) $\|\, f\, \tilde{\mu}\,\|_\star \leq \|f\|\, \|\, \tilde{\mu}\,\|_\star$

4.13. <u>Lemme</u> : Soit F un *intervalle* fermé de $[\,\mathrm{a}, \mathrm{b}\,]$; alors $1\!\!1_{\mathrm{F}} \in (\mathcal{C}^+)_\downarrow$.

<u>Dém</u> : Il suffit de faire un dessin !

4.14. <u>Théorème</u> : Soit F un fermé de $[\,\mathrm{a}, \mathrm{b}\,]$; alors $\boxed{1\!\!1_{\mathrm{F}} \in (\mathcal{C}^+)_\downarrow}$.

<u>Dém</u> : Même démonstration qu'au Théorème III 8.

4.15. <u>Théorème</u> : $\boxed{(\mathcal{C}^+)_\downarrow = \mathcal{S} \subset \mathcal{BA}^+}$.

Dém : Même démonstration qu'au Théorème III 9. De plus par définition de $\mathcal{BA}$ on a évidemment $(\mathcal{C}^+)_\downarrow \subset \mathcal{BA}^+$.

4.16. $\odot$ Lemme d'approximation dans $\mathcal{BA}^+$

$\forall\, f \in \mathcal{BA}^+ \;\; \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot^+ \;\; \forall\, \varepsilon > 0$ il existe $g \in \left(\mathcal{C}^+\right)_\downarrow = \mathcal{S} \subset \mathcal{BA}^+$ tel que

$$\boxed{g \le f \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}\,(f-g) \le \varepsilon}\,.$$

4.17. $\odot$ Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{BA}$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{BA}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f \in \mathcal{BA}$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\, \tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) \to \tilde{\mu}\,(f)$.

Maintenant que nous avons défini l'extension des mesures de Radon à $\mathcal{BA}$ et donc à $\mathcal{E}$, nous pouvons décrire l'isométrie canonique de Riesz-Banach entre $\mathcal{M}_\odot$ et $\mathcal{M}$.

4.18. Théorème :

L'application $\phi \;:\; \mathcal{M}_\odot \to \mathcal{M} \;:\; \tilde{\mu} \mapsto \tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}}$ est une isométrie de Riesz-Banach.

Dém : On a clairement $\tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}} \in \mathcal{PM}$; de plus on montre facilement que $\left\| \tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}} \right\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star$, donc aussi $\left| \tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}} \right| = |\tilde{\mu}|$. Par ailleurs soit $c \in [\,a\,,\,b\,]$; on a $1_{]\,\gamma,\,c\,[} \xrightarrow{\mathrm{b}} 0$ quand $\gamma \to c$; donc $\tilde{\mu}\left(1_{]\,\gamma,\,c\,[}\right) \to \tilde{\mu}\,(0) = 0$; donc $\tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}} \in \mathcal{M}$.

4.19.* Théorème : L'application $\psi \;:\; \mathcal{M} \to \mathcal{M}_\odot \;:\; \tilde{\mu} \mapsto \tilde{\mu}\,|_{\mathcal{C}}$ est l'isométrie réciproque de ϕ. On peut donc identifier $\mathcal{M}_\odot$ avec $\mathcal{M}$.

Récapitulatif : (Seul $\mathcal{FO}$ reste encore à définir ; ce sera l'objet du Chapitre XI).

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \mathcal{F} & & & & & & \mathcal{FO} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cup & & & & & & \cup & & & & & & \\
\mathcal{E} & \subset & \mathcal{R} & \subset & \mathcal{BA} & \subset & \mathcal{PR} & \subset & \mathcal{W} & \hookrightarrow & \mathcal{B} & \subset & \mathcal{L}^2 & \subset & \mathcal{L}^1 & \subset & \mathcal{M}_D & \subset & \mathcal{M} & \subset & \mathcal{PM} \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & & & & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & & \mathcal{C} & & \mathcal{S} & & & & \mathcal{Z} & & \mathcal{K} & & & & & & \mathcal{N}_D & \subset & \mathcal{N} & \subset & \mathcal{PN} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathcal{A} & \subset & \mathcal{PA}
\end{array}}$$

Contenu : Nous généralisons le concept de *primitive* à toute pseudo-mesure diffuse. Inversément nous définissons la *différentielle* de toute fonction continue à variation bornée. On peut ainsi étendre le domaine de validité de la plupart des formules classiques du calcul différentiel et intégral.

§ 1. Fonctions continues à variation bornée

1.1. Définition : On note $\mathcal{CV}$ l'algèbre des fonctions : $[a, b] \to \mathbb{R}$ continues et à variation bornée.

Notation : $\forall F \in \mathcal{CV}$ on note $V(F)$ la variation de F.

1.2.* Théorème : $\forall F \in \mathcal{CV}$ on a $\mathrm{V}\big(|F|\big) \leq V(F)$.

1.3.* Théorème : $\big(\mathcal{CV}, |\ |\big)$ est une algèbre de Riesz.

1.4. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{M}_D$; on pose $F_\circ : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \tilde{f}\,(1_{[a,x]})$.

Toute fonction de la forme $F = F_\circ + \mathrm{c}$ $(\mathrm{c} \in \mathbb{R})$ s'appelle une primitive d e $\tilde{f}$.

1.5. Théorème : $F \in \mathcal{CV}$ et $V(F) = \|\tilde{f}\|_\star$

Dém : $V(F) = \sup\limits_{h \in \mathcal{EU}} \tilde{f}\,(h) = \|\tilde{f}\|_\star$.

1.6. Définition : Réciproquement $\forall F \in \mathcal{CV}$ on définit $dF \in \mathcal{PM}$, appelé différentielle de F de la manière suivante : $\forall\, a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ on pose $\boxed{(dF)\left(1_{[\alpha,\beta]}\right) = F(\beta) - F(\alpha)}$; en particulier $\forall\, a \leq c \leq b$ $\boxed{(dF)\left(1_{\{c\}}\right) = 0}$. On prolonge ensuite par linéarité à tout $\mathcal{E}$.

1.7. Théorème : 1) $\boxed{dF \in \mathcal{M}_D}$ et $\|dF\|_\star = V(F)$.

2) $dF = 0 \;\Leftrightarrow\; F = c \in \mathbb{R}$.

Dém : 1) $\|dF\|_\star = \sup\limits_{h \in \mathcal{EU}} (dF)(h) = V(F)$.

2) trivial.

1.8.* Corollaire : V est une norme sur $\mathcal{CV}/\mathbb{R}$ et l'opérateur linéaire $\boxed{d : \mathcal{CV}/\mathbb{R} \to \mathcal{M}_D : F \mapsto dF}$ est une isométrie.

1.9. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{M}_D$ et soit $F \in \mathcal{CV}$ une primitive de $\tilde{f}$; alors on a $dF = \tilde{f}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, a \leq \alpha \leq \beta \leq b \quad (dF)\,[1_{[\alpha,\beta]}] = F(\beta) - F(\alpha)$

$= \tilde{f}\,[1_{[a,\beta]}] - \tilde{f}\,[1_{[a,\alpha]}] = \tilde{f}\left[1_{[a,\beta]} - 1_{[a,\alpha]}\right] = \tilde{f}\left[1_{[\alpha,\beta]}\right]$; donc $dF = \tilde{f}$.

1.10. <u>Théorème</u> : $F \in \mathcal{CV}$ est lipschitzienne ssi $dF \in \mathcal{B}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: Supposons que F soit lipschitzienne de constante $K > 0$; soit $h \in \mathcal{E}$;

on peut écrire $h = \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$ où les 1_{I_r} sont des intervalles formant une <u>partition</u>

de $[a, b]$ et où $\forall\, r \in [[0, n]]\ \ \alpha_r \in \mathbb{R}$; alors on a $\left|(dF)(h)\right| \leq \sum\limits_{r=1}^{n} |\alpha_r| \left|(dF)(1_{\mathrm{I}_r})\right|$

$\leq K \sum\limits_{r=1}^{n} |\alpha_r|\,|\mathrm{I}_r| = K \displaystyle\int_a^b |h(t)|\, dt = K\, \|h\|_1$; donc $|dF| \leq K$.

b) $\Leftarrow$: Soit $K > 0$ tel que $|dF| \leq K$; alors $\forall\, \alpha, \beta \in [a, b]$ on a

$\left|F(\alpha) - F(\beta)\right| = \left|(dF)\left(1_{[\alpha,\beta]}\right)\right| \leq K \displaystyle\int_a^b 1_{[\alpha,\beta]}\, dt = K\,|\beta - \alpha|$.

1.11. <u>Définition</u> : $F \in \mathcal{CV}$ est <u>absolument continue</u> ssi $dF \in \mathcal{L}^1$;

on dit alors que dF est la <u>dérivée</u> de F et on note $\boxed{dF = F'}$.

1.12. <u>Théorème</u> : $F \in \mathcal{CV}$ est absolument continue ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a, b]$ on a

$$\boxed{\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta \;\Rightarrow\; \Big|\sum_k [F(\beta_k) - F(\alpha_k)]\Big| \leq \varepsilon}.$$

<u>Dém</u> : C'est une reformulation du Corollaire VII 2.14.

1.13. <u>Théorème</u> : $F \in \mathcal{CV}$ est absolument continue ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a, b]$ on a

$$\boxed{\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta \;\Rightarrow\; \sum_k |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq \varepsilon}.$$

<u>Dém</u> :

Appelons (1) la condition du Théorème 1.12 et (2) la condition du Théorème 1.13 ; il faut montrer (1) $\Leftrightarrow$ (2).

a) $\Leftarrow$: Trivial.

b) $\Rightarrow$: Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que

$\sum\limits_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta \;\Rightarrow\; \Big| \sum\limits_k [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \Big| \leq \varepsilon/2$; soit une famille finie d'intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a, b]$ telle que $\sum\limits_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta$; soit P l'ensemble des indices k tels que $F(\beta_k) - F(\alpha_k) > 0$ et N l'ensemble des indices k tels que $F(\beta_k) - F(\alpha_k) < 0$; bien entendu $\sum\limits_{k \in P} (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta$ et $\sum\limits_{k \in N} (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta$; on a alors

$$\begin{aligned}\sum_k |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| &= \Big| \sum_{k \in P} [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \Big| + \Big| \sum_{k \in N} [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \Big| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .\end{aligned}$$

§ 2. Sommes de Riemann-Stieltjes

Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision D de $[a, b]$;

on pose $\|\mathrm{D}\| = \max\limits_{0 \leq r \leq p-1} (a_{r+1} - a_r)$; choisissons $\forall r \in [[0, p-1]]$ $c_r \in [a_r, a_{r+1}]$.

2.1. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{M}_D$ et soit F une primitive de $\tilde{f}$; on définit

$$\forall h \in \mathcal{R} \quad \Omega_{\mathrm{D}}(h) = \sum_{r=0}^{p-1} h(c_r)\, \tilde{f}\left(1_{[a_r, a_{r+1}]}\right) = \sum_{r=0}^{p-1} h(c_r) \left[F(a_{r+1}) - F(a_r) \right].$$

Ce sont les sommes de Riemann-Stieltjes de h pour la mesure $\tilde{f}$.

2.2. Théorème : $\forall h \in \mathcal{R}$ on a $|\Omega_{\mathrm{D}}(h)| \leq \|\tilde{f}\|_\star \|h\|$.

Dém : $|\Omega_{\mathrm{D}}(h)| \leq \|h\| \sum\limits_{r=0}^{p-1} \big| F(a_{r+1}) - F(a_r) \big| \leq \|h\|\, V(F) = \|h\|\, \|\tilde{f}\|_\star$.

2.3.* Lemme : $\forall h \in \mathcal{E}$ on a $\Omega_{\mathrm{D}}(h) \to \tilde{f}(h)$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$.

2.4. Théorème : $\forall h \in \mathcal{R}$ on a $\Omega_{\mathrm{D}}(h) \to \tilde{f}(h)$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$.

Dém : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $\Omega_{\mathrm{D}} - \tilde{f} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$.

§ 3. Formules classiques

3.1. Intégration par parties (« généralisée »)

Soient $\tilde{f}\,,\,\tilde{g} \in \mathcal{M}_D$ et soient F et G des primitives de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$; alors on a

$$\boxed{\tilde{f}\,(G) + \tilde{g}\,(F) \;=\; F\,(b)\;G\,(b) - F\,(a)\;G\,(a)}$$

c-à-d
$$\boxed{\int_a^b G\;dF \;+\; \int_a^b F\;dG \;=\; \big[\,F\,(x)\;G\,(x)\,\big]_a^b}$$

Dém :

Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision D de $[\,a\,,\,b\,]$; on pose $\forall\, h \in \mathcal{R}$

$$\Phi_{\mathrm{D}}\,(h) = \sum_{r=0}^{p-1} h\,(a_r)\,\big[\,F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\big] \quad \text{et} \quad \Psi_{\mathrm{D}}\,(h) = \sum_{r=0}^{p-1} h\,(a_{r+1})\,\big[\,G\,(a_{r+1}) - G\,(a_r)\,\big]\ ;$$

on peut donc écrire

$$\Phi_{\mathrm{D}}\,(G) + \Psi_{\mathrm{D}}\,(F) = \sum_{r=0}^{p-1} G\,(a_r)\,\big[\,F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\big] + \sum_{r=0}^{p-1} F\,(a_{r+1})\,\big[\,G\,(a_{r+1}) - G\,(a_r)\big]$$

$$= \sum_{r=0}^{p-1} \big[\,F\,(a_{r+1})\,G\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\,G\,(a_r)\,\big] = F\,(b)\;G\,(b) - F\,(a)\;G\,(a)\ ;$$

et de plus $\Phi_{\mathrm{D}}\,(G) + \Psi_{\mathrm{D}}\,(F) \to \tilde{f}\,(G) + \tilde{g}\,(F)$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0\,.$

3.2. Différentielle d'un produit

$\forall\, F\,,\,G \in \mathcal{CV}$ on a $F\,G \in \mathcal{CV}$ et $\boxed{d\,(F\,G) = F\,dG + G\,dF}$.

Dém : Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision de $[\,a\,,\,b\,]$;

on a $\displaystyle\sum_{r=0}^{p-1} \big|\,F\,(a_{r+1})\,G\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\,G\,(a_r)\,\big|$

$$= \sum_{r=0}^{p-1} \big|\,F\,(a_{r+1})\,G\,(a_{r+1}) - F\,(a_{r+1})\,G\,(a_r) + F\,(a_{r+1})\,G\,(a_r) - F\,(a_r)\,G\,(a_r)\,\big|$$

$$\le \sum_{r=0}^{p-1} \big|F\,(a_{r+1})\big|\,\big|\,G\,(a_{r+1}) - G\,(a_r)\,\big| + \big|G\,(a_r)\big|\,\big|\,F\,(a_{r+1}) \,-\, F\,(a_r)\,\big|$$

$\le \|F\|\;V(G) \,+\, \|G\|\;V(F)$; donc $V(F\,G) \le \|F\|\;V(G) \,+\, \|G\|\;V(F)\,,$ donc $F\,G \in \mathcal{CV}\,.$

Par ailleurs $\forall\, a \le \alpha \le \beta \le b$ le théorème d'intégration par parties appliqué à l'intervalle $[\alpha\,,\,\beta]$ nous permet d'écrire $\displaystyle\int_\alpha^\beta G\;dF \,+\, \int_\alpha^\beta F\;dG \;=\; [\,F(x)\;G(x)\,]_\alpha^\beta\,,$

c-à-d $\displaystyle\int_\alpha^\beta G\;dF \,+\, \int_\alpha^\beta F\;dG \;=\; \int_\alpha^\beta d\,(F\,G)$; on en déduit

$\forall\, h \in \mathcal{R}$ $\displaystyle\int_a^b h\;G\;dF \,+\, \int_a^b h\;F\;dG \;=\; \int_a^b h\;d\,(F\,G)\,,$ c-à-d $d\,(F\,G) = F\,dG + G\,dF\,.$

3.3. Différentielle d'un inverse

Soit $F \in \mathcal{CV}$ et supposons qu'il existe $A \in \mathbb{R}_\star^+$ tel que $|F| \geq A$; alors $\dfrac{1}{F} \in \mathcal{CV}$

et $\boxed{d\,(\frac{1}{F}) = -\,\frac{1}{F^2}\,dF}$.

Dém : Soit $a = a_0 < a_1 < \ \dots\ < a_p = b$ une subdivision de $[\,a, b\,]$; on a

$$\sum_{r=0}^{p-1} \Big|\frac{1}{F\,(a_{r+1})} - \frac{1}{F\,(a_r)}\Big| = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{\big|\,F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\,\big|}{\big|\,F\,(a_r)\,F\,(a_{r+1})\,\big|} \leq \frac{1}{A^2}\,V(F)\ , \text{ donc } \frac{1}{F} \in \mathcal{CV}\,.$$

Par ailleurs posons $G = \dfrac{1}{F}$; on a $F\,G = 1$, donc $d\,(F\,G) = F\,d\,G + G\,dF = 0$,

donc $d\,G = -\,\dfrac{G}{F}\,dF = -\,\dfrac{1}{F^2\,dF}$.

3.4. Différentielle d'une fonction composée

Soit $F \in \mathcal{CV}$ et soient $c = \min\limits_{x\in[\,a\,,\,b\,]} F\,(x)$ et $d = \max\limits_{x\in[\,a\,,\,b\,]} F\,(x)$; soit $g\ :\ [\,c, d\,] \to \mathbb{R}$

continuement dérivable ; alors $g \circ F \in \mathcal{CV}$ et $\boxed{d\,(g \circ F) = (g' \circ F)\,dF}$.

Dém : Soient $\alpha\,, \beta \in [\,a\,, b\,]$; il existe $e \in \big[F\,(\alpha)\,, F\,(\beta)\big]$ tel que

$g\,[F\,(\beta)] - g\,[F\,(\alpha)] = g'(e)\,[F\,(\beta) - F\,(\alpha)]$; comme F est continue, il existe $\gamma \in [\alpha\,, \beta]$

tel que $e = F(\gamma)$; donc $\forall\,\alpha\,, \beta \in [\,a\,, b\,]$ il existe $\gamma \in [\alpha\,, \beta]$ tel que

$g\,[F\,\beta)] - g\,[F\,(\alpha)] = g'[F\,(\gamma)]\,[F\,(\beta) - F\,(\alpha)]$.

Soit $a = a_0 < a_1 < \ \dots\ < a_p = b$ une subdivision D de $[\,a, b\,]$; $\forall\,r \in [\![\,0\,, p-1\,]\!]$

soit $c_r \in [\,a_r\,, a_{r+1}]$ tel que $g\,[F(a_{r+1})] - g\,[F\,(a_r)] = g'\,[F\,(c_r)]\,\big[F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\big]$;

on peut donc écrire $\forall\,h \in \mathcal{E}$

$$\sum_{r=0}^{p-1} h\,(c_r)\,\Big(g\,[F\,(a_{r+1})] - g\,[F\,(a_r)]\Big) = \sum_{r=0}^{p-1} h\,(c_r)\,g'\,[F\,(c_r)]\,\big[F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\big]\ ;$$

quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$ on obtient $\displaystyle\int_a^b h\,(t)\,d\,(g \circ F)\,(t) = \int_a^b h\,(t)\,(g' \circ F)\,(t)\,dF\,(t)$.

Chapitre IX : Changement de variable

Contenu : Nous étudions le *changement de variable* pour une fonction réglée et un changement de variable continu, puis pour une fonctionnelle sommable et un changement de variable à dérivée réglée.

§ 1. Fonctions réglées

Soit $[c, d]$ $(c < d)$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $\omega : [c, d] \to [a, b]$ une fonction *continue, monotone, bijective*.

1.1. Théorème :

$\forall F \in \mathcal{CV}([a, b])$ on a $\boxed{F \circ \omega \in \mathcal{CV}([c, d])}$ et $\boxed{V(F \circ \omega) = V(F)}$.

Dém :

La fonction $F \circ \omega$ est clairement continue ; montrons qu'elle est à variation bornée.

Supposons par exemple ω croissante ; soit $c = c_0 < c_1 < \ldots < c_p = d$ une subdivision de $[c, d]$; on peut écrire :

$$\sum_{r=0}^{p-1} \left|(F \circ \omega)(c_{r+1}) - (F \circ \omega)(c_r)\right| = \sum_{r=0}^{p-1} \left|F[\omega(c_{r+1})] - F[\omega(c_r)]\right| \leq \mathrm{V}(F)$$

car $\omega(a_0) < \omega(a_1) < \ldots < \omega(a_p)$ est une subdivision de $[a, b]$; on en déduit $V(F \circ \omega) \leq V(F)$; on peut donc aussi écrire $V(F) = V(F \circ \omega \circ \omega^{-1}) \leq V(F \circ \omega)$, donc $V(F \circ \omega) = V(F)$.

1.2. Théorème :

Soit $h \in \mathcal{R}([a, b])$; alors $h \circ \omega \in \mathcal{R}([c, d])$ et on a $\forall F \in \mathcal{CV}([a, b])$

$$\boxed{\int_c^d (h \circ \omega)\, d(F \circ \omega) = \pm \int_a^b h\, dF}$$

avec le signe $+$ *si* ω *est croissant et le signe* $-$ *si* ω *est décroissant.*

Dém : Soit $\sigma_n = (c_{n\,r})$ une suite de subdivisions de $[c, d]$ telle que $\|\sigma_n\| \to 0$;

on a $\displaystyle\int_c^d (h \circ \omega)\, d(F \circ \omega) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{r=0}^{p_n - 1} (h \circ \omega)(c_{n\,r}) \left[(F \circ \omega)(c_{n\,r+1}) - (F \circ \omega)(c_{n\,r})\right]$

$\displaystyle= \lim_{n \to +\infty} \sum_{r=0}^{p_n - 1} h[\omega(c_{n\,r})] \left\{F[\omega(c_{n\,r+1})] - F[\omega(c_{n\,r})]\right\}.$

Posons $\forall n, r$ $a_{n\,r} = \omega(c_{n\,r})$; alors $\tau_n = (a_{n\,r})$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$, croissantes ou décroissantes suivant que ω est croissant ou décroissant ; de plus $\|\tau_n\| \to 0$ car ω est uniformément continu. On peut donc écrire

$$\int_c^d (h\circ\omega)\, d(F\circ\omega) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{r=0}^{p_n-1} h(a_{n\,r})\left[F(a_{n\,r+1}) - F(a_{n\,r})\right] = \pm\int_a^b h\, dF\,.$$

<u>Schéma fonctionnel</u> :

$$\begin{tikzcd} {[c,d]} \arrow[r, "\omega"] & {[a,b]} \arrow[d, shift right, "F"'] \arrow[d, shift left, "h"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

1.3. <u>Corollaire</u> : $\forall h \in \mathcal{R}([a,b])$ on a $\boxed{\int_c^d (h\circ\omega)\, d\omega = \pm\int_a^b h\; dt}$.

<u>Dém</u> : On applique le théorème précédent avec $F(t) = t$.

1.4. <u>Corollaire</u> : Supposons ω absolument continu ; alors $\forall h \in \mathcal{R}([a,b])$

$$\boxed{\int_c^d (h\circ\omega)\, |\omega'|\, du = \int_a^b h\; dt}.$$

§ 2. <u>Fonctionnelles sommables</u>

Soit $[c,d]$ (avec $c<d$) un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $\omega : [c,d]\to[a,b]$ une fonction *continue, monotone, bijective, à dérivée réglée non nulle*.

2.1. <u>Définition</u> :

Soit $\tilde{f}\in\mathcal{L}^1([a,b])$; alors on pose $\forall k\in\mathcal{R}([c,d])$ $\boxed{(\tilde{f}\circ\omega)(k) = \tilde{f}\Big(\frac{k\circ\omega^{-1}}{|\omega'|\circ\omega^{-1}}\Big)}$.

$\tilde{f}\circ\omega$ est bien défini car $\forall k\in\mathcal{R}([c,d])$ $k\circ\omega^{-1}\in\mathcal{R}([a,b])$, et donc aussi $|\omega'|\circ\omega^{-1}\in\mathcal{R}([a,b])$.

<u>Schéma fonctionnel</u> :

$$\begin{tikzcd} \tilde{f}\circ\omega & \tilde{f} \\ {[c,d]} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, shift right, "\omega'"'] \arrow[d, shift left, "k"] & {[a,b]} \\ \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

2.2.* <u>Lemme</u> :

$\forall \tilde{f}\in\mathcal{L}^1([a,b])$ on a $\boxed{\tilde{f}\circ\omega\in\mathcal{PM}([c,d])}$ et $\boxed{\|\tilde{f}\circ\omega\|_\star \le M\,\|\tilde{f}\|_1}$,

avec $M = \Big\|\frac{1}{|\omega'|\circ\omega^{-1}}\Big\|$.

2.3. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde{f} = f \in \mathcal{R}\big([\,a\,,\,b\,]\big)$; alors $f \circ \omega$ représente effectivement la composée des fonctions ω et f ; en particulier $f \circ \omega \in \mathcal{R}\big([\,c\,,\,d\,]\big)$.

<u>Dém</u> : Soit $h \in \mathcal{R}\big([\,a\,,\,b\,]\big)$; en appliquant la définition de $f \circ \omega$ à $k = (h \circ \omega)\,.\,|\omega\,'| \in \mathcal{R}\big([\,c\,,\,d\,]\big)$, on obtient

$$\int_c^d (h \circ \omega)\,(f \circ \omega)\,|\omega\,'|\,d\,u \;=\; \int_a^b h\,f\;d\,t\,.$$

En comparant cette formule avec la formule classique du changement de variable dans une intégrale on en déduit que $f \circ \omega$ est bien la composée de ω et f .

2.4. <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde{f} \in \mathcal{L}^1\big([\,a\,,\,b\,]\big)$ on a $\boxed{\tilde{f} \circ \omega \in \mathcal{L}^1\big([\,c\,,\,d\,]\big)}$ et $\boxed{\|\,\tilde{f} \circ \omega\,\|_1 \leq M\,\|\,\tilde{f}\,\|_1}$.

<u>Dém</u> : Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}\big([\,a\,,\,b\,]\big)$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$; alors $\forall\,n \in \mathbb{N}$ $f_n \circ \omega \in \mathcal{R}\big([\,c\,,\,d\,]\big)$; or $\forall\,n \in \mathbb{N}$ $\|\,f_n \circ \omega - f \circ \omega\,\|_\star = \|\,(f_n - f) \circ \omega\,\|_\star \leq M\,\|\,f_n - f\|_\star$; donc $f_n \circ \omega \xrightarrow{\star} f \circ \omega \in \mathcal{L}^1\big([\,c\,,\,d\,]\big)$.

2.5. <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde{f} \in \mathcal{L}^1\big([\,a\,,\,b\,]\big)$ $\boxed{\displaystyle\int_c^d (\tilde{f} \circ \omega)\,|\omega\,'|\,d\,u \;=\; \int_a^b \tilde{f}\;dt}$.

<u>Dém</u> : On applique la définition de $\tilde{f} \circ \omega$ à $k = |\omega\,'| \in \mathcal{R}\big([\,c\,,\,d\,]\big)$.

Chapitre X : Indicateurs et modes de convergence dans $\mathcal{L}^1$

Contenu : Classiquement un *indicateur* fournit l'ensemble des points de $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ où les valeurs d'une fonction appartiennent à un intervalle donné. La notation habituelle d'un tel ensemble paraît d'ailleurs abusive puisque, par exemple, $\{f \le g\}$ représente en fait l'ensemble $\{x \in [a\,,b] \,\|\, f(x) \le g(x)\}$. Mais ce type de notation convient parfaitement à notre théorie dans laquelle les indicateurs ne sont justement pas des ensembles, mais des *fonctionnelles caractéristiques*.

Les indicateurs permettent de définir quatre nouveaux modes de convergence dans $\mathcal{L}^1$: les convergences *en mesure*, *presque partout*, *plate* et *exacte*. Le complété de $\mathcal{L}^1$ est néanmoins identique pour chacun de ces modes de convergence : c'est l'espace de *toutes les fonctionnelles*, sommables ou non.

§ 1. Indicateurs dans $\mathcal{L}^1$

1.1. Définition : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on définit les éléments de $\mathcal{K}$ suivants :

$$\boxed{\{\tilde f > 0\} = \mathrm{S}(\tilde f^+)} \qquad \{\tilde f \le 0\} = 1 - \{\tilde f > 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f^+)$$

$$\{\tilde f < 0\} = \{-\tilde f > 0\} = \mathrm{S}(\tilde f^-) \qquad \{\tilde f \ge 0\} = 1 - \{\tilde f < 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f^-)$$

$$\boxed{\{\tilde f \ne 0\} = \mathrm{S}(\tilde f)} \qquad \{\tilde f = 0\} = 1 - \{\tilde f \ne 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f)\,.$$

1.2. Définition : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on définit les éléments de $\mathcal{K}$ suivants :

$$\{\tilde f > \tilde g\} = \{\tilde g < \tilde f\} = \{\tilde f - \tilde g > 0\} = \mathrm{S}\big[(\tilde f - \tilde g)^+\big]$$

$$\{\tilde f \ge \tilde g\} = 1 - \{\tilde g > \tilde f\} = 1 - \mathrm{S}\big[(\tilde g - \tilde f)^+\big]$$

$$\{\tilde f \ne \tilde g\} = \{\tilde f - \tilde g \ne 0\} = \mathrm{S}(\tilde f - \tilde g)$$

$$\{\tilde f = \tilde g\} = \{\tilde f - \tilde g = 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f - \tilde g)\,.$$

1.3. Définition : $\forall\, \tilde f, \tilde g\,, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on définit les éléments de $\mathcal{K}$ suivants :

$$\{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde g\}\,\{\tilde g > \tilde h\}$$

$$\{\tilde f \ge \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f \ge \tilde g\}\,\{\tilde g > \tilde h\}$$

$$\{\tilde f > \tilde g \ge \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde g\}\,\{\tilde g \ge \tilde h\}$$

$$\{\tilde f \ge \tilde g \ge \tilde h\} = \{\tilde f \ge \tilde g\}\,\{\tilde g \ge \tilde h\}$$

$$\text{Les applications}\quad \begin{cases} \mathcal{L}^1 \to \mathcal{K} \;:\; \tilde f \mapsto \{\tilde f > 0\} \quad \ldots \text{etc} \ldots \\[2ex] \left(\mathcal{L}^1\right)^2 \to \mathcal{K} \;:\; (\tilde f, \tilde g) \mapsto \{\tilde f > \tilde g\} \quad \ldots \text{etc} \ldots \\[2ex] \left(\mathcal{L}^1\right)^3 \to \mathcal{K} \;:\; (\tilde f, \tilde g, \tilde h) \mapsto \{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} \quad \ldots \text{etc} \ldots \end{cases}$$

sont les <u>indicateurs</u> dans $\mathcal{L}^1$.

1.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\boxed{\begin{array}{l} \{\tilde f > 0\}\{\tilde g > 0\} \le \{\tilde f + \tilde g > 0\} \le \{\tilde f > 0\} \vee \{\tilde g > 0\} \\ \{\tilde f \ge 0\}\{\tilde g \ge 0\} \le \{\tilde f + \tilde g \ge 0\} \le \{\tilde f \ge 0\} \vee \{\tilde g \ge 0\} \end{array}}$$

<u>Dém</u> : $\{\tilde f > 0\}\{\tilde g > 0\} = \mathrm{S}(\tilde f^+)\,\mathrm{S}(\tilde g^+) = \mathrm{S}(\tilde f^+ \wedge \tilde g^+) = \mathrm{S}\left[(\tilde f \wedge \tilde g)^+\right] \le \mathrm{S}\left[(\tilde f + \tilde g)^+\right]$

$= \{\tilde f + \tilde g > 0\} = \mathrm{S}\left[(\tilde f + \tilde g)^+\right] \le \mathrm{S}\left(\tilde f^+ + \tilde g^+\right) = \mathrm{S}(\tilde f^+) \vee \mathrm{S}(\tilde g^+) = \{\tilde f > 0\} \vee \{\tilde g > 0\}$.

1.5. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on a $\quad \{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} \le \{\tilde f > \tilde h\}$

et $\quad \{\tilde f \ge \tilde g \ge \tilde h\} \le \{\tilde f \ge \tilde h\}$.

<u>Dém</u> : $\{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde g\}\{\tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f - \tilde g > 0\}\{\tilde g - \tilde h > 0\}$

$\le \{\tilde f - \tilde g + \tilde g - \tilde h > 0\} = \{\tilde f > \tilde h\}$.

1.6. <u>Lemme</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\left(\tilde h - \tilde f \vee \tilde g\right)^+ = (\tilde h - \tilde f)^+ \wedge (\tilde h - \tilde g)^+ \qquad \left(\tilde f \vee \tilde g - \tilde h\right)^+ = (\tilde f - \tilde h)^+ \wedge (\tilde g - \tilde h)^+ .$$

$$\left(\tilde h - \tilde f \wedge \tilde g\right)^+ = (\tilde h - \tilde f)^+ \vee (\tilde h - \tilde g)^+ \qquad \left(\tilde f \wedge \tilde g - \tilde h\right)^+ = (\tilde f - \tilde h)^+ \vee (\tilde g - \tilde h)^+ .$$

<u>Dém</u> : Vrai dans $\mathcal{E}$, donc vrai dans $\mathcal{L}^1$ par continuité.

1.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\boxed{\begin{array}{ll} \{\tilde f \vee \tilde g < \tilde h\} = \{\tilde f < \tilde h\}\{\tilde g < \tilde h\} & \{\tilde f \vee \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde h\} \vee \{\tilde g > \tilde h\} \\[1ex] \{\tilde f \wedge \tilde g < \tilde h\} = \{\tilde f < \tilde h\} \vee \{\tilde g < \tilde h\} & \{\tilde f \wedge \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde h\}\{\tilde g > \tilde h\} \end{array}}$$

<u>Dém</u> : $\{\tilde f \vee \tilde g < \tilde h\} = \mathrm{S}\left[(\tilde h - \tilde f \vee \tilde g)^+\right] = \mathrm{S}\left[(\tilde h - \tilde f)^+\right] \wedge \mathrm{S}\left[(\tilde h - \tilde g)^+\right]$

$= \mathrm{S}\left[(\tilde h - \tilde f)^+\right]\mathrm{S}\left[(\tilde h - \tilde g)^+\right] = \{\tilde f < \tilde h\}\{\tilde g < \tilde h\}$.

1.8. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a $\{\,|\tilde f| < \tilde g\} = \{\tilde f < \tilde g\}\,\{-\tilde f < \tilde g\} = \{-\tilde g < \tilde f < \tilde g\}$

et $\{\,|\tilde f| > \tilde g\} = \{\tilde f > \tilde g\} \vee \{-\tilde f > \tilde g\}$.

<u>Dém</u> : $\{\,|\tilde f| < \tilde g\} = \{\,(\tilde f) \vee (\tilde f^-) < \tilde g\} = \{\tilde f < g\}\,\{-\tilde f < g\}$.

1.9. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\boxed{\begin{aligned} \{\tilde f > \tilde g\} &= \{\tilde f \vee \tilde g \neq \tilde g\} = \{\tilde f \wedge \tilde g \neq \tilde f\} \\ \{\tilde f \geq \tilde g\} &= \{\tilde f \vee \tilde g = \tilde f\} = \{\tilde f \wedge \tilde g = \tilde g\} \end{aligned}}$$

<u>Dém</u> :

1) $\{\tilde f \vee \tilde g \neq \tilde g\} = \{\tilde f \vee \tilde g > \tilde g\} = \{\tilde f > \tilde g\} \vee \{\tilde g > \tilde g\} = \{\tilde f > \tilde g\}$.

2) $\{\tilde f \geq \tilde g\} = 1 - \{\tilde f < \tilde g\} = 1 - \{\tilde f \vee \tilde g \neq \tilde f\} = \{\tilde f \vee \tilde g = \tilde f\}$.

1.10. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde f\,\{\tilde f = \tilde g\} &= \tilde g\,\{\tilde f = \tilde g\} \\ \tilde f\,\{\tilde f \leq \tilde g\} &\leq \tilde g\,\{\tilde f \leq \tilde g\} \end{aligned}}$$

<u>Dém</u> :

1) $(\tilde f - \tilde g)\,\{\tilde f = \tilde g\} = (\tilde f - \tilde g)\,\big[1 - \mathrm{S}\,(\tilde f - \tilde g)\big] = \tilde f - \tilde g - (\tilde f - \tilde g) = 0$.

2) $(\tilde f - \tilde g)\,\{\tilde f \leq \tilde g\} = (\tilde f - \tilde g)\,\Big[1 - \mathrm{S}\,\big[(\tilde f - \tilde g)^+\big]\Big] = \tilde f - \tilde g - (\tilde f - \tilde g)^+ = -(\tilde f - \tilde g)^- \leq 0$.

1.11. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde f\,\{\tilde f \leq \tilde g\} &= (\tilde f \wedge \tilde g)\,\{\tilde f \leq \tilde g\} \\ \tilde g\,\{\tilde f \leq \tilde g\} &= (\tilde f \vee \tilde g)\,\{\tilde f \leq \tilde g\} \end{aligned}}$$

<u>Dém</u> :

1) $\tilde f\,\{\tilde f \leq \tilde g\} = \tilde f\,\{\tilde f \wedge \tilde g = \tilde f\} = (\tilde f \wedge \tilde g)\,\{\tilde f \wedge \tilde g = \tilde f\} = (\tilde f \wedge \tilde g)\,\{\tilde f \leq \tilde g\}$.

2) Idem.

1.12. <u>Théorème</u> :

$\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\{\tilde f\,\tilde g > 0\} = \{\tilde f > 0\}\,\{\tilde g > 0\} \vee \{\tilde f < 0\}\,\{\tilde g < 0\}}$.

<u>Dém</u> : $\tilde f\,\tilde g = (\tilde f^+ - \tilde f^-)\,(\tilde g^+ - \tilde g^-) = \tilde f^+\,\tilde g^+ + \tilde f^-\,\tilde g^- - \big(\tilde f^+\,\tilde g^- + \tilde f^-\,\tilde g^+\big)$;

or $\big(\tilde f^+\,\tilde g^+ + \tilde f^-\,\tilde g^-\big) \wedge \big(\tilde f^+\,\tilde g^- + \tilde f^-\,\tilde g^+\big) = 0$, donc $\big(\tilde f\,\tilde g\big)^+ = \tilde f^+\,\tilde g^+ + \tilde f^-\,\tilde g^-$;

on a donc $\{\tilde f\,\tilde g > 0\} = \mathrm{S}\,\big[(\tilde f\,\tilde g)^+\big] = \mathrm{S}\,\big(\tilde f^+\,\tilde g^+ + \tilde f^-\,\tilde g^-\big) = \mathrm{S}\,\big(\tilde f^+\,\tilde g^+\big) \vee \mathrm{S}\,\big(\tilde f^-\,\tilde g^-\big)$

$= \mathrm{S}\,(\tilde f^+)\,\mathrm{S}\,(\tilde g^+) \vee \mathrm{S}\,(\tilde f^-)\,\mathrm{S}\,(\tilde g^-) = \{\tilde f > 0\}\,\{\tilde g > 0\} \vee \{\tilde f < 0\}\,\{\tilde g < 0\}$.

1.13. Corollaire : $\forall\, \tilde f \in (\mathcal{L}^2)^+ \quad \forall\, \alpha > 0$ on a $\boxed{\{\tilde f^{\,2} > \alpha^2\} = \{\tilde f > \alpha\}}$.

Dém : $\{\tilde f^{\,2} > \alpha^2\} = \{\tilde f^{\,2} - \alpha^2 > 0\} = \{(\tilde f - \alpha)(\tilde f + \alpha) > 0\}$

$= \{\tilde f - \alpha > 0\}\{\tilde f + \alpha > 0\} \vee \{\tilde f - \alpha < 0\}\{\tilde f + \alpha < 0\} = \{\tilde f - \alpha > 0\} \vee 0 = \{\tilde f > \alpha\}$.

1.14. Théorème :

$\forall\, \tilde f, \tilde g \in (\mathcal{L}^2)^+ \quad \forall\, \alpha, \beta > 0$ on a $\boxed{\{\tilde f\, \tilde g > \alpha\, \beta\} \le \{\tilde f > \alpha\} \vee \{\tilde g > \beta\}}$.

Dém : $\{\tilde f\,\tilde g > \alpha\,\beta\} = \{\tilde f\,\tilde g - \alpha\,\beta > 0\} = \{(\tilde f - \alpha)\,\tilde g + \alpha\,(\tilde g - \beta) > 0\}$

$\le \{(\tilde f - \alpha)\,\tilde g > 0\} \vee \{\alpha\,(\tilde g - \beta) > 0\} = \{\tilde f - \alpha > 0\}\{\tilde f > 0\} \vee \{\tilde g - \beta > 0\}\{\tilde g > 0\}$

$\le \{\tilde f > \alpha\} \vee \{\tilde g > \beta\}$.

1.15. Inégalité de Markov : $\forall\, \tilde f \in (\mathcal{L}^1)^+$ on a $\boxed{\{\tilde f \ge 1\} \le \tilde f}$.

Dém : On a $\tilde f = \tilde f - 1 + 1 = (\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^- + 1$;

on peut donc écrire $\tilde f \ge \tilde f\,\{\tilde f \ge 1\} = \left[(\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^- + 1\right]\{\tilde f \ge 1\}$

$= \left[(\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^-\right]\Big(1 - \mathrm{S}\left[(\tilde f - 1)^-\right]\Big) + \{\tilde f \ge 1\}$

$= (\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^- + (\tilde f - 1)^- + \{\tilde f \ge 1\} = \{\tilde f \ge 1\}$.

1.16.* Corollaire : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{{}^1\!\lim_{\alpha \to +\infty} \{|\tilde f| \ge \alpha\} = 0}$.

1.17. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{{}^1\!\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\tilde f \ge \varepsilon\} = {}^1\!\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\tilde f > \varepsilon\} = \{\tilde f > 0\}}$.

Dém : On pose $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \tilde g_\varepsilon = (\tilde f - \varepsilon)^+$; la « suite » $\tilde g_\varepsilon$ est croissante et on a $\tilde g_\varepsilon \xrightarrow{1} \tilde g^+$ quand $\varepsilon \to 0^+$; donc $\mathrm{S}(\tilde g_\varepsilon) \xrightarrow{1} \mathrm{S}(\tilde g^+)$, c-à-d $\{\tilde f > \varepsilon\} \xrightarrow{1} \{\tilde f > 0\}$ quand $\varepsilon \to 0^+$. Par aileurs $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \{\tilde f > 2\,\varepsilon\} \le \{\tilde f \ge \varepsilon\} \le \{\tilde f > 0\}$; donc $\{\tilde f \ge \varepsilon\} \xrightarrow{1} \{\tilde f > 0\}$ quand $\varepsilon \to 0^+$.

1.18. Théorème : Soient $\tilde f_n, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$, $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f$, $\tilde f_n$ suite $\boxed{\text{croissante}}$;

alors on a $\boxed{\{\tilde f_n > \tilde g\} \xrightarrow{1} \{\tilde f > \tilde g\}}$ et $\boxed{\{\tilde f_n \le \tilde g\} \xrightarrow{1} \{\tilde f \le \tilde g\}}$.

Dém : La suite $(\tilde f_n - \tilde g)^+ \in (\mathcal{L}^1)^+$ est croissante et $(\tilde f_n - \tilde g)^+ \xrightarrow{1} (\tilde f - \tilde g)^+$;

donc $\{\tilde f_n \le \tilde g\} = \mathrm{S}\left[(\tilde f_n - \tilde g)^+\right] \xrightarrow{1} \mathrm{S}\left[(\tilde f - \tilde g)^+\right] = \{\tilde f \le \tilde g\}$.

De plus $\{\tilde f_n \le \tilde g\} = 1 - \{\tilde f_n > \tilde g\} \xrightarrow{1} 1 - \{\tilde f > \tilde g\} = \{\tilde f \le \tilde g\}$.

1.19. Corollaire :

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite dominée supérieurement et soit $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$; alors on a

$$\boxed{\left\{ \left(\operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n\right) > \tilde{g} \right\} = \operatorname*{Sup}_n \left\{ \tilde{f}_n > \tilde{g} \right\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left\{ \left(\operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n\right) \le \tilde{g} \right\} = \operatorname*{Inf}_n \left\{ \tilde{f}_n \le \tilde{g} \right\}} .$$

Dém :

Posons $\forall\, p \in \mathbb{N}$ $\tilde{h}_p = \operatorname*{Sup}_{1 \le n \le p} \tilde{f}_n$; la suite $\tilde{h}_p$ est croissante et $\tilde{h}_p \xrightarrow{1} \tilde{h} = \operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n$; on a donc $\left\{ \tilde{h} > \tilde{g} \right\} = \operatorname*{Sup}_p \left\{ \tilde{h}_p > \tilde{g} \right\} = \operatorname*{Sup}_p \operatorname*{Sup}_{1 \le n \le p} \left\{ \tilde{f}_n > \tilde{g} \right\} = \operatorname*{Sup}_n \left\{ \tilde{f}_n > \tilde{g} \right\}$.

§ 2. Convergence en mesure

2.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n , \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge en mesure vers $\tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \left\{ | \tilde{f}_n - \tilde{f} | > \varepsilon \right\} \xrightarrow{1} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$.

Remarque : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ $\left[\left\{ \tilde{f}_n > \tilde{f} + \varepsilon \right\} \xrightarrow{1} 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \tilde{f} > \tilde{f}_n + \varepsilon \right\} \xrightarrow{1} 0 \right]$.

2.2. Théorème : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \left\| \left\{ | \tilde{f}_n - \tilde{f} | > \varepsilon \right\} \right\|_1 = 0}$.

2.3. Critère pratique : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \left\| \left\{ | \tilde{f}_n - \tilde{f} | > \varepsilon \right\} \right\|_1 \le \varepsilon}$.

Dém :

1) $\Rightarrow$: On a $\forall\, \varepsilon > 0$ $\overline{\lim_n} \left\| \left\{ | \tilde{f}_n - \tilde{f} | > \varepsilon \right\} \right\|_1 = 0 \le \varepsilon$.

2) $\Leftarrow$: Soit $\varepsilon > 0$; $\forall\, \eta > 0$ tel que $\eta \le \varepsilon$ on a

$\overline{\lim_n} \left\| \left\{ | \tilde{f}_n - \tilde{f} | > \varepsilon \right\} \right\|_1 \le \overline{\lim_n} \left\| \left\{ | \tilde{f}_n - \tilde{f} | > \eta \right\} \right\|_1 \le \eta$;

donc $\lim_n \left\| \left\{ | \tilde{f}_n - \tilde{f} | > \varepsilon \right\} \right\|_1 = 0$.

2.4. Théorème : $\forall\, \tilde{f}_n , \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$.

Dém : Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde{g}_n = | \tilde{f}_n - \tilde{f} | \in \mathcal{L}^1_+$; alors $\forall\, \varepsilon > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\left\{ \tilde{g}_n > \varepsilon \right\} \le \left\{ \tilde{g}_n \ge \varepsilon \right\} \le \dfrac{1}{\varepsilon}\, \tilde{g}_n$; donc $\forall\, \varepsilon > 0$ $\left\{ \tilde{g}_n > \varepsilon \right\} \xrightarrow{1} 0$, c-à-d $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$.

2.5. Théorème : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite dominée et soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; alors on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$.

Dém : Il suffit de démontrer $\Leftarrow$. Soit $\widetilde{F} \in (\mathcal{L}^1)^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\tilde{f}_n| \leq \widetilde{F}$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \tilde{g}_n = |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \leq 2\,\widetilde{F} = \widetilde{G} \in (\mathcal{L}^1)^+$; soit $\varepsilon > 0$; on a $\{\tilde{g}_n > \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0$; de plus $\tilde{g}_n = \{\tilde{g}_n > \varepsilon\}\,\tilde{g}_n + \{\tilde{g}_n \leq \varepsilon\}\,\tilde{g}_n \leq \{\tilde{g}_n > \varepsilon\}\,\widetilde{G} + \{\tilde{g}_n \leq \varepsilon\}\,\varepsilon$ $\leq \{\tilde{g}_n > \varepsilon\}\,\widetilde{G} + \varepsilon$; donc $\overline{\lim_n}\ \|\tilde{g}_n\|_1 \leq \varepsilon\,(b-a)$; donc $\overline{\lim_n}\ \|\tilde{g}_n\|_1 = 0$, c-à-d $\tilde{g}_n \xrightarrow{1} 0$, c-à-d $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$.

2.6. Lemme : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ tel que $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \{|\tilde{f}| > \varepsilon\} = 0$; alors $\tilde{f} = 0$.

Dém : $\forall\, \varepsilon > 0$ on a $\tilde{f} = \tilde{f}\,\{\tilde{f} \leq \varepsilon\} + \tilde{f}\,\{\tilde{f} > \varepsilon\} \leq \varepsilon\,\{\tilde{f} \leq \varepsilon\} \leq \varepsilon$; donc $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \|\tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon\,(b-a)$; donc $\tilde{f} = 0$.

2.7. Théorème : Soient $\tilde{f}_n\,,\ \tilde{g}\,,\ \tilde{h} \in \mathcal{L}^1$ et supposons que $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{g}$ et $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{h}$; alors $\tilde{g} = \tilde{h}$.

Dém : On a $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \{\,|\,\tilde{g} - \tilde{h}\,| > \varepsilon\} \leq \{\,|\,\tilde{f}_n - \tilde{g}\,| + |\,\tilde{f}_n - \tilde{h}\,| > \varepsilon\}$ $\leq \{\,|\,\tilde{f}_n - \tilde{g}\,| > \varepsilon/2\} \vee \{\,|\,\tilde{f}_n - \tilde{h}\,| > \varepsilon/2\} \xrightarrow{1} 0$; donc $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \{\,|\,\tilde{g} - \tilde{h}\,| > \varepsilon\} = 0$; donc $\tilde{g} = \tilde{h}$.

2.8.* Théorème : Soient $\tilde{f}_n\,,\ \tilde{g}_n\,,\ \tilde{f},\ \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$, $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$, $\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{g}$; alors

$\tilde{f}_n + \tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f} + \tilde{g}$, $\quad \tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f} \vee \tilde{g}$, $\quad \tilde{f}_n \wedge \tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f} \wedge \tilde{g}$.

2.9. Lemme : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^2$ telle que $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} 0$; alors $\forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2 \quad \tilde{f}_n\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; soit $\alpha > 0$ tel que $\big\|\{|\tilde{g}| > \alpha\}\big\|_1 \leq \varepsilon$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\{\,|\,\tilde{f}_n\,\tilde{g}\,| > \varepsilon\} = \{\,|\tilde{f}_n|\,|\tilde{g}| > \varepsilon\} \leq \{\,|\tilde{f}_n| > \varepsilon/\alpha\} \vee \{|\tilde{g}| > \alpha\}$; donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\big\|\{\,|\,\tilde{f}_n\,\tilde{g}\,| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \big\|\{\,|\tilde{f}_n| > \varepsilon/\alpha\}\big\|_1 + \big\|\{|\tilde{g}| > \alpha\}\big\|_1 \leq \big\|\{\,|\tilde{f}_n| > \varepsilon/\alpha\}\big\|_1 + \varepsilon$; donc $\overline{\lim_n}\ \big\|\{\,|\,\tilde{f}_n\,\tilde{g}\,| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \varepsilon$; donc $\tilde{f}_n\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$.

2.10. Théorème : Soient $\tilde{f}_n\,,\ \tilde{g}_n\,,\ \tilde{f},\ \tilde{g} \in \mathcal{L}^2$, $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$, $\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{g}$; alors $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}\,\tilde{g}$.

Dém : $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n - \tilde{f}\,\tilde{g} = (\tilde{f}_n - \tilde{f})\,\tilde{g} + \tilde{f}\,(\tilde{g}_n - \tilde{g}) + (\tilde{f}_n - \tilde{f})\,(\tilde{g}_n - \tilde{g})$; on a déjà $(\tilde{f}_n - \tilde{f})\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$ et $\tilde{f}\,(\tilde{g}_n - \tilde{g}) \overset{\text{ms}}{\to} 0$; par ailleurs on a $\forall\, \varepsilon > 0$ $\Big\{\big|(\tilde{f}_n - \tilde{f})\,(\tilde{g}_n - \tilde{g})\big| > \varepsilon\Big\} \leq \{\,|\,\tilde{f}_n - \tilde{f}\,| > \sqrt{\varepsilon}\,\} \vee \{\,|\,\tilde{g}_n - \tilde{g}\,| > \sqrt{\varepsilon}\,\} \xrightarrow{1} 0$; donc $(\tilde{f}_n - \tilde{f})\,(\tilde{g}_n - \tilde{g}) \overset{\text{ms}}{\to} 0$; finalement $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n - \tilde{f}\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$, c-à-d $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}\,\tilde{g}$.

2.11. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{f}_n\,,\,\tilde{f}\in\mathcal{L}^1$; alors $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{1\!\!1\wedge|\tilde{f}_n-\tilde{f}|\xrightarrow{1}0}$.

<u>Dém</u> : Posons $\forall\, n\in\mathbb{N}\;\; \tilde{g}_n=|\tilde{f}_n-\tilde{f}|$ et $\tilde{h}_n=1\!\!1\wedge\tilde{g}_n$;

a) $\Rightarrow$: On a $\tilde{h}_n=1\!\!1\wedge\tilde{g}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} 1\!\!1\wedge 0=0$; or $\forall\, n\in\mathbb{N}\;\; 0\le\tilde{h}_n\le 1\!\!1$; la suite $\tilde{h}_n$ est donc dominée ; on en déduit $\tilde{h}_n\xrightarrow{1}0$.

b) $\Leftarrow$: Soit $0<\varepsilon<1$; on a $\{\tilde{h}_n>\varepsilon\}=\{1\!\!1>\varepsilon\}\{\tilde{g}_n>\varepsilon\}=\{\tilde{g}_n>\varepsilon\}$; or $\tilde{h}_n\xrightarrow{1}0$, donc $\tilde{h}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0$, on en déduit $\{\tilde{h}_n>\varepsilon\}\xrightarrow{1}0$, c-à-d $\{\tilde{g}_n>\varepsilon\}\xrightarrow{1}0$; donc $\tilde{g}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0$.

2.12. <u>Définition</u> : Une <u>pseudo-norme</u> sur un espace vectoriel réel V est une application $\|\;\|_\S$: $V\to\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes

1) $\|\,u\,\|_\S=0\;\Rightarrow\; u=0$

2) $\forall\, u\,,\,v\in V\quad \|\,u+v\,\|_\S\le\|\,u\,\|_\S+\|\,v\,\|_\S$

3) $\forall\, u\in V\quad \|-u\,\|_\S=\|\,u\,\|_\S$

4) $\forall\, u\in V\quad\forall\,\lambda\ge 1\qquad \|\,u\,\|_\S\le\|\,\lambda\, u\,\|_\S\le\lambda\,\|\,u\,\|_\S$.

2.13.* <u>Théorème</u> : La topologie de la convergence en mesure dans $\mathcal{L}^1$ est définie par la pseudo-norme $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{ms}}=\big\|1\wedge|\tilde{f}|\,\big\|_1}\le\|\tilde{f}\|_1$.

2.14. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{f}_n\,,\,\tilde{f}\in\big(\mathcal{L}^1\big)^+$; alors $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\forall\,\alpha>0\quad \alpha\wedge\tilde{f}_n\xrightarrow{1}\alpha\wedge\tilde{f}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: $\forall\,\alpha>0$ on a $\alpha\wedge\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \alpha\wedge\tilde{f}$, donc $\alpha\wedge\tilde{f}_n\xrightarrow{1}\alpha\wedge\tilde{f}$.

b) $\Leftarrow$: Soient $\varepsilon>0$ et $\alpha\ge\varepsilon$; on a

$\{|\tilde{f}_n-\tilde{f}|>\varepsilon\}\le\{|\tilde{f}_n-\tilde{f}_n\wedge\alpha|>\varepsilon\}+\{|\tilde{f}_n\wedge\alpha-\tilde{f}\wedge\alpha|>\varepsilon\}+\{|\tilde{f}-\tilde{f}\wedge\alpha|>\varepsilon\}$

$=\{\tilde{f}_n-\tilde{f}_n\wedge\alpha>\varepsilon\}+\{|\tilde{f}_n\wedge\alpha-\tilde{f}\wedge\alpha|>\varepsilon\}+\{\tilde{f}-\tilde{f}\wedge\alpha>\varepsilon\}$;

On a d'ailleurs

$\{\tilde{f}-\tilde{f}\wedge\alpha>\varepsilon\}=\{\tilde{f}-\varepsilon>\tilde{f}\wedge\alpha\}=\{\tilde{f}-\varepsilon>\tilde{f}\}\vee\{\tilde{f}-\varepsilon>\alpha\}=\{\tilde{f}>\alpha+\varepsilon\}$.

De même $\{\tilde{f}_n-\tilde{f}_n\wedge\alpha>\varepsilon\}=\{\tilde{f}_n>\alpha+\varepsilon\}\le\{\tilde{f}_n>\alpha\}=\{\tilde{f}_n\wedge\alpha>\alpha\}$

$=\{\tilde{f}_n\wedge\alpha-\tilde{f}\wedge\alpha+\tilde{f}\wedge\alpha>\alpha\}\le\{\tilde{f}_n\wedge\alpha-\tilde{f}\wedge\alpha>\varepsilon\}+\{\tilde{f}\wedge\alpha>\alpha-\varepsilon\}$

$\le\{|\tilde{f}_n\wedge\alpha-\tilde{f}\wedge\alpha|>\varepsilon\}+\{\tilde{f}>\alpha-\varepsilon\}$.

On en déduit $\{|\tilde{f}_n-\tilde{f}|>\varepsilon\}\le 2\,\{\tilde{f}>\alpha-\varepsilon\}+2\,\{|\tilde{f}_n\wedge\alpha-\tilde{f}\wedge\alpha|>\varepsilon\}$;

on peut donc écrire $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \forall\,\alpha \geq \varepsilon \quad \overline{\lim_n} \;\; \big\| \{ |\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon \} \big\|_1 \leq 2 \, \big\| \{ \tilde{f} > \alpha - \varepsilon \} \big\|_1$;

en faisant tendre α vers $+\infty$ on trouve bien $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \;\; \big\| \{ |\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon \} \big\|_1 = 0$.

2.15. <u>Définition</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est <u>de Cauchy en mesure</u> (C ms) ssi l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1) $\forall\,\varepsilon > 0$ la suite double $\big\{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_q| > \varepsilon \big\} \xrightarrow{1} 0$,

$$\text{c-à-d} \quad \forall\,\varepsilon > 0 \quad \sup_{p\,,\,q\,\geq\,n} \; \big\| \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_q| > \varepsilon \} \big\|_1 \to 0$$

2) $\forall\,\varepsilon > 0$ la suite double $\big\{ \tilde{f}_p - \tilde{f}_q > \varepsilon \big\} \xrightarrow{1} 0$,

$$\text{c-à-d} \quad \forall\,\varepsilon > 0 \quad \sup_{p\,,\,q\,\geq\,n} \; \big\| \{ \tilde{f}_p - \tilde{f}_q > \varepsilon \} \big\|_1 \to 0$$

3) la suite double $1\!\!1 \wedge |\tilde{f}_p - \tilde{f}_q| \xrightarrow{1} 0$, c-à-d $\sup\limits_{p\,,\,q\,\geq\,n} \; \big\| 1\!\!1 \wedge |\tilde{f}_p - \tilde{f}_q| \big\|_1 \to 0$.

<u>Démonstration de l'quivalence</u> : analogue aux démonstrations précédentes.

2.16. <u>Théorème</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C ms ssi

$$\boxed{\forall\,\varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_{p\,,\,q}} \;\; \big\| \{ \tilde{f}_p - \tilde{f}_q > \varepsilon \} \big\|_1 = 0} \,.$$

2.17. <u>Critère pratique</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C ms ssi

$$\boxed{\forall\,\varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_{p\,,\,q}} \;\; \big\| \{ \tilde{f}_p - \tilde{f}_q > \varepsilon \} \big\|_1 \leq \varepsilon} \,.$$

<u>Dém</u> :

Par définition une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C ms ssi $\forall\,\delta\,,\,\varepsilon > 0 \quad \overline{\lim\limits_{p\,,\,q}} \;\; \big\| \{ \tilde{f}_p - \tilde{f}_q > \varepsilon \} \big\|_1 \leq \delta$.
Il est alors facile de montrer l'équivalence de cette condition avec le critère pratique.

2.18. <u>Définition</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est <u>dominée en mesure</u> (D ms) ssi

$$\boxed{\sup_n \;\; \big\| \{ |\tilde{f}_n| \geq \alpha \} \big\|_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to +\infty} \,.$$

2.19. <u>Théorème</u> : $\boxed{\text{C ms} \;\Rightarrow\; \text{D ms}}$.

<u>Dém</u> : Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\,n \geq N \quad \big\| \{ |\tilde{f}_n - \tilde{f}_N| > \varepsilon \} \big\|_1 \leq \varepsilon$;

soit $\beta \geq \varepsilon$ tel que $\big\| \{ |\tilde{f}_N| > \beta \} \big\|_1 \leq \varepsilon$; on a $\forall\,n \geq N$

$\{|\tilde{f}_n| > \beta + \varepsilon\} \leq \{|\tilde{f}_n - \tilde{f}_N| + |\tilde{f}_N| > \beta + \varepsilon\} \leq \{|\tilde{f}_n - \tilde{f}_N| > \varepsilon\} + \{|\tilde{f}_N| > \beta\}$;

donc $\underline{\forall n \geq N}$ $\|\{|\tilde{f}_n| > \beta + \varepsilon\}\|_1 \leq 2\,\varepsilon$.

Par ailleurs choisissons $\alpha \geq \beta + \varepsilon$ tel que $\underline{\forall n < N}$ $\|\{|\tilde{f}_n| > \alpha\}\|_1 \leq 2\,\varepsilon$;

alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|\{|\tilde{f}_n| > \alpha\}\|_1 \leq 2\,\varepsilon$.

§ 3. Convergence presque partout

(Démonstrations analogues à celles du paragraphe précédent)

3.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge presque partout vers $\tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \{|\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon\} \xrightarrow{\times} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$.

Remarque : $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ $\left[\{\tilde{f}_n > \tilde{f} + \varepsilon\} \xrightarrow{\times} 0 \text{ et } \{\tilde{f} > \tilde{f}_n + \varepsilon\} \xrightarrow{\times} 0\right]$.

3.2. Théorème : $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \overline{\text{Lim}}_n \{|\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon\} = 0}$.

3.3. CRITÈRE PRATIQUE 1 : $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \|\overline{\text{Lim}}_n \{|\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon\}\|_1 \leq \varepsilon}$.

3.4. CRITÈRE PRATIQUE 2 : $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$ ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \quad \Big\|\operatorname*{Sup}_{p \geq n} \{|\tilde{f}_p - \tilde{f}| > \varepsilon\}\Big\|_1 \leq \varepsilon}.$$

3.5. Théorème : $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$ ssi $\mathbb{1} \wedge |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \xrightarrow{\times} 0$.

3.6. Théorème : $\forall \tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \xrightarrow{\text{ms}} \tilde{f}$; si $\tilde{f}_n$ est monotone on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_n \xrightarrow{\text{ms}} \tilde{f}$.

3.7. Théorème : $\forall \tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$; si $\tilde{f}_n$ est dominée on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_n \xrightarrow{\text{pp}} \tilde{f}$.

3.8. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est de Cauchy p.p. (C pp) ssi l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite double $\{|\tilde f_p - \tilde f_q| > \varepsilon\} \xrightarrow{\times} 0$,

$$\text{c-à-d} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \{|\tilde f_p - \tilde f_q| > \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0$$

2) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite double $\{\tilde f_p - \tilde f_q > \varepsilon\} \xrightarrow{\times} 0$,

$$\text{c-à-d} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \{\tilde f_p - \tilde f_q > \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0$$

3) la suite double $1\!\!1 \wedge |\tilde f_p - \tilde f_q| \xrightarrow{\times} 0$, c-à-d $\operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \Big(1\!\!1 \wedge |\tilde f_p - \tilde f_q|\Big) \xrightarrow{1} 0$.

3.9. <u>Théorème</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$ est C pp ssi $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\operatorname*{Lim}_{p\,,\,q}} \{\tilde f_p - \tilde f_q > \varepsilon\} = 0}$.

3.10. <u>Critère pratique 1</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$ est C pp ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \Big\| \overline{\operatorname*{Lim}_{p\,,\,q}} \{\tilde f_p - \tilde f_q > \varepsilon\} \Big\|_1 \leq \varepsilon}\,.$$

3.11. <u>Critère pratique 2</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$ est C pp ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geq N \quad \Big\| \operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \{\tilde f_p - \tilde f_q > \varepsilon\} \Big\|_1 \leq \varepsilon}\,.$$

3.12. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$; alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde f_n$ converge p.p. ssi

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \boxed{\operatorname*{Sup}_{q\,\geq\, n} \Big\{\Big|\sum_{i=n}^{q} \tilde f_i\Big| > \varepsilon\Big\} \xrightarrow{1} 0}\,.$$

<u>Dém</u> :

La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde f_n$ converge p.p. ssi $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \Big\| \operatorname*{Sup}_{q\,\geq\, p\,>\, n} \Big\{\Big|\sum\limits_{i=p}^{q} \tilde f_i\Big| > \varepsilon\Big\} \Big\| \to 0$.

On pose $\forall\, p > n \quad \sigma_p = \operatorname*{Sup}_{q\,\geq\, p} \Big\{\Big|\sum\limits_{i=p}^{q} \tilde f_i\Big| > \varepsilon\Big\}$; on a $\Big|\sum\limits_{i=p}^{q} \tilde f_i\Big| = \Big|\sum\limits_{i=n}^{q} \tilde f_i - \sum\limits_{i=n}^{p-1} \tilde f_i\Big|$

$\leq \Big|\sum\limits_{i=n}^{q} \tilde f_i\Big| + \Big|\sum\limits_{i=n}^{p-1} \tilde f_i\Big|$,

donc $\Big\{\Big|\sum\limits_{i=p}^{q} \tilde f_i\Big| > \varepsilon\Big\} \leq \Big\{\Big|\sum\limits_{i=n}^{q} \tilde f_i\Big| > \varepsilon/2\Big\} + \Big\{\Big|\sum\limits_{i=n}^{p-1} \tilde f_i\Big| > \varepsilon/2\Big\}$,

donc $\sigma_p \leq 2 \operatorname*{Sup}_{q\,\geq\, n} \Big\{\Big|\sum\limits_{i=n}^{q} \tilde f_i\Big| > \varepsilon/2\Big\}$; donc $\operatorname*{Sup}_{p\,>\, n} \sigma_p \leq 2 \operatorname*{Sup}_{q\,\geq\, n} \Big\{\Big|\sum\limits_{i=n}^{q} \tilde f_i\Big| > \varepsilon/2\Big\}$.

3.13. Critère pratique 2 bis :

Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$; alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n$ converge p.p. ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall\, n \geq N \quad \Big\| \operatorname*{Sup}_{q \geq n} \Big\{ \Big| \sum_{i=n}^{q} \tilde{f}_i \Big| > \varepsilon \Big\} \Big\|_1 \leq \varepsilon} \,.$$

3.14. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est dominée p.p. (D pp) ssi

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_{n} \big\{ |\tilde{f}_n| \geq \alpha \big\} \xrightarrow{1} 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to +\infty} \,.$$

3.15. Théorème : On a le schéma d'implication suivant :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{C\,pp} & \Rightarrow & \mathrm{C\,ms} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathrm{D\,pp} & \Rightarrow & \mathrm{D\,ms} \end{array}}$$

3.16. Théorème :

Pour une suite monotone on a de plus $\boxed{\mathrm{D\,pp} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{D\,ms}}$ et $\boxed{\mathrm{C\,pp} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{C\,ms}}$.

§ 4. Convergence plate

4.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n\,,\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge platement vers $\tilde{f}$ ssi $\boxed{\{\tilde{f}_n \neq \tilde{f}\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}) \xrightarrow{1} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f}$.

4.2.* Théorème : La topologie de la convergence plate dans $\mathcal{L}^1$ est définie par la pseudo-norme $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathsf{A}} = \big\|\mathrm{S}\,(\tilde{f})\big\|_1} \geq \|\tilde{f}\|_{\mathrm{ms}}$.

4.3.* Théorème : $\forall\, \tilde{f}_n\,,\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f} \;\Rightarrow\; \tilde{f}_n \xrightarrow{\mathrm{ms}} \tilde{f}$.

4.4. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est Cauchy-plate (C-plate) ssi la suite double $\{\tilde{f}_p \neq \tilde{f}_q\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q) \xrightarrow{1} 0$, c-à-d ssi

$$\sup_{p\,,\,q \geq n} \big\|\{\tilde{f}_p \neq \tilde{f}_q\}\big\|_1 = \sup_{p\,,\,q \geq n} \big\|\,\mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q)\,\big\|_1 \to 0\,.$$

4.5.* Théorème : Une suite C-plate est C ms.

4.6. Théorème :

Une suite $\omega_n \in \mathcal{K}$ est C-plate ssi elle converge en norme $\| \ \|_1$ dans $\mathcal{K}$.

Dém :

On a $\forall\, p\,,\, q \in \mathbb{N} \quad \mathrm{S}\,(\omega_p - \omega_q) = \mathrm{S}\,\big(|\,\omega_p - \omega_q\,|\big) = |\,\omega_p - \omega_q\,|\,,$ car $|\,\omega_p - \omega_q| \in \mathcal{K}$;

on en déduit : ω_n C-plate $\Leftrightarrow$ ω_n de Cauchy pour la norme $\| \ \|_1$.

§ 5. Convergence exacte

5.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n\,,\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge exactement vers $\tilde{f}$

ssi $\boxed{\{\tilde{f}_n \neq \tilde{f}\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}) \xrightarrow{\times} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \tilde{f}$.

5.2.* Théorème : $\forall\, \tilde{f}_n\,,\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \tilde{f} \ \Rightarrow \Big(\, \tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f}$ et $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathrm{pp}} \tilde{f} \,\Big)$;

si $\tilde{f}_n$ est monotone on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \tilde{f} \ \Leftrightarrow\ \tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f}$.

5.3. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est Cauchy-exacte (C-exacte) ssi la suite double $\{\tilde{f}_p \neq \tilde{f}_q\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q) \xrightarrow{\times} 0\,,$ c-à-d ssi $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \{\tilde{f}_p \neq \tilde{f}_q\} = \mathop{\mathrm{Sup}}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q) \xrightarrow{1} 0$.

5.4. Théorème :

Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ssi $\boxed{\{\tilde{f}_{n+1} \neq \tilde{f}_n\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n) \xrightarrow{\times} 0}$.

Dém :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{r\,\geq\, n} \mathrm{S}\,\big(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\big) \leq \mathop{\mathrm{Sup}}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q)$;

par ailleurs on a $\displaystyle\forall\, q > p \geq n \quad |\,\tilde{f}_p - \tilde{f}_q\,| \leq \sum_{r\,=\,p}^{q\,-1} |\,\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\,|\,,$

donc $\displaystyle\forall\, q > p \geq n \quad \mathrm{S}\,\big(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q\big) \leq \mathop{\mathrm{Sup}}_{p\,\leq\, r\,\leq\, q\,-1} \mathrm{S}\,\big(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\big) \leq \mathop{\mathrm{Sup}}_{r\,\geq\, n} \mathrm{S}\,\big(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\big)$;

donc $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q) \leq \mathop{\mathrm{Sup}}_{r\,\geq\, n} \mathrm{S}\,\big(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\big)$.

On en déduit $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{r\,\geq\, n} \mathrm{S}\,\big(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\big) = \mathop{\mathrm{Sup}}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_q)$; d'où le théorème.

5.5.* Théorème : Une suite C-exacte est C-plate et C pp.

5.6.* Théorème : Une suite $\omega_n \in \mathcal{K}$ est C-exacte ssi elle est C-fine.

5.7. <u>Définition</u> : Une suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est <u>déclinante</u> ssi elle est décroissante et $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$.

5.8. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\omega_n \in \mathcal{K}$; alors $\omega_n \xrightarrow{\times} 0$ ss'il existe une suite déclinante $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \omega_n \leq \sigma_n}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: On pose $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = \operatorname*{Sup}_{r \geq n} \omega_r$; alors la suite σ_n est déclinante et on a $\omega_n \leq \operatorname*{Sup}_{r \geq n} \omega_r = \sigma_n$.

b) $\Leftarrow$: On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \operatorname*{Sup}_{r \geq n} \omega_r \leq \operatorname*{Sup}_{r \geq n} \sigma_r = \sigma_n$; donc $\operatorname*{Sup}_{r \geq n} \omega_r \xrightarrow{1} 0$.

5.9. <u>Définition</u> : Une suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est <u>totale</u> ssi elle est croissante et $\sigma_n \xrightarrow{1} \mathbb{1}$.
La suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est donc totale ssi la suite $1 - \sigma_n$ est déclinante.

5.10. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$; alors $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$ ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \tilde{f}_n = 0}$.

<u>Dém</u> :

1) $\Rightarrow$: On a $\mathrm{S}(\tilde{f}_n) \xrightarrow{\times} 0$; il existe donc une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \leq 1 - \mathrm{S}(\tilde{f}_n)$; donc $\sigma_n \tilde{f}_n = \sigma_n \left[1 - \mathrm{S}(\tilde{f}_n)\right] \tilde{f}_n = \sigma_n \left[\tilde{f}_n - \tilde{f}_n \mathrm{S}(\tilde{f}_n)\right]$
$= \sigma_n (\tilde{f}_n - \tilde{f}_n) = 0$.

2) $\Leftarrow$: On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \left[1 - \mathrm{S}(\tilde{f}_n)\right] = \sigma_n - \sigma_n \mathrm{S}(\tilde{f}_n) = \sigma_n - \mathrm{S}(\sigma_n \tilde{f}_n) = \sigma_n$;
donc $\sigma_n \leq 1 - \mathrm{S}(\tilde{f}_n)$, donc $\mathrm{S}(\tilde{f}_n) \xrightarrow{\times} 0$.

5.11. <u>Théorème</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \leq \left\{\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n\right\}}$.

<u>Dém</u> : La suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ssi $\left\{\tilde{f}_{n+1} \neq \tilde{f}_n\right\} \xrightarrow{\times} 0$, c-à-d ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left\{\tilde{f}_{n+1} \neq \tilde{f}_n\right\} \leq 1 - \sigma_n$, ou encore ssi $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n \leq \left\{\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n\right\}$.

5.12. <u>Lemme</u> : Soient $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$ et $\sigma \in \mathcal{K}$; alors on a $\sigma \leq \left\{\tilde{f} = \tilde{g}\right\} \Leftrightarrow \sigma \tilde{f} = \sigma \tilde{g}$.

<u>Dém</u> : On pose $\tau = \left\{\tilde{f} = \tilde{g}\right\}$.

a) $\Rightarrow$: On a $\sigma \leq \tau$, donc $\sigma \tilde{f} = \sigma \tau \tilde{f} = \sigma \tau \tilde{g} = \sigma \tilde{g}$.

b) $\Leftarrow$: $\sigma\,\tau = \sigma\left[1 - \mathrm{S}\,(\tilde{f} - \tilde{g})\right] = \sigma - \mathrm{S}\,(\sigma\,\tilde{f} - \sigma\,\tilde{g}) = \sigma$, donc $\sigma \leq \tau$.

5.13.* <u>Corollaire</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\,\tilde{f}_n = \sigma_n\,\tilde{f}_{n+1}}$.

5.14. <u>Définition</u> : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite C-exacte ; alors toute suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \leq \left\{\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n\right\}$ $\left(\text{c-à-d} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\,\tilde{f}_n = \sigma_n\,\tilde{f}_{n+1}\right)$ s'appelle une <u>présentation</u> de la suite $\tilde{f}_n$.

5.15. <u>Théorème</u> : Soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite C-exacte $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$; alors on a $\boxed{\forall\ n\,,\, p \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\,\tilde{f}_n = \sigma_n\,\tilde{f}_{n+p}}$.

<u>Dém</u> : On a $\sigma_n\,\tilde{f}_n = \sigma_n\,\tilde{f}_{n+1} = \sigma_n\,\sigma_{n+1}\,\tilde{f}_{n+1} = \sigma_n\,\sigma_{n+1}\,\tilde{f}_{n+2} = \sigma_n\,\tilde{f}_{n+2} = \cdots$.

<u>Récapitulatif</u> : <u>Convergences dans $\mathcal{L}^1$</u>

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \times & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 2 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{pp} & \Rightarrow & \text{ms} & & \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \\ \mathsf{E} & \Rightarrow & \mathsf{A} & & \end{array}}$$

Contenu : Nous construisons l'espace vectoriel des *(classes de) fonctions mesurables* sur $[\,a\,,b\,]$, que nous nommons *fonctionnelles* sur $[\,a\,,b\,]$. Cet espace s'obtient en *complétant* l'espace $\mathcal{B}$ pour la *convergence exacte* ; nous effectuons cette complétion par la méthode des *suites de Cauchy* : bien que la convergence exacte ne soit pas une convergence métrique, le procédé conserve ici toute sa validité et toute son efficacité.

§ 1. Suites C-exactes dans $\mathcal{B}$

1.1. Définition : On note $\mathcal{EX}$ l'espace vectoriel des suites C-exactes $\tilde{f}_n \in \mathcal{B}$.

1.2. Définition : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n)$, $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{EX}$; alors on pose

$$\boxed{\mathrm{F} \sim \mathrm{G} \quad \text{ssi} \quad \tilde{f}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0}\ , \text{ c-à-d ssi } \left\{\tilde{f}_n \neq \tilde{g}_n\right\} \xrightarrow{\times} 0\,.$$

1.3. Théorème : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n)$, $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{EX}$; alors $\mathrm{F} \sim \mathrm{G}$ ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tilde{f}_n = \sigma_n\, \tilde{g}_n}$.

Dém : $\mathrm{F} \sim \mathrm{G} \;\Leftrightarrow\; \tilde{f}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$

$\Leftrightarrow$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\,(\tilde{f}_n - \tilde{g}_n) = 0$.

1.4.* Corollaire : La relation « $\sim$ » est une $\boxed{\text{relation d'équivalence}}$ sur $\mathcal{EX}$.

1.5. Définition : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde{f}_n)$, $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{EX}$ on pose

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = (\tilde{f}_n + \tilde{g}_n) \qquad \mathrm{F} \vee \mathrm{G} = (\tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n) \qquad \mathrm{F} \wedge \mathrm{G} = (\tilde{f}_n \wedge \tilde{g}_n) \qquad \mathrm{F}\,.\,\mathrm{G} = (\tilde{f}_n\,.\,\tilde{g}_n)\,.$$

1.6.* Théorème :

$\forall\ \mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{EX}$, $\mathrm{F} + \mathrm{G}$, $\mathrm{F} \vee \mathrm{G}$, $\mathrm{F} \wedge \mathrm{G}$, $\mathrm{F}\,.\,\mathrm{G}$ sont des éléments de $\mathcal{EX}$.

1.7.* Théorème : Soient $\mathrm{F}\,, \mathrm{F}', \mathrm{G} \in \mathcal{EX}$ et $\mathrm{F} \sim \mathrm{F}'$; alors on a

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} \sim \mathrm{F}' + \mathrm{G} \qquad \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \sim \mathrm{F}' \vee \mathrm{G} \qquad \mathrm{F} \wedge \mathrm{G} \sim \mathrm{F}' \wedge \mathrm{G} \qquad \mathrm{F}\,.\,\mathrm{G} \sim \mathrm{F}'.\mathrm{G}\,.$$

1.8. Définition : $\forall\ \mathrm{F} = (f_n) \in \mathcal{EX}$ on pose

$$-\mathrm{F} = (-\tilde{f}_n) \qquad \mathrm{F}^+ = (\,\tilde{f}_n^+\,) \qquad \mathrm{F}^- = (\,\tilde{f}_n^-\,) \qquad |\mathrm{F}| = (\,|\tilde{f}_n|\,)\,.$$

1.9.* Théorème : $\forall\ \mathrm{F} \in \mathcal{EX}$, $-\mathrm{F}$, F^+, F^-, $|\mathrm{F}|$ sont des éléments de $\mathcal{EX}$.

1.10.* Théorème : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{F}' \in \mathcal{EX}$ et $\mathrm{F} \sim \mathrm{F}'$; alors on a

$$-\mathrm{F} \sim -\mathrm{F}' \qquad \mathrm{F}^+ \sim \mathrm{F}'^+ \qquad \mathrm{F}^- \sim \mathrm{F}'^- \qquad |\mathrm{F}| \sim |\mathrm{F}'|$$

1.11. Définition : $\forall\ \mathrm{F} = (f_n)$, $\mathrm{G} = (g_n) \in \mathcal{EX}$ on pose

$$\boxed{\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \sim \mathrm{G}} \quad (\text{ou} \quad \mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{F} \wedge \mathrm{G} \sim \mathrm{F}).$$

1.12. Théorème : $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G}$ ssi $\boxed{\{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\} \xrightarrow{\times} 0}$.

Dém : $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \iff \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \sim \mathrm{G}$

$$\iff \tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$$

$$\iff \{\tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n \neq \tilde{g}_n\} \xrightarrow{\times} 0$$

$$\iff \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\} \xrightarrow{\times} 0\,.$$

1.13. Théorème : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n)$, $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{EX}$; alors $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G}$ ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tilde{f}_n \leq \sigma_n\, \tilde{g}_n}$.

Dém : $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \iff \tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$

$\iff$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n (\tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n - \tilde{g}_n) = 0$

$\iff$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\sigma_n\, \tilde{f}_n) \vee (\sigma_n\, \tilde{g}_n) = \sigma_n\, \tilde{g}_n$

$\iff$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tilde{f}_n \leq \sigma_n\, \tilde{g}_n$.

1.14.* Théorème : $\boxed{\big(\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \ \text{ et } \ \mathrm{G} \preceq \mathrm{F}\big) \iff \mathrm{F} \sim \mathrm{G}}$.

1.15.* Théorème : La relation $\preceq$ est un $\boxed{\text{pré-ordre}}$ dans $\mathcal{EX}$.

§ 2. Supports et indicateurs dans $\mathcal{EX}$

2.1. Théorème : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{B}$ une suite C-exacte et soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde{f}_n$; alors on a $\boxed{\forall\, m, n \in \mathbb{N} \quad \big|\mathrm{S}(\tilde{f}_m) - \mathrm{S}(\tilde{f}_n)\big| \leq 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n}$.

Dém : Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$; on a $\sigma_m\, \tilde{f}_m = \sigma_m\, \tilde{f}_n$, donc

$\tilde f_m = \sigma_m \tilde f_m + (1-\sigma_m)\,\tilde f_m = \sigma_m \tilde f_n + (1-\sigma_m)\,\tilde f_m = \tilde f_n + (1-\sigma_m)\,(\tilde f_m - \tilde f_n)$;

on en déduit $\tilde f_m = \tilde f_n + (1-\sigma_m)\,(\tilde f_m - \tilde f_n)$ $(*)$;

on peut donc écrire $|\tilde f_m| \le |\tilde f_n| + (1-\sigma_m)\,|\tilde f_m - \tilde f_n|$, et donc

$\mathrm{S}(\tilde f_m) \le \mathrm{S}(\tilde f_n) + (1-\sigma_m)\,\mathrm{S}(\tilde f_m - \tilde f_n) \le \mathrm{S}(\tilde f_n) + 1 - \sigma_m$.

L'égalité $(*)$ peut aussi s'écrire $\tilde f_n = \tilde f_m + (1-\sigma_m)\,(\tilde f_n - \tilde f_m)$; donc

$|\tilde f_n| \le |\tilde f_m| + (1-\sigma_n)\,|\tilde f_n - \tilde f_m|$; on en déduit de même $\mathrm{S}(\tilde f_n) \le \mathrm{S}(\tilde f_m) + 1 - \sigma_m$;

en conclusion on obtient $\big|\mathrm{S}(\tilde f_m) - \mathrm{S}(\tilde f_n)\big| \le 1 - \sigma_m = 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n$.

2.2. Corollaire : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde f_n) \in \mathcal{EX}$ la suite $\mathrm{S}(\tilde f_n)$ converge finement dans $\mathcal{K}$.

Dém :

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}\quad \operatorname*{Sup}_{p,q \ge n} \big|\mathrm{S}(\tilde f_p) - \mathrm{S}(\tilde f_q)\big| \le 1 - \sigma_p \wedge \sigma_q \le 1 - \sigma_n$; comme $\sigma_n \xrightarrow{1} 1$,

la suite $\mathrm{S}(\tilde f_n)$ est fine ; or $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{S}(\tilde f_n) \in \mathcal{K}$, donc $\operatorname*{Lim}_n \mathrm{S}(\tilde f_n) \in \mathcal{K}$.

2.3. Définition : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde f_n) \in \mathcal{EX}$ on pose

$$\boxed{\underline{\text{support}} \text{ de } \mathrm{F} = \mathrm{S}(\mathrm{F}) = \operatorname*{Lim}_n \mathrm{S}(\tilde f_n) \in \mathcal{K}}\,.$$

2.4.* Théorème : Soit $\mathrm{F} = (\tilde f_n) \in \mathcal{EX}$ et soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde f_n$;

alors on a $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}\quad \big|\mathrm{S}(\mathrm{F}) - \mathrm{S}(\tilde f_n)\big| \le 1 - \sigma_n}$.

2.5.* Théorème : $\forall\ \mathrm{F} \in \mathcal{EX}\quad \mathrm{S}(\mathrm{F}) = \mathrm{S}(\mathbb{1} \wedge |\mathrm{F}|)$.

2.6.* Théorème : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{EX}$; alors on a $\boxed{\mathrm{F} \sim \mathrm{G} \Rightarrow \mathrm{S}(\mathrm{F}) \sim \mathrm{S}(\mathrm{G})}$.

2.7. Théorème : Soit $\tilde f_n \in \mathcal{B}$ une suite C-exacte et soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde f_n$; soit de plus $\tilde g \in \mathcal{L}^1$; alors on a

$$\boxed{\forall\, m, n \in \mathbb{N}\quad \big|\{\tilde f_m > \tilde g\} - \{\tilde f_n > \tilde g\}\big| \le 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n}\,.$$

Dém : On a $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n\quad \sigma_m \tilde f_m = \sigma_m \tilde f_n$, donc

$\tilde f_m = \sigma_m \tilde f_m + (1-\sigma_m)\,\tilde f_m = \sigma_m \tilde f_n + (1-\sigma_m)\,\tilde f_m = \tilde f_n + (1-\sigma_m)\,(\tilde f_m - \tilde f_n)$;

on en déduit $\tilde f_m = \tilde f_n + (1-\sigma_m)\,(\tilde f_m - \tilde f_n)$ $(*)$; on peut donc écrire

$$\tilde f_m - \tilde g = \tilde f_n - \tilde g + (1-\sigma_m)\,(\tilde f_m - \tilde f_n)$$

$$(\tilde f_m - \tilde g)^+ \le (\tilde f_n - \tilde g)^+ + (1-\sigma_m)(\tilde f_m - \tilde f_n)^+ ,$$

et donc $\mathrm{S}\big[(\tilde f_m - \tilde g)^+\big] \le \mathrm{S}\big[(\tilde f_n - \tilde g)^+\big] + (1-\sigma_m)\,\mathrm{S}\big[(\tilde f_m - \tilde f_n)^+\big]$

$\le \mathrm{S}\big[(\tilde f_n - \tilde g)^+\big] + 1 - \sigma_m$, c-à-d $\big\{\tilde f_m > \tilde g\big\} \le \big\{\tilde f_n > \tilde g\big\} + 1 - \sigma_m$.

L'égalité (*) peut aussi s'écrire $\tilde f_n = \tilde f_m + (1-\sigma_m)(\tilde f_n - \tilde f_m)$; on en déduit donc

$\tilde f_n - \tilde g = \tilde f_m - \tilde g + (1-\sigma_m)(\tilde f_n - \tilde f_m)$, et donc aussi $\big\{\tilde f_n > \tilde g\big\} \le \big\{\tilde f_n > \tilde g\big\} + 1 - \sigma_m$.

En conclusion on obtient $\big|\big\{\tilde f_m > \tilde g\big\} - \big\{\tilde f_n > \tilde g\big\}\big| \le 1 - \sigma_m = 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n$.

2.8.* <u>Corollaire</u> : Soit $\tilde g_n \in \mathcal{B}$ une suite C-exacte et soit $\tau_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde g_n$; soit de plus $\tilde f \in \mathcal{L}^1$; alors on a

$$\boxed{\forall\, m, n \in \mathbb{N} \quad \big|\big\{\tilde f > \tilde g_m\big\} - \big\{\tilde f > \tilde g_n\big\}\big| \le 1 - \tau_m \wedge \tau_n} .$$

2.9. <u>Corollaire-Définition</u> : Soient $\mathrm{F} = (\tilde f_n) \in \mathcal{EX}$ et $\tilde g \in \mathcal{L}^1$; alors la suite $\big\{\tilde f_n > \tilde g\big\}$ converge finement dans $\mathcal{K}$ et on pose $\boxed{\big\{\mathrm{F} > \tilde g\big\} = \operatorname*{Lim}_n \big\{\tilde f_n > \tilde g\big\}}$.

De plus si $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est une présentation de la suite $\tilde f_n$ on a

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big|\big\{\mathrm{F} > \tilde g\big\} - \big\{\tilde f_n > \tilde g\big\}\big| \le 1 - \sigma_n} .$$

<u>Dém</u> : Idem que pour S(F).

2.10. <u>Corollaire-Définition</u> : Soient $\mathrm{G} = (\tilde g_n) \in \mathcal{EX}$ et $\tilde f \in \mathcal{L}^1$; alors la suite $\big\{\tilde f > \tilde g_n\big\}$ converge finement dans $\mathcal{K}$ et on pose $\boxed{\big\{\tilde f > \mathrm{G}\big\} = \operatorname*{Lim}_n \big\{\tilde f > \tilde g_n\big\}}$.

De plus si $\tau_n \in \mathcal{K}$ est une présentation de la suite $\tilde g_n$ on a

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big|\big\{\tilde f > \mathrm{G}\big\} - \big\{\tilde f > \tilde g_n\big\}\big| \le 1 - \tau_n} .$$

<u>Dém</u> : Idem que pour S(F).

2.11. <u>Théorème-Définition</u> : Soient $\mathrm{F} = (\tilde f_n) \in \mathcal{EX}$ et $\mathrm{G} = (\tilde g_n) \in \mathcal{EX}$; alors la suite $\big\{\tilde f_n > \tilde g_n\big\}$ converge finement dans $\mathcal{K}$ et on pose $\boxed{\big\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\big\} = \operatorname*{Lim}_n \big\{\tilde f_n > \tilde g_n\big\}}$.

De plus si σ_n et τ_n sont des présentations des suites $\tilde f_n$ et $\tilde g_n$ on a

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big|\big\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\big\} - \big\{\tilde f_n > \tilde g_n\big\}\big| \le 2 - \sigma_n - \tau_n} .$$

Dém : On a $\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$

$$\big|\,\{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}\big| \leq \big|\,\{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}\big| + \big|\,\{\tilde{f}_n > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}\big|$$

$\leq 2 - \sigma_m \wedge \sigma_n - \tau_m \wedge \tau_n$. Le théorème en découle.

L'application $\mathcal{EX} \to \mathcal{K}$: $(\mathrm{F}\,,\,\mathrm{G}) \mapsto \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}$ est un indicateur dans $\mathcal{EX}$.
On en déduit facilement la définition des autres indicateurs dans $\mathcal{EX}$.

2.12. Théorème : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{EX}$ et $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{EX}$; soient σ_n et τ_n des présentations des suites $\tilde{f}_n$ et $\tilde{g}_n$; alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\}\big| \leq 1 - \sigma_n}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\mathrm{F} > \tilde{g}_n\}\big| \leq 1 - \tau_n}\,.$$

Dém : On a $\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$

$$\big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\}\big| \leq \big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\}\big| + \big|\{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_m\}\big|$$

$$+ \big|\{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_m\}\big| \leq 2 - \sigma_m - \tau_m + 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n + 1 - \sigma_m$$

$$= 4 - 2\,\sigma_m - \sigma_m \wedge \sigma_n - \tau_m\,.$$

Il suffit ensuite de faire tendre m vers $+\infty$.

2.13.* Corollaire : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{EX}$ et $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{EX}$; alors on a

$$\boxed{\{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\} \xrightarrow{\times} \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\{\mathrm{F} > \tilde{g}_n\} \xrightarrow{\times} \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}}\,.$$

§ 3. Fonctionnelles sur [a , b]

3.1. Définition : On pose $\boxed{\mathcal{FO} = \mathcal{EX}/\sim}$.

Les éléments de $\mathcal{FO}$ se nomment les fonctionnelles sur $[\,\mathrm{a}\,,\mathrm{b}\,]$.

On note les fonctionnellles de la manière suivante :

$$\boxed{\widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \text{ désigne la classe de } \mathrm{F} \in \mathcal{EX}}\,.$$

3.2. Définition : On pose $\widehat{\mathrm{F}} + \widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F} + \mathrm{G}}$ $\quad \widehat{\mathrm{F}} \vee \widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F} \vee \mathrm{G}}$

$$\widehat{\mathrm{F}} \wedge \widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F} \wedge \mathrm{G}} \qquad \widehat{\mathrm{F}}\,.\,\widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F}\,.\,\mathrm{G}}$$

$$-\widehat{\mathrm{F}} = \widehat{-\mathrm{F}} \qquad \widehat{\mathrm{F}}^{+} = \widehat{\mathrm{F}^{+}} \qquad \widehat{\mathrm{F}}^{-} = \widehat{\mathrm{F}^{-}} \qquad |\widehat{\mathrm{F}}| = \widehat{|\mathrm{F}|}\,.$$

3.3. <u>Définition</u> : On pose $\boxed{\widehat{\mathrm{F}} \leq \widehat{\mathrm{G}} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{F} \preceq \mathrm{G}}$; c'est un $\boxed{\text{ordre}}$ dans $\mathcal{FO}$.

3.4. <u>Théorème</u> : $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{FO}$.

<u>Dém</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = \{|\tilde{f}| \leq n\}$ et $\tilde{f}_n = \sigma_n \tilde{f} \in \not{\mathcal{B}}$;

alors on identifie $\tilde{f}$ à la classe de la suite $(\tilde{f}_n) \in \mathcal{EX}$.

Si $\tilde{f} \in \not{\mathcal{B}}$ on identifie $\tilde{f}$ à la classe de la suite constante $(\tilde{f}) \in \mathcal{EX}$.

3.5. <u>Définition</u> : On pose $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO}$: $\boxed{\underline{\text{support}} \text{ de } \widehat{\mathrm{F}} = \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{F}}) = \mathrm{S}(\mathrm{F})}$.

3.6. <u>Définition</u> : On pose $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO}$: $\boxed{\{\widehat{\mathrm{F}} > \widehat{\mathrm{G}}\} = \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}}$.

L'application $\mathcal{EX} \to \mathcal{K}$: $(\mathrm{F}\,,\, \mathrm{G}) \mapsto \{\widehat{\mathrm{F}} > \widehat{\mathrm{G}}\}$ est un <u>indicateur</u> dans $\mathcal{FO}$.
On en déduit facilement la définition des autres indicateurs dans $\mathcal{FO}$.

3.7. <u>Théorème</u> : Les opérations définies sur $\mathcal{FO}$ prolongent les opérations sur $\mathcal{L}^1$; de même l'ordre sur $\mathcal{FO}$ prolonge l'ordre sur $\mathcal{L}^1$; les propriétés de ces opérations et de cet ordre sur $\mathcal{FO}$ prolongent celles de $\mathcal{L}^1$; enfin les propriétés du support dans $\mathcal{FO}$ prolongent les propriétés du support dans $\mathcal{L}^1$. La démonstration de ces propriétés se fait élémentairement à partir de la construction de $\mathcal{FO}$. On en déduit en particulier :

3.8. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{FO} \text{ est une algèbre de Riesz}}$.

Voici quelques autres propriétés dans $\mathcal{FO}$:

3.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \quad {}^1\!\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \{|\widehat{\mathrm{F}}| > \alpha\} = 0$.

3.10. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \quad {}^1\!\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \{\widehat{\mathrm{F}} \geq \varepsilon\} = {}^1\!\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \{\widehat{\mathrm{F}} > \varepsilon\} = \{\widehat{\mathrm{F}} > 0\}$.

3.11. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \quad \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{F}}) = {}^1\!\lim\limits_{p \to +\infty} \mathbb{1} \wedge (p\,|\widehat{\mathrm{F}}|)$.

3.12. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \quad \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{F}})\, \widehat{\mathrm{F}} = \widehat{\mathrm{F}}$.

3.13. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \quad \Big[\, \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{F}}) = 0 \iff \widehat{\mathrm{F}} = 0 \,\Big]$.

3.14. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}}, \widehat{\mathrm{G}} \in \mathcal{FO} \quad \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{F}}\,\widehat{\mathrm{G}}) = \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{F}})\, \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{G}})$.

3.15. Récapitulatif

$$
\boxed{\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \mathcal{F} & & & & & & \mathcal{FO} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cup & & & & & & \cup & & & & & & \\
\mathcal{E} & \subset & \mathcal{R} & \subset & \mathcal{BA} & \subset & \mathcal{PR} & \subset & \mathcal{W} & \hookrightarrow & \mathcal{B} & \subset & \mathcal{L}^2 & \subset & \mathcal{L}^1 & \subset & \mathcal{M}_D & \subset & \mathcal{M} & \subset & \mathcal{PM} \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & & & & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & & \mathcal{C} & & \mathcal{S} & & & & \mathcal{Z} & & \mathcal{K} & & & & & & \mathcal{N}_D & \subset & \mathcal{N} & \subset & \mathcal{PN} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathcal{A} & \subset & \mathcal{PA}
\end{array}}
$$

§ 4. Modes de convergence dans $\mathcal{FO}$

4.1. Définition : On définit dans $\mathcal{FO}$ les quatre modes de convergence ms, p.p., A, E par les mêmes définitions formelles que dans $\mathcal{L}^1$. Ils ont les mêmes propriétés que dans $\mathcal{L}^1$. En particulier on a le même schéma d'implication :

$$
\boxed{\begin{array}{ccc}
\mathsf{E} & \Rightarrow & \mathsf{A} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\mathrm{pp} & \Rightarrow & \mathrm{ms}
\end{array}}
$$

4.2. Théorème :
Les lois $+$, $\times$, $\vee$, $\wedge$ sont ***continues*** pour les quatre modes de convergence.

Nous allons détailler ces quatre modes pour en donner les propriétés les plus significatives.
Nous abandonnerons désormais le « chapeau » dans la notation des éléments de $\mathcal{FO}$.

A. Convergence en mesure

A.1. Définition : $\forall\, \mathrm{F}_n, \mathrm{F}_n \in \mathcal{FO} \quad \left[\, \mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F} \;\Leftrightarrow\; \Big(\forall\, \varepsilon > 0 \quad \big\{ |\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| > \varepsilon \big\} \overset{1}{\to} 0 \Big) \right]$.

A.2. Définition : Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est de Cauchy en mesure (C ms) ssi

$$
\boxed{\sup_{p\,,\,q\,\geq\, n} \big\| \{ \mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q > \varepsilon \} \big\|_1 \to 0}
$$

A.3. Théorème : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$; alors on a

$$\boxed{\left\|\left\{\mathrm{F}>0\right\}\right\|_1 \leq \varliminf_n \left\|\left\{\mathrm{F}_n>0\right\}\right\|_1}$$

<u>Dém</u> :

On a $\forall\,\varepsilon>0 \quad \left\{\mathrm{F}>\varepsilon\right\} = \left\{\mathrm{F}-\mathrm{F}_n+\mathrm{F}_n>\varepsilon\right\} \leq \left\{\mathrm{F}-\mathrm{F}_n>\varepsilon\right\} + \left\{\mathrm{F}_n>0\right\}$,

donc $\left\|\left\{\mathrm{F}>\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \left\|\left\{\mathrm{F}-\mathrm{F}_n>\varepsilon\right\}\right\|_1 + \left\|\left\{\mathrm{F}_n>0\right\}\right\|_1$, donc $\forall\,\varepsilon>0$

$\left\|\left\{\mathrm{F}>\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \varliminf_n \left\|\left\{\mathrm{F}_n>0\right\}\right\|_1$; en faisant $\varepsilon\to 0^+$ on obtient le théorème.

A.4.* <u>Corollaire</u> : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F}\in\mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$; alors on a

$$\boxed{\left\|\mathrm{S}(\mathrm{F})\right\|_1 \leq \varliminf_n \left\|\mathrm{S}(\mathrm{F}_n)\right\|_1}$$

A.5. <u>Définition</u> : Une suite $\mathrm{F}_n\in\mathcal{FO}$ est <u>dominée en mesure</u> (D ms) ssi

$$\boxed{\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\left\{|\mathrm{F}_n|>\alpha\right\}\right\|_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha\to+\infty}\,.$$

A.6. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathrm{C\,ms} \ \Rightarrow\ \mathrm{D\,ms}}$.

<u>Dém</u> : On peut supposer $\forall\,n\in\mathbb{N} \quad \mathrm{F}_n\geq 0$. Soit $0<\varepsilon<1$ et soit $N\in\mathbb{N}$

tel que $\sup\limits_{p,q\geq N} \left\|\left\{\mathrm{F}_p-\mathrm{F}_q>\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \varepsilon$. Soit $\alpha>0$ tel que $\left\|\left\{\mathrm{F}_N>\alpha-1\right\}\right\|_1 \leq \varepsilon$;

on a $\forall\,n\in\mathbb{N} \quad \left\{\mathrm{F}_n>\alpha\right\} = \left\{\mathrm{F}_n>\alpha\right\}\left\{\mathrm{F}_n\leq\mathrm{F}_N+\varepsilon\right\} + \left\{\mathrm{F}_n>\alpha\right\}\left\{\mathrm{F}_n>\mathrm{F}_N+\varepsilon\right\}$

$\leq \left\{\widehat{\mathrm{F}}_N+\varepsilon>\alpha\right\} + \left\{\mathrm{F}_n>\mathrm{F}_N+\varepsilon\right\} = \left\{\mathrm{F}_N>\alpha-\varepsilon\right\} + \left\{\mathrm{F}_n>\mathrm{F}_N+\varepsilon\right\}$.

On en déduit $\forall\,n\geq N \quad \left\|\left\{\mathrm{F}_n>\alpha\right\}\right\|_1 \leq 2\,\varepsilon$.

A.7. <u>Théorème de complétude</u> : $\boxed{\mathcal{FO} \text{ est complet pour la convergence en mesure}}$.

Avant de démontrer ce théorème précisons sa signification.

- Une suite $\mathrm{F}_n\in\mathcal{FO}$ converge en mesure vers $\mathrm{F}\in\mathcal{FO}$ <u>ssi</u>

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \varlimsup_n \left\|\left\{|\mathrm{F}_n-\mathrm{F}|>\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \varepsilon\,,$$

c-à-d <u>ssi</u> $\forall\,\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\,n\geq N \quad \left\|\left\{|\mathrm{F}_n-\mathrm{F}|>\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \varepsilon$,

c-à-d <u>ssi</u> $\forall\,\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\,n\geq N$

$$\left\|\left\{\mathrm{F}_n>\mathrm{F}+\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|\left\{\mathrm{F}>\mathrm{F}_n+\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \varepsilon\,.$$

- Une suite $\mathrm{F}_n\in\mathcal{FO}$ est C ms <u>ssi</u> $\forall\,\varepsilon>0 \ \varlimsup\limits_{p,q} \left\|\left\{\mathrm{F}_p-\mathrm{F}_q>\varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \varepsilon$, c-à-d <u>ssi</u> $\forall\,\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p\,,\, q \geq N \quad \big\|\big\{\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q > \varepsilon\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon\,.$

Le théorème affirme que pour toute suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ qui est $\mathrm{C\,ms}$, il esiste $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$ tel que $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$.

La démonstration utilise plusieurs lemmes.

<u>*Lemme 1*</u> : Soit une suite $\mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}$; alors la suite F_p est $\mathrm{C\,ms}$ ssi les suites F_p^+ et F_p^- sont $\mathrm{C\,ms}$.

<u>Dém</u> : Trivial.

Ce lemme nous permet de supposer dans la suite que $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}^+$.

<u>*Lemme 2*</u> : Soit une suite $\mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}^+$ convergente en mesure et soit $n \in \mathbb{N}$; alors la suite $n \wedge \mathrm{F}_p \in \mathcal{B}^+$ converge en norme $\|\ \|_1$ dans $\mathcal{B}^+$.

<u>Dém</u> : La suite $n \wedge \mathrm{F}_p$ est encore $\mathrm{C\,ms}$; de plus elle est positive et bornée ; elle converge donc en norme $\|\ \|_1$ dans $\mathcal{B}^+$.

Posons $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \boxed{\tilde{g}_n = {}^1\lim_p \ (n \wedge \mathrm{F}_p)} \in \mathcal{B}^+$.

<u>*Lemme 3*</u> : On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \tilde{g}_{n+1} = \tilde{g}_n$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$n \wedge \tilde{g}_{n+1} = n \wedge \Big({}^1\lim_p \big[(n+1) \wedge \mathrm{F}_p\big]\Big) = {}^1\lim_p \big[n \wedge (n+1) \wedge \mathrm{F}_p\big] = {}^1\lim_p \ (n \wedge \mathrm{F}_p) = \tilde{g}_n\,.$$

<u>*Lemme 4*</u> : La suite $\tilde{g}_n$ est <u>croissante</u>.

<u>Dém</u> : Trivial.

<u>*Lemme 5*</u> : La suite $\tilde{g}_n$ est <u>$\mathrm{D\,ms}$</u>.

<u>Dém</u> : La suite F_p étant $\mathrm{C\,ms}$; elle est donc aussi $\mathrm{D\,ms}$;
soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \big\|\big\{\mathrm{F}_p > \alpha\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon$;
or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \mathrm{F}_p \overset{1}{\to} \tilde{g}_n$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \mathrm{F}_p \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{g}_n$;
donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big\|\big\{\tilde{g}_n > \alpha\big\}\big\|_1 \leq \varliminf_p \big\|\big\{n \wedge \mathrm{F}_p > \alpha\big\}\big\|_1 \leq \varliminf_p \big\|\big\{\mathrm{F}_p > \alpha\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon\,.$

<u>*Lemme 6*</u> : La suite $\tilde{g}_n$ est <u>exacte</u>.

Dém :

On a $\sup\limits_r \left\| \left\{ \tilde{g}_r > \alpha \right\} \right\|_1 \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$; soit $n \in \mathbb{N}$; posons $\forall r \in \mathbb{N}$ $\theta_r = \left\{ \tilde{g}_r > n \right\} \in \mathcal{K}$; la suite θ_r est croissante et bornée, donc convergente en norme $\| \ \|_1$ vers $\tau_n = \operatorname{Sup}\limits_r \theta_r = \operatorname{Sup}\limits_r \left\{ \tilde{g}_r > n \right\} \in \mathcal{K}$; la suite τ_n est décroissante et on a $\|\tau_n\|_1 = \sup\limits_r \|\theta_r\|_1 = \sup\limits_r \left\| \left\{ \tilde{g}_r > n \right\} \right\|_1$, donc $\|\tau_n\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$; on en déduit que la suite $\sigma_n = 1 - \tau_n = \operatorname{Inf}\limits_r \left\{ \tilde{g}_r \leq n \right\}$ est totale.

De plus on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n \leq \left\{ \tilde{g}_{n+1} \leq n \right\}$, donc $\sigma_n \, \tilde{g}_{n+1} = \sigma_n \left\{ \tilde{g}_{n+1} \leq n \right\} \tilde{g}_{n+1}$ $= \sigma_n \left\{ n \wedge \tilde{g}_{n+1} = \tilde{g}_{n+1} \right\} \tilde{g}_{n+1} = \sigma_n \left\{ n \wedge \tilde{g}_{n+1} = \tilde{g}_{n+1} \right\} (n \wedge \tilde{g}_{n+1})$ $= \sigma_n \left\{ \tilde{g}_{n+1} \leq n \right\} (n \wedge \tilde{g}_{n+1}) = \sigma_n \, \tilde{g}_n$. La suite $\tilde{g}_n$ est donc exacte.

Démonstration du théorème :

Notons $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}^+$ la fonction dont $(\tilde{g}_n)$ est un représentant ; montrons qu'on a $\widehat{\mathrm{F}}_p \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{G}$; soit $\varepsilon > 0$; nous démontrons d'abord $\left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{G} + \varepsilon \right\} \overset{1}{\to} 0$, ensuite $\left\{ \mathrm{G} > \mathrm{F}_p + \varepsilon \right\} \overset{1}{\to} 0$.

1) Soit $0 < \varepsilon < 1$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$ $\left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$; on a $\forall p, q \geq N$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left\{ \mathrm{F}_p > n \wedge \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \leq \left\{ \mathrm{F}_p > n \wedge (\mathrm{F}_q + \varepsilon) \right\}$ $= \left\{ \mathrm{F}_p > n \right\} \vee \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\}$, donc $\left\| \left\{ \mathrm{F}_p > n \wedge \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1$ $\leq \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > n \right\} \right\|_1 + \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > n \right\} \right\|_1 + \varepsilon$; or $n \wedge \mathrm{F}_q \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{g}_n$ quand $q \to +\infty$, donc $\forall p \geq N$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \tilde{g}_n + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varliminf\limits_q \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > n \wedge \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > n \right\} \right\|_1 + \varepsilon$; de plus quand $n \to +\infty$ $\left\{ \mathrm{F}_p > \tilde{g}_n + \varepsilon \right\} \overset{\times}{\to} \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{G} + \varepsilon \right\}$ et $\left\{ \mathrm{F}_p > n \right\} \overset{1}{\to} 0$, donc $\forall p \geq N$ $\left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{G} + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$.

2) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$ $\left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$; on a $\forall p, q \geq N$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left\{ n \wedge \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \leq \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\}$, donc $\left\| \left\{ n \wedge \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$; en faisant $p \to +\infty$ on trouve $\forall q \geq N$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left\| \left\{ \tilde{g}_n > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$; et en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\forall q \geq N$ $\left\| \left\{ \mathrm{G} > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$.

A.8. Théorème : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{EX}$ on a $\boxed{\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}}$.

Dém : $\forall \varepsilon > 0$ on a $\{|f_n - \mathrm{F}| > \varepsilon\} \leq \{f_n \neq \mathrm{F}\}$; on démontrera $\{f_n \neq \mathrm{F}\} \xrightarrow{\times} 0$ au Théorème D. 2 ; on obtient donc a fortiori $\{f_n \neq \mathrm{F}\} \xrightarrow{1} 0$.

A. 9. Théorème : $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure.

Dém : Soit $(\tilde{f}_n) \in \mathcal{EX}$ un représentant de F ; soit $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{g}_n \in \mathcal{E}$ tel que $\tilde{f}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{1} 0$; on a donc aussi $\tilde{f}_n - \tilde{g}_n \overset{\mathrm{ms}}{\rightarrow} 0$; de plus $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\rightarrow} \mathrm{F}$; on en déduit $\tilde{g}_n = \tilde{f}_n + (\tilde{g}_n - \tilde{f}_n) \overset{\mathrm{ms}}{\rightarrow} \mathrm{F}$.

A. 10. * Théorème : $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure.

A. 11. * Théorème : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure.

A. 12. * Théorème : $\widehat{\mathrm{F}}_n \overset{\mathrm{ms}}{\rightarrow} \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathbb{1} \wedge |\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| \xrightarrow{1} 0$.

A. 13. * Corollaire : La topologie de $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure peut être définie par la pseudo-norme $\boxed{\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{ms}} = \big\| \mathbb{1} \wedge |\mathrm{F}| \big\|_1}$.

A. 14. Définition : Un espace de Riesz V muni d'une pseudo-norme $\| \ \|_{\S}$ est un espace pseudo-normé de Riesz ssi $\boxed{\forall\, u, v \in \mathrm{V} \quad |u| \leq |v| \Rightarrow \|u\|_{\S} \leq \|v\|_{\S}}$.

Si de plus V est complet pour la pseudo-norme $\| \ \|_{\S}$ on dit que V est un pseudo-espace de Riesz-Banach.

A. 15. * Corollaire : $(\mathcal{FO}, |\ |, \|\ \|_{\mathrm{ms}})$ est un pseudo-espace de Riesz-Banach.

B. Convergence presque partout

B. 1. Définition : $\forall\, \mathrm{F}_n, \mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ $\Big[\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\rightarrow} \mathrm{F} \Leftrightarrow \Big(\forall \varepsilon > 0 \quad \{|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| > \varepsilon\} \xrightarrow{\times} 0\Big)\Big]$.

B. 2. Théorème : Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$; alors $\boxed{\alpha \wedge \mathrm{F} \overset{\mathrm{pp}}{\rightarrow} \mathrm{F} \quad \text{quand} \quad \alpha \rightarrow +\infty}$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; on a $\forall \alpha > 0$ $\{\mathrm{F} - \alpha \wedge \mathrm{F} > \varepsilon\} = \{\mathrm{F} - \varepsilon > \alpha \wedge \mathrm{F}\}$ $= \{\mathrm{F} - \varepsilon > \alpha\} \vee \{\mathrm{F} - \varepsilon > \mathrm{F}\} = \{\mathrm{F} > \alpha + \varepsilon\} \xrightarrow{\times} 0$.

B. 3. Définition : Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est de Cauchy p.p. (C pp) ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\geq\, n} \; \big\{ \mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q > \varepsilon \big\} \xrightarrow{1} 0} \;.$$

B.4. <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n\,,\, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F}$; alors on a

$$\boxed{\big\{ \mathrm{F} > 0 \big\} \;\leq\; \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} \;\big\{ \mathrm{F}_n > 0 \big\}} \;.$$

<u>Dém</u> : On a $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \big\{ \mathrm{F} > \varepsilon \big\} = \big\{ \mathrm{F} - \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_n > \varepsilon \big\} \leq \big\{ \mathrm{F} - \mathrm{F}_n > \varepsilon \big\} + \big\{ \mathrm{F}_n > 0 \big\}$,

donc $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \big\{ \mathrm{F} > \varepsilon \big\} \leq \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} \;\big\{ \mathrm{F}_n > 0 \big\}$; en faisant $\varepsilon \to 0^+$ on obtient le théorème.

B.5. <u>Corollaire</u> : Soient $\mathrm{F}_n\,,\, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F}$; alors on a $\boxed{\mathrm{S}\,(\mathrm{F}) \leq \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} \; \mathrm{S}\,(\mathrm{F}_n)}$.

B.6. <u>Théorème</u> :

Soient $\mathrm{F}_n\,,\, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$; supposons de plus la suite F_n <u>croissante</u> ;

alors on a $\boxed{\big\{ \mathrm{F}_n > 0 \big\} \xrightarrow{1} \big\{ \mathrm{F} > 0 \big\}}$, et donc aussi $\boxed{\mathrm{S}\,(\mathrm{F}_n) \xrightarrow{1} \mathrm{S}(\mathrm{F})}$.

<u>Dém</u> : Grâce à la monotonie de la suite F_n on a en fait $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F}$; de plus la suite $\big\{ \mathrm{F}_n > 0 \big\}$ est croissante et majorée par $\big\{ \mathrm{F} > 0 \big\}$; on peut donc écrire $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\overline{\operatorname*{Lim}}_{n} \big\{ \mathrm{F}_n > 0 \big\} \leq \big\{ \mathrm{F} > 0 \big\} \leq \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} \big\{ \mathrm{F}_n > 0 \big\}$; d'où le théorème.

B.7. <u>Corollaire</u> :

Soient $\mathrm{F}_n\,,\, \mathrm{F}\,,\, \mathrm{G} \in \mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \widehat{\mathrm{F}}$; supposons de plus la suite F_n <u>croissante</u> ;

alors on a $\boxed{\big\{ \mathrm{F}_n > \mathrm{G} \big\} \xrightarrow{1} \big\{ \mathrm{F} > \mathrm{G} \big\}}$ et $\boxed{\big\{ \mathrm{F}_n \leq \mathrm{G} \big\} \xrightarrow{1} \big\{ \mathrm{F} \leq \mathrm{G} \big\}}$.

B.8. <u>Définition</u> : Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est <u>**dominée p.p.**</u> (D pp) ssi

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_{n \,\in\, \mathbb{N}} \big\{ |\mathrm{F}_n| > \alpha \big\} \xrightarrow{1} 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to +\infty} \;.$$

B.9. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathrm{C\,pp} \;\Rightarrow\; \mathrm{D\,pp}}$.

<u>Dém</u> : On peut supposer $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{F}_n \geq 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\big\| \operatorname*{Sup}_{p\,,\,q\,\geq\, N} \big\{ \mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q > \varepsilon \big\} \big\|_1 \leq \varepsilon$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\big\| \operatorname*{Sup}_{n\,\leq\, N} \big\{ \mathrm{F}_N > \alpha - 1 \big\} \big\|_1 \leq \varepsilon$;

on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big\{ \mathrm{F}_n > \alpha \big\} = \big\{ \mathrm{F}_n > \alpha \big\} \big\{ \mathrm{F}_n \leq \mathrm{F}_N + \varepsilon \big\} + \big\{ \mathrm{F}_n > \alpha \big\} \big\{ \mathrm{F}_n > \mathrm{F}_N + \varepsilon \big\}$

$\leq \big\{ \mathrm{F}_N + \varepsilon > \alpha \big\} + \big\{ \mathrm{F}_n > \mathrm{F}_N + \varepsilon \big\} \leq \big\{ \mathrm{F}_N > \alpha - 1 \big\} + \big\{ \mathrm{F}_n > \mathrm{F}_N + \varepsilon \big\}$.

On peut donc écrire $\underset{n \geq N}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_n > \alpha \right\} \leq \left\{ \mathrm{F}_N > \alpha - 1 \right\} + \underset{n \geq N}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_n > \mathrm{F}_N + \varepsilon \right\}$, donc

$\left\| \underset{n \geq N}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_n > \alpha \right\} \right\|_1 \leq \left\| \underset{n \geq N}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_N > \alpha - 1 \right\} \right\|_1 + \left\| \underset{n \geq N}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_n > \mathrm{F}_N + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq 2\,\varepsilon$.

On en déduit $\left\| \underset{n}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_n > \alpha \right\} \right\|_1 \leq \left\| \underset{n \leq N}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_n > \alpha \right\} \right\|_1 + \left\| \underset{n \geq N}{\text{Sup}} \left\{ \mathrm{F}_n > \alpha \right\} \right\|_1 \leq 3\,\varepsilon$.

B. 10. Théorème : $\mathcal{FO}$ est complet pour la convergence p.p.

Dém : Soit $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ une suite C pp ; alors F_n est C ms.

Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$ tel que $\mathrm{F}_n \overset{\text{ms}}{\to} \mathrm{F}$; nous allons montrer $\mathrm{F}_n \overset{\text{pp}}{\to} \mathrm{F}$.

Soit $\varepsilon > 0$; on a $\forall\, n\,,\, p \in \mathbb{N}$ $\left\{ |\mathrm{F}_p - \mathrm{F}| > \varepsilon \right\} \leq \left\{ |\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_n| + |\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| > \varepsilon \right\}$

$\leq \left\{ |\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_n| > \varepsilon/2 \right\} + \left\{ |\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| > \varepsilon/2 \right\}$; on peut donc écrire $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\underset{p \geq n}{\text{Sup}} \left\{ |\mathrm{F}_p - \mathrm{F}| > \varepsilon \right\} \leq \underset{p \geq n}{\text{Sup}} \left\{ |\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_n| > \varepsilon/2 \right\} + \left\{ |\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| > \varepsilon/2 \right\}$

$\leq \underset{p\,,\,q\, >\, n}{\text{Sup}} \left\{ |\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q| > \varepsilon/2 \right\} + \left\{ |\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| > \varepsilon/2 \right\} \overset{1}{\to} 0$.

B. 11. Théorème : $\underline{\mathcal{E}}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence p.p.

Dém : Soit $(\tilde{f}_n) \in \mathcal{EX}$ un représentant de F ; on a $\tilde{f}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \widehat{\mathrm{F}}$, donc $\tilde{f}_n \overset{\text{pp}}{\to} \widehat{\mathrm{F}}$.
Soit $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde{g}_n \in \mathcal{E}$ tel que $\sum\limits_n \| \tilde{f}_n - \tilde{g}_n \|_1 < +\infty$; alors $\tilde{f}_n - \tilde{g}_n \overset{\text{pp}}{\to} 0$, donc
$\tilde{g}_n = \tilde{f}_n + (\tilde{f}_n - \tilde{g}_n) \overset{\text{pp}}{\to} \mathrm{F}$.

B. 12.* Théorème : $\underline{\mathcal{C}}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence p.p.

B. 13.* Théorème : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence p.p.

B. 14. Définition :

Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est $\boxed{\textbf{dominée dans } \mathcal{FO}}$ ss'il existe $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}^+$ tel que
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|\mathrm{F}_n| \leq \mathrm{G}$.

B. 15. Théorème : Pour toute suite $\mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}$ on a $\boxed{\mathrm{F}_p \text{ D pp} \Leftrightarrow \mathrm{F}_p \text{ dominée dans } \mathcal{FO}}$.

Dém : On peut supposer $\forall\, p \in \mathbb{N}$ $\mathrm{F}_p \geq 0$.

a) $\Rightarrow$: Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde{g}_n = \underset{p}{\text{Sup}} \left(n \wedge \widehat{\mathrm{F}}_p \right) \in \mathcal{B}^+$; la suite $\tilde{g}_n$ est croissante ;
montrons que c'est une suite exacte ; posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n = \underset{p}{\text{Inf}} \left\{ \mathrm{F}_p \leq n \right\}$;

comme F_p est D pp, la suite σ_n est totale. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\left\{ \tilde{g}_{n+1} \leq n \right\}$

$= \left\{ \underset{p}{\text{Sup}} \left[(n+1) \wedge \mathrm{F}_p \right] \leq n \right\} = \underset{p}{\text{Inf}} \left\{ (n+1) \wedge \mathrm{F}_p \leq n \right\} = \underset{p}{\text{Inf}} \left\{ \mathrm{F}_p \leq n \right\} = \sigma_n$;

de plus $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \tilde{g}_{n+1} = n \wedge \operatorname*{Sup}_p \big[\,(n+1) \wedge \mathrm{F}_p\big] = \operatorname*{Sup}_p \big(n \wedge \mathrm{F}_p\big) = \tilde{g}_n\,,$

donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big\{\tilde{g}_{n+1} = \tilde{g}_n\big\} = \big\{\tilde{g}_{n+1} = n \wedge \tilde{g}_{n+1}\big\} = \big\{\tilde{g}_{n+1} \leq n\big\} = \sigma_n \xrightarrow{1} 1\,.$

La suite $\tilde{g}_n$ est donc exacte ; posons $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{FO}^+$; on a $\forall\, n\,,\, p \in \mathbb{N}$

$n \wedge \mathrm{F}_p \leq \tilde{g}_n \leq \mathrm{G}$; en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \mathrm{F}_p \leq \mathrm{G}\,.$

b) $\Leftarrow$: On a $\operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \big\{\mathrm{F}_p > \alpha\big\} \leq \big\{\mathrm{G} > \alpha\big\} \xrightarrow{\times} 0\,.$

B.16. <u>Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{FO}$</u>

Soit $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ une suite ***monotone*** et ***dominée dans*** $\mathcal{FO}$; alors F_n converge ***presque partout*** vers une fonctionnelle $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$. On note $\boxed{\mathrm{F} = \operatorname{Sup} \mathrm{F}_n \ \ \underline{\text{ou}} \ \ \operatorname{Inf} \mathrm{F}_n}$ suivant que la suite F_n est croissante ou décroissante.

<u>Dém</u> : Comme la suite F_n est monotone, il suffit de montrer que F_n est $\mathrm{C}\,\mathrm{ms}$.

On peut supposer la suite F_n croissante. On a $\forall\, \alpha > 0 \quad \forall\, p\,,\, q \in \mathbb{N}$

$\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q \leq \mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_q = \mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_p + \alpha \wedge \mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_q\,.$

Soit $\varepsilon > 0$; on a $\big\{\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q > \varepsilon\big\} \leq \big\{\mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_p > 0\big\} + \big\{\alpha \wedge \mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_q > \varepsilon\big\}$

$\leq \big\{\mathrm{F}_p > \alpha\big\} + \big\{\alpha \wedge \mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_q > \varepsilon\big\} \leq \big\{\mathrm{G} > \alpha\big\} + \big\{\alpha \wedge \mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_q > \varepsilon\big\}\,.$

Soit $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\mathrm{F}_n| \leq \mathrm{G}$; choisissons α tel que

$\big\|\big\{\mathrm{G} > \alpha\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon/2$; la suite $\alpha \wedge \mathrm{F}_n \in \mathcal{L}^1$ est croissante et majorée par α ;

elle converge donc en norme $\|\ \|_1$ et donc aussi en mesure ; il existe donc $N \in \mathbb{N}$

tel que $\forall\, p\,,\, q \geq N \quad \big\|\big\{\alpha \wedge \mathrm{F}_p - \alpha \wedge \mathrm{F}_q > \varepsilon\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon/2$; on en déduit $\forall\, p\,,\, q \geq N$

$\big\|\big\{\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q > \varepsilon\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon$. La suite F_n est donc $\mathrm{C}\,\mathrm{ms}$.

B.17. <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n\,,\, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$; alors on a

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1} \wedge \big|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\big| \overset{\times}{\to} 0 \\[2ex] \mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \big|\mathrm{F}_p - \mathrm{F}\big| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0 \end{array}}$$

B.18. <u>Théorème</u> : Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est $\mathrm{C}\,\mathrm{pp}$ ssi $\boxed{\operatorname*{Sup}_{p\,,\,q \geq n} \big|\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_q\big| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0}\,.$

B.19. <u>Définition</u> : Soit $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ une suite <u>dominée dans $\mathcal{FO}$</u>. On pose

$$\boxed{\underline{\operatorname{Lim}}_{n}\, \mathrm{F}_n = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname*{Inf}_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{n+p} \quad \text{et} \quad \overline{\operatorname{Lim}}_{n}\, \mathrm{F}_n = \operatorname*{Inf}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{n+p}}\,.$$

$\underline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n$ et $\overline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n$ sont respectivement la Limite Inférieure et la Limite Supérieure de la suite $F_n \in \mathcal{FO}$.

B. 20. Théorème :

Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ converge p.p. vers $F \in \mathcal{FO}$ ssi $\boxed{F = \underline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n = \overline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n}$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit $n \in \mathbb{N}$; on a

$$\left| \left(\operatorname{Sup}_{p \in \mathbb{N}} F_{n+p} \right) - F \right| = \left| \operatorname{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \left(F_{n+p} - F \right) \right| \leq \operatorname{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \left| F_{n+p} - F \right| = \operatorname{Sup}_{r \geq n} \left| F_r - F \right| \overset{\text{ms}}{\rightarrow} 0 \;;$$

donc $F = \overline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n$; on a de même

$$\left| \left(\operatorname{Inf}_{p \in \mathbb{N}} F_{n+p} \right) - F \right| = \left| \operatorname{Inf}_{p \in \mathbb{N}} \left(F_{n+p} - F \right) \right| \leq \operatorname{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \left| F_{n+p} - F \right| \overset{\text{ms}}{\rightarrow} 0 \;; \text{ donc } F = \underline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n .$$

b) $\Leftarrow$: Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $\forall\, r \geq n \quad \left(\operatorname{Inf}_{p \geq n} F_p \right) - F \leq F_r - F \leq \left(\operatorname{Sup}_{p \geq n} F_p \right) - F$,

donc $\forall\, r \geq n \quad |F_r - F| \leq \left| \left(\operatorname{Inf}_{p \geq n} F_p \right) - F \right| \vee \left| \left(\operatorname{Sup}_{p \geq n} F_p \right) - F \right|$;

$$\text{donc} \quad \operatorname{Sup}_{r \geq n} |F_r - F| \leq \left| \left(\operatorname{Inf}_{p \geq n} F_p \right) - \tilde{f} \right| \vee \left| \left(\operatorname{Sup}_{p \geq n} F_p \right) - F \right|$$

$$= \left| \left(\operatorname{Inf}_{p \in \mathbb{N}} F_{n+p} \right) - F \right| \vee \left| \left(\operatorname{Sup}_{p \in \mathbb{N}} F_{n+p} \right) - F \right| \overset{\text{ms}}{\rightarrow} 0 .$$

Notation : On note $\boxed{\operatorname{Lim}_n \; F_n}$ la limite d'une suite F_n convergente p.p.

B. 21.* Théorème : Soit $F \in \mathcal{FO}$ et soit une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ telle que $F_n \overset{\text{ms}}{\rightarrow} F$;

alors on a $\boxed{\underline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n \leq F \leq \overline{\operatorname{Lim}}_n \; F_n}$.

B. 22. Théorème : De toute suite C ms on peut extraire une sous-suite C pp.

B. 23. Théorème : Pour une suite monotone dans $\mathcal{FO}$ les quatre concepts C ms, C pp, D ms, D pp sont équivalents.

C. Convergence plate

C. 1. Définition : $\forall\, F_n, F_n \in \mathcal{FO} \quad \left[F_n \overset{\mathsf{A}}{\rightarrow} F \;\Leftrightarrow\; \left\{ F_n \neq F \right\} = S\left(F_n - F\right) \overset{1}{\rightarrow} 0 \right]$.

Notation : On note $\boxed{{}^{\mathsf{A}}\lim_n \; F_n}$ la limite d'une suite F_n convergeant platement.

C.2. <u>Corollaire</u> : La topologie de $\mathcal{FO}$ pour la convergence plate peut être définie par la pseudo-norme $\boxed{\|F\|_{\mathsf{A}} = \|S(F)\|_1} \geq \|F\|_{ms}$.

C.3. <u>Théorème</u> : Soient $\widehat{F}_n, F \in \mathcal{FO}$, $F_n \xrightarrow{\mathsf{A}} F$; alors on a $\boxed{S(F_n) \xrightarrow{1} S(F)}$.

C.4. <u>Définition</u> : Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est <u>Cauchy-plate</u> (C-plate) ssi la suite double $\{F_p \neq F_q\} = S(F_p - F_q) \xrightarrow{1} 0$, c-à-d ssi

$$\sup_{p,q \geq n} \|\{F_p \neq F_q\}\|_1 = \sup_{p,q \geq n} \|S(F_p - F_q)\|_1 \to 0.$$

C.5. <u>Théorème</u> : $\mathcal{FO}$ est complet pour la convergence plate.

C.6. <u>Théorème</u> : $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence plate.

C.7. <u>Théorème</u> : $(\mathcal{FO}, |\ |, \|\ \|_{\mathsf{A}})$ est un pseudo-espace de Riesz-Banach.

D. <u>Convergence exacte</u>

D.1. <u>Définition</u> : $\forall\, F_n, F_n \in \mathcal{FO}$ $\left[F_n \xrightarrow{\mathsf{E}} F \Leftrightarrow \{F_n \neq F\} = S(F_n - F) \xrightarrow{\times} 0 \right]$.

<u>Notation</u> : On note $\boxed{{}^{\mathsf{E}}\lim_n F_n}$ la limite d'une suite F_n convergeant exactement.

D.2. <u>Théorème</u> : $\forall\, F = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{EX}$ on a $\boxed{\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} F}$.

<u>Dém</u> :

Il faut montrer $\{\tilde{f}_n \neq F\} \xrightarrow{\times} 0$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\{\tilde{f}_n \neq F\} = \{\tilde{f}_n > F\} \vee \{\tilde{f}_n < F\}$; montrons par exemple $\{\tilde{f}_n > F\} \xrightarrow{\times} 0$; soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde{f}_n$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\{\tilde{f}_n > F\} \leq |\{\tilde{f}_n > F\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{f}_n\}| + \{\tilde{f}_n > \tilde{f}_n\} \leq 1 - \sigma_n$; donc $\{\tilde{f}_n > F\} \xrightarrow{\times} 0$.

D.3. <u>Définition</u> : Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est <u>Cauchy-exacte</u> (C-exacte) ssi la suite double $\{F_p \neq F_q\} = S(F_p - F_q) \xrightarrow{\times} 0$, c-à-d ssi $\operatorname{Sup}_{p,q \geq n} \{F_p \neq F_q\} = \operatorname{Sup}_{p,q \geq n} S(F_p - F_q) \xrightarrow{1} 0$.

D.4. <u>Théorème</u> : La suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est C-exacte ssi $\boxed{S(F_{n+1} - F_n) \xrightarrow{\times} 0}$.

D.5. <u>Théorème</u> : Soient $F_n, F \in \mathcal{FO}$, $F_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \widehat{F}$; alors on a $\boxed{S(F_n) \xrightarrow{\times} S(F)}$.

D.6. <u>Théorème</u> : $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence exacte.

D.7. Théorème : $\mathcal{FO}$ est complet pour la convergence exacte.

D.8. Théorème : De toute suite C-plate on peut extraire une sous-suite C-exacte.

D.9. Théorème de balayage dans $\mathcal{FO}$:

Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$; alors on a $\boxed{{}^{\mathsf{E}}\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \alpha \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}}$ et $\boxed{{}^{\mathsf{E}}\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (-\alpha) \vee \mathrm{F} \wedge \alpha = \mathrm{F}}$.

D.10. Théorème : Soit $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$; supposons que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \big\| \mathrm{S}(\mathrm{F}_n) \big\|_1 < +\infty$; alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{F}_n$ converge exactement dans $\mathcal{FO}$ et $\mathrm{F}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$.

§ 5. Equations linéaires dans $\mathcal{FO}$

Contenu : On résoud l'*équation* $\boxed{\mathrm{F}\,\mathrm{X} = \mathrm{H}}$ d'inconnue X, avec $\mathrm{F}, \mathrm{X}, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}$.

5.1. Théorème :

Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$ tel que $|\mathrm{F}| \geq 1$; alors il existe un unique $\tilde{g} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathrm{F}\,\tilde{g} = 1$; on note $\boxed{\tilde{g} = \dfrac{1}{\mathrm{F}}}$. On a de plus $\left|\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right| = \dfrac{1}{|\mathrm{F}|} \leq 1$ et $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right) = 1$.

Dém :

L'unicité se démontre comme dans $\mathcal{L}^1$. Montrons l'existence ; soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{B}$ telle que $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \mathrm{F}$ et telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|\tilde{f}_n| \geq 1$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{\tilde{f}_n} \in \mathcal{B}$ et $\left|\dfrac{1}{\tilde{f}_n}\right| \leq 1$; de plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\tilde{f}_{n+1}} - \dfrac{1}{\tilde{f}_n}\right) = \mathrm{S}\left(\dfrac{\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n}{\tilde{f}_{n+1}\,\tilde{f}_n}\right) = \mathrm{S}\,(f_{n+1} - f_n)$.
On en déduit que $\dfrac{1}{\tilde{f}_n}$ est une suite exacte dans $\mathcal{FO}$; or cette suite est bornée par 1, donc elle converge exactement vers une fonctionnelle $\tilde{g} \in \mathcal{B}$ telle que $|\tilde{g}| \leq 1$; on peut donc écrire $\mathrm{F}\,\tilde{g} = {}^{\mathsf{E}}\lim\limits_{n} \tilde{f}_n \dfrac{1}{\tilde{f}_n} = 1$. Par ailleurs $|\mathrm{F}|\,|\tilde{g}| = |\mathrm{F}\,\tilde{g}| = 1$, donc par unicité $\dfrac{1}{|\mathrm{F}|} = |\tilde{g}| = \left|\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right|$; enfin on a $1 = \mathrm{S}\,(\mathrm{F}\,\tilde{g}) = \mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\mathrm{S}\,(\tilde{g}) = \mathrm{S}\,(\tilde{g})$.

5.2. Théorème : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}$ tels que $\mathrm{S}\,(\mathrm{H}) \leq \mathrm{S}\,(\mathrm{F}) \leq |\mathrm{F}|$; alors il existe un unique $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}$ tel que $\mathrm{F}\,\mathrm{G} = \mathrm{H}$ et $\mathrm{S}\,(\mathrm{G}) \leq \mathrm{S}\,(\mathrm{F})$.

Dém :

Posons $F^* = F + 1 - S(F)$; on a $|F| \wedge \left[1 - S(F)\right] = 0$, donc $|F^*| = |F| + 1 - S(F) \geq 1$,

donc $\dfrac{1}{F^*} \in \mathcal{B}$ existe ; posons $G = \dfrac{S(F)\,H}{F^*} \in \mathcal{FO}$; on a clairement $S(G) \leq S(F)$;

de plus $F\,G = \dfrac{S(F)\,F\,H}{F^*} = \dfrac{S(F)\left(F + [1 - S(F)]\right)H}{F^*} = \dfrac{S(F)\,F^*\,H}{F^*} = S(F)\,H = H$.

Démontrons l'unicité ; soient $G_1, G_2 \in \mathcal{FO}$ tels que $F\,G_1 = H$ et $F\,G_2 = H$;

on en déduit $F(G_1 - G_2) = 0$; donc $S(F)\,S(G_1 - G_2) = S(G_1 - G_2) = 0$,

donc $G_1 - G_2 = 0$.

5.3. Corollaire : Soient $F, H \in \mathcal{FO}$ tels que $S(H) \leq S(F)$; supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S(F) \leq n\,|F|$; alors il existe un unique $G \in \mathcal{FO}$ tel que $F\,G = H$ et $S(G) \leq S(F)$.

Dém : On applique le théorème précédent à $n\,F$ et $n\,H$.

5.4. Thèorème fondamental : Soient $F, H \in \mathcal{FO}$ tels que $S(H) \leq S(F)$; alors il existe un unique $G \in \mathcal{FO}$ tel que $F\,G = H$ et $S(G) \leq S(F)$.

Dém : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $\left\{|F| \geq \frac{1}{n}\right\} F\,X = \left\{|F| \geq \frac{1}{n}\right\} H$ satisfait les conditions du corollaire précédent ; soit $G_n \in \mathcal{FO}$ la solution unique de cette équation vérifiant la condition $S(G_n) \leq \left\{|F| \geq \frac{1}{n}\right\}$; on a alors aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $F\,G_n = \left\{|F| \geq \frac{1}{n}\right\} H$.

On en déduit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $(G_{n+1} - G_n)\,F = \left[\left\{|F| \geq \frac{1}{n+1}\right\} - \left\{|F| \geq \frac{1}{n}\right\}\right] H$;

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $S(G_{n+1} - G_n)\,S(F) = \left[\left\{|F| \geq \frac{1}{n+1}\right\} - \left\{|F| \geq \frac{1}{n}\right\}\right] S(H)$

$\leq \left[1 - \left\{|F| \geq \frac{1}{n}\right\}\right] S(H) = \left\{|F| \leq \frac{1}{n}\right\} S(H) \leq \left\{|F| \leq \frac{1}{n}\right\} S(F)$;

or $S(G_{n+1} - G_n) \leq S(F)$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $S(G_{n+1} - G_n) \leq \left\{|F| \leq \frac{1}{n}\right\} S(F)$;

de plus $\left\{|F| \leq \frac{1}{n}\right\} \xrightarrow{1} 1 - S(F)$, donc la suite $\left\{|F| \leq \frac{1}{n}\right\} S(F) \xrightarrow{1} 0$; par ailleurs cette suite est aussi décroissante ; elle est donc déclinante et la suite G_n est exacte.

Soit $G \in \mathcal{FO}$ la limite de la suite G_n ; on a $S(G_n) \xrightarrow{\times} S(G)$, donc $S(G) \leq S(F)$;

en faisant $n \to +\infty$ dans l'équation de départ on obtient $S(F)\,F\,G = S(F)\,H$,

c-à-d $F\,G = H$. L'unicité se démontre comme au Théorème 5.2.

Chapitre XII : Pseudo-mesures, mesures, fonctionnelles sur $\mathbb{R}$

Contenu :

Nous étendons à $\mathbb{R}$ les concepts et les théorèmes déjà définis et démontrés sur $[a,b]$.

La plupart des théorèmes constituent des généralisations évidentes de résultats précédents et leurs démonstrations sont laissées au lecteur.

§ 0. Notations

A. Algèbres de fonctions

$\mathcal{E}(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étagées (= localement étagées)

$\mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étagées bornées

$\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étagées à support borné

Idem pour $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$.

$\mathcal{W}(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ universelles (= localement universelles)

$\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ universelles bornées

$\mathcal{W}_O(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ universelles à support borné

$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement bornées

$\mathcal{F}_B(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées

$\mathcal{F}_O(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées à support borné

Remarque : Toutes ces algèbres sont des algèbres de Riesz.

B. Normes, semi-normes, convergences.

Si $f \in \mathcal{F}_B(\mathbb{R})$ on pose $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Si $f \in \mathcal{W}_O(\mathbb{R})$ on pose $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ et $\|f\|_2 = \left[\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\, dx \right]^{1/2}$.

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ on note :

$f_n \xrightarrow{\bullet} f$ ssi f_n converge simplement (ou ponctuellement) vers f sur $\mathbb{R}$, c-à-d ssi

$$\boxed{\forall\, c \in \mathbb{R} \quad f_n(c) \to f(c)}\,.$$

Dans $\mathcal{F}_B(\mathbb{R})$ on note :

1) $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$ ssi f_n converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ et ssi la suite $\|f_n\|$ est bornée ; c'est la convergence bornée.

2) $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$ ssi f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c-à-d ssi $\|f_n - f\| \to 0$.

C. `Restriction d'une forme linéaire sur` $\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$.

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{I}_k = [-k\,,\,k]$; soit $h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}_k)$; on identifie h et la fonction de $\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ égale à h dans I_k et à 0 dans $\mathbb{R} - \mathrm{I}_k$.

Soit $\tilde{f}$ une forme linéaire sur $\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$; on note $\tilde{f}_{(k)}$ la forme linéaire sur $\mathcal{E}(\mathrm{I}_k)$ définie par $\tilde{f}_{(k)} \ :\ \mathcal{E}(\mathrm{I}_k) \to \mathbb{R} \ :\ h \mapsto \tilde{f}(h)$; on appelle $\tilde{f}_{(k)}$ la restriction de $\tilde{f}$ à I_k.

§ 1. Pseudo-mesures et mesures sur $\mathbb{R}$

1.1. Définition : Une pseudo-mesure sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire $\tilde{f}$ sur $\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ telle que $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde{f}_{(k)} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{PM}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures sur $\mathbb{R}$.

1.2. Théorème : Tout $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ s'étend naturellement à $\mathcal{R}_O(\mathbb{R})$.

1.3. Définition : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ on pose $\boxed{\tilde{f} \leq \tilde{g} \quad \text{ssi} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde{f}_{(k)} \leq \tilde{g}_{(k)}}$.

1.4. Définition : La suite $\tilde{f}_k \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}_k)$ est inductive ssi $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $\tilde{f}_k$ est la restriction de $\tilde{f}_{k+1}$ à I_k, c-à-d ssi $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $\left(\tilde{f}_{k+1}\right)_{(k)} = \tilde{f}_k$. Une suite inductive $\tilde{f}_k$ définit de manière naturelle un élément $\tilde{f}$ de $\mathcal{PM}(\mathbb{R})$, appelé limite inductive de $\tilde{f}_k$ et noté $\boxed{\tilde{f} = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \tilde{f}_k}$; alors on a $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $\tilde{f}_{(k)} = \tilde{f}_k$.

1.5. Définition :

Soient $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$; alors la suite $\tilde{g}_{(k)}\,\tilde{f}_{(k)} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}_k)$ est inductive ;

on pose $\boxed{g\,\tilde f = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \tilde g_{(k)}\,\tilde f_{(k)}} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$.

1.6. <u>Définition</u> : $\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ est une <u>mesure</u> ssi $\boxed{\forall\, k \in \mathrm{I\!N}^* \quad \tilde f_{(k)} \in \mathcal{M}(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{M}(\mathrm{I\!R})$ l'espace vectoriel des mesures sur $\mathrm{I\!R}$.

1.7. <u>Théorème</u> : Tout $\tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{I\!R})$ s'étend naturellement à $\mathcal{W}_O(\mathrm{I\!R})$.

1.8. <u>Définition</u> :

Soient $\tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{I\!R})$ et $g \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$; alors la suite $\tilde g_{(k)}\,\tilde f_{(k)} \in \mathcal{M}(\mathrm{I}_k)$ est inductive ;

on pose $\boxed{g\,\tilde f = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \tilde g_{(k)}\,\tilde f_{(k)}} \in \mathcal{M}(\mathrm{I\!R})$.

1.9. <u>Définition</u> : $\tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{I\!R})$ est une mesure <u>diffuse</u> ssi $\boxed{\forall\, c \in \mathrm{I\!R} \quad \tilde f\big(1_{\{c\}}\big) = 0}$.

On note $\mathcal{M}_D(\mathrm{I\!R})$ l'espace vectoriel des mesures diffuses sur $\mathrm{I\!R}$.

1.10. <u>Théorème - Définition</u> :

$\forall\, f \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$ la forme linéaire $\boxed{\{f\} \ : \ \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}) \to \mathrm{I\!R} \ : \ g \mapsto \int_{\mathrm{I\!R}} g\, f\, dx}$ est une mesure ;

$\{f\}$ est la mesure <u>associée</u> à f .

En particulier à la fonction constante $\boxed{\mathbb{1} = 1_{\mathrm{I\!R}} \in \mathcal{E}(\mathrm{I\!R})}$ est associée la mesure

$\boxed{\{\mathbb{1}\} \ : \ \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}) \to \mathrm{I\!R} \ : \ g \mapsto \int_{\mathrm{I\!R}} g\, dx}$; c'est la $\boxed{\text{mesure de Lebesgue}}$.

<u>*Notation*</u> : On note $\underline{\mathcal{W}}(\mathrm{I\!R}) = \big\{\{f\} \,\|\, f \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R})\big\}$; c'est un sous-espace de $\mathcal{M}(\mathrm{I\!R})$; on utilise une notation analogue pour tous les *sous-ensembles* de $\mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$.

<u>Remarque</u> : Nous verrons plus loin que $\forall\, f \in \mathcal{R}$ la mesure $\{f\}$ est de fait une *fonctionnelle localement bornée* . Nous parlerons donc de $\{f\}$ comme étant la <u>fonctionnelle associée</u> à f, plutôt que la mesure associée à f.

$\boxed{\text{Dans la pratique on remplacera communément la notation } \{f\} \text{ par la notation } f}$.

1.11. <u>Définition</u> :

$\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ est <u>normée</u> (ou <u>intégrable</u>) ssi $\boxed{\|\tilde f\|_\star \ = \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}) \\ \|g\| = 1}} |\tilde f(g)| < +\infty}$

On note $\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R}) = \{\, \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R}) \parallel \tilde f$ normée $\}$,

$\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) = \{\, \tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{I\!R}) \parallel \tilde f$ normée $\}$, $\quad \mathcal{M}^\bullet_D(\mathrm{I\!R}) = \{\, \tilde f \in \mathcal{M}_D(\mathrm{I\!R}) \parallel \tilde f$ normée $\}$.

1.12. <u>Définition</u> : $\tilde f \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})^+$ est une <u>(mesure de) probabilité</u> sur $\mathrm{I\!R}$ ssi $\|\tilde f\|_\star = 1$.

<u>*Notation*</u> : On note $\mathcal{P}(\mathrm{I\!R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathrm{I\!R}$ et $\mathcal{P}_D(\mathrm{I\!R})$ l'ensemble des mesures de probabilité diffuses sur $\mathrm{I\!R}$.

1.13. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}), \|\ \|\big)}$.

1.14. <u>Théorème de Riesz-Radon</u> :

$$\boxed{\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \text{ est isométrique au N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{C}_O(\mathrm{I\!R}), \|\ \|\big)}.$$

1.15. <u>Définition</u> : <u>Convergence en norme $\|\ \|_\star$</u>

$\forall\, \tilde f_n, \tilde f \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ on écrit $\tilde f_n \xrightarrow{\star} \tilde f$ (ou $\tilde f = {}^\star\lim\limits_n \tilde f_n$) ssi $\|\tilde f_n - \tilde f\|_\star \to 0$.

1.16. <u>Théorème</u> : $\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ et $\mathcal{M}^\bullet_D(\mathrm{I\!R})$ sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$.

1.17. <u>Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$</u>

Soit $\tilde f_n \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ une suite <u>monotone</u> ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\|\tilde f_n\|_\star \le M$; alors $\tilde f_n$ converge en norme $\|\ \|_\star$ vers une pseudo-mesure $\tilde f \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$; on a donc aussi $\lim\limits_n \|\tilde f_n\|_\star = \|\tilde f\|_\star$.

1.18. <u>Définition</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ est <u>dominée</u> ss'il existe $\widetilde F \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})^+$ tel que $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $|\tilde f_n| \le \widetilde F$.

1.19. <u>Définition</u> : <u>Convergence fine</u>

Soient $\tilde f_n, \tilde f \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ et supposons la suite $\tilde f_n$ dominée ; on écrit $\tilde f_n \xrightarrow{\times} \tilde f$ ssi $\forall\, k \in \mathrm{I\!N}^*$ $(\tilde f_n)_{(k)} \xrightarrow{\times} \tilde f_{(k)}$.

1.20. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde f_n, \tilde f \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ et supposons la suite $\tilde f_n$ dominée ; alors $[\ \tilde f_n \xrightarrow{\times} \tilde f \ \Rightarrow\ \tilde f_n \xrightarrow{\star} \tilde f\ ]$.

1.21. <u>Théorème</u> : Soit $f \in \mathcal{F}_B(\mathrm{I\!R})$; alors $f \in \mathcal{PR}_B(\mathrm{I\!R})$ ss'il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$.

1.22. Théorème : Soit $f \in \mathcal{F}_B(\mathbb{R})$; alors $f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ ssi

$$\boxed{\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+ \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \;\; g, h \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}) \;\; \text{tels que} \;\; g \le f \le h \;\; \text{et} \;\; \tilde{\mu}(h-g) \le \varepsilon}\,.$$

1.23. Théorème : $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}^\bullet_D(\mathbb{R})$ sont des espaces de Riesz-Banach et des modules de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$.

Notation : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ on pose $\boxed{\mathsf{X}_k = \mathbb{1}_{[-k\,,\,k]}} \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$.

1.24. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \;\; \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ la suite $\tilde{f}\big(\mathsf{X}_k\, g\big)$ est convergente.

Dém : Soient d'abord $\tilde{f} \ge 0$ et $g \ge 0$; alors la suite $\mathsf{X}_k\, g$ est positive et croissante ; de plus $\forall\, k \in \mathbb{N}^* \;\; 0 \le \tilde{f}\big(\mathsf{X}_k\, g\big) \le \|\tilde{f}\|_\star\, \|g\|$; la suite $\tilde{f}\big(\mathsf{X}_k\, g\big)$ est donc croissante et majorée, donc convergente. Pour $\tilde{f}$ et g quelconques on a $\tilde{f}(\mathsf{X}_k\, g) = \tilde{f}^+(\mathsf{X}_k\, g^+)$ $- \tilde{f}^+(\mathsf{X}_k\, g^-) - \tilde{f}^-(\mathsf{X}_k\, g^+) + \tilde{f}^-(\mathsf{X}_k\, g^-)$, qui est donc aussi une suite convergente.

1.25. Définition : On pose $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \;\; \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ $\boxed{\tilde{f}(g) = \lim\limits_{k \to +\infty} \tilde{f}\big(\mathsf{X}_k\, g\big)}$.

1.26. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \;\; \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ on a $|\tilde{f}(g)| \le \|\tilde{f}\|_\star\, \|g\|$.

Notation intégrale : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \;\; \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ on note

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} g(x)\, \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} g\, \tilde{f} = \tilde{f}(g)}\,.$$

1.27. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $\|\tilde{f}\|_\star = \sup\limits_{\substack{g \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}) \\ \|g\| = 1}} |\tilde{f}(g)| = \sup\limits_{\substack{g \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R}) \\ \|g\| = 1}} |\tilde{f}(g)|$.

§ 2. Pseudo-mesures paires et impaires

2.1. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ est paire ssi $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ *impaire* on a $\tilde{f}(h) = 0$.
$\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ est impaire ssi $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ *paire* on a $\tilde{f}(h) = 0$.

2.2. Théorème : On pose $\forall\, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \;\; h_-(x) = h(-x)$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire) ssi $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \;\; \tilde{f}(h_-) = \tilde{f}(h)$ $\big[$resp. $\tilde{f}(h_-) = -\tilde{f}(h)\big]$.

Dém : $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ on a $h = \frac{1}{2}(h + h_-) + \frac{1}{2}(h - h_-)$; donc si $\tilde{f}$ est paire on a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \;\; \tilde{f}(h) = \frac{1}{2}\big[\tilde{f}(h) + \tilde{f}(h_-)\big]$, donc $\tilde{f}(h_-) = \tilde{f}(h)$.

Réciproquement soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ tel que $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ $\tilde{f}(h_-) = -\tilde{f}(h)$;

soit $h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ impaire ; alors on a $h = \frac{1}{2}(h - h_-)$, donc $\tilde{f}(h) = 0$, donc $\tilde{f}$ est paire.

§ 3. Fonctionnelles localement sommables sur $\mathrm{I\!R}$

3.1. Définition :

$\tilde{f} \in \mathcal{M}_D(\mathrm{I\!R})$ est une fonctionnelle localement sommable ssi $\boxed{\forall\, k \in \mathrm{I\!N}^* \quad \tilde{f}_{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles localement sommables.

3.2. Théorème : $\mathcal{W}(\mathrm{I\!R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ et $\mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$.

Notation : On pose $\boxed{\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R}) = \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R}) \cap \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})}$.

Si $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ on dit que f est sommable (ou intégrable).

Notation : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ on note $\boxed{\|\tilde{f}\|_1 = \|\tilde{f}\|_\star}$.

Notation intégrale : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ on note $\boxed{\int_{\mathrm{I\!R}} \tilde{f}(x)\, dx = \tilde{f}(\mathbb{1})}$ $\quad \big(\mathbb{1} = 1_{\mathrm{I\!R}}\big)$.

3.3. Définition : Convergence en norme $\|\ \|_1$

$\forall\, \tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ on écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$ (ou $\tilde{f} = {}^1\lim\limits_n \tilde{f}_n$) ssi $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_1 \to 0$.

3.4. Théorème :

$\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ est la fermeture de $\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ dans $\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})$; c'est un espace de Riesz-Banach.

3.5. Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\|\tilde{f}_n\|_1 \le M$; alors $\tilde{f}_n$ converge en norme $\|\ \|_1$ vers une fonctionnelle $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$; on a donc aussi $\lim\limits_n \|\tilde{f}_n\|_1 = \|\tilde{f}\|_1$.

3.6. Théorème : $\mathcal{W}_O(\mathrm{I\!R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ et $\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$.

3.7. Théorème : $\mathcal{C}_O(\mathrm{I\!R})$ est dense dans $\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$.

§ 4. Fonctionnelles localement hilbertiennes sur $\mathbb{R}$

4.1. Définition :

$\tilde f \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle localement hilbertienne ssi $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde f_{(k)} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles localement hilbertiennes.

4.2. Théorème : $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

Sur $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ on définit le produit de deux éléments de la manière suivante :

4.3. Définition : Soient $\tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$; la suite $\tilde f_{(k)}\, \tilde g_{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}_k)$ est inductive ;

on peut donc poser $\boxed{\tilde f\, \tilde g = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \tilde f_{(k)}\, \tilde g_{(k)}} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$.

4.4. Définition : $\tilde f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est hilbertienne ssi $\boxed{\|\tilde f\|_2 = \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \\ \|g\|_2 = 1}} |\tilde f(g)| < +\infty}$

On note $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles hilbertiennes.

4.5. Théorème : $\boxed{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E}_O(\mathbb{R})\,,\ \|\ \|_2\big)}$.

4.6. Définition : Convergence en norme $\|\ \|_2$

$\forall\, \tilde f_n\,, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on écrit $\tilde f_n \overset{2}{\to} \tilde f$ $\big($ou $\tilde f = {}^2\lim_n \tilde f_n\big)$ ssi $\|\tilde f_n - \tilde f\|_2 \to 0$.

4.7.* Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Soit $\tilde f_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\tilde f_n\|_2 \leq M$; alors $\tilde f_n$ converge en norme $\|\ \|_2$ vers une fonctionnelle $\tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; on a donc aussi $\lim_n \|\tilde f_n\|_2 = \|\tilde f\|_2$.

4.8. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\|\tilde f\|_2^2 = \|\tilde f^{\,2}\|_1$.

4.9. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\tilde f\, \tilde g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\|\tilde f\, \tilde g\|_1 \leq \|\tilde f\|_2\, \|\tilde g\|_2$.

4.10. Théorème : On définit le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en posant

$\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ $\boxed{\big\langle \tilde f, \tilde g \big\rangle = \big(\tilde f\, \tilde g\big)(\mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}} \tilde f\, \tilde g\ dx}$.

4.11.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \forall\, g \in \mathcal{R}_O(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\langle \tilde{f}, g \rangle = \tilde{f}(g)}$.

4.12. Théorème : $\big(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle\big)$ est un espace de Riesz-Hilbert.

4.13. Théorème : $\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_O(\mathbb{R})$ sont denses dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

4.14. Définition : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on pose $\|\tilde{f}\|_{1,2} = \|\tilde{f}\|_1 + \|\tilde{f}\|_2$.

4.15. Théorème : $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \|\ \|_{1,2})$ est un espace de Riesz-Banach.

Dém : Il suffit de montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\ \|_{1,2}$. Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ une suite de Cauchy pour $\|\ \|_{1,2}$; comme $\|\ \|_1 \leq \|\ \|_{1,2}$ et $\|\ \|_2 \leq \|\ \|_{1,2}$, $\tilde{f}_n$ est aussi une suite de Cauchy pour $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$; donc $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\tilde{f}_n \xrightarrow{2} \tilde{h} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\tilde{f}_n(k) - \tilde{g}(k)| \leq \|\tilde{f}_n - \tilde{g}\|_1 \|k\|$ et $|\tilde{f}_n(k) - \tilde{h}(k)| \leq \|\tilde{f}_n - \tilde{h}\|_2 \|k\|_2$; donc $\tilde{f}_n(k) \to \tilde{g}(k)$ et $\tilde{f}_n(k) \to \tilde{h}(k)$; on en déduit $\tilde{g} = \tilde{h}$ et $\|\tilde{f}_n - \tilde{g}\|_{1,2} = \|\tilde{f}_n - \tilde{g}\|_1 + \|\tilde{f}_n - \tilde{g}\|_2 \to 0$; donc $\tilde{f}_n \xrightarrow{1,2} \tilde{g}$.

§ 5. Fonctionnelles localement bornées sur $\mathbb{R}$

5.1. Définition :

$\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle localement bornée ssi $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde{f}_{(k)} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles localement bornées.

5.2. Théorème : $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$.

5.3. Théorème : $\boxed{\mathcal{W}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est une algèbre de Riesz.

5.4. Théorème : 1) $\mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$.

2) $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

5.5. Définition :

Soient $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ et $\tilde{g} \in \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$; alors la suite $\tilde{g}_{(k)}\, \tilde{f}_{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}_k)$ est inductive ; on pose $\boxed{\tilde{g}\,\tilde{f} = \operatorname*{\boldsymbol{Lim}}_k\ \tilde{g}_{(k)}\, \tilde{f}_{(k)}} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$.

5.6. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est bornée ssi $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} = \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \\ \|g\|_1 = 1}} |\tilde{f}(g)| < +\infty}$

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles bornées.

5.7. Théorème : $\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \left(\mathcal{E}_O(\mathbb{R})\,,\ \|\ \|_1\right)}$.

5.8. Théorème :

$\tilde{f} \in \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle bornée ss'il existe $M > 0$ tel que $|\tilde{f}| \leq M$.

5.9. Théorème : $\forall\, \tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\|\,\tilde{f}\,\tilde{g}\,\|_{\mathrm{B}} \leq \|\,\tilde{f}\,\|_{\mathrm{B}}\,\|\,\tilde{g}\,\|_{\mathrm{B}}$.

5.10. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a $\|\,\tilde{f}\,\tilde{g}\,\|_1 \leq \|\,\tilde{f}\,\|_{\mathrm{B}}\,\|\,\tilde{g}\,\|_1$.

5.11. Théorème : 1) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$.

5.12. Théorème :

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et on a $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\|\tilde{f}\|_2^2 \leq \|\,\tilde{f}\,\|_{\mathrm{B}}\,\|\,\tilde{f}\,\|_1$.

5.13. Théorème : $\boxed{\underline{\mathcal{W}_B}\,(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une algèbre de Riesz-Banach.

5.14. Théorème :

L'application $\boxed{\mathcal{W}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) \ :\ f \mapsto \{f\}}$ est un algébromorphisme de Riesz.

5.15. Corollaire : $\boxed{\forall\, f,\, g \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \quad \{f\,g\} = \{f\}\,\{g\} = f.\{g\}}$.

5.16. Définition :

On note $\mathcal{Z}(\mathbb{R}) = \left\{\, f \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \;\middle\|\; \{f\} = 0 \,\right\}$ et $\mathcal{Z}_B(\mathbb{R}) = \left\{\, f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}) \;\middle\|\; \{f\} = 0 \,\right\}$;

$\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ $\left[\text{resp. } \mathcal{Z}_B(\mathbb{R})\right]$ est l'espace des fonctions universelles (resp. universelles bornées) nulles presque partout.

5.17. Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ on a $\left[\, f \in \mathcal{Z}_B(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|\; dx = 0 \,\right]$.

5.18. Théorème :

$\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Z}_B(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces cohérents et intégraux de $\mathcal{W}(\mathbb{R})$;

de plus ce sont des idéaux respectivement de $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$; enfin on a

$$\boxed{\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{W}(\mathbb{R})/\mathcal{Z}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{W}_B(\mathbb{R})/\mathcal{Z}_B(\mathbb{R})}.$$

§ 6. Fonctionnelles caractéristiques. Mesures totalement singulières

6.1. Définition :

$\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle caractéristique ssi $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde{f}_{(k)} \in \mathcal{K}(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctionnelles caractéristiques ; on a $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

6.2. Théorème : $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

On pose $\mathcal{EK}(\mathbb{R}) = \{\, f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \parallel f^2 = f \,\} = \{\, f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}) \parallel f^2 = f \,\}$.

6.3. Théorème : $\mathcal{EK}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

6.4. Définition : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ la suite $\mathrm{S}\big(\tilde{f}_{(k)}\big) \in \mathcal{K}(\mathrm{I}_k)$ est inductive et on note

$$\boxed{\mathrm{S}(\tilde{f}) = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \mathrm{S}\big(\tilde{f}_{(k)}\big) \in \mathcal{K}(\mathbb{R})}\,.$$

6.5. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{S}(\tilde{f}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$.

6.6. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{S}(\tilde{f}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{1} \wedge |\tilde{f}| = 0$.

6.7. Définition : On note $\mathcal{N}(\mathbb{R}) = \{\, \tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \parallel \mathbb{1} \wedge |\tilde{f}| = 0 \,\}$

et $\mathcal{N}^\bullet(\mathbb{R}) = \{\, \tilde{f} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \parallel \mathbb{1} \wedge |\tilde{f}| = 0 \,\}$.

$\mathcal{N}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des mesures totalement singulières.

6.8. Théorème : $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{N}^\bullet(\mathbb{R})$ est un espace de Riesz-Banach et un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$.

6.9. Théorème de Radon-Nikodym :

$$\boxed{\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) \bigoplus \mathcal{N}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \bigoplus \mathcal{N}^\bullet(\mathbb{R})}\,.$$

Récapitulatif : (les flèches représentent des inclusions)

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathcal{W}(\mathbb{R}) & = & \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{PM}(\mathbb{R}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{W}_B(\mathbb{R}) & = & \mathcal{B}(\mathbb{R}) & & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{PM}^\bullet(\mathbb{R}) \\
\nearrow & & \uparrow & & \nwarrow & & \nearrow & & & & \\
\mathcal{W}_O(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & & & & & &
\end{array}$$

Contenu :

Théorème (de convergence bornée) de Lebesgue. Continuité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Théorème de Dieudonné : inversion de l'ordre d'intégration.

A. Théorème de Lebesgue sur $\mathrm{I\!R}$ (« Convergence bornée »)

> Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R})$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\, \tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) \to \tilde{\mu}\,(f)$.

Dém : Généralisation élémentaire du théorème de Lebesgue sur $[\,\mathrm{a}, \mathrm{b}\,]$.

B. Théorème de continuité

Notation : Soient A, B, C trois ensembles et soit une fonction $f\ :\ \mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \mathrm{C}$;

> - $\forall\, a \in \mathrm{A}$ on pose $f\,(a\,,*)\ :\ \mathrm{B} \to \mathrm{C}\ :\ b \mapsto f\,(a\,,b)$
> - $\forall\, b \in B$ on pose $f\,(*\,,b)\ :\ \mathrm{A} \to \mathrm{C}\ :\ a \mapsto f\,(a\,,b)$

Enoncé : Soit Ω un espace topologique ; on note $\mathcal{C}\,(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions $\Omega \to \mathrm{I\!R}$ continues ; soit une fonction $\boxed{\text{bornée}}$ $f\ :\ \Omega \times \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$ telle que

$$\boxed{1°)\ \ \forall\, \omega \in \Omega\quad f\,(\omega\,,*) \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})\qquad \underline{\text{et}}\qquad 2°)\ \ \forall\, t \in \mathrm{I\!R}\quad f\,(*\,,t) \in \mathcal{C}\,(\Omega)}\ ;$$

soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R})$; on pose $\forall\, \omega \in \Omega$ $\boxed{G\,(\omega) = \int_{\mathrm{I\!R}} f\,(\omega\,,t)\, \tilde{\mu}\,(t)}$; alors on a $\boxed{G \in \mathcal{C}\,(\Omega)}$.

Dém : Soit $\omega \in \Omega$ et soit $\omega_n \in \Omega$, $\omega_n \to \omega$; on pose $g = f\,(\omega\,,*)$ et $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $g_n = f\,(\omega_n\,,*)$; on a $g_n \xrightarrow{\text{b}} g$, donc $\tilde{\mu}\,(g_n) \to \tilde{\mu}\,(g)$, c-à-d $G\,(\omega_n) \to G\,(\omega)$.

C. Théorème de Dieudonné (« Inversion de l'ordre d'intégration »)

Ce théorème généralise un procédé utilisé dans [10], Tome 2, p. 126.

Enoncé : Soit une fonction $\boxed{\text{bornée}}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{1°)\ \ \forall\, s \in \mathbb{R}\quad f(s\,,*) \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}) \qquad \underline{\text{et}} \qquad 2°)\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\quad f(*\,,t) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})}\ ;$$

soient $\underline{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet_D(\mathbb{R})}$ et $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; on pose

$$1°)\ \ \forall\, s \in \mathbb{R}\quad \boxed{G(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\,,t)\,\tilde{\nu}(t)} \quad \underline{\text{et}} \quad 2°)\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\quad \boxed{H(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s\,,t)\,\tilde{\mu}(s)}\ ;$$

alors on a 1°) $\boxed{G \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})}$ $\underline{\text{et}}$ $\boxed{H \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})}$

2°) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} G(s)\,\tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} H(t)\,\tilde{\nu}(t)$, c-à-d

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(s\,,t)\,\tilde{\nu}(t) \Big]\,\tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(s\,,t)\,\tilde{\mu}(s) \Big]\,\tilde{\nu}(t)}\ .$$

<u>Dém</u> : Soit $s_\circ \in \mathbb{R}$; on pose $\forall\, t \in \mathbb{R}\ \ \varphi(t) = \lim\limits_{s \to s_\circ^-} f(s\,,t)$; on a $f(s\,,*) \xrightarrow{\text{b}} \varphi$ quand $s \to s_\circ^-$, donc $\varphi \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $G(s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(s\,,t)\,\tilde{\nu}(t) \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\tilde{\nu}(t)$; donc G a une limite à gauche en $s_\circ$; de même G a une limite à droite en $s_\circ$; donc G est réglée ; par ailleurs G est clairement bornée, donc $G \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$; $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \forall\, r \in [[\,0\,,n\,]]$ on pose $a_{n,r} = -k + 2\,k\,r/n$
et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \forall\, r \in [[\,0\,,n-1\,]]$ on choisit $c_{n,r} \in [\,a_{n,r}\,,a_{n,r+1}\,]$;
soit enfin $\phi \in \mathcal{CV}\big([-k\,,k\,]\big)$ une primitive de $\tilde{\mu}$ sur $[-k\,,k\,]$; $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ on construit les sommes de Riemann-Stieltjes

$$\Psi_n(t) = \sum_{r=0}^{n-1} f(c_{n,r}\,,t)\,\big[\,\phi(a_{n,r+1}) - \phi(a_{n,r})\big]\ ;$$

on a $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \Psi_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}\ \ \Psi_n(t) \xrightarrow{\text{b}} \displaystyle\int_{-k}^{k} f(s\,,t)\,\tilde{\mu}(s) = H_k(t)$,

donc $H_k \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Psi_n(t)\,\tilde{\nu}(t) \to \int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,\tilde{\nu}(t)$; on a par ailleurs

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_n(t)\,\tilde{\nu}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \big[\,\phi(a_{n,r+1}) - \phi(a_{n,r})\big] \int_{\mathbb{R}} f(c_{n,r}\,,t)\,\tilde{\nu}(t)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} G(c_{n,r})\,\big[\,\phi(a_{n,r+1}) - \phi(a_{n,r})\big] \to \int_{-k}^{k} G(s)\,\tilde{\mu}(s)\,.$$

On peut donc écrire $\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_{-k}^{k} G(s)\,\tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,\tilde{\nu}(t)$; or $H_k \xrightarrow{\text{b}} H$ quand $k \to +\infty$; donc $H \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,\tilde{\nu}(t) \to \int_{\mathbb{R}} H(t)\,\tilde{\nu}(t)$; on en déduit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} G(s)\,\tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} H(t)\,\tilde{\nu}(t)$.

D. <u>Théorème d'holomorphie</u>

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$; on note $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathrm{U} \to \mathbb{C}$ holomorphes ; soit une fonction $\boxed{\text{bornée}}$ $f : \mathrm{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\boxed{1°)\ \ \forall\, z \in \mathrm{U} \quad f(z,*) \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R},\mathbb{C}) \qquad \underline{\text{et}} \qquad 2°)\ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad f(*,t) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})}\ ;$$

soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})$; on pose $\forall\, z \in \mathrm{U}$ $\boxed{G(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(z,t)\,\tilde{\mu}(t)}$;

alors on a 1°) $\boxed{G \in \mathcal{H}(\mathrm{U})}$ <u>et</u> $\forall\, z \in \mathrm{U}$ $\boxed{\partial_1 f(z,*) \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R},\mathbb{C})}$

2°) $\forall\, z \in \mathrm{U}$ $\boxed{G'(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(z,t)\,\tilde{\mu}(t)}$.

<u>Dém</u> :

1°) Soit $\gamma : \mathrm{I} \to \mathrm{U}$ un contour à dérivée réglée, homotope à 0 ;

on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\oint_{\gamma} f(z,t)\,dz = 0$, c-à-d $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f\big[\gamma(s),t\big]\,\gamma'(s)\,ds = 0$;

posons $p : \mathrm{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} : (s,t) \mapsto f\big[\gamma(s),t\big]\,\gamma'(s)$;

on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} p(s,t)\,ds = 0$;

en appliquant le théorème de Dieudonné à p on trouve

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathrm{I}} p(s,t)\,ds\Big]\,\tilde{\mu}(t) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathbb{R}} p(s,t)\,\tilde{\mu}(t)\Big]\,ds = \int_{\mathrm{I}} G\big[\gamma(s)\big]\,\gamma'(s)\,ds$$

$= \displaystyle\oint_{\gamma} G(z)\,dz$; donc G est holomorphe dans U.

2°) Soit $z_\circ \in \mathrm{U}$ et $R > 0$ tel que $\overline{\mathrm{D}}(z_\circ,R) \subset \mathrm{U}$;

on pose $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\Phi(t) = \partial_1 f(z_\circ,t)$; on a donc $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathrm{C}(z_\circ,\, R)} \frac{f(z\,,t)}{(z - z_\circ)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f\big(z_\circ + R\, e^{is},\, t\big)\, e^{-is}\, ds\,;$$

posons $q \,:\, [\,0\,,\, 2\pi\,] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, (s\,,t) \mapsto f\big(z_\circ + R\,e^{is},\, t\big)\, e^{-is}$; on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} q(s\,,t)\, ds\,;$$

en appliquant le théorème de Dieudonné à q on trouve $\Phi \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}\,,\mathbb{C})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)\; \tilde{\mu}(t) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\mathbb{R}} q(s\,,t)\; \tilde{\mu}(t) \Big]\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} G\big(z_\circ + R\,e^{is}\big)\; e^{-is}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathrm{S}(z_\circ,\, R)} \frac{G(z)}{(z - z_\circ)^2}\, dz = G'(z_\circ)\,.$$

Chapitre XIV : Convergence faible et convergence fidèle

Contenu :

Nous définissons deux types de convergence faible pour les *mesures normées* : la convergence *faible* proprement dite (sur les fonctions bornées *continues*) et la convergence *fidèle* (sur les fonctions bornées *réglées*).

1. Définition : Soient $\tilde\mu_n\,,\,\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; $\tilde\mu_n$ converge faiblement (resp. fidèlement) vers $\tilde\mu$ ssi $\forall\, g \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ $\big[$resp. $\forall\, g \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})\big]$ on a $\tilde\mu_n(g) \to \tilde\mu(g)$.

Notation : $\tilde\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde\mu$ ssi $\tilde\mu_n$ converge faiblement vers $\tilde\mu$.

$\tilde\mu_n \xrightarrow{\phi} \tilde\mu$ ssi $\tilde\mu_n$ converge fidèlement vers $\tilde\mu$.

On a évidemment $\tilde\mu_n \xrightarrow{\phi} \tilde\mu \Rightarrow \tilde\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde\mu$.

2.* Théorème : $\forall\, \tilde\mu_n\,,\,\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\tilde\mu_n \xrightarrow{\star} \tilde\mu \Rightarrow \tilde\mu_n \xrightarrow{\phi} \tilde\mu}$.

.

3. Théorème : Soient $\tilde\mu_n\,,\,\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$, $\tilde\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde\mu$; alors la suite $\|\tilde\mu_n\|_\star$ est bornée et on a $\boxed{\|\tilde\mu\|_\star \le \overline{\lim}\, \|\tilde\mu_n\|_\star}$.

Dém : $\mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ étant un espace de Banach, il suffit d'appliquer le théorème de la borne uniforme (« uniform boundedness theorem »).

4. Théorème : Soient $\tilde\mu_n\,,\,\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; alors $\tilde\mu_n \xrightarrow{\phi} \tilde\mu$ ssi la suite $\|\tilde\mu_n\|_\star$ est bornée et $\forall\, g \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ $\tilde\mu_n(g) \to \tilde\mu(g)$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Trivial.

b) $\Leftarrow$: Soit $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\tilde\mu_n\|_\star \le M$; soit $g \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ tel que $\|g - h\| \le \varepsilon/M$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \ge N$ $|\tilde\mu_n(h) - \tilde\mu(h)| \le \varepsilon$;

on a $\forall\, n \ge N$ $|\tilde\mu_n(g) - \tilde\mu(g)| \le |\tilde\mu_n(g) - \tilde\mu_n(h)| + |\tilde\mu_n(h) - \tilde\mu(h)| + |\tilde\mu(h) - \tilde\mu(g)|$
$\le \|\tilde\mu_n\|_\star \|g - h\| + \varepsilon + \|\tilde\mu\|_\star \|h - g\| \le 3\,\varepsilon$.

5. Théorème :

Soient $\boxed{\tilde\mu_n \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+ \text{ et } \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet_D(\mathbb{R})^+}$; alors on a $\boxed{\tilde\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde\mu \Leftrightarrow \tilde\mu_n \xrightarrow{\phi} \tilde\mu}$.

Dém :

a) $\Leftarrow$: Trivial

b) $\Rightarrow$: Soient $\tilde{\mu}_n \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})^+$ et $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet_D(\mathrm{I\!R})^+$ tels que $\tilde{\mu}_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde{\mu}$; il suffit de montrer que $\forall\, g \in \mathcal{E}_B(\mathrm{I\!R})$ $\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$. Soit d'abord $g = 1\!\!1_{[a,b]}$ avec $a, b \in \mathrm{I\!R}$; soit $\varepsilon > 0$; comme $\tilde{\mu}$ est diffuse, il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_O(\mathrm{I\!R})$ tels que $0 \le g_1 \le g \le g_2$ et $\tilde{\mu}(g_2 - g_1) \le \varepsilon$; on a donc $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\tilde{\mu}_n(g_1) \le \tilde{\mu}_n(g) \le \tilde{\mu}_n(g_2)$; on en déduit $\tilde{\mu}(g_1) \le \underline{\lim}_n\ \tilde{\mu}_n(g) \le \overline{\lim}_n\ \tilde{\mu}_n(g) \le \tilde{\mu}(g_2)$; or $\tilde{\mu}(g_2) - \tilde{\mu}(g_1) \le \tilde{\mu}(g_2 - g_1) \le \varepsilon$, donc $\overline{\lim}_n\ \tilde{\mu}_n(g) - \underline{\lim}_n\ \tilde{\mu}_n(g) \le \varepsilon$; comme ε est arbitraire, $\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$.
On en déduit que $\forall\, g \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ $\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$. Soit alors $g \in \mathcal{E}_B(\mathrm{I\!R})$; soit $\varepsilon < 0$ et soit $k \in \mathrm{I\!N}^*$ tel que $\tilde{\mu}(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) \le \varepsilon$; on peut écrire
$\left|\tilde{\mu}_n(g) - \tilde{\mu}(g)\right| = \left|\tilde{\mu}_n(\mathsf{X}_k\, g) + \tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g] - \tilde{\mu}(\mathsf{X}_k\, g) - \tilde{\mu}[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\right|$
$\le \left|\tilde{\mu}_n(\mathsf{X}_k\, g) - \tilde{\mu}(\mathsf{X}_k\, g)\right| + \left|\tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\right| + \left|\tilde{\mu}[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\right|$;
on a d'une part $\left|\tilde{\mu}[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\right| \le \|g\|\ \tilde{\mu}(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) \le \varepsilon\, \|g\|$,
d'autre part $\left|\tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\right| \le \|g\|\ \tilde{\mu}_n(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) = \|g\|\ \left[\tilde{\mu}_n(1\!\!1) - \tilde{\mu}_n(\mathsf{X}_k)\right]$;
or $1\!\!1 \in \mathcal{C}_B(\mathrm{I\!R})$ et $\mathsf{X}_k \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$; donc $\overline{\lim}_n\ \left|\tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\right| \le \|g\|\ \left[\tilde{\mu}(1\!\!1) - \tilde{\mu}(\mathsf{X}_k)\right]$
$= \|g\|\ \tilde{\mu}(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) \le \varepsilon\, \|g\|$; on en déduit $\overline{\lim}_n\ \left|\tilde{\mu}_n(g) - \tilde{\mu}(g)\right| \le 2\,\varepsilon\, \|g\|$;
comme ε est arbitraire, $\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$.

Chapitre XV : Fonctions et pseudo-mesures sur un rectangle compact

Contenu : On généralise à deux dimensions les résultats obtenus sur $[a,b]$.
La nouveauté principale est le *produit tensoriel* des pseudo-mesures, avec en apothéose le théorème de Fubini.

§ 1. Espaces fondamentaux

I et J sont des intervalles compacts de longueur non nulle de $\mathbb{R}$; on pose $K = I \times J$.

1.1. Définition : Une fonction étagée dans K est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbb{1}_{I' \times J'}$, où I' et J' sont des intervalles inclus respectivement à I et J, (éventuellement réduits à des singletons).

Notations :

$\mathcal{E}(K) =$ algèbre de Riesz des fonctions étagées : $K \to \mathbb{R}$

$\mathcal{C}(K) =$ algèbre de Riesz des fonctions continues : $K \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F}(K) =$ algèbre de Riesz des fonctions bornées : $K \to \mathbb{R}$

1.2. Définition : On note $\mathcal{R}(K)$ la fermeture de $\mathcal{E}(K)$ dans $\mathcal{F}(K)$ pour la convergence uniforme. Les fonctions de $\mathcal{R}(K)$ sont appelées les fonctions réglées dans K.

1.3.* Théorème : Soit $f \in \mathcal{F}(K)$; alors $f \in \mathcal{R}(K)$ ssi $\forall\,(u,v) \in K$ les *huit* limites suivantes existent :

$$\begin{array}{cccc}
\lim\limits_{x \to u^+} f(x,v) & \lim\limits_{x \to u^-} f(x,v) & \lim\limits_{y \to v^+} f(u,y) & \lim\limits_{y \to v^+} f(u,y) \\[2ex]
\lim\limits_{\substack{x \to u^+ \\ y \to v^+}} f(x,y) & \lim\limits_{\substack{x \to u^- \\ y \to v^+}} f(x,y) & \lim\limits_{\substack{x \to u^+ \\ y \to v^-}} f(x,y) & \lim\limits_{\substack{x \to u^- \\ y \to v^-}} f(x,y)
\end{array}$$

On définit $\mathcal{PM}(K)$, $\mathcal{L}^1(K)$, $\mathcal{L}^2(K)$, $\mathcal{B}(K)$, $\mathcal{BA}(K)$, $\mathcal{PR}(K)$, $\mathcal{W}(K)$ comme sur $[a,b]$.
Les définitions et théorèmes relatifs à ces espaces sont analogues au cas de $[a,b]$.

Notation intégrale : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})\quad \forall\, g \in \mathcal{R}(\mathrm{K})$ on note

$$\boxed{\tilde f\,(g) = \iint_{\mathrm{K}} g\,\tilde f = \iint_{\mathrm{K}} g\,(x,\,y)\;\tilde f\,(x,\,y)}\,.$$

$\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K})$ on écrit $\displaystyle\iint_{\mathrm{K}} \tilde f\,(x,\,y)\;dx\;dy$ au lieu de $\displaystyle\iint_{\mathrm{K}} \tilde f\,(x,\,y)$; on a donc

$$\boxed{\iint_{\mathrm{K}} \tilde f\,(x,\,y)\;dx\;dy = \iint_{\mathrm{K}} \tilde f\,(x,\,y) = \tilde f\,(\mathbb{1}) \quad (\text{avec } \mathbb{1} = 1_{\mathrm{K}})}\,.$$

1.4. Définition : $\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})$ est une mesure sur K ssi

$$\boxed{\forall\, u \in \mathrm{I}\quad \lim_{\alpha\to u^{\pm}} |\tilde f|\left(1_{]\,u\,,\,\alpha\,[\,\times\,\mathrm{J}}\right) = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \forall\, v \in \mathrm{J}\quad \lim_{\beta\to v^{\pm}} |\tilde f|\left(1_{\mathrm{I}\,\times\,]\,v\,,\,\beta\,[}\right) = 0}\,.$$

Cette propriété s'appelle l'hypercontinuité des mesures.

On note $\mathcal{M}(\mathrm{K})$ l'espace de Riesz des mesures sur K.

La mesure $\mathcal{E}(\mathrm{K}) \to \mathbb{R}$: $g \mapsto \displaystyle\iint_{\mathrm{K}} g\,(x,\,y)\;dx\;dy$ s'appelle la mesure de Lebesgue sur K.

1.5.* Théorème : $\boxed{\mathcal{L}^1(\mathrm{K}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{K}) \subset \mathcal{PM}(\mathrm{K})}$.

1.6.* Théorème : $\mathcal{M}(\mathrm{K})$ est un sous-espace cohérent, $\boxed{\text{intégral}}$ et fermé de $\mathcal{PM}(\mathrm{K})$.

1.7. Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}(\mathrm{K})$

Soit $f \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$; alors $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{K})$ on a $f_n\,\tilde\mu \xrightarrow{\times} f\,\tilde\mu$; en conséquence $\tilde\mu\,(f_n) \to \tilde\mu\,(f)$

Dém : Même succession d'étapes que pour $[\,a\,,\,b\,]$.

1.8. Corollaire : Hypercontinuité généralisée

Soit une suite décroissante d'ouverts $\Omega_n \subset \mathrm{K}$ tels que $\displaystyle\bigcap_n \Omega_n = \emptyset$; alors $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{K})$ on a $\boxed{\tilde\mu\left(\mathbb{1}_{\Omega_n}\right) \to 0}$.

Dém : On a $\forall\, n \in \mathbb{N}\quad \mathbb{1}_{\Omega_n} \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$; de plus on a clairement $\mathbb{1}_{\Omega_n} \xrightarrow{\mathrm{b}} 0$;
il suffit dès lors d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Remarque : Il n'existe pas de généralisation naturelle de la notion de mesure *diffuse* en dimension ≥ 2.

§ 2. Produit tensoriel de fonctions

2.1. Définition : $\forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}) \quad \forall g \in \mathcal{F}(\mathrm{J})$ on note

$\boxed{f \otimes g \; : \; \mathrm{K} \to \mathbb{R} \; : \; (x\,,\,y) \mapsto f(x)\,g(y)}$; on a donc $\boxed{f \otimes g \in \mathcal{F}(\mathrm{K})}$.

2.2.* Théorème : $\boxed{|f \otimes g| = |f| \otimes |g|}$ et $\boxed{\|f \otimes g\| = \|f\|\,\|g\|}$.

2.3.* Théorème : On a $\forall f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathrm{I}) \quad \forall g, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(\mathrm{J})$

1) $f_1 \otimes g + f_2 \otimes g = (f_1 + f_2) \otimes g$

2) $f \otimes g_1 + f \otimes g_2 = f \otimes (g_1 + g_2)$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g) = \lambda (f \otimes g)$

4) $(f_1 \otimes g_1)(f_2 \otimes g_2) = (f_1 f_2) \otimes (g_1 g_2)$.

Notation : Soient V un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathrm{I})$ et W un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathrm{J})$; on note $\boxed{\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}}$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathrm{K})$ engendré par les éléments de la forme $f \otimes g$ avec $f \in \mathrm{V}$ et $g \in \mathrm{W}$.

On peut donc écrire $\boxed{\mathcal{F}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{F}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{F}(\mathrm{K})}$.

2.4.* Théorème : $\mathcal{F}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{F}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{F}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{F}(\mathrm{I})^+ \otimes \mathcal{F}(\mathrm{J})^+ \subset \mathcal{F}(\mathrm{K})^+$.

2.5.* Théorème : $\boxed{\mathcal{E}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{E}(\mathrm{J}) = \mathcal{E}(\mathrm{K})}$.

2.6.* Théorème : $\mathcal{C}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{C}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{C}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{R}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{R}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{K})$.

2.7.* Théorème : $\mathcal{BA}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{BA}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{BA}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{PR}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{PR}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{PR}(\mathrm{K})$.

§ 3. Pseudo-mesures marginales

3.1. Définition : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})$ on pose $\tilde{f}_{\mathrm{I}} \; : \; \mathcal{E}(\mathrm{I}) \to \mathbb{R} \; : \; h \mapsto \tilde{f}(h \otimes 1_{\mathrm{J}})$

et $\tilde{f}_{\mathrm{J}} \; : \; \mathcal{E}(\mathrm{J}) \to \mathbb{R} \; : \; k \mapsto \tilde{f}(1_{\mathrm{I}} \otimes k)$.

3.2. Théorème : $\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I})$ et $\tilde{f}_{\mathrm{J}} \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})$; de plus $\|\tilde{f}_{\mathrm{I}}\|_\star \leq \|\tilde{f}\|_\star$ et $\|\tilde{f}_{\mathrm{J}}\|_\star \leq \|\tilde{f}\|_\star$.

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \quad |\tilde{f}_{\mathrm{I}}(h)| = \big|\tilde{f}(h \otimes 1_{\mathrm{J}})\big| \leq \|\tilde{f}\|_\star \,\big\||h| \otimes 1_{\mathrm{J}}\big\| = \|\tilde{f}\|_\star \|h\|$.

$\tilde{f}_{\mathrm{I}}$ et $\tilde{f}_{\mathrm{J}}$ s'appellent les pseudo-mesures marginales de $\tilde{f}$.

3.3.* Théorème :

$\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathrm{K}) \quad \forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \quad \forall\, k \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ on a $\boxed{\tilde{f}_{\mathrm{I}}(h) = \tilde{f}_{\mathrm{J}}(k) = \tilde{f}(h \otimes k)}$.

3.4. Lemme :

$\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I})^+ \quad |\tilde{f}_{\mathrm{I}}|(h) \leq |\tilde{f}|(h \otimes 1_{\mathrm{J}})$ et $\forall\, k \in \mathcal{E}(\mathrm{J})^+ \quad |\tilde{f}_{\mathrm{J}}|(k) \leq |\tilde{f}|(1_{\mathrm{I}} \otimes k)$.

Dém : $|\tilde{f}_{\mathrm{I}}|(h) = \sup\limits_{k \in \mathcal{E}(\mathrm{I}),\, |k| \leq g} |\tilde{f}_{\mathrm{I}}(k)| = \sup\limits_{k \in \mathcal{E}(\mathrm{I}),\, |k| \leq g} \big|\tilde{f}(k \otimes 1_{\mathrm{J}})\big|$

$\leq \sup\limits_{k \in \mathcal{E}(\mathrm{I}),\, |k| \leq g} |\tilde{f}|\big(|k| \otimes 1_{\mathrm{J}}\big) = |\tilde{f}|(h \otimes 1_{\mathrm{J}})$.

3.5. Théorème : $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathrm{K}) \Rightarrow \Big[\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{M}(\mathrm{I}) \ \text{ et } \ \tilde{f}_{\mathrm{J}} \in \mathcal{M}(\mathrm{J})\Big]}$.

Dém :

On a $\forall\, u \in \mathrm{I} \quad |\tilde{f}_{\mathrm{I}}|\big(1_{]u,\alpha[}\big) \leq |\tilde{f}|\big(1_{]u,\alpha[} \otimes 1_{\mathrm{J}}\big) = |\tilde{f}|\big(1_{]u,\alpha[\times \mathrm{J}}\big) \to 0$ quand $\alpha \to u^{\pm}$.

3.6. Théorème : $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K}) \Rightarrow \Big[\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}) \ \text{ et } \ \tilde{f}_{\mathrm{J}} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{J})\Big]}$.

Dém : Il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ et une suite $\varepsilon_n > 0$ telles que $\varepsilon_n \to 0$

et $\forall\, g \in \mathcal{E}(\mathrm{K}) \quad \left|\tilde{f}(g) - \iint_{\mathrm{I}\times\mathrm{J}} f_n(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy\right| \leq \varepsilon_n \|g\|$;

donc $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \quad \left|\tilde{f}(h \otimes 1_{\mathrm{J}}) - \iint_{\mathrm{I}\times\mathrm{J}} f_n(x,y)\, h(x)\, dx\, dy\right| \leq \varepsilon_n \|h \otimes 1_{\mathrm{J}}\|$,

c-à-d $\left|\tilde{f}_{\mathrm{I}}(h) - \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f_n(x,y)\, dy\Big]\, h(x)\, dx\right| \leq \varepsilon_n \|h\|$;

or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad k_n = \int_{\mathrm{J}} f_n(*,y)\, dy \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ et $k_n \xrightarrow{1} \tilde{f}_{\mathrm{I}}$; donc $\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$.

3.7. Théorème : $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{K}) \Rightarrow \Big[\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}) \ \text{ et } \ \tilde{f}_{\mathrm{J}} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{J})\Big]}$;

de plus $\|\tilde{f}_{\mathrm{I}}\|_2 \leq |\mathrm{J}|^{1/2}\, \|\tilde{f}\|_2$ et $\|\tilde{f}_{\mathrm{J}}\|_2 \leq |\mathrm{I}|^{1/2}\, \|\tilde{f}\|_2$.

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \quad |\tilde{f}_{\mathrm{I}}(h)| = |\tilde{f}(h \otimes 1_{\mathrm{J}})| \leq \|\tilde{f}\|_2\, \|h \otimes 1_{\mathrm{J}}\|_2$

$= \|\tilde{f}\|_2\, |\mathrm{J}|^{1/2}\, \|h\|_2$; donc $\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I})$ et $\|\tilde{f}_{\mathrm{I}}\|_2 \leq |\mathrm{J}|^{1/2}\, \|\tilde{f}\|_2$.

3.8. <u>Théorème</u> : $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{B}(\mathrm{K}) \Rightarrow \left[\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{\mathrm{J}} \in \mathcal{B}(\mathrm{J}) \right]}$;

de plus $\|\tilde{f}_{\mathrm{I}}\|_{\mathrm{B}} \leq |\mathrm{J}|\, \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}}$ et $\|\tilde{f}_{\mathrm{J}}\|_{\mathrm{B}} \leq |\mathrm{I}|\, \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \quad |\tilde{f}_{\mathrm{I}}(h)| = |\tilde{f}(h \otimes 1_{\mathrm{J}})| \leq \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}}\, \|h \otimes 1_{\mathrm{J}}\|_1$

$= \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}}\, |\mathrm{J}|\, \|h\|_1$; donc $\tilde{f}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{B}(\mathrm{I})$ et $\|\tilde{f}_{\mathrm{I}}\|_{\mathrm{B}} \leq |\mathrm{J}|\, \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}}$.

3.9. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{W}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{W}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{W}(\mathrm{K})}$.

<u>Dém</u> :

Soient $f_1 \in \mathcal{W}(\mathrm{I})^+$ et $f_2 \in \mathcal{W}(\mathrm{J})^+$; soit $M \in \mathrm{I\!R}^+$ tel que $f_1 \leq M$ et $f_2 \leq M$;
soient $\varepsilon > 0$ et $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathrm{K})^+$; soient $g_1 , h_1 \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$ tels que $0 \leq g_1 \leq f_1 \leq h_1 \leq M$
et $\tilde{\mu}_{\mathrm{I}}(h_1 - g_1) \leq \varepsilon$; de même soient $g_2 , h_2 \in \mathcal{PR}(\mathrm{J})$ tels que $0 \leq g_2 \leq f_2 \leq h_2 \leq M$
et $\tilde{\mu}_{\mathrm{J}}(h_2 - g_2) \leq \varepsilon$; alors on a $g_1 \otimes g_2 \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$, $h_1 \otimes h_2 \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$
et $g_1 \otimes g_2 \leq f_1 \otimes f_2 \leq h_1 \otimes h_2$; de plus on peut écrire

$\tilde{\mu}\left(h_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes g_2\right) = \tilde{\mu}\left(h_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes h_2 + g_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes g_2\right)$

$= \tilde{\mu}\left[(h_1 - g_1) \otimes h_2 + g_1 \otimes (h_2 - g_2)\right] \leq \tilde{\mu}\left[(h_1 - g_1) \otimes M + M \otimes (h_2 - g_2)\right]$

$\leq M\left[\tilde{\mu}_{\mathrm{I}}(h_1 - g_1) + \tilde{\mu}_{\mathrm{J}}(h_2 - g_2)\right] \leq 2\,\varepsilon\, M$; donc $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$.

Le cas général s'obtient en raisonnant sur les parties positives et négatives de f_1 et f_2 .

§ 4. <u>Produit tensoriel de pseudo-mesures</u>

4.1. <u>Définition</u> : On pose $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{J}) \quad \forall\, f \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \quad \forall\, g \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$

$$\boxed{(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f \otimes g) = \tilde{\mu}(f)\, \tilde{\nu}(g)} .$$

Comme $\mathcal{E}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{E}(\mathrm{J}) = \mathcal{E}(\mathrm{K})$, cette relation permet par linéarité de faire agir $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}$
sur $\mathcal{E}(\mathrm{K})$; on en conclut immédiatement que l'on a $\boxed{\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})}$.

<u>Notation</u> : Soient V un sous-espace de $\mathcal{PM}(\mathrm{I})$ et W un sous-espace de $\mathcal{PM}(\mathrm{J})$;
on note $\boxed{\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}}$ le sous-espace de $\mathcal{PM}(\mathrm{K})$ engendré par les éléments de la forme $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}$
avec $\tilde{\mu} \in \mathrm{V}$ et $\tilde{\nu} \in \mathrm{W}$.

On peut donc écrire $\boxed{\mathcal{PM}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{PM}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{PM}(\mathrm{K})}$.

4.2.* <u>Théorème</u> : On a $\forall\, \tilde{\mu} , \tilde{\mu}_1 , \tilde{\mu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{\nu} , \tilde{\nu}_1 , \tilde{\nu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})$

1) $\tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\nu} + \tilde{\mu}_2 \otimes \tilde{\nu} = (\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2) \otimes \tilde{\nu}$

2) $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}_1 + \tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}_2 = \tilde{\mu} \otimes (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda\, \tilde{\mu}) \otimes \tilde{\nu} = f \otimes (\lambda\, \tilde{\nu}) = \lambda\, (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})$.

4.3.* Théorème : $\boxed{\mathcal{PM}(\mathrm{I})^+ \otimes \mathcal{PM}(\mathrm{J})^+ \subset \mathcal{PM}(\mathrm{K})^+}$.

4.4.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}_1 , \tilde{\mu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{I})^+ \quad \forall\, \tilde{\nu}_1 , \tilde{\nu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})^+$ on a

$$\boxed{\big(\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \ \text{ et } \ \tilde{\nu}_1 \leq \tilde{\nu}_2\big) \Rightarrow \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\nu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \otimes \tilde{\nu}_2}.$$

4.5. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}| \quad \text{et} \quad \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star \, \|\tilde{\nu}\|_\star}.$$

Dém : Toute fonction $h \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ peut s'écrire $h = \sum\limits_{ij} \alpha_{ij}\, p_i\, q_j$ où p_i est la fonction caractéristique d'un intervalle $\subset \mathrm{I}$ et où q_j est la fonction caractéristique d'un intervalle $\subset \mathrm{J}$; on peut supposer de plus $\forall\, i \neq j \quad p_i\, p_j = 0$ et $q_i\, q_j = 0$; on a dès lors :

$\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{K}) \quad \big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h)\big| = \big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})\big(\sum\limits_{ij} \alpha_{ij}\, p_i\, q_j\big)\big| = \big|\sum\limits_{ij} \alpha_{ij}\, \tilde{\mu}(p_i)\, \tilde{\nu}(q_j)\big|$

$\leq \sum\limits_{ij} |\alpha_{ij}|\, \big|\tilde{\mu}(p_i)\big|\, \big|\tilde{\nu}(q_j)\big| \leq \sum\limits_{ij} |\alpha_{ij}|\, |\tilde{\mu}|(p_i)\, |\tilde{\nu}|(q_j) = \big(|\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|\big)\big(|h|\big)$;

on en déduit $|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| \leq |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|$.

Par ailleurs soit $\varepsilon > 0$; soit $p \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $\|p\| \leq 1$ et $\|\tilde{\mu}\|_\star \leq \tilde{\mu}(p) + \varepsilon$;

de même soit $q \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $\|p\| \leq 1$ et $\|\tilde{\nu}\|_\star \leq \tilde{\mu}(q) + \varepsilon$; on a $\|p\, q\| \leq 1$,

donc $\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star \geq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(p \otimes q) = \tilde{\mu}(p)\, \tilde{\nu}(q) \geq \big(\|\tilde{\mu}\|_\star - \varepsilon\big)\big(\|\tilde{\nu}\|_\star - \varepsilon\big)$

$\geq \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star - \varepsilon\big(\|\tilde{\mu}\|_\star + \|\tilde{\nu}\|_\star\big)$; comme ε est arbitraire on obtient

$\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star \geq \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star$.

Posons $\widetilde{\chi} = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}| - |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})^+$; on a donc $\|\widetilde{\chi}\|_\star = \widetilde{\chi}(\mathbb{1}_\mathrm{I} \otimes \mathbb{1}_\mathrm{J})$

$= (|\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|)(\mathbb{1}_\mathrm{I} \otimes \mathbb{1}_\mathrm{J}) - |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}|(\mathbb{1}_\mathrm{I} \otimes \mathbb{1}_\mathrm{J}) = |\tilde{\mu}|(\mathbb{1}_\mathrm{I})\, |\tilde{\nu}|(\mathbb{1}_\mathrm{J}) - \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star$

$= \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star - \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star \leq 0$; donc $\|\widetilde{\chi}\|_\star = 0$, c-à-d $\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star$,

et donc aussi $\widetilde{\chi} = 0$, c-à-d $|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|$.

4.6. Théorème : $\boxed{\mathcal{M}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{M}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{K})}$.

Dém : On a $\forall\, u \in \mathrm{I} \quad \lim\limits_{\alpha \to u^\pm} |\tilde{f} \otimes \tilde{g}|\,\big(1_{]u,\alpha[\times \mathrm{J}}\big) = \lim\limits_{\alpha \to u^\pm} \big(|\tilde{f}| \otimes |\tilde{g}|\big)\,\big(1_{]u,\alpha[} \otimes 1_\mathrm{J}\big)$

$= \lim\limits_{\alpha \to u^\pm} |\tilde{f}|(1_{]u,\alpha[})\, |\tilde{g}|(1_\mathrm{J}) = 0$.

4.7. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{L}^1(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{L}^1(\mathrm{J}) \subset \mathcal{L}^1(\mathrm{K})}$ et $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}) \;\; \forall\, \tilde g \in \mathcal{L}^1(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{\|\tilde f \otimes \tilde g\|_1 = \|\tilde f\|_1 \, \|\tilde g\|_1}\,.$$

<u>Dém</u> : Soit $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $f_n \xrightarrow{1} \tilde f$ et $g_n \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $g_n \xrightarrow{1} \tilde g$;
alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \|\tilde f_n \otimes \tilde g_n - \tilde f \otimes \tilde g\|_\star = \|\tilde f_n \otimes \tilde g_n - \tilde f_n \otimes \tilde g + \tilde f_n \otimes \tilde g - \tilde f \otimes \tilde g\|_\star$
$\leq \|\tilde f_n \otimes (\tilde g_n - \tilde g)\|_\star + \|(\tilde f_n - \tilde f) \otimes \tilde g\|_\star = \|\tilde f_n\|_1 \, \|\tilde g_n - \tilde g\|_1 + \|\tilde f_n - \tilde f\|_1 \, \|\tilde g\|_1$;
donc $\tilde f_n \otimes \tilde g_n \xrightarrow{1} \tilde f \otimes \tilde g$ et $\tilde f \otimes \tilde g \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K})$.

4.8. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{L}^2(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{L}^2(\mathrm{J}) \subset \mathcal{L}^2(\mathrm{K})}$ et $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}) \;\; \forall\, \tilde g \in \mathcal{L}^2(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{\|\tilde f \otimes \tilde g\|_2 = \|\tilde f\|_2 \, \|\tilde g\|_2}\,.$$

<u>Dém</u> : Soit $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $f_n \xrightarrow{2} \tilde f$ et $g_n \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $g_n \xrightarrow{2} \tilde g$;
on sait déjà que $\tilde f_n \otimes \tilde g_n \xrightarrow{1} \tilde f \otimes \tilde g \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K})$; de plus on a $\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}$
$\|\tilde f_m \otimes \tilde g_m - \tilde f_n \otimes \tilde g_n\|_2 = \|\tilde f_m \otimes \tilde g_m - \tilde f_m \otimes \tilde g_n + \tilde f_m \otimes \tilde g_n - \tilde f_n \otimes \tilde g_n\|_2$
$\leq \|\tilde f_m \otimes (\tilde g_m - \tilde g_n)\|_2 + \|(\tilde f_m - \tilde f_n) \otimes \tilde g_n\|_2 = \|\tilde f_m^2 \otimes (\tilde g_m - \tilde g_n)^2\|_1 + \|(\tilde f_m - \tilde f_n)^2 \otimes \tilde g_n^2\|_1$
$= \|\tilde f_m^2\|_1 \, \|(\tilde g_m - \tilde g_n)^2\|_1 + \|(\tilde f_m - \tilde f_n)^2\|_1 \, \|\tilde g_n^2\|_1 = \|\tilde f_m\|_2^2 \, \|\tilde g_m - \tilde g_n\|_2^2 + \|\tilde f_m - \tilde f_n\|_2^2 \, \|\tilde g_n\|_2^2$;
donc $\tilde f_n \otimes \tilde g_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{K})$, donc $\tilde f_n \otimes \tilde g_n \xrightarrow{2} \tilde f \otimes \tilde g \in \mathcal{L}^2(\mathrm{K})$;
par ailleurs on a $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_2 = \|\tilde f^2 \otimes \tilde g^2\|_1 = \|\tilde f^2\|_1 \, \|\tilde g^2\|_1 = \|\tilde f\|_2 \, \|\tilde g\|_2$.

4.9.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}) \;\; \forall\, \tilde h\,,\, \tilde k \in \mathcal{L}^2(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{(\tilde f \otimes \tilde g)\,(\tilde h \otimes \tilde k) = (\tilde f\, \tilde h) \otimes (\tilde g\, \tilde k)}\,.$$

4.10. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{B}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{B}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{B}(\mathrm{K})}$ et $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B}(\mathrm{I}) \;\; \forall\, \tilde g \in \mathcal{B}(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} = \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}}\,.$$

<u>Dém</u> : On a $|\tilde f| \leq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}$ et $|\tilde g| \leq \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$, donc $|\tilde f \otimes \tilde g| = |\tilde f| \otimes |\tilde g| \leq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$,
donc $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} \leq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$; par ailleurs soit $\varepsilon > 0$; soit $p \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $\|p\|_1 \leq 1$
et $\tilde f(p) \geq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon$; de même soit $q \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $\|q\|_1 \leq 1$ et $\tilde f(q) \geq \|\tilde g\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon$;
on a $\|p \otimes q\|_1 = \|p\|_1 \, \|q\|_1 \leq 1$ et $(\tilde f \otimes \tilde g)\,(p \otimes q) = \tilde f(p)\, \tilde g(q)$
$\geq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, \|\tilde g\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon \left(\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} + \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}\right)$, donc $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} \geq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, \|\tilde g\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon \left(\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} + \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}\right)$;
donc $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} \geq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$.

§ 5. **Théorème de Fubini**

5.1. Théorème de projection (cf. notation p. 135)

Soit $f \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$; alors $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$ $\boxed{f(x_\circ\,,*) \in \mathcal{E}(\mathrm{J})}$.

$\boxed{\text{Idem en remplaçant } \mathcal{E} \text{ par } \mathcal{C}\,,\ \mathcal{R}\,,\ \mathcal{PR} \text{ ou } \mathcal{W}}$.

Dém : Le théorème est évident pour $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$. Démontrons-le pour $\mathcal{W}$.

Soient $\varepsilon > 0$, $x_\circ \in \mathrm{I}$, $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(\mathrm{J})$; soient $g\,,\, h \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$ telles que $g \leq f \leq h$ et $(\delta_{x_\circ} \otimes \tilde{\nu})(h-g) \leq \varepsilon$; on a $g(x_\circ\,,*) \in \mathcal{PR}(\mathrm{J})$, $h(x_\circ\,,*) \in \mathcal{PR}(\mathrm{J})$ et $g(x_\circ\,,*) \leq f(x_\circ\,,*) \leq h(x_\circ\,,*)$; de plus grâce au théorème de Fubini dans $\mathcal{PR}(\mathrm{K})$ (que nous démontrons plus loin) on peut écrire

$\tilde{\nu}\,[h(x_\circ\,,*) - g(x_\circ\,,*)] = (\delta_{x_\circ} \otimes \tilde{\nu})(h-g) \leq \varepsilon$; donc $f(x_\circ\,,*) \in \mathcal{W}(\mathrm{J})$.

5.2. Théorème de transfert

Soient $f \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ et $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathrm{J})$; on pose $\forall\, x \in \mathrm{I}$

$F(x) = \tilde{\nu}\big[f(x\,,*)\big] = \displaystyle\int_{\mathrm{J}} f(x\,,y)\,\tilde{\nu}(y)$; alors $\boxed{F \in \mathcal{E}(\mathrm{I})}$.

$\boxed{\text{Idem en remplaçant } \mathcal{E} \text{ par } \mathcal{C}\,,\ \mathcal{R}\,,\ \mathcal{PR} \text{ ou } \mathcal{W}}$.

Dém : a) $\mathcal{E}$: Evident.

b) $\mathcal{C}$: Soit $\varepsilon > 0$; par compacité de K il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, x_1\,,\, x_2 \in \mathrm{I}$ $\forall\, y_1\,,\, y_2 \in \mathrm{J}$ $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq \varepsilon$; en particulier $\forall\, x_1\,,\, x_2 \in \mathrm{I}$ $\forall\, y \in \mathrm{J}$ $|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \leq \varepsilon$; donc $\forall\, x_1\,,\, x_2 \in \mathrm{I}$ on a

$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \displaystyle\int_{\mathrm{J}} \big|f(x_1,y) - f(x_2,y)\big|\,\tilde{\nu}(y) \leq \varepsilon\,\|\tilde{\nu}\|_\star$; donc $F \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$.

c) $\mathcal{R}$: Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f$;

posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$ $F_n(x_\circ) = \tilde{\nu}\big[f_n(x_\circ\,,*)\big]$; on a $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$

$|F(x_\circ) - F_n(x_\circ)| \leq \displaystyle\int_{\mathrm{J}} \big|f(x_\circ,y) - f_n(x_\circ,y)\big|\,\tilde{\nu}(y) \leq \|f - f_n\|\,\|\tilde{\nu}\|_\star$;

donc $F_n \xrightarrow{\mathbf{u}} F$; or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $F_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$, donc $F \in \mathcal{R}(\mathrm{I})$.

d) $\mathcal{PR}$: Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$; on a en particulier $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$ $f_n(x_\circ\,,*) \xrightarrow{\mathrm{b}} f(x_\circ\,,*)$, donc par le théorème de Lebesgue sur J

$\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$ $F_n(x_\circ) = \displaystyle\int_{\mathrm{J}} f_n(x_\circ,y)\,\tilde{\nu}(y) \to \int_{\mathrm{J}} f_n(x_\circ,y)\,\tilde{\nu}(y) = F(x_\circ)$; de plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\|F_n\| \leq \|f_n\| \, \|\tilde\nu\|_\star$, donc $F_n \xrightarrow{b} F$; or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$, donc $F \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$.

e) $\mathcal{W}$: Soient $\varepsilon > 0$, $\tilde\mu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{I})$, $\tilde\nu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{J})$; soient $g\,,\, h \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$ telles que $g \leq f \leq h$ et $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h-g) \leq \varepsilon$; posons $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad G(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} g(x_\circ\,,\, y)\, \tilde\nu(y)$ et $H(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} h(x_\circ\,,\, y)\, \tilde\nu(y)$; on a $G\,,\, H \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$ et $G \leq F \leq H$; de plus grâce au théorème de Fubini dans $\mathcal{PR}(\mathrm{K})$ (que nous démontrons plus loin) on peut écrire $\tilde\mu(H-G) = (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h-g) \leq \varepsilon$; donc $F \in \mathcal{W}(\mathrm{I})$.

Le théorème est donc démontré pour tout $\tilde\nu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{J})$; soit alors $\tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathrm{J})$; on a $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad F(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ\,,\, y)\, \tilde\nu(y) = \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ\,,\, y)\, \tilde\nu^+(y) - \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ\,,\, y)\, \tilde\nu^-(y)$, donc $F \in \mathcal{W}(\mathrm{I})$.

5.3. Théorème de Fubini

Soient $f \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$, $\tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{I})$, $\tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathrm{J})$; alors on a

$$\boxed{\int_{\mathrm{I}\times\mathrm{J}} f(x,\, y)\, (\tilde\mu \otimes \tilde\nu) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x,\, y)\, \tilde\nu(y) \Big]\, \tilde\mu(x) = \int_{\mathrm{J}} \Big[\int_{\mathrm{I}} f(x,\, y)\, \tilde\mu(x) \Big]\, \tilde\nu(y)}\,.$$

Dém :

a) $f \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$: Evident.

b) $f \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$: Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f$;
par définition on a $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) = \lim_n \big[(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f_n) \big]$; or on peut écrire $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f_n) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f_n(x,\, y)\, \tilde\nu(x) \Big]\, \tilde\mu(y)$; posons $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$
$F(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ\,,\, y)\, \tilde\nu(y)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} f_n(x_\circ\,,\, y)\, \tilde\nu(y)$;
on a $F \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$; comme $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad f_n(x_\circ\,,\, *) \xrightarrow{b} f(x_\circ\,,\, *)$,
le théorème de Lebesgue sur J nous donne $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad F_n(x_\circ) \to F(x_\circ)$;
on en déduit $F_n \xrightarrow{b} F$; le théorème de Lebesgue sur I nous donne donc
$(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f_n) = \int_{\mathrm{I}} F_n(x)\, \tilde\mu(x) \to \int_{\mathrm{I}} F(x)\, \tilde\mu(x)$; on en déduit
$(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) = \lim_n \big[(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f_n) \big] = \int_{\mathrm{I}} F(x)\, \tilde\mu(x)$.

c) $f \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$: Soient $\tilde\mu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{I})$ et $\tilde\nu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{I})$; soit $\varepsilon > 0$
et soient $g\,,\, h \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$ tels que $g \leq f \leq h$ et $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h-g) \leq \varepsilon$;
on a $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} g(x,\, y)\, \tilde\nu(y) \Big]\, \tilde\mu(x)$

et $\quad (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} h(x, y)\, \tilde\nu(y) \Big] \tilde\mu(x)$;

on en déduit $\quad (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h)$

et $\quad (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) \le \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde\nu(y) \Big] \tilde\mu(x) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h)$; de plus

$(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h) - (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) \le \varepsilon$; donc $\quad \left| (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) - \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde\nu(y) \Big] \tilde\mu(x) \right| \le \varepsilon$;

comme ε est arbitraire on en déduit $\quad (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde\nu(y) \Big] \tilde\mu(x)$.

Le cas général s'obtient en décomposant $\tilde\mu$ et $\tilde\nu$ en parties positives et négatives.

§ 6. Généralisation à $\mathbb{R}^2$

Les deux théorèmes suivants se déduisent facilement des théorèmes correspondants obtenus pour les rectangles.

A. Théorème de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$

> Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$; alors $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^2)$ on a $\quad f_n\, \tilde\mu \xrightarrow{\times} f\, \tilde\mu$; en conséquence $\quad \tilde\mu(f_n) \to \tilde\mu(f)$.

B. Théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^2$

Soient $f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$ et $\tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; alors on a

$$\Big[x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \tilde\nu(y) \Big] \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}), \qquad \Big[y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \tilde\mu(x) \Big] \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}),$$

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, (\tilde\mu \otimes \tilde\nu) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \tilde\nu(y) \Big] \tilde\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \tilde\mu(x) \Big] \tilde\nu(y)}$$

> **Tous les résultats de ce chapitre se généralisent sans difficulté majeure aux espaces $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$.**

Contenu : Dérivation des primitives. Convolution. Transformée de Laplace. Théorème de Titchmarsh. Transformée de Fourier.

§ 1. Dérivation des primitives

1.1. Définition : Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$; on pose $\forall\, s > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})(x) = \frac{1}{s}\, \tilde{\mu}\left(\mathbb{1}_{[x\,,\,x+s]}\right) = \frac{1}{s}\int_x^{x+s} \tilde{\mu}(t)}\,.$$

1.2. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{T}_s(\tilde{\mu}) \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ et $\left\|\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\right\| \leq \dfrac{1}{s}\, \|\tilde{\mu}\|_\star$.

Dém :

Si F est une primitive de $\tilde{\mu}$ on a $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{T}_s(\tilde{\mu})(x) = \dfrac{1}{s}\left[F(x+s) - F(x)\right]$,

donc $\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})$ est une fonction continue ; de plus $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\left|\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})(x)\right| \leq \frac{1}{s}\int_x^{x+s} |\tilde{\mu}|(x) \leq \frac{1}{s}\, \|\tilde{\mu}\|_\star\,.$$

1.3. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{T}_s(\tilde{\mu}) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\boxed{\left\|\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\right\|_1 \leq \|\tilde{\mu}\|_\star}$.

Dém : $\left\|\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\right\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})(x)\right| dx \leq \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x\,,\,x+s]}(t)\, |\tilde{\mu}|(t)\right] dx$

or $\forall\, x\,,\, t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{1}_{[x\,,\,x+s]}(t) = \mathbb{1}_{[t-s\,,\,t]}(x)$, donc

$$\left\|\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\right\|_1 \leq \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t-s\,,\,t]}(x)\, dx\right] |\tilde{\mu}|(t) = \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{t-s}^{t} dx\right] |\tilde{\mu}|(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\mu}|(t) = \|\tilde{\mu}\|_\star\,.$$

1.4.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_s(\tilde{\mu})(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}}$.

1.5. Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ on a $\left\|\mathrm{T}_s(f)\right\| \leq \|f\|$ et $\mathrm{T}_s(f) \to f$ uniformément sur tout compact quand $s \to 0$.

Dém : On a $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |\mathrm{T}_s(f)| \leq \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_x^{x+s} |f|(t)\, dt \leq \|f\|$.

D'autre part soit $[a\,,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$;

f étant uniformément continue dans $[a\,,b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, u\,,\, v \in [a\,,b]$ $\Big[\, |u-v| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |f(u)-f(v)| \leq \varepsilon \,\Big]$; on a donc $\forall\, s \leq \alpha \quad \forall\, x \in [a\,,b]$

$$\big|\mathrm{T}_s(f)(x) - f(x)\big| = \Big| \int_0^1 \big[f(x+s\,t) - f(x) \big]\, d\,t \,\Big| \leq \int_0^1 \big| f(x+s\,t) - f(x) \big|\, d\,t \leq \varepsilon\,.$$

1.6. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{T}_s(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \tilde{f}$ quand $s \to 0$.

<u>Dém</u> : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $\mathrm{T}_s - \mathrm{I} \,:\, \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{T}_s(\tilde{f}) \xrightarrow{2} \tilde{f}$ quand $s \to 0$.

<u>Dém</u> : Analogue à la précédente.

1.8. <u>Lemme</u> : $\forall\, f \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ on a $\big\|\mathrm{T}_s(f)\big\| \leq \|f\|$ et $\mathrm{T}_s(f) \to f_+$ uniformément sur tout compact quand $s \to 0$. $\Big(\, f_+$ est défini par $\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; f_+(x) = f(x^+) \Big)$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\;|\mathrm{T}_s(f)| \leq \dfrac{1}{s} \displaystyle\int_x^{x+s} |f|(t)\, d\,t \leq \|f\|$. D'autre part soit $[a\,,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$; f étant étagée dans $[a\,,b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, u\,,\, v \in [a\,,b]$ $\Big[\, u < v \leq u + \alpha \;\Rightarrow\; f(v) = f(u^+) \Big]$; on a donc

$$\forall\, s \leq \alpha \quad \forall\, x \in [a\,,b] \quad \mathrm{T}_s(f)\,(x) \;=\; \frac{1}{s}\int_x^{x+s} f(t)\; d\,t \;=\; \frac{1}{s}\int_x^{x+s} f(x^+)\; d\,t \;=\; f(x^+)\,.$$

1.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet_D(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{T}_s(\tilde{\mu}) \xrightarrow{\phi} \tilde{\mu}$ quand $s \to 0$.

<u>Dém</u> : Comme $\forall\, s > 0$ on a $\big\|\mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\big\|_1 \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$, il suffit de montrer que

$$\forall\, h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\,(x)\; h(x)\; d\,x \;\to\; \int_{\mathbb{R}} h(t)\, \tilde{\mu}\,(t) \quad \text{quand} \quad s \to 0\,.$$

On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\,(x)\; h(x)\; d\,x \;=\; \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x\,,\,x+s]}(t)\; |\tilde{\mu}|\,(t) \Big]\, h(x)\; d\,x$

$$= \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t-s\,,\,t]}(x)\; h(x)\; d\,x \Big]\, \tilde{\mu}(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_s(h)\,(t)\; \tilde{\mu}\,(t)\;;\;\; \text{or} \;\; \mathrm{T}_s(h) \xrightarrow{\mathrm{b}} h_+\,,$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_s(\tilde{\mu})\,(x)\; h(x)\; d\,x \;\to\; \int_{\mathbb{R}} h(t^+)\; \tilde{\mu}\,(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} h(t)\; \tilde{\mu}\,(t)$ quand $s \to 0$.

§ 2. Convolution sur $\mathbb{R}$

2.1. Lemme :

Soit $f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$; posons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (r, s) \mapsto f(r+s)$; alors on a $F \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^2)$.

Dém : Il suffit de faire un dessin.

2.2. Définition : On pose $\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$

$$\boxed{\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \ : \ \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ : \ f \mapsto \iint_{\mathbb{R}^2} f(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)}\,.$$

2.3. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ et $\|\, \tilde{\mu} * \tilde{\nu}\,\|_\star \le \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star\, \|\tilde{\nu}\|_\star$.

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ $\big|(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h)\big| \le \|\,h\,\| \iint_{\mathbb{R}^2} |\,\tilde{\mu}\,|(r)\,|\,\tilde{\nu}\,|(s) = \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star\, \|\tilde{\nu}\|_\star\, \|h\|$;

donc $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ et $\|\, \tilde{\mu} * \tilde{\nu}\,\|_\star \le \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star\, \|\tilde{\nu}\|_\star$.

Montrons que $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$; soit $\alpha \in \mathbb{R}$; posons $\forall\, \varepsilon \neq 0$ $g_\varepsilon = \mathbb{1}_{]\,\alpha\,,\,\alpha+\varepsilon\,[}$;

fixons $s \in \mathbb{R}$ et posons $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : r \mapsto g_\varepsilon(r+s)$; on a $h_\varepsilon = \mathbb{1}_{]\,\alpha-s\,,\,\alpha-s+\varepsilon\,[}$;

donc $h_\varepsilon \xrightarrow{\bullet} 0$ quand $\varepsilon \to 0$; de plus $\forall\, \varepsilon \neq 0$ $\|\,h_\varepsilon\| = 1$; donc $\forall\, s \in \mathbb{R}$ on a $k_\varepsilon(s) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(r+s)\, \tilde{\mu}(r) = \int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(r)\, \tilde{\mu}(r) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$; de plus $\forall\, \varepsilon \neq 0$

on a $\|\,k_\varepsilon\| \le \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star$, donc $\int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(s)\, \tilde{\nu}(s) = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(g_\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$;

donc $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

2.4.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}(\mathbb{1})\, \tilde{\nu}(\mathbb{1})$; de plus si $\tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$, alors $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$ et $\|\, \tilde{\mu} * \tilde{\nu}\,\|_\star = \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star\, \|\tilde{\nu}\|_\star$.

2.5. Théorème : $(\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})\,,\, *)$ est une algèbre de Banach associative, commutative et unitaire. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$.

Dém : Classique.

2.6. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ $\forall\, f \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R})$ on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)}\,.$$

Dém : Soit $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^2)$ avec $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$; on a donc $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(f_n) \to (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(f)$;

posons $F(r,s) = f(r+s)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $F_n(r,s) = f_n(r+s)$; on a

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^2)$ et $F_n \xrightarrow{\mathrm{b}} F$, donc $F \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$ et

$(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(F_n) \to (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(F)$; or on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\tilde\mu * \tilde\nu)(f_n) = (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(F_n)$,

donc $(\tilde\mu * \tilde\nu)(f) = (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(F)$ quand $n \to +\infty$.

2.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \quad \forall\, f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ on a

$$\boxed{(\tilde\mu * \tilde\nu)(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(r+s)\, \tilde\mu(r)\, \tilde\nu(s)}\,.$$

<u>Dém</u> : Par linarité on peut supposer $\tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$, donc $\tilde\mu * \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$ et $\tilde\mu \otimes \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^2)^+$. Soit $\varepsilon > 0$ et soient $g, h \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R})$ tels que $g \le f \le h$ et $(\tilde\mu * \tilde\nu)(h-g) \le \varepsilon$. Posons $G(r,s) = g(r+s)$ et $H(r,s) = h(r+s)$.
On a $(\tilde\mu * \tilde\nu)(g) = (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(G) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(F) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(H) = (\tilde\mu * \tilde\nu)(h)$
et $(\tilde\mu * \tilde\nu)(g) \le (\tilde\mu * \tilde\nu)(f) \le (\tilde\mu * \tilde\nu)(h)$, donc
$\big|(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) - (\tilde\mu * \tilde\nu)(F)\big| \le \big|(\tilde\mu * \tilde\nu)(h) - (\tilde\mu * \tilde\nu)(g)\big| = (\tilde\mu * \tilde\nu)(h-g) \le \varepsilon$;
on en déduit $(\tilde\mu * \tilde\nu)(f) = (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(F)$.

§ 3. <u>Convolution sur $\mathbb{R}^+$</u>

(Démonstrations analogues à celles du paragraphe précédent)

3.1. <u>Lemme</u> : Soit $f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+)$; posons $F : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R} : (r,s) \mapsto f(r+s)$; alors on a $F \in \mathcal{PR}_O[(\mathbb{R}^+)^2]$.

3.2. <u>Définition</u> : On pose $\forall\, \tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$

$$\boxed{\tilde\mu * \tilde\nu \;:\; \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R} \;:\; f \mapsto \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f(r+s)\, \tilde\mu(r)\, \tilde\nu(s)}\,.$$

3.3. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ on a $\tilde\mu * \tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.

3.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ on a $\tilde\mu * \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ et $\|\tilde\mu * \tilde\nu\|_\star \le \|\tilde\mu\|_\star \|\tilde\nu\|_\star$.

3.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ on a $(\tilde\mu * \tilde\nu)(\mathbb{1}) = \tilde\mu(\mathbb{1})\, \tilde\nu(\mathbb{1})$; de plus si $\tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)^+$, alors $\tilde\mu * \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)^+$ et $\|\tilde\mu * \tilde\nu\|_\star = \|\tilde\mu\|_\star \|\tilde\nu\|_\star$.

3.6. Théorème : $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^+), *)$ est une algèbre de Banach associative commutative et unitaire. $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ sont des sous-algèbres de Banach de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.

3.7. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \quad \forall\, f \in \mathcal{W}_O(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)}\,.$$

§ 4. Transformée de Laplace

4.1. Définition :

On pose $\mathrm{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid\mid Re(z) > 0 \}$; soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$; on définit $\forall\, z \in \mathrm{H}$

$$\boxed{(\mathrm{L}\,\tilde{\mu})(z) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt}\, \tilde{\mu}(t)}\,.$$

$\mathrm{L}\,\tilde{\mu}$ est la transformée de Laplace de $\tilde{\mu}$.

4.2. Théorème : $\mathrm{L}\,\tilde{\mu}$ est une fonction analytique dans H ; de plus $\|\mathrm{L}\,\tilde{\mu}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$.

Dém : On applique le théorème d'holomorphie.

4.3. Lemme :

Soit $h \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R}^+)$ et $\varepsilon > 0$; alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\boxed{\forall\, t \geq 0 \quad \big| h(t) - P(e^{-t}) \big| \leq \varepsilon}\,.$$

Dém : On définit la fonction $k : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la manière suivante : $k(0) = 0$ et $k(u) = h(-\ln u)$ si $0 < u \leq 1$; la fonction k étant continue sur $[0,1]$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\, u \in [0,1] \quad \big| k(u) - P(u) \big| \leq \varepsilon$; en particulier on a $\forall\, u \in\,]0,1] \quad \big| h(-\ln u) - P(u) \big| \leq \varepsilon$; on en déduit $\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \quad \big| h(t) - P(e^{-t}) \big| \leq \varepsilon$.

4.4. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ on a $\big[\mathrm{L}\,\tilde{\mu} = 0$ dans $\mathrm{H} \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0 \big]$.

Dém : Supposons $\mathrm{L}\,\tilde{\mu} = 0$ dans H ; alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}^+} e^{-nt}\, \tilde{\mu}(t) = 0$, donc aussi $\forall\, P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_{\mathbb{R}^+} P(e^{-t})\, \tilde{\mu}(t) = 0$; en vertu du lemme précédent on en déduit $\forall\, h \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R}^+) \quad \int_{\mathbb{R}^+} h(t)\, \tilde{\mu}(t) = 0$, c-à-d $\tilde{\mu} = 0$.

4.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu\,,\, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ on a $\boxed{\mathrm{L}\,(\tilde\mu * \tilde\nu) = (\mathrm{L}\,\tilde\mu)\,(\mathrm{L}\,\tilde\nu)}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, z \in \mathrm{H}$

$$\mathrm{L}\,(\tilde\mu * \tilde\nu)(z) = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-z(r+s)}\,\tilde\mu(r)\,\tilde\nu(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zr}\,\tilde\mu(r) \int_{\mathbb{R}} e^{-zs}\,\tilde\nu(s) = (\mathrm{L}\,\tilde\mu)(z)\;(\mathrm{L}\,\tilde\nu)(z)$$

§ 5. Théorème de Titchmarsh

5.1. <u>Théorème de Titchmarsh dans $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$</u>

$$\boxed{\forall\, \tilde\mu\,,\, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+) \quad \text{on a} \quad \Big[\, \tilde\mu * \tilde\nu = 0 \;\Leftrightarrow\; (\tilde\mu = 0 \;\text{ ou }\; \tilde\nu = 0) \Big]}\,.$$

<u>Dém</u> : Supposons $\tilde\mu * \tilde\nu = 0$; on en déduit $(\mathrm{L}\,\tilde\mu)\,(\mathrm{L}\,\tilde\nu) = 0$; $\mathrm{L}\,\tilde\mu$ et $\mathrm{L}\,\tilde\nu$ sont des fonctions analytiques dans H ; supposons $\mathrm{L}\,\tilde\mu \neq 0$; alors les zéros de $\mathrm{L}\,\tilde\mu$ sont isolés ; donc les zéros de $\mathrm{L}\,\tilde\nu$ sont denses, donc $\mathrm{L}\,\tilde\nu = 0$, donc $\tilde\nu = 0$.

5.2. <u>Définition</u> : $\forall\, a > 0$ on pose $\boxed{\mathsf{Y}_a \,=\, \mathbb{1}_{[\,0\,,\,a\,]}} \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+)$;
$\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ on pose $\boxed{\tilde\mu_{\,a} \,=\, \mathsf{Y}_a\,.\,\tilde\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$.

5.3. <u>Lemme</u> : $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+) \quad \forall\, a > 0$ on a

$$\Big[\, z \,\mapsto \int_0^a e^{\,z\,(a-t)}\,\tilde\mu(t) \;\text{ est borné dans H} \Big] \;\Rightarrow\; \tilde\mu_{\,a} = 0\,.$$

<u>Dém</u> : Posons $\forall\, z \in \mathbb{C} \quad G(z) = \displaystyle\int_0^a e^{\,z\,(a-t)}\,\tilde\mu(t)$ et supposons G borné dans H ; G est par ailleurs borné dans $\mathbb{C} - \mathrm{H}$; or G est anlytique dans $\mathbb{C}$, donc $G = 0$ dans $\mathbb{C}$.
On en déduit $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad G^{(n)}(0) = \displaystyle\int_0^a (a-t)^n\,\tilde\mu(t) = 0$, donc
$\forall\, P \in \mathbb{R}[X] \quad \displaystyle\int_0^a P(t)\,\tilde\mu(t) = 0$, donc aussi $\forall\, h \in \mathcal{C}\big([\,0\,,\,a\,],\,\mathbb{R}\big) \quad \displaystyle\int_0^a h(t)\,\tilde\mu(t) = 0$,
donc $\tilde\mu = 0$ sur $[\,0\,,\,a\,]$.

5.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+) \quad \forall\, a > 0$ on a

$$\Big[\, z \,\mapsto\, e^{\,a\,z}\,(\mathrm{L}\,\tilde\mu)(z) \;\text{ est borné dans H} \Big] \;\Leftrightarrow\; \tilde\mu_{\,a} = 0\,.$$

<u>Dém</u> :

a) $\Leftarrow$: On a $e^{\,a\,z}\,(\mathrm{L}\,\tilde\mu)(z) = \displaystyle\int_a^\infty e^{\,-\,z\,(t-a)}\,\tilde\mu(t)$ qui est bien borné sur H.

b) $\Rightarrow$: On a $\forall z \in \mathrm{H} \quad \int_0^a e^{z(a-t)}\,\tilde{\mu}(t) = e^{az}\,(\mathrm{L}\,\tilde{\mu})(z) - \int_a^{\infty} e^{-z(t-a)}\,\tilde{\mu}(t)$
qui est borné dans H, donc $\tilde{\mu}_a = 0$.

5.5. Lemme :

Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tel que $\tilde{\mu} * \tilde{\mu} = 0$ et soit $a > 0$; alors $(\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a)_a = 0$.

Dém : On a $\forall h \in \mathcal{E}\big([0, a], \mathbb{R}\big)$

$$(\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a)(h) = \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} h(r+s)\,\tilde{\mu}_a(r)\,\tilde{\mu}_a(s) = \int_0^a\!\!\int_0^a h(r+s)\,\tilde{\mu}(r)\,\tilde{\mu}(s)$$
$$= \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} h(r+s)\,\tilde{\mu}(r)\,\tilde{\mu}(s) = (\tilde{\mu} * \tilde{\mu})(h) = 0.$$

5.6. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ on a $\big[\, \tilde{\mu} * \tilde{\mu} = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\mu} = 0 \,\big]$.

Dém : Soit $a > 0$; alors $(\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a)_a = 0$, donc $e^{az}\,\mathrm{L}(\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a) = e^{az}\,[\mathrm{L}(\tilde{\mu}_a)]^2$
$= [e^{az/2}\,\mathrm{L}(\tilde{\mu}_a)]^2$ est borné dans H, donc également $e^{az/2}\,\mathrm{L}(\tilde{\mu}_a)$; donc $(\tilde{\mu}_a)_{a/2} = 0$,
c-à-d $\tilde{\mu}_{a/2} = 0$; comme a est arbitraire, $\tilde{\mu} = 0$.

5.7. Lemme : Soient $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tels que $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$; alors $(t\,\tilde{\mu}) * \tilde{\nu} = 0$.

Dém : On a $\forall h \in \mathcal{E}_O\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$

$$0 = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,[t.h(t)] = \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} (r+s)\,h(r+s)\,\tilde{\mu}(r)\,\tilde{\nu}(s)$$
$$= \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} h(r+s)\,r\,\tilde{\mu}(r)\,\tilde{\nu}(s) + \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} h(r+s)\,\tilde{\mu}(r)\,s\,\tilde{\nu}(s) = \big[(t\,\tilde{\mu}) * \tilde{\nu} + \tilde{\mu} * (t\,\tilde{\nu})\big](h)\ ;$$

posons $\tilde{\mu}' = t\,\tilde{\mu}$ et $\tilde{\nu}' = t\,\tilde{\nu}$; on a $\tilde{\mu}' * \tilde{\nu} + \tilde{\mu} * \tilde{\nu}' = 0$, donc
$0 = (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu}) * (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu} + \tilde{\mu} * \tilde{\nu}') = (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu}) * (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu})$, donc $\tilde{\mu}' * \tilde{\nu} = 0$.

5.8. Théorème :

Soient $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tels que $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$; alors $\forall\, i, j \in \mathbb{N} \quad \big(t^i\,\tilde{\mu}\big) * \big(t^j\,\tilde{\nu}\big) = 0$.

Dém : On fait une récurrence sur i ou j.

5.9. Lemme :

Soient $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tels que $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$; soit $a > 0$ et soit T_a le triangle dont les sommets sont $(0,0), (a,0), (0,a)$; alors $\forall\, P \in \mathbb{R}[X, Y]$ on a $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.P) = 0$.

Démo : $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a} . P) = \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \mathsf{Y}_a(r+s)\, P(r,s)\, \tilde\mu(r)\,\tilde\nu(s)$

$$= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \int_0^\infty\int_0^\infty \mathsf{Y}_a(r+s)\; r^i s^j\; \tilde\mu(r)\,\tilde\nu(s) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\left(t^i \tilde\mu * t^j \tilde\nu\right)(\mathsf{Y}_a) = 0\,.$$

5.10. Théorème de Titchmarsh dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$

$$\boxed{\forall\, \tilde\mu\,,\, \tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \quad \text{on a} \quad \Big[\, \tilde\mu * \tilde\nu = 0 \;\Leftrightarrow\; (\tilde\mu = 0 \;\text{ ou }\; \tilde\nu = 0) \Big]}\,.$$

Dém : On suppose $\tilde\mu * \tilde\nu = 0$. Soit $g \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et choisissons $a > 0$ tel que $g = 0$ en dehors du triangle T_a ; soit $\varepsilon > 0$; d'après le théorème de Weierstrass pour un compact du plan, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que $\| g - P \| \le \varepsilon$ dans T_a ; on peut dès lors écrire $\big|(\tilde\mu\otimes\tilde\nu)(g)\big| = \big|(\tilde\mu\otimes\tilde\nu)(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.g)\big| \le \big|(\tilde\mu\otimes\tilde\nu)(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.P)\big|$ $+ \big|(\tilde\mu\otimes\tilde\nu)[\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.(g-P)]\big| \le \varepsilon\,|\tilde\mu\otimes\tilde\nu|(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a})$; comme ε est arbitraire, on a $(\tilde\mu\otimes\tilde\nu)(g) = 0$; on en déduit $\tilde\mu\otimes\tilde\nu = 0$, donc $\tilde\mu = 0$ ou $\tilde\nu = 0$.

§ 6. Transformée réelle de Fourier

6.1. Définition : Soit $\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; on pose $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(\mathrm{A}\,\tilde\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,t)\,\tilde\mu(t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(\mathrm{B}\,\tilde\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin(x\,t)\,\tilde\mu(t)}$$

$\mathrm{A}\,\tilde\mu$ et $\mathrm{B}\,\tilde\mu$ s'appellent respectivement la transformée cosinusoïdale et la transformée sinusoïdale de $\tilde\mu$.

Notation :

On note $\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées uniformément continues.

6.2.* Théorème : $\big(\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}), \|\;\|\big)$ est une algèbre de Riesz-Banach.

6.3. Théorème : $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a

1) $\mathrm{A}\,\tilde\mu \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B}\,\tilde\mu \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$

2) $\|\mathrm{A}\,\tilde\mu\| \le \|\tilde\mu\|_\star$ et $\|\mathrm{B}\,\tilde\mu\| \le \|\tilde\mu\|_\star$

3) $\mathrm{A}\,\tilde\mu$ est une fonction paire et $\mathrm{B}\,\tilde\mu$ est une fonction impaire

4) $\big(\tilde\mu$ impaire $\Rightarrow$ $\mathrm{A}\,\tilde\mu = 0\big)$ et $\big(\tilde\mu$ paire $\Rightarrow$ $\mathrm{B}\,\tilde\mu = 0\big)$.

Dém : Le reste étant trivial, montrons que $\mathrm{A}\,\tilde{\mu}$ et $\mathrm{B}\,\tilde{\mu}$ sont uniformément continues.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ tel que $\displaystyle\int_{|t|\geq N} |\tilde{\mu}(t)| \leq \varepsilon$; on a $\forall\, u,\, v \in \mathbb{R}$

$$\big|(\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(u) - (\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(v)\big| = \Big|\int_{-N}^{N} \big[\cos(u\,t) - \cos(v\,t)\big]\,\tilde{\mu}(t) + \int_{|t|\geq N} \big[\cos(u\,t) - \cos(v\,t)\big]\,\tilde{\mu}(t)\Big|$$

$$\leq |u - v| \underbrace{\int_{-N}^{N} |t|\,|\tilde{\mu}(t)|}_{K} + 2\,\varepsilon\ ;$$

on en déduit $\Big[\,|u - v| \leq \varepsilon / K \Rightarrow \big|(\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(u) - (\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(v)\big| \leq 3\,\varepsilon\,\Big]$.

Notation : On note $\mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support borné et à dérivée seconde réglée.

6.4. Théorème : Soit $f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$; alors on a $\mathrm{A}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{B}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\boxed{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\,f = 2\,\pi\,f}$.

Dém : On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle(\mathrm{A}f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,t)\,f(t)\,dt$; donc $\forall\, x \neq 0$

$$(\mathrm{A}f)(x) = -\frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}} \sin(x\,t)\,f'(t)\,dt = \frac{1}{x^2}\int_{\mathbb{R}} \cos(x\,t)\,f''(t)\,dt\ ;$$ on en déduit

si $|x| \leq 1$ $\big|(\mathrm{A}f)(x)\big| \leq \|f\|_1$ et si $|x| \geq 1$ $\big|(\mathrm{A}f)(x)\big| \leq \dfrac{1}{x^2}\,\|f''\|_1$;

donc $\mathrm{A}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; idem pour $\mathrm{B}f$; $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$ est donc bien défini sur $\mathcal{R}_O^2(\mathbb{R})$.

On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\big[(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\,f\big](x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,u)\Big[\int_{\mathbb{R}} \cos(u\,t)\,f(t)\,dt\Big]\,du + \int_{\mathbb{R}} \sin(x\,u)\Big[\int_{\mathbb{R}} \sin(u\,t)\,f(t)\,dt\Big]\,du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \big[\cos(x\,u)\cos(u\,t) + \sin(x\,u)\sin(u\,t)\big]\,f(t)\,dt\Big]\,du.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \cos\big[u\,(t - x)\big]\,f(t)\,dt\Big]\,du = 2\int_0^{\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}} \cos\big[u\,(t - x)\big]\,f(t)\,dt\Big]\,du$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $\forall\, u \geq 0$ $\displaystyle\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}} \cos\big[u\,(t - x)\big]\,f(t)\,dt$;

soit $M > 0$ tel que $\big[\,|t| \geq M \Rightarrow f(t) = 0\,\big]$;

on a $\displaystyle\Phi(u) = \int_{-M}^{M} \cos\big[u\,(t - x)\big]\,f(t)\,dt$, donc $\forall\, u > 0$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{u}\int_{-M}^{M} \sin\big[u\,(t - x)\big]\,f'(t)\,dt = \frac{2}{u^2}\int_{-M}^{M} \sin^2\big[u\,(t - x)/2\big]\,f''(t)\,dt\ ;$$

posons $\forall\, u > 0$ $\forall\, t \in [-M, M]$ $\displaystyle H(u, t) = \frac{1 + u^{3/2}}{u^2}\,\sin^2\big[u\,(t - x)/2\big]$;

$\forall\, u \in\,]\,0, 1\,]$ $\forall\, t \in [-M, M]$ on a $0 \leq H(u, t) \leq \dfrac{1}{2}\,(t - x)^2$ car $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $|\sin a| \leq |a|$, donc $0 \le H(u\,,t) \le \dfrac{1}{2}\,(M+|x|)^2$; de même $\forall\, u > 1 \quad \forall\, t \in [-M, M]$ on a $0 \le H(u\,,t) \le 2$; donc H est borné dans $\mathbb{R}_*^+ \times [-M, M]$.

On en déduit

$$\big[\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,f\,\big]\,(x) \;=\; 2\int_0^\infty \Phi\,(u)\;d\,u \;=\; 4\int_0^\infty \Big[\int_{-M}^M H(u\,,t)\,f''(t)\;d\,t\Big]\,\frac{d\,u}{1+\;u^{3/2}}$$

$$=\;4\int_{-M}^M \Big[\int_0^\infty H(u\,,t)\;\frac{d\,u}{1+\;u^{3/2}}\Big]\;f''(t)\;d\,t =\;4\int_{-M}^M \Big[\int_0^\infty\;\frac{\sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]}{u^2}\Big]\;f''(t)\;d\,t\;;$$

or un résultat classique nous dit que $\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2(a\,u)}{u^2} \;=\; \frac{\pi}{2}\;|a|$;

on a donc $\quad \dfrac{1}{\pi}\,\big[\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,f\,\big]\,(x) = \displaystyle\int_{-M}^M |\,t-x\,|\;f''(t)\;d\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,t-x\,|\;f''(t)\;d\,t$

$$= \int_{-\infty}^x (x-t)\;f''(t)\;d\,t\;+\int_x^{+\infty}(t-x)\;f''(t)\;d\,t = \int_{-\infty}^x f'(t)\;d\,t\;-\int_x^{+\infty} f'(t)\;d\,t = 2\,f\,(x)\,.$$

6.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\,\|\,\mathrm{A}f\,\|_2^2\;+\;\|\,\mathrm{B}f\,\|_2^2\;=\;2\,\pi\,\|\,f\,\|_2^2\,}$.

<u>Dém</u> : $\displaystyle \|\,f\,\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\;d\,x = \int_{-M}^M f^2(x)\;d\,x = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-M}^M \big[\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,f\,\big](x)\,f(x)\,d\,x$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-M}^M \Big[\int_0^\infty \Big\{\int_{-M}^M \cos\big[\,u\,(t-x)\big]\;f(t)\;d\,t\Big\}\;d\,u\,\Big]\;f(x)\,d\,x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-M}^M \Big[\int_0^\infty \Big\{\int_{-M}^M \sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]\;f''(t)\;d\,t\Big\}\;\frac{d\,u}{u^2}\,\Big]\;f(x)\,d\,x$$

Posons $\quad \forall\, u > 0 \quad \forall\, x \in [-M, M] \qquad K\,(u\,,x) \;=\; \dfrac{1+\;u^{3/2}}{u^2}\displaystyle\int_{-M}^M \sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]\;f''(t)\;d\,t$;

$\forall\, u \in \,]\,0,1]\quad \forall\, x \in [-M, M]$ on a $\quad |K\,(u\,,x)| \le \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-M}^M (t-x)^2\,|\,f''(t)|\;d\,t$

$\le 2\;M^2\,\|\,f''\|_1$; de même $\forall\, u > 1 \quad \forall\, x \in [-M, M]$ on a $|K\,(u\,,x)| \le 2\;\|\,f''\|_1$;

donc K est borné dans $\mathbb{R}_*^+ \times [-M, M]$.

On en déduit $\quad \|f\|_2^2 \;=\; \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-M}^M \Big[\int_0^\infty K\,(u\,,x)\;\frac{d\,u}{1+\;u^{3/2}}\,\Big]\;f(x)\,d\,x$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-M}^M K\,(u\,,x)\,f(x)\,d\,x\Big]\;\frac{d\,u}{1+\;u^{3/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-M}^M \Big\{\int_{-M}^M \sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]\,f''(t)\;d\,t\Big\}\,f(x)\;d\,x\Big]\,\frac{d\,u}{u^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-M}^M \Big\{\int_{-M}^M \cos\big[\,u\,(t-x)\big]\;f(t)\;d\,t\Big\}\,f(x)\;d\,x\Big]\,d\,u$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\;\int_{-M}^M \cos\,(u\,t)\;f(t)\,d\,t\int_{-M}^M \cos\,(u\,x)\;f(x)\,d\,x$$

$$+\int_{-M}^{M} \sin(u\,t)\, f(t)\, dt \int_{-M}^{M} \sin(u\,x)\, f(x)\, dx \Big]\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Big[(\mathrm{A}f)^2(u) + (\mathrm{B}f)^2(u)\Big]\, du = \frac{1}{2\,\pi}\Big(\|\mathrm{A}f\|_2^2 + \|\mathrm{B}f\|_2^2\Big)$$

6.6. Théorème : Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; soit $f_n \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ avec $f_n \xrightarrow{2} \tilde f$; alors $\mathrm{A}\,f_n$ et $\mathrm{B}\,f_n$ convergent dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ vers une limite indépendante de la suite particulière f_n.

Dém : On applique le théorème précédent.

Notation provisoire : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on pose

$$\boxed{\mathrm{A}'\tilde f = {}^2\lim_n\,(\mathrm{A}\,f_n)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{B}'\tilde f = {}^2\lim_n\,(\mathrm{B}\,f_n)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

6.7. Définition : $\forall\, h \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on pose $\|h\|_{u,2} = \|h\| + \|h\|_2$.

6.8. Théorème : $\big(\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\, \|\ \|_{u,2}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

Dém : Il suffit de montrer que $\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\ \|_{u,2}$. Soit $f_n \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ une suite de Cauchy pour $\|\ \|_{u,2}$; comme $\|\ \| \le \|\ \|_{u,2}$ et $\|\ \|_2 \le \|\ \|_{u,2}$, f_n est aussi une suite de Cauchy pour $\|\ \|$ et $\|\ \|_2$; donc $\tilde f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} g \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$ et $f_n \xrightarrow{2} \tilde h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|f_n(k) - g(k)| \le \|f_n - \tilde g\|\,\|k\|_1$ et $|f_n(k) - \tilde h(k)| \le \|f_n - \tilde h\|_2\,\|k\|_2$; donc $f_n(k) \to g(k)$ et $f_n(k) \to \tilde h(k)$;
on en déduit $g = \tilde h$ et $\|f_n - g\|_{u,2} = \|f_n - g\| + \|f_n - g\|_2 \to 0$, donc $\tilde f_n \xrightarrow{u,2} g$.

6.9. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{A}'\tilde f = \mathrm{A}\tilde f \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B}'\tilde f = \mathrm{B}\tilde f \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\int_{|t| \ge N} |\tilde f(t)|\, dt \le \frac{\varepsilon}{2}$ et $\displaystyle\int_{|t| \ge N} \tilde f(t)^2\, dt \le \frac{\varepsilon}{2}$;
soit $g \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ nulle en dehors de $[-N, N]$ telle que $\displaystyle\int_{-N}^{N} |\tilde f - g|^2\, dt \le \frac{\varepsilon^2}{8\,N}$;
on a donc $\displaystyle\int_{-N}^{N} |\tilde f - g|\, dt \le \sqrt{2\,N}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{8\,N}} = \frac{\varepsilon}{2}$;
on en déduit $\displaystyle\|\tilde f - g\|_1 = \int_{-N}^{N} |\tilde f - g|\, dt + \int_{|t| \ge N} |\tilde f(t)|\, dt \le \varepsilon$ et

$$\|\tilde f - g\|_2^2 = \int_{-N}^{N} |\tilde f - g|^2\, dt + \int_{|t| \ge N} |\tilde f(t)^2|\, dt \le \frac{\varepsilon^2}{8\,N} + \frac{\varepsilon^2}{2} \le \varepsilon^2 \;;\ \text{donc}\ \ \|\tilde f - g\|_2 \le \varepsilon.$$

On peut donc construire une suite $g_n \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathrm{IR})$ telle que $g_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$ et $g_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$;

on a donc $\mathrm{A}\, g_n \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathrm{A}\tilde{f}$ et $\mathrm{A}\, g_n \xrightarrow{2} \mathrm{A}'\tilde{f}$; donc $\mathrm{A}\tilde{f} = \mathrm{A}'\tilde{f}$.

<u>*Notation définitive*</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{IR})$ on peut donc poser $\mathrm{A}\tilde{f} = \mathrm{A}'\tilde{f}$ et $\mathrm{B}\tilde{f} = \mathrm{B}'\tilde{f}$.

6.10.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{IR})$ on a $\boxed{\|\mathrm{A}\tilde{f}\|_2^2 + \|\mathrm{B}\tilde{f}\|_2^2 = 2\,\pi\,\|\tilde{f}\|_2^2}$.

6.11. <u>Corollaire</u> : $\|\mathrm{A}\|_2 = \|\mathrm{B}\|_2 = \sqrt{2\,\pi}$.

<u>Dém</u> : Si $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{IR})$ est paire on a $\mathrm{B}\tilde{f} = 0$, donc $\|\mathrm{A}\tilde{f}\|_2^2 = 2\,\pi\,\|\tilde{f}\|_2^2$.

6.12. <u>Définition</u> : On pose $\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{A} + \mathrm{B}}$; c'est un endomorphisme de $\mathcal{L}^2(\mathrm{IR})$;

$\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{IR})$ on appelle $\mathrm{T}\tilde{f}$ la <u>transformée réelle de Fourier</u> de $\tilde{f}$.

6.13.* <u>Théorème</u> : 1) $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{IR})$ $\boxed{\|\mathrm{T}\tilde{f}\|_2 = \sqrt{2\,\pi}\ \|\tilde{f}\|_2}$

2) $\boxed{\mathrm{A}\,\mathrm{B} = \mathrm{B}\,\mathrm{A} = 0}$

3) $\boxed{\mathrm{T}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 2\,\pi\,\mathrm{I}}$.

6.14. <u>Théorème</u> : A , B , T sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}^2(\mathrm{IR})$.

<u>Dém</u> : Les noyaux $\cos(x\,t)$ et $\sin(x\,t)$ sont symétriques .

6.15. <u>Définition</u> : $\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{A} + \mathrm{B}}$ est aussi un morphisme linéaire $\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{IR}) \to \mathcal{C}_B^U(\mathrm{IR})$;

$\mathrm{T}\tilde{\mu}$ est la <u>transformée réelle de Fourier</u> de $\tilde{\mu}$.

6.16. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{\mu}\,,\,\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{IR})$; alors on a

$$\boxed{\tilde{\mu}\,(\mathrm{A}\,\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}\,(\mathrm{A}\,\tilde{\mu})} \qquad \boxed{\tilde{\mu}\,(\mathrm{B}\,\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}\,(\mathrm{B}\,\tilde{\mu})} \qquad \boxed{\tilde{\mu}\,(\mathrm{T}\,\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}\,(\mathrm{T}\,\tilde{\mu})}\,.$$

<u>Dém</u> : Comme $\mathrm{A}\,\tilde{\mu}\,,\,\mathrm{B}\,\tilde{\mu}\ \ldots \in \mathcal{C}_B^U(\mathrm{IR})$, les expressions ci-dessus ont un sens ; les égalités résultent d'une interversion des signes intégraux .

6.17. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{IR})$ et $f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathrm{IR})$; alors on a

$$\boxed{\big\langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}\,,\,\mathrm{A}f \big\rangle + \big\langle \mathrm{B}\,\tilde{\mu}\,,\,\mathrm{B}f \big\rangle = 2\,\pi\,\tilde{\mu}\,(f)} \quad \text{et} \quad \boxed{\big\langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}\,,\,\mathrm{B}f \big\rangle = \big\langle \mathrm{B}\,\tilde{\mu}\,,\,\mathrm{A}f \big\rangle = 0}\,.$$

<u>Dém</u> :

1) $2\pi\,\tilde{\mu}(f) = \tilde{\mu}\left[(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,f\right] = \tilde{\mu}\left[\mathrm{A}\,(\mathrm{A}f)\right] + \tilde{\mu}\left[\mathrm{B}\,(\mathrm{B}f)\right]$

$$= \left\langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}\,,\, \mathrm{A}f \right\rangle + \left\langle \mathrm{B}\,\tilde{\mu}\,,\, \mathrm{B}f \right\rangle .$$

2) $\mathrm{A}\,\tilde{\mu}$ est paire et $\mathrm{B}f$ est impaire, donc $\left\langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}\,,\, \mathrm{B}f \right\rangle = 0$.

6.18.* Corollaire : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\left[\,(\mathrm{A}\,\tilde{\mu} = 0 \;\text{ et }\; \mathrm{B}\,\tilde{\mu} = 0) \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0\,\right]$.

6.19.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})$ $\forall\, f \in \mathcal{R}^{(2)}_{O}(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\left\langle \mathrm{T}\,\tilde{\mu}\,,\mathrm{T}f \right\rangle = 2\,\pi\,\tilde{\mu}\,(f)}$.

6.20.* Corollaire : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\left[\,\mathrm{T}\,\tilde{\mu} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0\,\right]$.

§ 7. Transformée complexe de Fourier

On est amené à utiliser des espaces de mesures et de fonctions à valeurs complexes ; nous les noterons $\widehat{\mathcal{M}^{\bullet}}(\mathbb{R})$, etc...

7.1. Définition : On pose $\boxed{\mathrm{Z} = \mathrm{A} + i\,\mathrm{B}}$ et $\boxed{\mathrm{Z}^{\#} = \mathrm{A} - i\,\mathrm{B}}$; on a donc

$\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}^{\bullet}}(\mathbb{R})$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Z}\,(\tilde{\mu})\,(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\,i\,x\,t}\,\tilde{\mu}\,(t)$ et $\mathrm{Z}^{\#}\,(\tilde{\mu})\,(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\,-i\,x\,t}\,\tilde{\mu}\,(t)$;

Z et $\mathrm{Z}^{\#}$ sont naturellement aussi définis en tant qu'opérateurs $\widehat{\mathcal{L}^2}(\mathbb{R}) \to \widehat{\mathcal{L}^2}(\mathbb{R})$.

Z et $\mathrm{Z}^{\#}$ sont les transformées complexes (directe et réciproque) de Fourier.

7.2.* Théorème : Dans $\widehat{\mathcal{L}^2}(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\mathrm{Z}\,\mathrm{Z}^{\#} = \mathrm{Z}^{\#}\,\mathrm{Z} = 2\,\pi\,\mathrm{I}}$.

7.3. Lemme : $\forall\, z \in \mathbb{C}$ on a $\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{\,z\,t - t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}\;e^{\,z^2/2}}$.

Dém : Posons $\forall\, z \in \mathbb{C}$ $f(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{\,z\,t - t^2/2}\,dt$; en vertu du théorème d'holomorphie, f est analytique dans $\mathbb{C}$; par ailleurs $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\,x\,t - t^2/2}\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{\,x^2/2 - (t-x)^2/2}\,dt = e^{\,x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{\,-(t-x)^2/2}\,dt = e^{\,x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{\,-t^2/2}\,dt$$

$= \sqrt{2\pi}\;e^{\,x^2/2}$; donc $\forall\, z \in \mathbb{C}$ $f(z) = \sqrt{2\pi}\;e^{\,z^2/2}$.

7.4. Théorème : $\boxed{\mathrm{Z}\,(e^{-X^2/2}) = \mathrm{A}\,(e^{-X^2/2}) = \sqrt{2\pi}\;e^{-X^2/2}}$.

Dém :

$$\mathrm{A}\,(e^{-X^2/2})\,(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,t)\, e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{\,i\,x\,t - t^2/2}\, dt + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\,x\,t - t^2/2}\, dt$$

$$= \sqrt{2\pi}\; e^{-x^2/2}\,.$$

7.5. <u>Définition</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on pose $\boxed{\mathsf{H}_n(X) = (-1)^n\, e^{X^2/2}\, \partial^n (e^{-X^2})}$.

Les fonctions H_n sont les <u>fonctions de Hermite</u> ; elles sont égales aux <u>polynômes de Hermite</u> multipliés par $e^{-X^2/2}$.

7.6.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ $\mathsf{H}_{2\ell}$ est une fonction paire et $\mathsf{H}_{2\ell+1}$ une fonction impaire.

7.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathsf{H}_{n+1} = X.\,\mathsf{H}_n - (\mathsf{H}_n)'}$.

<u>Dém</u> : $X.\,\mathsf{H}_n - (\mathsf{H}_n)' = (-1)^n\, X\, e^{X^2/2}\, \partial^n (e^{-X^2}) - (-1)^n\, X\, e^{X^2/2}\, \partial^n (e^{-X^2})$

$- (-1)^n\, e^{X^2/2}\, \partial^{n+1} (e^{-X^2}) = (-1)^{n+1}\, e^{X^2/2}\, \partial^{n+1} (e^{-X^2}) = \mathsf{H}_{n+1}\,.$

7.8. <u>Théorème</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathrm{Z}\,(\mathsf{H}_n) = i^n \sqrt{2\pi}\; \mathsf{H}_n}$.

<u>Dém</u> : Par récurrence sur n.

1) vrai pour $n = 0$

2) supposons vrai pour n

3) démontrons vrai pour $n+1$:

$$\mathrm{Z}\,(\mathsf{H}_{n+1})\,(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}_{n+1}(t)\, e^{\,i\,x\,t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} t\, \mathsf{H}_{n+1}(t)\, e^{\,i\,x\,t}\, dt - \int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}'_{n+1}(t)\, e^{\,i\,x\,t}\, dt$$

$$= -i\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}_n(t)\, e^{\,i\,x\,t}\, dt\Big)' + i\,x \int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}_n(t)\, e^{\,i\,x\,t}\, dt = -i\,\big[\mathrm{Z}\,(\mathsf{H}_n)\,(x)\big]' + i\,x\; \mathrm{Z}\,(\mathsf{H}_n)\,(x)$$

$$= i^{n+1}\sqrt{2\pi}\;\big[x\,\mathsf{H}_n(x) - (\mathsf{H}_n)'(x)\big] = i^{n+1}\sqrt{2\pi}\;\mathsf{H}_{n+1}(x)\,.$$

7.9.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{A}\,(\mathsf{H}_{2\ell}) = (-1)^{\ell}\sqrt{2\pi}\;\mathsf{H}_{2\ell}$

et $\mathrm{B}\,(\mathsf{H}_{2\ell+1}) = (-1)^{\ell}\sqrt{2\pi}\;\mathsf{H}_{2\ell+1}\,.$

7.10.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathrm{T}\,(\mathsf{H}_n) = (-1)^{[n/2]}\sqrt{2\pi}\;\mathsf{H}_n}$.

Quatrième partie

Espaces associés à une mesure normée positive sur $\mathbb{R}^n$

Chapitre XVII : Mesures de base $\tilde\mu$ et $\tilde\mu$–fonctionnelles sur $\mathbb{R}^n$

Contenu : On se donne $\boxed{\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)^+}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et on définit les espaces $\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$, $\mathcal{L}^2(\tilde\mu)$, $\mathcal{B}(\tilde\mu)$, $\mathcal{FO}(\tilde\mu)$ ainsi que leurs propriétés fondamentales. Il s'agit d'une généralisation des espaces décrits dans la Première partie, qui correspondent au cas où $\tilde\mu = \mathbb{1}_{[a,b]}$.

§ 1. Mesures de base $\tilde\mu$

1.1. Définition :

$\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ on pose $\|f\|_{\tilde\mu,1} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f|\,\tilde\mu$ et $\|f\|_{\tilde\mu,2} = \Big[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f}^2\,\tilde\mu\Big]^{1/2}$.

1.2.* Théorème : $\|\ \|_{\tilde\mu,1}$ et $\|\ \|_{\tilde\mu,2}$ sont des semi-normes sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \quad \|f\|_{\tilde\mu,1} \le \|\tilde\mu\|_\star\,\|f\| \quad \text{et} \quad \|f\|_{\tilde\mu,2} \le \sqrt{\|\tilde\mu\|_\star}\,\|f\|\,.$$

1.3.* Théorème : $\forall f, g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ on a $\|f g\|_{\tilde\mu,1} \le \|f\|_{\tilde\mu,2}\,\|g\|_{\tilde\mu,2}$.

1.4.* Corollaire : $\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ on a $\|f\|_{\tilde\mu,1} \le \sqrt{\|\tilde\mu\|_\star}\,\|f\|_{\tilde\mu,2}$.

1.5. Définition : On pose $\boxed{\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n).\tilde\mu = \big\{h.\tilde\mu \,\|\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)\big\}}$.

$\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n).\tilde\mu$ est un sous-espace de l'espace de Riesz-Banach $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$.

1.6. Définition :

$\boxed{[\tilde\mu] \text{ est la fermeture de } \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n).\tilde\mu \text{ dans } \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n) \text{ pour la norme } \|\ \|_\star}$.

Les éléments de $[\tilde\mu]$ s'appellent les $\boxed{\text{mesures de base } \tilde\mu}$.

1.7.* Théorème : $[\tilde\mu]$ est un espace de Riesz-Banach pour la norme $\|\ \|_\star$.

1.8. Théorème : $\boxed{[\tilde\mu] \text{ est un sous-espace intégral de } \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n).}$

Dém : Analogue au cas de $\mathcal{L}^1$ dans la première partie.

1.9. Lemme : $\boxed{\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \quad \text{on a} \quad f\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,]}$.

Dém : Soit d'abord $f \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n)$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$; alors on a $f_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\star} f\,\tilde{\mu}$, donc $f\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,]$.

Soit ensuite $f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ et soit $\mathcal{A} = \big\{ g\,\tilde{\mu} \;\|\; g \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n) \text{ et } g \leq f \big\} \subset [\,\tilde{\mu}\,]$;

$\mathcal{A}$ est une partie de $[\,\tilde{\mu}\,]$ dominée supérieurement et stable pour la loi $\vee$ et on a par définition $f\,\tilde{\mu} = \operatorname{Sup} \mathcal{A}$; il existe donc une suite $g_n \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n)$ telle que $g_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\star} f\,\tilde{\mu}$; donc $f\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,]$.

1.10. Théorème : $\boxed{\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \quad \forall \tilde{\nu} \in [\,\tilde{\mu}\,] \quad \text{on a} \quad f\,\tilde{\nu} \in [\,\tilde{\mu}\,]}$.

Dém :

Soit $\tilde{\nu} \in [\,\tilde{\mu}\,]$ et soit une suite $h_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ telle que $h_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\star} \tilde{\nu}$; on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$f\,h_n\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,]$ car $f\,h_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$; de plus $\|\, f\,\tilde{\nu} - f\,h_n\,\tilde{\mu} \,\|_\star \leq \|f\|\; \|\, \tilde{\nu} - h_n\,\tilde{\mu} \,\|_\star \to 0$;

donc $f\,\tilde{\nu} \in [\,\tilde{\mu}\,]$.

1.11.* Corollaire : $[\,\tilde{\mu}\,]$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$.

§ 2. $\tilde{\mu}$-fonctionnelles sommables

On pose $\boxed{\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) = \dfrac{1}{\tilde{\mu}}\,[\,\tilde{\mu}\,] = \left\{ \dfrac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} \;\|\; \tilde{\nu} \in [\,\tilde{\mu}\,] \right\}}$; on a donc $\boxed{[\,\tilde{\mu}\,] = \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})\,.\,\tilde{\mu}}$.

Les éléments de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ s'appellent les $\tilde{\mu}$–fonctionnelles sommables ; elles sont représentées par des lettres « droites » ; on peut écrire

$$\boxed{\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;\Rightarrow\; \mathrm{f}\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,] \subset \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)}.$$

Le « dénominateur $\tilde{\mu}$ » dans la définition des $\tilde{\mu}$–fonctionnelles sommables est purement formel ; en conséquence la propriété essentielle des $\tilde{\mu}$–fonctionnelles sommables est leur aptitude à se transformer en mesures normées *si on les multiplie par* $\tilde{\mu}$.

2.1. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}\,(\mathrm{f}) = \big(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\big)\,(\mathbb{1}) \quad \text{avec} \quad \mathbb{1} = 1_{\mathbb{R}^n}}$.

Notation intégrale : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on note $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f}(x)\,\tilde{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f}\,\tilde{\mu} = \tilde{\mu}\,(\mathrm{f})}$.

2.2. <u>Définition</u> : On munit $\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ d'une structure d'espace de Riesz en transférant naturellement à $\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ la structure de l'espace $[\,\tilde\mu\,]$: on pose $\forall$ f , g $\in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{f}+\mathrm{g} \;=\; \dfrac{\mathrm{f}\,\tilde\mu + \mathrm{g}\,\tilde\mu}{\tilde\mu} \\[2ex] \forall\, h \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}) \quad h\,\mathrm{f} \;=\; \mathrm{f}\,h \;=\; \dfrac{h\,(\mathrm{f}\,\tilde\mu)}{\tilde\mu} \\[2ex] \mathrm{f} \le \mathrm{g} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{f}\,\tilde\mu \le \mathrm{g}\,\tilde\mu \\[2ex] \mathrm{f} \vee \mathrm{g} \;=\; \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde\mu) \vee (\mathrm{g}\,\tilde\mu)}{\tilde\mu} \qquad \mathrm{f} \wedge \mathrm{g} \;=\; \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde\mu) \wedge (\mathrm{g}\,\tilde\mu)}{\tilde\mu} \\[2ex] \mathrm{f}^+ = \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde\mu)^+}{\tilde\mu} \qquad \mathrm{f}^- = \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde\mu)^-}{\tilde\mu} \qquad |\mathrm{f}| \;=\; \dfrac{|\,\mathrm{f}\,\tilde\mu\,|}{\tilde\mu} \end{array}}$$

2.3. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ on pose $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,1} = \|\,\mathrm{f}\,\tilde\mu\,\|_\star = \tilde\mu\,(|\,\mathrm{f}\,|)}$.

2.4. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f}_n\,,\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ on écrit $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} \mathrm{f}}$ ssi $\|\,\mathrm{f}_n - \mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,1} \to 0$.

On dit que f_n converge vers f <u>en norme</u> $\|\;\|_{\tilde\mu,1}$ et on note $\boxed{\mathrm{f} \,=\, {}^1\!\lim_n\; \mathrm{f}_n}$.

2.5.* <u>Théorème</u> :

$\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ est un espace de Riesz-Banach et un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$.

2.6.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} \mathrm{f} \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathrm{f}_n\,\tilde\mu \xrightarrow{\star} \mathrm{f}\,\tilde\mu}$.

2.7.* <u>Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$</u>

Soit $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ une suite <u>monotone</u> ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\mathrm{f}_n\|_{\tilde\mu,1} \le M$; alors f_n converge en norme $\|\;\|_{\tilde\mu,1}$ vers une $\tilde\mu$–fonctionnelle $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$; on a donc aussi $\lim_n \|\,\mathrm{f}_n\,\|_{\tilde\mu,1} = \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,1}$.

2.8. <u>Définition</u> : Une suite $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ est <u>dominée</u> ssi la suite $\mathrm{f}_n\,\tilde\mu \in [\,\tilde\mu\,]$ est dominée.

2.9. <u>Définition</u> : Soit une suite dominée $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$; on pose

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_n\; \mathrm{f}_n \;=\; \frac{1}{\tilde\mu}\; \operatorname*{Sup}_n\; (\mathrm{f}_n\,\tilde\mu) \quad \text{et} \quad \operatorname*{Inf}_n\; \mathrm{f}_n \;=\; \frac{1}{\tilde\mu}\; \operatorname*{Inf}_n\; (\mathrm{f}_n\,\tilde\mu)}.$$

$$\text{et} \qquad \boxed{\operatorname*{\overline{Lim}}_n\; \mathrm{f}_n \;=\; \frac{1}{\tilde\mu}\; \operatorname*{\overline{Lim}}_n\; (\mathrm{f}_n\,\tilde\mu) \quad \text{et} \quad \operatorname*{\underline{Lim}}_n\; \mathrm{f}_n \;=\; \frac{1}{\tilde\mu}\; \operatorname*{\underline{Lim}}_n\; (\mathrm{f}_n\,\tilde\mu)}.$$

2.10. <u>Définition</u> : On dit que la suite dominée $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ converge <u>$\tilde{\mu}$–finement</u> vers $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ ssi $\boxed{\mathrm{f} = \overline{\mathrm{Lim}}_n\, \mathrm{f}_n = \underline{\mathrm{Lim}}_n\, \mathrm{f}_n}$. On écrit $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f}}$ et on note $\boxed{\mathrm{f} = \mathrm{Lim}_n\, \mathrm{f}_n}$.

2.11.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{f}_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} \mathrm{f}\, \tilde{\mu}}$.

2.12.* <u>Théorème</u> : $\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f} \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{f}_n - \mathrm{f}| \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} 0$.

2.13. <u>Définition</u> : $\forall\, f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$ on pose $\boxed{\{f\}_{\tilde{\mu}} = \dfrac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

$\{f\}_{\tilde{\mu}}$ s'appelle la $\tilde{\mu}$–fonctionnelle <u>associée</u> à f.

2.14.* <u>Théorème</u> :

L'application $\boxed{\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \to \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;:\; f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}}$ est un <u>morphisme de Riesz</u>.

2.15.* <u>Corollaire</u> :

$$\boxed{\forall\, f,\, g \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R}^n) \quad \{f \vee g\}_{\tilde{\mu}} = \{f\}_{\tilde{\mu}} \vee \{g\}_{\tilde{\mu}} \quad \text{et} \quad \{f \wedge g\}_{\tilde{\mu}} = \{f\}_{\tilde{\mu}} \wedge \{g\}_{\tilde{\mu}}}.$$

2.16. <u>Théorème</u> : $\boxed{\text{Soient } f_n\,,\, f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \text{ tels que } f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f \;;\; \text{alors } \{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{f\}_{\tilde{\mu}}}$.

<u>Dém</u> : C'est le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$ appliqué à $\tilde{\mu}$.

<u>*Notation*</u> : On note $\underline{\mathcal{W}_B}(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}} = \big\{ \{f\}_{\tilde{\mu}} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;\big\|\; f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}) \big\} \subset \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$;

c'est l'image du morphisme du Théorème 2.14.

On utilise des notations analogues pour tous les *sous-ensembles* de $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.

$\boxed{\text{Dans la pratique on remplacera couramment la notation } \{f\}_{\tilde{\mu}} \text{ par la notation } f}$.

2.17.* <u>Théorème</u> :

$\underline{\mathcal{E}_O}(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}}$ et $\underline{\mathcal{C}_O}(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}}$ sont denses dans $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ pour la norme $\|\;\|_{\tilde{\mu},1}$.

§ 3. <u>$\tilde{\mu}$-fonctionnelles hilbertiennes</u>

3.1. <u>Définition</u> : On note $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ le sous-espace de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ formé des $\tilde{\mu}$-fonctionnelles f pour lesquelles il existe $M > 0$ tel que $\boxed{\forall\, g \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}^n) \quad \big(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\big)(g) \le M\, \|\, g\,\|_{\tilde{\mu},2}}$.

On a donc $\boxed{\mathcal{L}^2(\tilde{\mu}) \subset \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})}$.

Les éléments de $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ s'appellent les $\tilde{\mu}$-fonctionnelles hilbertiennes.

3.2. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},2} = \sup\limits_{\substack{g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n) \\ \|g\|_{\tilde{\mu},2}=1}} \big(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\big)(g)}$

3.3. Définition : $\forall\, \mathrm{f}_n, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on écrit $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},2} \mathrm{f}}$ ssi $\|\mathrm{f}_n - \mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},2} \to 0$.

On dit que f_n converge vers f en norme $\|\ \|_{\tilde{\mu},2}$ et on note $\boxed{\mathrm{f} = {}^2\lim\limits_n \mathrm{f}_n}$.

3.4.* Théorème : $\big(\mathcal{L}^2(\tilde{\mu}), \|\ \|_{\tilde{\mu},2}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

3.5. Théorème : $\underline{\mathcal{E}_O}(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}}$ et $\underline{\mathcal{C}_O}(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}}$ sont denses dans $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ pour la norme $\|\ \|_{\tilde{\mu},2}$.

Dém : Analogue au cas de $\mathcal{L}^2$ dans la Première partie.

3.6.* Théorème :

$$\boxed{\big(\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})\,.\,\tilde{\mu}\ ,\ \|\ \|_{\tilde{\mu},2}\big) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)\,,\ \|\ \|_{\tilde{\mu},2}\big)}.$$

3.7.* Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$

Soit $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\mathrm{f}_n\|_{\tilde{\mu},2} \leq M$; alors f_n converge en norme $\|\ \|_{\tilde{\mu},2}$ vers une $\tilde{\mu}$–fonctionnelle $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$; on a donc aussi $\lim\limits_n \|\mathrm{f}_n\|_{\tilde{\mu},2} = \|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},2}$.

3.8. Définition :

Si $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on définit le produit $\mathrm{f}\,\mathrm{g}$ comme dans le cas $\tilde{\mu} = \mathbb{1}_{[a,b]}$.

3.9.* Théorème : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},2} = \sqrt{\|\mathrm{f}^2\|_{\tilde{\mu},1}}$.

3.10.* Théorème : $\forall\, \mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\mathrm{f}\,\mathrm{g}\|_{\tilde{\mu},1} \leq \|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},2}\, \|\mathrm{g}\|_{\tilde{\mu},2}$.

3.11.* Corollaire : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},1} \leq \sqrt{\|\tilde{\mu}\|_\star}\ \|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},2}$.

3.12.* Théorème : $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},2} \mathrm{f} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{f}_n^2\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\star} \mathrm{f}^2\,\tilde{\mu}}$.

3.13. Définition : On définit le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ en posant

$\forall\, \mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ $\boxed{\big\langle \mathrm{f}, \mathrm{g} \big\rangle_{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu}\,(\mathrm{f}\,\mathrm{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f}\,\mathrm{g}\,\tilde{\mu}}$.

3.14.* Théorème : $\left(\mathcal{L}^2(\tilde{\mu}),\ \langle\ ,\ \rangle_{\tilde{\mu}}\right)$ est un espace de Riesz-Hilbert.

§ 4. $\tilde{\mu}$-fonctionnelles bornées

4.1. Définition :

On note $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$ le sous-espace de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ formé des $\tilde{\mu}$-fonctionnelles f pour lesquelles il existe $M > 0$ tel que $\boxed{\forall\, g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n) \quad \left(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\right)(g) \leq M\,\|\,g\,\|_{\tilde{\mu},1}}$.

Les éléments de $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$ s'appellent les $\tilde{\mu}$-fonctionnelles bornées.

4.2. Définition : $\forall\,\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} = \sup_{\substack{g\in\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)\\ \|g\|_{\tilde{\mu},1}=1}} \left(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\right)(g)}$

4.3.* Théorème : $\forall\,\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ on a $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} = \inf_{\substack{M\in\mathbb{R}^+\\ M\geq|\mathrm{f}|}} M}$

4.4.* Théorème : $\boxed{\mathcal{B}(\tilde{\mu}) \subset \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})}$.

4.5.* Théorème : $\forall\,\tilde{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ $\boxed{|\,\mathrm{f}\,| \leq \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}}}$ et $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|^2_{\tilde{\mu},2} \leq \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}}\,\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},1}}$.

4.6.* Théorème : $\left(\mathcal{B}(\tilde{\mu}),\ \|\ \|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}}\right)$ est une algèbre de Riesz-Banach.

4.7.* Théorème :

$$\boxed{\left(\mathcal{B}(\tilde{\mu}).\tilde{\mu}\ ,\ \|\ \|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}}\right) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \left(\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n),\ \|\ \|_{\tilde{\mu},1}\right)}.$$

4.8. Définition :

Si $\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ et $\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on définit le produit f g comme dans le cas $\tilde{\mu} = \mathbb{1}_{[a,b]}$.

4.9. Définition : $\forall\,\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ $\forall\,\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\left(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\right)(\mathrm{g}) = \left(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\right)(\mathrm{f}) = \tilde{\mu}\,(\mathrm{f}\,\mathrm{g})}$.

4.10.* Théorème : $\forall\,\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ $\forall\,\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on a $\|\,\mathrm{f}\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},1} \leq \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}}\ \|\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},1}$.

4.11.* Théorème : $\forall\,\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ $\forall\,\mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\,\mathrm{f}\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},2} \leq \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}}\ \|\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},2}$.

4.12.* Théorème : $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$.

4.13. Théorème : $\boxed{\underline{\mathcal{W}_B}\,(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}} = \mathcal{B}(\tilde{\mu})}$.

Ce théorème signifie que l'application $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}(\tilde{\mu}) \ : \ f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}$ est <u>surjective</u>.

Plus précisément tout $\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ peut être représentée comme une <u>limite simple bornée</u> de fonctions <u>pseudo-réglées</u>.

<u>Dém</u> :

On montre facilement $\underline{\mathcal{W}_B}(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}} \subset \mathcal{B}(\tilde{\mu})$; démontrons l'inclusion opposée.

Soit $\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$; soit une suite <u>bornée</u> $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ telle que $\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \mathrm{f}$;

en considérant éventuellement une sous-suite on peut supposer $\boxed{\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f}}$.

Posons $\forall\, p \geq n \in \mathbb{N} \quad g_{n,p} = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \ldots \wedge f_p \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$g_n = \inf\limits_{r \geq n} f_r \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n)$; quand $p \to +\infty$ on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_{n,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} g_n$,

donc $\{g_{n,p}\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{g_n\}_{\tilde{\mu}}$, c-à-d $\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \wedge \{f_{n+1}\}_{\tilde{\mu}} \wedge \ldots \wedge \{f_p\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{g_n\}_{\tilde{\mu}}$,

c-à-d $\operatorname*{Inf}\limits_{r \geq n} \{f_r\}_{\tilde{\mu}} = \{g_n\}_{\tilde{\mu}}$.

Posons $g = \sup\limits_n g_n = \underline{\lim\limits_n} f_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$; on a $g_n \xrightarrow{\mathrm{b}} g$, donc $\{g_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{g\}_{\tilde{\mu}}$,

c-à-d $\operatorname*{Sup}\limits_n \{g_n\}_{\tilde{\mu}} = \{g\}_{\tilde{\mu}}$, c-à-d $\underline{\operatorname*{Lim}\limits_n} \{f_n\}_{\tilde{\mu}} = \operatorname*{Sup}\limits_n \Big(\operatorname*{Inf}\limits_{r \geq n} \{f_r\}_{\tilde{\mu}} \Big) = \{g\}_{\tilde{\mu}}$;

or $\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f}$, donc $\mathrm{f} = \underline{\operatorname*{Lim}\limits_n} \{f_n\}_{\tilde{\mu}} = \{g\}_{\tilde{\mu}} \in \underline{\mathcal{W}_B}(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}}$.

La fonctionnelle bornée f peut donc être représentée par $g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ qui est limite simple bornée des fonctions $g_n \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n)$.

4.14.* <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ on a $\|f\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} \leq \|f\|$.

4.15.* <u>Théorème</u> :

L'application $\boxed{\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}(\tilde{\mu}) \ : \ f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}}$ est un <u>algébromorphisme de Riesz</u>.

4.16.* <u>Corollaire</u> : $\boxed{\forall\, f,\, g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \quad \{f\,g\}_{\tilde{\mu}} = \{f\}_{\tilde{\mu}}\,\{g\}_{\tilde{\mu}} = f \,.\, \{g\}_{\tilde{\mu}}}$.

4.17.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$, $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ et $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$.

4.18. <u>Définition</u> : On pose

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \ \Big\| \ \{f\}_{\tilde{\mu}} = 0 \Big\} = \Big\{ f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \ \Big\| \ f\,\tilde{\mu} = 0 \Big\} ;$$

c'est l'espace des fonctions universelles bornées <u>*nulles $\tilde{\mu}$-presque partout*</u>.

4.19.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \ \Big\| \ \tilde{\mu}\big(|f|\big) = 0 \Big\}$.

4.20.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n)$ est un <u>idéal</u> et un sous-espace cohérent et intégral de $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$; de plus on a $\boxed{\mathcal{B}(\tilde{\mu}) \cong \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)/\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n)}$.

§ 5. $\tilde{\mu}$-fonctionnelles caractéristiques

5.1. <u>Définition</u> : On pose $\mathcal{K}(\tilde{\mu}) = \{ \sigma \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}) \parallel \sigma^2 = \sigma \} \subset \mathcal{B}(\tilde{\mu})$.

Les éléments de $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$ s'appellent les <u>$\tilde{\mu}$-fonctionnelles caractéristiques</u>.

5.2.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$ on a $\|\sigma\|_{\tilde{\mu},2} = \sqrt{\|\sigma\|_{\tilde{\mu},1}}$

5.3.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \sigma_n , \sigma \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$ on a $\sigma_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \sigma \iff \sigma_n \xrightarrow{\tilde{\mu},2} \sigma$.

5.4.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$ est une partie <u>fermée</u> de $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ et de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

On pose $\mathcal{EK}_O(\mathbb{R}^n) = \{ f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n) \parallel f^2 = f \} = \{ f \in \mathcal{R}_O(\mathbb{R}^n) \parallel f^2 = f \}$.

5.5.* <u>Théorème</u> : $\underline{\mathcal{EK}_O}(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}}$ est dense dans $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$.

<u>*Notation intégrale*</u> : Soient $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et $\sigma \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$; alors on pose $\boxed{\int_\sigma \mathrm{f}\,\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\sigma\,\mathrm{f})}$.

<u>*Notation pratique*</u> : Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathbb{1}_A \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$;

alors on note $\boxed{\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(\mathbb{1}_A)}$; si de plus $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\int_A \mathrm{f}\,\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\mathrm{f}.\mathbb{1}_A)}$.

§ 6. $\tilde{\mu}$-support

Soit $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$; comme $[\tilde{\mu}]$ est un sous-espace intégral de $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire $\operatorname*{Sup}_n \tilde{\mu} \wedge \big(n\,|\tilde{\nu}|\big) \in [\tilde{\mu}]$; plus précisément :

6.1.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$ $\boxed{\operatorname*{Sup}_n \tilde{\mu} \wedge \big(n\,|\tilde{\nu}|\big) \in \mathcal{K}(\tilde{\mu}).\,\tilde{\mu}}$.

6.2. <u>Définition</u> : $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$ on pose

$$\boxed{\mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\nu}) = \underline{\tilde{\mu}\text{-support}} \text{ de } \tilde{\nu} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \Big[\operatorname*{Sup}_n \tilde{\mu} \wedge \big(n\,|\tilde{\nu}|\big) \Big] \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})}$$

6.3. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose

$$\boxed{S_{\tilde\mu}(f) = \underline{\tilde\mu\text{-support}} \text{ de } f = S_{\tilde\mu}(f\tilde\mu) = \operatorname*{Sup}_n \mathbb{1}\wedge\big(n|f|\big) \in \mathcal{K}(\tilde\mu)}\,.$$

6.4.* Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ on a $\big[\, S_{\tilde\mu}(f) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0\,\big]$.

6.5.* Théorème : $\forall\, \tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$ on a $\big[\, S_{\tilde\mu}(\tilde\nu) = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde\mu\wedge|\tilde\nu| = 0\,\big]$.

§ 7. Théorème de Radon-Nikodym

7.1. Définition : On note $[\,\tilde\mu\,]^\perp = \{\,\tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n) \,\|\, \tilde\mu\wedge|\tilde\nu| = 0\,\}$.

Les éléments de $[\,\tilde\mu\,]^\perp$ s'appellent les mesures normées étrangères à $\tilde\mu$.

7.2.* Théorème : $[\,\tilde\mu\,]^\perp$ est un sous-espace cohérent $\boxed{\text{intégral}}$ et fermé de $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$.

7.3.* Théorème : $[\,\tilde\mu\,] \cap [\,\tilde\mu\,]^\perp = \{0\}$.

7.4. Définition : On pose

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bullet\ \ \forall\,\tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)^+ & \tilde\nu_* = \operatorname*{Sup}_n \big[\,(n\,\tilde\mu)\wedge\tilde\nu\,\big] \in [\,\tilde\mu\,] \\ \bullet\ \ \forall\,\tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n) & \tilde\nu_* = (\tilde\nu^{\,+})_* - (\tilde\nu^{\,-})_* \end{array}}$$

7.5.* Théorème : $\forall\,\tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)^+$ on a $\tilde\nu_* = \big\{\,\tilde\nu\,' \in [\,\tilde\mu\,] \,\big\|\, \tilde\nu\,' \le \tilde\nu\,\big\}$.

7.6.* Théorème : $\forall\,\tilde\nu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$ on a $\boxed{S_{\tilde\mu}(\tilde\nu_*) = S_{\tilde\mu}(\tilde\nu)}$ et $\boxed{\tilde\nu - \tilde\nu_* \in [\,\tilde\mu\,]^\perp}$.

7.7.* Théorème de Radon-Nikodym : $\boxed{\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n) = [\,\tilde\mu\,] \bigoplus [\,\tilde\mu\,]^\perp}$.

§ 8. Indicateurs dans $\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$

En toute rigueur il faudrait utiliser une notation du type $\{\ \}_{\tilde\mu}$, mais par commodité nous négligerons l'indice $\tilde\mu$.

8.1. Définition : $\forall\, f \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ on pose $\boxed{\{f > 0\} = S_{\tilde\mu}(f^+)}$

$$\{f < 0\} = \{-f > 0\} = S_{\tilde\mu}(f^-)$$

$\boxed{\{f \neq 0\} = S_{\tilde\mu}(f)}$ etc ... etc ...

8.2. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose

$$\{\mathrm{f} > \mathrm{g}\} = \{\mathrm{g} < \mathrm{f}\} = \{\mathrm{f} - \mathrm{g} > 0\} = \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,[\,(\mathrm{f} - \mathrm{g})^{+}]$$

$$\{\mathrm{f} \neq \mathrm{g}\} = \{\mathrm{f} - \mathrm{g} \neq 0\} = \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,(\mathrm{f} - \mathrm{g}) \quad \text{etc} \ldots \text{ etc} \ldots$$

8.3. <u>Définition</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; on pose $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$

$$\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}\} = \{a \leq \mathrm{f} \leq b\} = \{a \leq \mathrm{f}\}\,\{\mathrm{f} \leq b\} \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [\,a\,, b\,]$$

$$\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}\} = \{a \leq \mathrm{f} < b\} = \{a \leq \mathrm{f}\}\,\{\mathrm{f} < b\} \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [\,a\,, b\,[$$

$$\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}\} = \{a \leq \mathrm{f}\} \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [\,a\,, +\infty\,[\quad \text{etc} \ldots \text{ etc} \ldots .$$

8.4. <u>Définition</u> : Une partie A de $\mathbb{R}$ est <u>élémentaire</u> ssi $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{A}} \in \mathcal{EK}(\mathbb{R})}$.

Une partie élémentaire de $\mathbb{R}$ est une réunion (modérée) d'intervalles que l'on peut toujours supposer *disjoints* .

Si $\mathrm{A} = \bigcup \mathrm{I}_r$ est une partie élémentaire de $\mathbb{R}$ et si les I_r sont des intervalles disjoints,

on pose $\boxed{\{\mathrm{f} \in \mathrm{A}\} = \sum_r \{\mathrm{f} \in \mathrm{I}_r\}} \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$. La série $\sum_r \{\mathrm{f} \in \mathrm{I}_r\}$ converge finement de manière évidente .

Les applications $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \to \mathcal{K}(\tilde{\mu}) \;:\; \mathrm{f} \mapsto \{\mathrm{f} \in \mathrm{A}\}$

$$\left[\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})\right]^2 \to \mathcal{K}(\tilde{\mu}) \;:\; (\mathrm{f}, \mathrm{g}) \mapsto \{\mathrm{f} > \mathrm{g}\} \quad \text{etc} \ldots \text{ etc} \ldots$$

s'appellent les <u>indicateurs</u> dans $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

§ 9. <u>$\tilde{\mu}$-fonctionnelles</u>

On définit $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, l'espace des <u>$\tilde{\mu}$-fonctionnelles</u> en suivant les mêmes méthodes que pour $\mathcal{FO}$. C'est une <u>algèbre de Riesz</u> contenant $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$. La théorie est analogue à celle de $\mathcal{FO}$.

En particulier on peut définir dans $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ les convergences <u>ms , p.p. , A , E</u> , qui sont bien entendu ***relatives à la mesure*** $\tilde{\mu}$; nous conservons néanmoins les ***mêmes notations*** que dans $\mathcal{FO}$, ***sans faire explicitement référence à*** $\tilde{\mu}$.

Récapitulatif

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & \mathcal{FO}(\tilde\mu) & & & & \\ & & & & & & & & \cup & & & & \\ \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \underline{\mathcal{W}_B}(\mathbb{R}^n)_{\tilde\mu} & = & \mathcal{B}(\tilde\mu) & \subset & \mathcal{L}^2(\tilde\mu) & \subset & \mathcal{L}^1(\tilde\mu) & \xrightarrow{\times\,\tilde\mu} & [\,\tilde\mu\,] & \subset & \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n) \\ \cup & & & & \cup & & & & & & & & \cup \\ \mathcal{Z}_{\mathcal{B},\,\tilde\mu}(\mathbb{R}^n) & & & & \mathcal{K}(\tilde\mu) & & & & & & & & [\,\tilde\mu\,]^\perp \end{array}}$$

§ 10. Composée d'une $\tilde\mu$-fonctionnelle et d'une fonction réglée

On suppose toujours $\boxed{\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)^+}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et on se donne $\boxed{\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde\mu)}$.

10.1. Définition : Soit $h \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$; on peut écrire $h = \sum\limits_r \alpha_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$ où les intervalles I_r sont disjoints et où $\forall\, r \;\; \alpha_r \in \mathbb{R}$; on pose $\boxed{h \circ \mathrm{F} = \sum\limits_r \alpha_r \{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\}} \in \mathcal{FO}(\tilde\mu)$.

La série $\sum\limits_r \alpha_r \{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\}$ converge exactement de manière évidente.

10.2.* Théorème : Si A est une partie élémentaire de $\mathbb{R}$ on a $\boxed{1\!\!1_{\mathrm{A}} \circ \mathrm{F} = \{\mathrm{F} \in \mathrm{A}\}}$.

10.3.* Théorème :

L'application $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathcal{FO}(\tilde\mu) \; : \; h \mapsto h \circ \mathrm{F}$ est un algébromorphisme de Riesz.

En particulier on a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ $\boxed{|\,h \circ \mathrm{F}\,| = |h| \circ \mathrm{F}}$.

10.4. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ on a $h \circ \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ et $\boxed{|\,h \circ \mathrm{F}\,| \leq \|\,h\,\|}$.

Dém : On peut écrire $h = \sum\limits_r \alpha_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$ où les intervalles I_r sont disjoints et où $\forall\, r \;\; |\alpha_r| \leq \|\,h\,\|$; alors on a $h \circ \mathrm{F} = \sum\limits_r \alpha_r \{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\} \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ et $|\,h \circ \mathrm{F}\,| \leq \|\,h\,\| . \sum \{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\} \leq \|\,h\,\|$.

10.5.* Corollaire :

Soient $g\,,\, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tels que $g - h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$; alors $\boxed{|\,g \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{F}\,| \leq \|\,g - h\,\|}$.

10.6. <u>Théorème-Définition</u> :

Soit $h \in \mathcal{R}(\mathrm{I\!R})$ et soit une suite $h_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I\!R})$ telle que $h_n \xrightarrow{\mathbf{u}} h$; alors $h_n \circ \mathrm{F}$ converge en mesure dans $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; on pose $\boxed{h \circ \mathrm{F} = \text{ limite en mesure de } h_n \circ \mathrm{F}} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$.

$h \circ \mathrm{F}$ ne dépend pas de la suite particulière $h_n \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathrm{h}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, p, q \in \mathrm{I\!N} \quad |h_p \circ \mathrm{F} - h_q \circ \mathrm{F}| \leq \| h_p - h_q \|$, donc $\| h_p \circ \mathrm{F} - h_q \circ \mathrm{F} \|_{\tilde{\mu},1} \leq \| h_p - h_q \| \, \| \tilde{\mu} \|_\star$. La suite $h_n \circ \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ est donc de Cauchy pour la norme $\| \; \|_{\tilde{\mu},1}$ et donc aussi pour la convergence en mesure.

10.7.* <u>Théorème</u> :

L'application $\mathcal{R}(\mathrm{I\!R}) \to \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$: $h \mapsto h \circ \mathrm{F}$ est un algébromorphisme de Riesz.

En particulier on a $\forall\, h \in \mathcal{R}(\mathrm{I\!R})$ $\boxed{|h \circ \mathrm{F}| = |h| \circ \mathrm{F}}$.

10.8. <u>Théorème</u> : Soit $h \in \mathcal{R}(\mathrm{I\!R})$ une fonction *strictement croissante* et soit $\alpha \in \mathrm{I\!R}$; alors $\boxed{\{h \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\} = \{F > \alpha\}}$.

<u>Dém</u> : Soit p_n une suite *croissante* de fonctions étagées convergeant uniformément vers h sur l'intervalle $]-\infty, \alpha]$; soit q_n une suite *croissante* de fonctions étagées convergeant uniformément vers h sur l'intervalle $]\alpha, +\infty]$ avec
$q_n = h(\alpha)\, 1_{]\alpha, \alpha+1/n[} + \sum_r c_r \, 1_{\mathrm{I}_r}$ où les intervalles I_r forment une partition de $[\alpha + 1/n, +\infty]$ et où $\forall\, r \;\; c_r > h(\alpha)$. On pose $\forall\, n \in \mathrm{I\!N} \;\; k_n = p_n \cup q_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I\!R})$.
On a $k_n \circ \mathrm{F} = \big[p_n \circ \mathrm{F}\big] \cup \big[h(\alpha)\{\alpha < \mathrm{F} < \alpha + 1/n\} + \sum_r c_r \{F \in \mathrm{I}_r\}\big]$,
donc $\big\{k_n \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\big\} = \sum_r \{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\} = \{F > \alpha\} - \{\alpha < \mathrm{F} < \alpha + 1/n\}$.
La suite k_n est croissante et converge uniformément vers h sur $\mathrm{I\!R}$; la suite $k_n \circ \mathrm{F}$ est donc aussi croissante et converge en mesure vers $h \circ \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$.
On en déduit $\big\{k_n \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\big\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \big\{h \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\big\}$;
or $\big\{k_n \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\big\} = \{F > \alpha\} - \{\alpha < \mathrm{F} < \alpha + 1/n\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \{F > \alpha\} - \{\alpha < \mathrm{F} \leq \alpha\}$
$= \{F > \alpha\}$, donc $\big\{h \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\big\} = \{F > \alpha\}$.

§ 1. Image d'une mesure normée postive $\tilde{\mu}$ par une $\tilde{\mu}$-fonctionnelle

Contenu :

Si $\tilde{\mu}$ est une *probabilité* sur $\mathbb{R}^n$ et si F est une fonction réglée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors l'*image* de $\tilde{\mu}$ par F (ou *loi* de F) est la probabilité sur $\mathbb{R}$ des *valeurs* de F. Nous étendons cette notion au contexte plus général d'une mesure normée positive $\tilde{\mu}$ et d'une $\tilde{\mu}$–fonctionnelle F.

On suppose $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^n)^+}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1.1. Définition : Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; on pose $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h) = \tilde{\mu}\,(h \circ \mathrm{F})}$.

En particulier pour tout partie élémentaire A de $\mathbb{R}$ on a $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}) = \tilde{\mu}\left[\{\mathrm{F} \in \mathrm{A}\}\right]}$.

$\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$ s'appelle l'image de $\tilde{\mu}$ par F.

1.2. Théorème : $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})^+}$ et $\boxed{\|\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\|_\star = \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star}$.

Dém :

1°) $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ $\left|\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h)\right| = \left|\tilde{\mu}\,(h \circ \mathrm{F})\right| \leq \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star \,\|\,h \circ \mathrm{F}\,\| \leq \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star \,\|\,h\,\|$,

donc $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\mathbb{R})$ et $\|\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\|_\star \leq \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star$. De plus on a $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})^+$

$\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h) = \tilde{\mu}\,(h \circ \mathrm{F}) \geq 0$, donc $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \geq 0$. Enfin on a

$\|\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\|_\star = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}\,(\mathbb{1} \circ \mathrm{F}) = \tilde{\mu}\,(\mathbb{1}) = \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star$.

2°) Démontrons $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})$, c-à-d $\forall\, c \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{d \to c^{\pm}} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) = 0$.

On peut supposer $\tilde{\mu} \geq 0$ car $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} = (\tilde{\mu}^+)_{\mathrm{F}} - (\tilde{\mu}^-)_{\mathrm{F}}$.

Prenons par exemple le cas $d \to c^+$;

on a $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) = \tilde{\mu}\left(1_{]\,c,\,d\,[} \circ \mathrm{F}\right) = \tilde{\mu}\left[\{c < \mathrm{F} < d\}\right] = \tilde{\mu}\left[\{c < \mathrm{F}\}\{\mathrm{F} < d\}\right]$;

or quand $d \to c^+$ on a $\{\mathrm{F} < d\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \{\mathrm{F} \leq c\}$,

donc $\{c < \mathrm{F}\}\{\mathrm{F} < d\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \{c < \mathrm{F}\}\{\mathrm{F} \leq c\} = 0$, c-à-d $\tilde{\mu}\left[\{c < \mathrm{F}\}\{\mathrm{F} < d\}\right] \to 0$.

1.3.* Corollaire : Si $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, alors $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et est appelé la $\boxed{\text{loi}}$ de F.

§ 2. Convergences en loi et en loi forte

2.1. Lemme :

Soient $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels ; on pose $\forall\, 1 \le r \le n \quad \mathrm{I}_r = [\, a_{r-1}\,,\, a_r\,[$;

soit $h = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r \,.\, 1\!\!1_{\mathrm{I}_r}$ avec $\forall\, 1 \le r \le n \quad \beta_r \in \mathbb{R}$; on pose

$$\boxed{d = \min_{1 \le r \le n} (a_r - a_{r-1})} \quad \text{et} \quad \boxed{e = \max_{1 \le r \le n} |\beta_r - \beta_{r-1}|}\ ;$$

alors $\forall$ F, G $\in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ on a $\boxed{\big|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \big| \le 2\, \|h\| \,.\, \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}\,| > d \big\} + e}$.

Dém : On pose $\forall\, 1 \le r \le n \quad \sigma_r = \{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\}$ et $\tau_r = \{\mathrm{G} \in \mathrm{I}_r\}$.

Lemme auxiliaire : $\forall\, r\,,\, s$ on a $\Big[\, |\, r - s\,| \ge 2 \;\Rightarrow\; \big\{|\,\mathrm{F} - \mathrm{G}\,| \le d\big\}\, \sigma_r\, \tau_s = 0 \,\Big]$.

Démonstration du lemme auxiliaire :

Faisons par exemple la démonstration pour $r = 1$ et $s = 3$.

On a $\big\{|\,\mathrm{F} - \mathrm{G}\,| \le d\big\}\, \sigma_1\, \tau_3 = \big\{\mathrm{F} - d \le \mathrm{G} \le \mathrm{F} + d\big\} \big\{a_0 \le \mathrm{F} < a_1\big\} \big\{a_2 \le \mathrm{G} < a_3\big\}$

$= \big\{\mathrm{F} - d \le \mathrm{G}\big\} \big\{\mathrm{G} \le \mathrm{F} + d\big\} \big\{a_0 \le \mathrm{F} < a_1\big\} \big\{a_2 \le \mathrm{G}\big\} \big\{\mathrm{G} < a_3\big\}$

$= \big\{a_0 \le \mathrm{F} < a_1\big\} \big\{\mathrm{F} - d < a_3\big\} \big\{a_2 < \mathrm{F} + d\big\} = \big\{a_0 \le \mathrm{F} < a_1\big\} \big\{a_2 - d < \mathrm{F} < a_3 + d\big\} = 0$

car $a_1 \le a_2 - d$.

Suite de la démonstration du lemme :

On a clairement $\sum\limits_{r=1}^{n} \sigma_r = \sum\limits_{r=1}^{n} \tau_r = 1$, donc

$h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r\, (\sigma_r - \tau_r) = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r \Big[\, \sigma_r \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \tau_s \Big) - \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \sigma_s \Big) \tau_r \Big]$, donc

$\big(h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\big) \big\{|\,\mathrm{F} - \mathrm{G}\,| \le d\big\} = \big\{|\,\mathrm{F} - \mathrm{G}\,| \le d\big\} \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r \Big[\, \sigma_r \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \tau_s \Big) - \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \sigma_s \Big) \tau_r \Big]$

$$= \big\{|\,\mathrm{F} - \mathrm{G}\,| \le d\big\} \Big[\, \beta_1\, (\sigma_1\, \tau_2 - \sigma_2\, \tau_1) + \sum_{r=2}^{n-1} \beta_r\, (\sigma_r\, \tau_{r-1} + \sigma_r\, \tau_{r+1} - \sigma_{r-1}\, \tau_r - \sigma_{r+1}\, \tau_r) + \beta_n\, (\sigma_n\, \tau_{n-1} - \sigma_{n-1}\, \tau_n) \Big]\ ;$$

$= \big\{|\,\mathrm{F} - \mathrm{G}\,| \le d\big\} \sum\limits_{r=1}^{n-1} (\beta_r - \beta_{r+1})\, (\sigma_r\, \tau_{r+1} - \sigma_{r+1}\, \tau_r)$,

donc $\big|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \big| \le e \sum\limits_{r=1}^{n-1} (\sigma_r\, \tau_{r+1} + \sigma_{r+1}\, \tau_r) \le e \Big(\sum\limits_{r=1}^{n} \sigma_r \Big) \Big(\sum\limits_{r=1}^{n} \tau_r \Big) = e$.

On en déduit

$$\left| h\circ \mathrm{F} - h\circ \mathrm{G}\right| = \left| h\circ \mathrm{F} - h\circ \mathrm{G}\right| \left\{ \left| \mathrm{F}-\mathrm{G}\right| > d\right\} + \left| h\circ \mathrm{F} - h\circ \mathrm{G}\right| \left\{ \left| \mathrm{F}-\mathrm{G}\right| \le d\right\}$$

$$\le \Big(\left| h\circ \mathrm{F}\right| + \left| h\circ \mathrm{G}\right| \Big) \left\{ \left| \mathrm{F}-\mathrm{G}\right| > d\right\} + e \ \le\ 2\, \| h \| \,.\left\{ \left| \mathrm{F}-\mathrm{G}\right| > d\right\} + e\,.$$

2.2. <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n\,,\, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde\mu)\,,\ \mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$; alors on a $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathbb{R})}$ $h\circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} h\circ\mathrm{F}\,,$ et donc $\tilde\mu_{\,\mathrm{F}_n} \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde\mu_{\,\mathrm{F}}$; si de plus $\boxed{\tilde\mu_{\,\mathrm{F}} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})^{+}}$ on a $\tilde\mu_{\,\mathrm{F}_n} \overset{\phi}{\to} \tilde\mu_{\,\mathrm{F}}\,.$

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $h\in \mathcal{C}_O(\mathbb{R})$; soit $\varepsilon>0$; il existe $k\in\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ tel que $\| h-k\| \le \varepsilon$, donc aussi $e \le 2\,\varepsilon$ (notations du lemme précédent) ;

on a alors $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $\left| k\circ\mathrm{F}_n - k\circ\mathrm{F}\right| \ \le\ 2\,\|h\|\,.\left\{ \left|\mathrm{F}_n-\mathrm{F}\right| > d\right\} + 2\,\varepsilon$,

donc $\left\| k\circ\mathrm{F}_n - k\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1} \ \le\ 2\,\|h\|\,.\left\|\left\{ \left|\mathrm{F}_n-\mathrm{F}\right| > d\right\}\right\|_{\tilde\mu,1} +\ 2\,\varepsilon\,\|\tilde\mu\|_\star$;

donc $\overline{\lim_n}\ \left\| k\circ\mathrm{F}_n - k\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1} \ \le\ 2\,\varepsilon\,\|\tilde\mu\|_\star$; on peut écrire

$\left| h\circ\mathrm{F}_n - h\circ\mathrm{F}\right| \ \le \left| k\circ\mathrm{F}_n - k\circ\mathrm{F}\right| + \left| (h-k)\circ\mathrm{F}_n\right| + \left| (h-k)\circ\mathrm{F}\right|$

$\le\ \left| k\circ\mathrm{F}_n - k\circ\mathrm{F}\right| \ +\ 2\,\|h-k\| \ \le\ \left| k\circ\mathrm{F}_n - k\circ\mathrm{F}\right| \ +\ 2\,\varepsilon$;

donc $\overline{\lim_n}\ \left\| h\circ\mathrm{F}_n - h\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1} \le 4\,\varepsilon\,\|\tilde\mu\|_\star$; donc $h\circ\mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} h\circ\mathrm{F}\,.$

Supposons maintenant $h\in\mathcal{C}_B(\mathbb{R})$; on a $\forall\, k\,,\, n\in\mathbb{N}^*$ $\big($avec $\mathsf{X}_k = \mathbb{1}_{[-k\,,\,k]}\big)$

$h\circ\mathrm{F}_n - h\circ\mathrm{F} = (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}_n + \big[(1-\mathsf{X}_k)\,h\big]\circ\mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F} - \big[(1-\mathsf{X}_k)\,h\big]\circ\mathrm{F}$;

donc $\left| h\circ\mathrm{F}_n - h\circ\mathrm{F}\right| \le \left| (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}\right|$

$$+ \left| \big[(1-\mathsf{X}_k)\,h\big]\circ\mathrm{F}_n\right| + \left| \big[(1-\mathsf{X}_k)\,h\big]\circ\mathrm{F}\right|$$

$\le\ \left| (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}\right| \ +\ \|h\|\,\left| (1-\mathsf{X}_k)\circ\mathrm{F}_n\right| \ +\ \|h\|\,\left| (1-\mathsf{X}_k)\circ\mathrm{F}\right|$

$\le\ \left| (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}\right| \ +\ \left\{ |\mathrm{F}| > k\right\} \ +\ \left\{ |\mathrm{F}_n| > k\right\}$;

donc $\left\| h\circ\mathrm{F}_n - h\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1} \le\ \left\| (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1}$

$$+\ \left\|\left\{ |\mathrm{F}| > k\right\}\right\|_{\tilde\mu,1} +\ \left\|\left\{ |\mathrm{F}_n| > k\right\}\right\|_{\tilde\mu,1}\ ;$$

soit $\varepsilon>0$; choisissons $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left\|\left\{ |\mathrm{F}| > k\right\}\right\|_{\tilde\mu,1} \le \varepsilon$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $\left\|\left\{ |\mathrm{F}_n| > k\right\}\right\|_{\tilde\mu,1} \le \varepsilon$ (c'est possible car $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$) ; on en déduit

$\forall\, n\in\mathbb{N}$ $\left\| h\circ\mathrm{F}_n - h\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1} \le\ \left\| (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\,h)\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1} +\ 2\,\varepsilon$;

donc $\overline{\lim_n}\ \left\| h\circ\mathrm{F}_n - h\circ\mathrm{F}\right\|_{\tilde\mu,1} \le\ 2\,\varepsilon$; donc $h\circ\mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} h\circ\mathrm{F}\,.$

La fin du théorème est une conséquence du Théorème XIV. 6 .

2.3. <u>Définition</u> : Supposons $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^n)$.

On dit que $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ converge $\boxed{\text{en loi}}$ vers $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ ssi $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$;
on écrit $\mathrm{F}_n \overset{\text{loi}}{\to} \mathrm{F}$.

On dit que $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ converge $\boxed{\text{en loi forte}}$ vers $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ ssi $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$;
on écrit $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{Loi}}{\to} \mathrm{F}$.

2.4.* <u>Corollaire</u> :

Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^n)$ et $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; alors on a $\boxed{\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}_n \overset{\text{loi}}{\to} \mathrm{F}}$.

Si de plus $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{P}_D(\mathrm{I\!R})}$ on a $\boxed{\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}_n \overset{\mathsf{Loi}}{\to} \mathrm{F}}$.

2.5. <u>Théorème</u> :

Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F}$; alors $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathrm{I\!R})}$ on a $h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} h \circ \mathrm{F}$.

<u>Dém</u> : Analogue au théorème précédent.

2.6. <u>Théorème</u> : Soient $h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ et $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{FO}(\mathrm{I\!R})$; alors on a

$$\boxed{\big|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \,\big| \leq 2\, \|h\| \,.\, \big\{\mathrm{F} \neq \mathrm{G}\big\}}.$$

<u>Dém</u> : On peut écrire $h = \sum \beta_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$; posons $\forall\, 1 \leq r \leq n \quad \sigma_r = \{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\}$
et $\tau_r = \{\mathrm{G} \in \mathrm{I}_r\}$; on a $\forall\, r \quad (\sigma_r - \tau_r)\big\{\mathrm{F} = \mathrm{G}\big\} = 0$, donc
$\big(h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\big)\big\{\mathrm{F} = \mathrm{G}\big\} = \sum \beta_r\,(\sigma_r - \tau_r)\big\{\mathrm{F} = \mathrm{G}\big\} = 0$;
donc $\big|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \,\big| = \big|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \,\big|\big\{\mathrm{F} \neq \mathrm{G}\big\} \leq 2\, \|h\| \,.\, \big\{\mathrm{F} \neq \mathrm{G}\big\}$.

2.7.* <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F}$; alors $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R})}$ on a
$h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} h \circ \mathrm{F}$, et donc $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$.

2.8.* <u>Corollaire</u> :

Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^n)$ et $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; alors on a $\boxed{\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}_n \overset{\mathsf{Loi}}{\to} \mathrm{F}}$.

2.9.* <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \mathrm{F}$; alors $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R})}$ on a
$h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} h \circ \mathrm{F}$.

Récapitulatif : Modes de convergence dans $\mathcal{FO}(\tilde\mu)$ avec $\boxed{\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)^+}$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F} \quad\Rightarrow\quad \forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathbb{R})} \quad h\circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} h\circ\mathrm{F}\,.$$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F} \quad\Rightarrow\quad \forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathbb{R})} \quad h\circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,\times} h\circ\mathrm{F}\,.$$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F} \quad\Rightarrow\quad \forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathbb{R})} \quad h\circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} h\circ\mathrm{F}\,.$$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \mathrm{F} \quad\Rightarrow\quad \forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathbb{R})} \quad h\circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,\times} h\circ\mathrm{F}\,.$$

Si $\boxed{\tilde\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)}$ on a par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \Rightarrow & \mathsf{Loi} \\ \Downarrow & & \Downarrow\uparrow \\ \mathrm{ms} & \Rightarrow & \mathrm{loi} \end{array}}$$

§ 3. Composée d'une $\tilde\mu$-fonctionnelle F et d'une $\tilde\mu_{\mathrm{F}}$-fonctionnelle

Contenu : Soient $\boxed{\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})}$ et $\boxed{\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde\mu)}$. Nous étendons la notation $\mathrm{h}\circ\mathrm{F}$, d'abord pour $\mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$, ensuite pour $\mathrm{h} \in \mathcal{FO}(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$.

3.1. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\|\, h\circ\mathrm{F}\,\|_{\tilde\mu,1} = \|\, h\,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},1}}$.

Dém : $\|\, h\,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},1} = \tilde\mu_{\mathrm{F}}\big(|h|\big) = \tilde\mu\big(|h|\circ\mathrm{F}\big) = \tilde\mu\big(|h\circ\mathrm{F}|\big) = \|\, h\circ\mathrm{F}\,\|_{\tilde\mu,1}\,.$

3.2. Définition : $\boxed{\forall\,\mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})}$ on peut donc définir $\boxed{\mathrm{h}\circ\mathrm{F}}$ par densité.

3.3.* Théorème : $\forall\,\mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$ on a $\mathrm{h}\circ\mathrm{F} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ et $\boxed{\|\,\mathrm{h}\circ\mathrm{F}\,\|_{\tilde\mu,1} = \|\,\mathrm{h}\,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},1}}$.

3.4.* Corollaire : $\forall\,\mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$ $\boxed{\tilde\mu_{\mathrm{F}}(\mathrm{h}) = \tilde\mu\,(\mathrm{h}\circ\mathrm{F})}$.

3.5.* Théorème :

L'application $\mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}}) \to \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$: $\mathrm{h} \mapsto \mathrm{h}\circ\mathrm{F}$ est une isométrie de Riesz.

En particulier on a $\forall\,\mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$ $\boxed{|\,\mathrm{h}\circ\mathrm{F}\,| = |\mathrm{h}|\circ\mathrm{F}}$.

3.6. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\|\, h\circ\mathrm{F}\,\|_{\tilde\mu,2} = \|\, h\,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},2}}$.

Dém : $\| h \|_{\tilde\mu_F,2} = \tilde\mu_F\left(h^2\right) = \tilde\mu\left[(h^2)\circ F\right] = \tilde\mu\left[(h\circ F)^2\right] = \| h\circ F \|_{\tilde\mu,2}$.

3.7.* Corollaire : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu_F)$ on a $\mathrm{h}\circ F \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu)$ et $\boxed{\| \mathrm{h}\circ F \|_{\tilde\mu,2} = \| \mathrm{h} \|_{\tilde\mu_F,2}}$.

3.8.* Corollaire :

L'application $\mathcal{L}^2(\tilde\mu_F) \to \mathcal{L}^2(\tilde\mu)$: $\mathrm{h} \mapsto \mathrm{h}\circ F$ est une isométrie de Riesz .

De plus $\forall\, \mathrm{g}, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu_F)$ on a $\boxed{(\mathrm{g}\,\mathrm{h})\circ F = (\mathrm{g}\circ F)(\mathrm{h}\circ F)}$.

3.9. Théorème : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{B}(\tilde\mu_F)$ on a $\mathrm{h}\circ F \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ et $\boxed{\| \mathrm{h}\circ F \|_{\tilde\mu,B} = \| \mathrm{h} \|_{\tilde\mu_F,B}}$.

Dém :

$\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{B}(\tilde\mu_F)$ on a $|\mathrm{h}| \leq \| \mathrm{h} \|_{\tilde\mu_F,B}$, donc $|\mathrm{h}\circ F| = |\mathrm{h}|\circ F \leq \| \mathrm{h} \|_{\tilde\mu_F,B}\circ F = \| \mathrm{h} \|_{\tilde\mu_F,B}$,

donc $\mathrm{h}\circ F \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ et $\| \mathrm{h}\circ F \|_{\tilde\mu,B} \leq \| \mathrm{h} \|_{\tilde\mu_F,B}$.

D'autre part $\forall\, k \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ on a $\left|(\mathrm{h}\,\tilde\mu_F)(k)\right| = \left|\tilde\mu_F(\mathrm{h}\,k)\right| = \left|\tilde\mu\left[(\mathrm{h}\circ F)(k\circ F)\right]\right|$

$\leq \| \mathrm{h}\circ F \|_{\tilde\mu,B} \,.\, \tilde\mu\left(|k\circ F|\right) = \| \mathrm{h}\circ F \|_{\tilde\mu,B} \,.\, \tilde\mu_F\left(|k|\right)$, donc $\| \mathrm{h} \|_{\tilde\mu_F,B} \leq \| \mathrm{h}\circ F \|_{\tilde\mu,B}$.

3.10.* Corollaire : L'application $\mathcal{B}(\tilde\mu_F) \to \mathcal{B}(\tilde\mu)$: $\mathrm{h} \mapsto \mathrm{h}\circ F$ est un algébromorphisme et une isométrie de Riesz .

3.11.* Corollaire : $\sigma \in \mathcal{K}(\tilde\mu_F) \Rightarrow \sigma\circ F \in \mathcal{K}(\tilde\mu)$.

Notation : On pose $\forall\, \sigma \in \mathcal{K}(\tilde\mu_F)$ $\boxed{\{F \in \sigma\} = \sigma\circ F}$ $\in \mathcal{K}(\tilde\mu)$.

3.12. Théorème : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_F)$ on a $\boxed{S_{\tilde\mu}(\mathrm{h}\circ F) = S_{\tilde\mu}(\mathrm{h})\circ F}$.

Dém :

$\mathbb{1} \wedge \left[n\,.\,|\mathrm{h}\circ F|\right] = \mathbb{1} \wedge \left[n\,.\left(|\mathrm{h}|\circ F\right)\right] = \mathbb{1} \wedge \left[\left(n\,.|\mathrm{h}|\right)\circ F\right] = (\mathbb{1}\circ F) \wedge \left[\left(n\,.|\mathrm{h}|\right)\circ F\right]$

$= \left[\mathbb{1} \wedge \left(n\,.|\mathrm{h}|\right)\right]\circ F$; donc $S_{\tilde\mu}(\mathrm{h}\circ F) = {}^1\lim\limits_n\ \mathbb{1} \wedge \left[n\,.|\mathrm{h}\circ F|\right] = {}^1\lim\limits_n\ \left[\mathbb{1} \wedge \left(n\,.|\mathrm{h}|\right)\right]\circ F$

$= \left[{}^1\lim\limits_n\ \mathbb{1} \wedge \left(n\,.|\mathrm{h}|\right)\right]\circ F = S_{\tilde\mu}(\mathrm{h})\circ F$.

3.13. Définition : $\boxed{\forall\ H \in \mathcal{FO}(\tilde\mu_F)}$ on peut donc définir $\boxed{H\circ F \in \mathcal{FO}(\tilde\mu)}$ par densité de $\mathcal{L}^1(\tilde\mu_F)$ dans $\mathcal{FO}(\tilde\mu_F)$ pour la convergence plate ou exacte .

3.14.* Théorème :

$\forall\, H \in \mathcal{FO}(\tilde\mu_F)$ on a $H\circ F \in \mathcal{FO}(\tilde\mu)$ et $\boxed{S_{\tilde\mu}(H\circ F) = S_{\tilde\mu}(H)\circ F}$.

3.15. Corollaire : L'application $\boxed{\mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}) \to \mathcal{FO}(\tilde{\mu}) \ : \ \mathrm{H} \mapsto \mathrm{H} \circ \mathrm{F}}$ est un algébromorphisme injectif de Riesz.

Dém : Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ tel que $\mathrm{H} \circ \mathrm{F} = 0$; soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = \{|\mathrm{H}| \leq n\}$;

on a $0 = (\sigma_n \circ \mathrm{F})(\mathrm{H} \circ \mathrm{F}) = (\sigma_n \mathrm{H}) \circ \mathrm{F}$, or $|\sigma_n \mathrm{H}| \leq n$, donc $\sigma_n \mathrm{H} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$;

on peut donc écrire $0 = \|(\sigma_n \mathrm{H}) \circ \mathrm{F}\|_{\tilde{\mu},1} = \|\sigma_n \mathrm{H}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},1}$, donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \mathrm{H} = 0$,

or $\sigma_n \mathrm{H} \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{H}$, donc $\mathrm{H} = 0$.

3.16.* Théorème : $\forall \mathrm{H}_n, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $\left(\mathrm{H}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{H}\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{H}_n \circ \mathrm{F} \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{H} \circ \mathrm{F}\right)$

(idem pour p.p., A, E).

§ 4. Généralisation aux $\tilde{\mu}$-polyfonctionnelles

Contenu : Soit $p \in \mathbb{N}^*$; on généralise les notions de ce chapitre en se donnant p $\tilde{\mu}$–fonctionnelles $\boxed{\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})}$ et en considérant la $\tilde{\mu}$–polyfonctionnelle $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p)$ « à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ ».

1. Définition :

Soient $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_p$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $\mathrm{K} = \mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2 \times \ldots \times \mathrm{I}_p \subset \mathbb{R}^p$; alors $\mathbb{1}_{\mathrm{K}} \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}^p)$ et on pose $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{K}} \circ \mathrm{F} = \{\mathrm{F} \in \mathrm{K}\} = \{\mathrm{F}_1 \in \mathrm{I}_1\}\{\mathrm{F}_2 \in \mathrm{I}_2\} \ldots \{\mathrm{F}_p \in \mathrm{I}_p\}}$.

On étend la notation $h \circ \mathrm{F}$ à tout $h \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^p)$ comme au Chapitre XVII § 10.

2. Définition :

On pose $\forall h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h) = \tilde{\mu}(h \circ \mathrm{F})}$. $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$ est l'image de $\tilde{\mu}$ par F.

3.* Théorème : $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^p)^+}$ et $\boxed{\|\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star}$.

4.* Théorème : Si $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, alors $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)}$ et $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$ s'appelle la $\boxed{\text{loi conjointe}}$ de $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$.

On peut étendre la notation $\mathrm{H} \circ \mathrm{F}$ à tout $\mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ comme au § 2.

Chapitre XIX : Conditionnement d'une $\tilde{\mu}$–fonctionnelle sommable

Contenu : Soient $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^n)^+}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\boxed{\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})}$. On se donne de plus la $\tilde{\mu}$–polyfonctionnelle $\boxed{\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p)}$ avec $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$.

Nous définissons alors la *moyenne* de g sachant F, ainsi que le *conditionné* de g par rapport à F, et nous en développons les principales propriétés.

1. Définition : On pose $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ $\boxed{(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}}\,(h) = (\mathrm{g}\,\tilde{\mu})\,(h \circ \mathrm{F}) = \tilde{\mu}\left[\,g.(h \circ \mathrm{F})\right]}$.

2.* Théorème : On a $\boxed{(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^p)}$ et $\boxed{\|\,(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}}\,\|_{\star} \leq \|\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},1} = \|\,\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\,\|_{\star}}$.

3. Théorème : $(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}}$ est une mesure de base $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$, c-à-d $\boxed{(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} \in [\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,]}$.

Dém :

1) Supposons d'abord $\mathrm{g} \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$; alors on a $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^p)$

$\left|(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}}\,(h)\right| = \left|\,\tilde{\mu}\left[\,g\,.\,(h \circ \mathrm{F})\right]\right| \leq \|\,g\,\|\;\tilde{\mu}\left(|\,h \circ \mathrm{F}\,|\right) = \|\,g\,\|\;\tilde{\mu}\left(|h| \circ \mathrm{F}\right)$

$= \|\,g\,\|\;\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\left(|h|\right)$; donc $\left|(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}}\right| \leq \|\,g\,\|\;\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$, donc $(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} \in [\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,]$,

car $[\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,]$ est un sous-espace intégral de $\mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^p)$.

2) Supposons maintenant $\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$; soit une suite $g_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ telle que $g_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \mathrm{g}$; alors on a $\left\|\,(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} - (\mathrm{g}_n\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}}\,\right\|_{\star} = \left\|\,\left[\,(\mathrm{g}_n - \mathrm{g})\,\tilde{\mu}\,\right]_{\mathrm{F}}\,\right\|_{\star} \leq \|\,\mathrm{g} - g_n\,\|_{\tilde{\mu},1}$, donc $(\mathrm{g}_n\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} \xrightarrow{\star} (\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} \in [\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,]$.

4. Définition :

On peut donc poser $\boxed{(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} = \mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}}$ avec $\boxed{\mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right) \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})}$.

$\mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)$ s'appelle la moyenne de g sachant F.

5. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ on a $\boxed{(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})\,(h \circ \mathrm{F}) = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\left[\,\mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)h\,\right]}$.

Dém : $(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})\,(h \circ \mathrm{F}) = (\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}}\,(h) = \left[\,\mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,\right](h) = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\left[\,\mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)h\,\right]$.

Exemple : Soit $p = 1$ et soit $h = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$, où A est une partie élémentaire de $\mathbb{R}$; alors la formule ci-dessus devient $\boxed{\int_{\mathrm{A}} \mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} = \int_{\{\mathrm{F} \in \mathrm{A}\}} \mathrm{g}\,\tilde{\mu}}$, ce qui justifie le terme de « moyenne de g sachant F ».

6. <u>Théorème</u> : $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ on a $\boxed{\mathsf{E}\big(h \circ \mathrm{F} \,|\, \mathrm{F}\big) = \{h\}_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}}}$.

<u>Dém</u> : $\forall\, k \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ on a $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\big[\,\mathsf{E}\big(h \circ \mathrm{F} \,|\, \mathrm{F}\big)\, k\big] = [\,(h \circ \mathrm{F})\,\tilde{\mu}\,]\,(k \circ \mathrm{F})$

$= \tilde{\mu}\,[\,(h \circ \mathrm{F})\,(k \circ \mathrm{F})\,] = \tilde{\mu}\,[\,(h\,k) \circ \mathrm{F}\,] = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,(h\,k)$; donc $\mathsf{E}\big(h \circ \mathrm{F} \,|\, \mathrm{F}\big) \,.\, \tilde{\mu}_{\mathrm{F}} = h \,.\, \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$,

donc $\mathsf{E}\big(h \circ \mathrm{F} \,|\, \mathrm{F}\big) = \{h\}_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}}$.

7. <u>Définition</u> : On pose $\boxed{\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F}) = \mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F}) \circ \mathrm{F}}$ $\in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

$\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})$ s'appelle la <u>conditionnée de g par rapport à F</u>.

$\boxed{\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F}) \text{ est la } \textit{composée} \text{ de F qui approche « au mieux » g}}$.

<u>Schéma fonctionnel</u> :

$$\begin{tikzcd}
\overset{\tilde{\mu}}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "\mathrm{F}"] \arrow[d, shift right, "\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F})"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{g}"] & \overset{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}}{\mathbb{R}^p} \arrow[dl, "\mathsf{E}\,(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F})"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

8.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathrm{g} \geq 0 \;\Rightarrow\; \Big[\,\mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F}) \geq 0 \;\text{ et }\; \widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F}) \geq 0\,\Big]}$.

9. <u>Théorème</u> : $\boxed{\big|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\big| \leq \big(|\mathrm{g}|\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}}$, donc $\boxed{\big|\mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big| \leq \mathsf{E}\,(|\mathrm{g}| \,|\, \mathrm{F})}$,

donc $\boxed{\big|\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big| \leq \widehat{\mathsf{E}}\,(|\mathrm{g}| \,|\, \mathrm{F})}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ $\big|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\,(h)\big| = \big|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)\,(h \circ \mathrm{F})\big| \leq \big(|\mathrm{g}|\,\tilde{\mu}\big)\,\big(|h \circ \mathrm{F}|\big)$

$= \big(|\mathrm{g}|\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\,\big(|h|\big)$; donc $\big|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\big| \leq \big(|\mathrm{g}|\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}$.

10. <u>Théorème</u> :

$\boxed{\tilde{\mu}\,\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big] = \tilde{\mu}\,(\mathrm{g})}$ et $\boxed{\big\|\,\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big\|_{\tilde{\mu},1} = \big\|\,\mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},1} \leq \|\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},1}}$.

<u>Dém</u> :

1) $\tilde{\mu}\,\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big] = \tilde{\mu}\,\big[\,\mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F}) \circ \mathrm{F}\,\big] = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,\big[\,\mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big] = \big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\,(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}\,(\mathrm{g})$.

2) $\big\|\,\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\big\|_{\tilde{\mu},1} = \tilde{\mu}\,\big[\,|\,\widehat{\mathsf{E}}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\,|\,\big] = \tilde{\mu}\,\big[\,|\,\mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\,| \circ \mathrm{F}\,\big] = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,\big[\,|\,\mathsf{E}\,(\mathrm{g} \,|\, \mathrm{F})\,|\,\big]$

$= \| \mathsf{E}(g \,|\, F) \|_{\tilde\mu_F,1} = \| \mathsf{E}(g \,|\, F)\, \tilde\mu_F \|_\star = \| (g\,\tilde\mu)_F \|_\star \le \| g \|_{\tilde\mu,1}\,.$

11.* Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_F)$ on a $\boxed{\mathsf{E}\big(h \circ F \,|\, F\big) = h}$.

12. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ on a $\boxed{\big(g\,\tilde\mu\big)(h \circ F) = \big[\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde\mu\big](h \circ F)}$.

Dém : $\big(g\,\tilde\mu\big)(h \circ F) = \big(g\,\tilde\mu\big)_F(h) = \tilde\mu_F\big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,h\big] = \tilde\mu\Big[\big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,h\big] \circ F\Big]$

$= \tilde\mu\Big[\big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \circ F\big].(h \circ F)\Big] = \tilde\mu\big[\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big).(h \circ F)\big] = \big[\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde\mu\big](h \circ F)\,.$

13.* Corollaire : $\boxed{\big[\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde\mu\big]_F = \big(g\,\tilde\mu\big)_F}$, donc $\boxed{\mathsf{E}\big[\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \,|\, F\big] = \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)}$,

donc $\boxed{\widehat{\mathsf{E}}\big[\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \,|\, F\big] = \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)}$.

14.* Corollaire : $g \mapsto \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)$ est une projection croissante de norme 1 de $\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$.

15. Théorème :

$\forall\, g \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu)$ on a $\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu)$ et $\boxed{\| \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \|_{\tilde\mu,2} = \| \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \|_{\tilde\mu_F,2} \le \| g \|_{\tilde\mu,2}}$.

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ $\tilde\mu_F\big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,h\big] = \big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde\mu_F\big](h) = \big(g\,\tilde\mu\big)_F(h)$

$= \tilde\mu\big[g.(h \circ F)\big] \le \| g \|_{\tilde\mu,2}\, \| h \circ F \|_{\tilde\mu,2} = \| g \|_{\tilde\mu,2}\, \| h \|_{\tilde\mu_F,2}\,;$

donc $\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu_F)$ et $\| \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \|_{\tilde\mu_F,2} \le \| g \|_{\tilde\mu,2}\,;$

donc $\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) = \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \circ F \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu)$ et $\| \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \|_{\tilde\mu,2} = \| \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \|_{\tilde\mu_F,2} \le \| g \|_{\tilde\mu,2}\,.$

16.* Corollaire : $g \mapsto \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)$ est une projection orthogonale croissante de $\mathcal{L}^2(\tilde\mu)$.

17.* Théorème :

$\forall\, g \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ on a $\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ et $\boxed{\| \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \|_{\tilde\mu,B} = \| \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \|_{\tilde\mu_F,B} \le \| g \|_{\tilde\mu,B}}$.

18.* Corollaire : $g \mapsto \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)$ est une projection croissante de norme 1 de $\mathcal{B}(\tilde\mu)$.

Contenu : Comme application des principes mis en oeuvre dans notre travail nous présentons dans cette dernière partie une théorie de l'intégration des fonctions et des mesures *réelles* ou *complexes* sur $\mathbb{Z}_p$. En particulier l'existence d'une mesure de Haar *réelle* sur $\mathbb{Z}_p$ permet de recycler sans grand changement la théorie des mesures sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

On remarquera qu'il n'est fait aucune allusion aux *pseudo-mesures* : c'est parce que sur $\mathbb{Z}_p$ les fonctions étagées sont continues, donc que l'espace des fonctions réglées *coïncide* avec l'espace des fonctions continues, donc que le concept de pseudo-mesure *s'identifie* au concept de mesure.

Chapitre XX : Mesures et fonctionnelles sur $\mathbb{Z}_p$

§ 1. Définitions et notations

$\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{N}$ $\boxed{a \lceil b}$ signifie $\boxed{\text{« } a \text{ divise } b \text{ »}}$,

$\boxed{a \nmid b}$ signifie $\boxed{\text{« } a \text{ ne divise pas } b \text{ »}}$.

$\mathcal{C}_p =$ algèbre des fonctions : $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ continues

$\mathcal{F}_p =$ algèbre des fonctions : $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ bornées

Notation : $\forall\, f \in \mathcal{F}_p$ on note $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|$.

1.1. Définition : On note $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p$ $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ $\mathrm{B}(u\,,\,\ell) = u + p^{\ell}\,\mathbb{Z}_p$; c'est la boule de « centre » u et de « rayon » $1/p^{\ell}$; on a $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p$ $\mathrm{B}(u\,,0) = \mathbb{Z}_p$.

1.2.* Théorème : Tout point d'une boule de $\mathbb{Z}_p$ est centre de cette boule.
Deux boules de $\mathbb{Z}_p$ sont soit disjointes soit incluses l'une dans l'autre.

1.3.* Théorème :

$$\forall\, u\,,\, v \in \mathbb{Z}_p \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N} \quad \Big[\, \mathrm{B}(u\,,\,\ell) = \mathrm{B}(v\,,\,\ell) \;\Leftrightarrow\; u \in \mathrm{B}(v\,,\,\ell) \,\Big].$$

On note $\mathbb{1}_{\mathrm{B}(u\,,\,\ell)}$ la fonction égale à 1 sur $\mathrm{B}(u\,,\,\ell)$ et à 0 sur $\mathbb{Z}_p - \mathrm{B}(u\,,\,\ell)$; c'est la fonction indicatrice de la boule $\mathrm{B}(u\,,\,\ell)$.

Une combinaison linéaire (réelle et finie) de fonctions indicatrices de boules de $\mathbb{Z}_p$ s'appelle une fonction étagée. On note $\mathcal{E}_p$ l'espace vectoriel des fonctions étagées.

1.4.* Théorème : $\boxed{\mathcal{E}_p \subset \mathcal{C}_p \subset \mathcal{F}_p}$

Compte tenu de ce théorème le concept de fonction réglée n'est pas significatif sur $\mathbb{Z}_p$: il coïncide avec le concept de fonction continue.

1.5.* Théorème : $\mathcal{E}_p$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{F}_p$ sont des algèbres de Riesz.

§ 2. Intégrale de Haar des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$

2.1. Lemme :

$$f \in \mathcal{C}_p \Leftrightarrow \Big[\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall u, v \in \mathbb{Z}_p \ \big|f(u + v p^m) - f(u)\big| \leq \varepsilon\Big].$$

Dém :

a) $\Rightarrow$: $\mathcal{C}_p$ est compact, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{Z}_p$; il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall u, w \in \mathbb{Z}_p \ \Big[|w|_p \leq \eta \Rightarrow \big|f(u+w) - f(u)\big| \leq \varepsilon\Big]$; choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $1/p^m \leq \eta$; alors on a bien $\forall u, v \in \mathbb{Z}_p \ \big|f(u + v p^m) - f(u)\big| \leq \varepsilon$.

b) $\Leftarrow$: Trivial.

2.2. Théorème :

Soit $f \in \mathcal{C}_p$; alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum\limits_{r=0}^{p^n - 1} f(r)}$ existe ; on note cette limite $\boxed{\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, \delta x}$ et on l'appelle l'intégrale de Haar de f.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall u, v \in \mathbb{Z}_p \ \big|f(u + v p^m) - f(u)\big| \leq \varepsilon$;

on a $\forall n > m$
$$\frac{1}{p^m} \sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) = \frac{1}{p^n}\Big[p^{n-m} \sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r)\Big]$$

$$= \frac{1}{p^n}\Big[p^{n-m} \sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \sum_{r=0}^{p^m-1} \sum_{s=0}^{p^{n-m}-1} f(r + s p^m)\Big]$$

$$= \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^m-1} \Big[p^{n-m} f(r) - \sum_{s=0}^{p^{n-m}-1} f(r + s p^m)\Big] = \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^m-1} \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} \big[f(r) - f(r + k p^m)\big] ;$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\Big|\frac{1}{p^m} \sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r)\Big| \leq \varepsilon.$$

2.3.* <u>Théorème</u> : $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}\ \delta x = 1$.

2.4.* <u>Théorème</u> : $\forall f \in \mathcal{C}_p$ on a $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} |f(x)|\ \delta x = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

2.5.* <u>Théorème</u> : $\forall f, g \in \mathcal{C}_p$ on a $\boxed{f \leq g \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x \leq \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\ \delta x}$.

On se donne désormais $f \in \mathcal{C}_p$.

2.6.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\left|\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x\right| \leq \int_{\mathbb{Z}_p} |f(x)|(x)\ \delta x \leq \|f\|}$.

2.7. <u>Théorème</u> : $\forall u \in \mathbb{Z}_p$ $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+u)\ \delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x}$.

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $u = k \in \mathbb{N}$; alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{p^n}\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r+k) = \frac{1}{p^n}\sum_{r=k}^{p^n+k-1} f(r) = \frac{1}{p^n}\left[\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) + \sum_{r=p^n}^{p^n+k-1} f(r)\right] ;$$

en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+k)\ \delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x$.

Supposons maintenant $u \in \mathbb{Z}_p$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall v, w \in \mathbb{Z}_p$ $\left|f(v + w\,p^m) - f(v)\right| \leq \varepsilon$; soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u - k \in p^m\,\mathbb{Z}_p$;

alors on peut écrire $\forall r \in \mathbb{N}$ $\left|f(r+u) - f(r+k)\right| \leq \varepsilon$; donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$\left|\displaystyle\frac{1}{p^n}\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r+u) - \frac{1}{p^n}\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r+k)\right| \leq \varepsilon$; en faisant $n \to +\infty$ on obtient

$\left|\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+u)\ \delta x - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x\right| \leq \varepsilon$.

2.8. <u>Théorème</u> : Soit $u \in \mathbb{Z}_p$ tel que $|u|_p = 1$; alors $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(ux)\ \delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x}$.

<u>Dém</u> : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall v, w \in \mathbb{Z}_p$ $\left|f(v + w\,p^m) - f(v)\right| \leq \varepsilon$.

Supposons d'abord $u = k \in \mathbb{N}^*$; on a $p \nmid k$; soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; effectuons

$\forall r \in [[1, p^n - 1]]$ la division euclidienne de $k\,r$ par p^n ; on pose $k\,r = s_r + t_r\,p^n$

avec $s_r, t_r \in \mathbb{N}^*$ et $s_r \leq p^n - 1$.

Montrons que $r_1 = r_2 \;\Leftrightarrow\; s_{r_1} = s_{r_2}$; en effet supposons $s_{r_1} = s_{r_2}$; alors $p^n \lceil k\,(r_1 - r_2)$ donc $p^n \lceil r_1 - r_2$; or $|r_1 - r_2| \le p^n - 1$, donc $r_1 = r_2$.

On peut donc écrire $\{ s_i \,\|\, 1 \le i \le p^n - 1 \} = [[\,1\,,\, p^n - 1\,]]$; on en déduit $\forall\, n \ge m$

$$\left| \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(k\,r) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) \right| = \left| \frac{1}{p^n} \sum_{r=1}^{p^n-1} f(s_r + t_r\, p^n) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=1}^{p^n-1} f(s_r) \right| \le \varepsilon \;;$$

en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\displaystyle \left| \int_{\mathbb{Z}_p} f(k\,x)\,\delta x - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,\delta x \right| \le \varepsilon$.

Supposons maintenant $u \in \mathbb{Z}_p$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u - k \in p^m\,\mathbb{Z}_p$; on a $\forall\, n \ge m$

$$\left| \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(u r) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(k\,r) \right| = \left| \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f\,[\,kr + (u-k)\,r\,] - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(kr) \right| \le \varepsilon \;;$$

en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\displaystyle \left| \int_{\mathbb{Z}_p} f(u\,x)\,\delta x - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,\delta x \right| \le \varepsilon$.

2.9. <u>Théorème</u> : $\boxed{\displaystyle \left[\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,\delta x \right]^2 \le \int_{\mathbb{Z}_p} f^2(x)\,\delta x}$.

<u>Dém</u> :

$$\left[\frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) \right]^2 = \frac{1}{p^{2n}} \left[\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) \right]^2 \le \frac{1}{p^{2n}} \left[\sum_{r=0}^{p^n-1} 1 \right] \left[\sum_{r=0}^{p^n-1} f^2(r) \right] = \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f^2(r) \;;$$

il suffit ensuite de faire $n \to +\infty$.

2.10. <u>Définition</u> : $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}$ on pose $\displaystyle \int_{\mathrm{B}(u,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,\,\ell)}(x)\, f(x)\,\delta x$.

2.11. <u>Théorème</u> : $\boxed{\displaystyle \int_{\mathrm{B}(u,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \frac{1}{p^\ell} \int_{\mathbb{Z}_p} f(u + p^\ell x)\,\delta x}$.

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $u = k \in \mathbb{N}^*$; on a $\displaystyle \int_{\mathrm{B}(k,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(k,\,\ell)}(x)\, f(x)\,\delta x$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(k,\,\ell)}(r)\, f(r) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{0 \le s < (p^n - k - 1)/p^\ell} f(k + s\,p^\ell)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^{n-\ell}} f(k + s\,p^\ell) = \frac{1}{p^\ell} \int_{\mathbb{Z}_p} f(k + p^\ell x)\,\delta x .$$

Supposons maintenant $u \in \mathbb{Z}_p$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $\underline{m \ge \ell}$ tel que $\forall\, v\,,\, w \in \mathbb{Z}_p$ $\big| f(v + w\,p^m) - f(v) \big| \le \varepsilon$; soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u - k \in p^m\,\mathbb{Z}_p$; alors $k \in \mathrm{B}(u\,,\,\ell)$, donc $\mathrm{B}(u,\ell) = \mathrm{B}(k,\ell)$, donc $\displaystyle\int_{\mathrm{B}(u,\ell)} f(x)\,\delta x = \int_{\mathrm{B}(k,\ell)} f(x)\,\delta x = \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbf{Z}_p} f(k+p^\ell x)\,\delta x$.

On en déduit

$$\Big|\int_{\mathrm{B}(u,\ell)} f(x)\,\delta x - \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbf{Z}_p} f(u+p^\ell x)\,\delta x\Big| = \Big|\frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbf{Z}_p} f(k+p^\ell x)\,\delta x - \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbf{Z}_p} f(u+p^\ell x)\,\delta x\Big|$$

$$\leq \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbf{Z}_p}\big|f(k+p^\ell x) - f(u+p^\ell x)\big|\,\delta x \leq \varepsilon/p^\ell .$$

2.12. <u>Définition</u> : Si $\mathrm{A} \subset \mathbb{Z}_p$ est une réunion (modérée) disjointe de boules B_i de $\mathbb{Z}_p$ on pose $\displaystyle\int_{\mathrm{A}} f(x)\,\delta x = \sum_i \int_{\mathrm{B}_i} f(x)\,\delta x$.

§ 3. <u>Espaces fondamentaux</u>

La théorie des mesures et des fonctionnelles sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ se transpose intégralement à $\mathbb{Z}_p$, avec la circonstance simplificatrice que $\mathcal{R}_p = \mathcal{C}_p$ (le complété de $\mathcal{E}_p$ pour la norme $\|\ \|$ est $\mathcal{C}_p$). Reprenons-en les principales étapes.

Sur $\mathcal{C}_p$ il y a trois <u>normes</u> fondamentales : outre la norme $\|\ \|$, on pose $\forall f \in \mathcal{C}_p$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{Z}_p} |f(x)|\,\delta x \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \Big[\int_{\mathbf{Z}_p} f^2(x)\,\delta x\Big]^{1/2}.$$

$\boxed{\text{Une } \underline{\text{mesure}} \text{ sur } \mathbb{Z}_p \text{ est un élément du N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}_p,\|\ \|\big).}$

On note $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des mesures sur $\mathbb{Z}_p$.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{M}_p \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}_p,\|\ \|\big)}$.

Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p$ s'étend canoniquement à $\mathcal{C}_p$ en posant $\forall f \in \mathcal{C}_p$

$$\boxed{\tilde{\mu}(f) = \lim_n \tilde{\mu}(f_n) \quad \text{avec} \quad f_n \in \mathcal{E}_p \quad \text{et} \quad f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} f}.$$

<u>*Notation intégrale*</u> : $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p\ \ \forall f \in \mathcal{C}_p$ on note $\boxed{\tilde{\mu}(f) = \displaystyle\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\,\tilde{\mu}(x)}$.

$\forall f \in \mathcal{C}_p$ la forme linéaire $\boxed{\{f\} : \mathcal{E}_p \to \mathbb{R} : g \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{Z}_p} g\,f\,\delta x}$ est une mesure ;

$\{f\}$ est la mesure <u>associée</u> à f (ou fonctionnelle associée à f).

En particulier à la fonction constante $\boxed{\mathbb{1} = 1_{\mathbf{Z}_p} \in \mathcal{E}_p}$ est associée la mesure

$\boxed{\{\mathbb{1}\} \,:\, \mathcal{E}_p \to \mathbb{R} \,:\, g \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p} g \;\delta x}$; c'est la $\boxed{\text{mesure de Haar}}$ sur $\mathbb{Z}_p$.

<u>*Notation*</u> : On note $\underline{\mathcal{C}_p} = \big\{\{f\} \,\|\, f \in \mathcal{C}_p\big\} \subset \mathcal{M}_p$; c'est un sous-espace de $\mathcal{M}_p$; on utilise une notation analogue pour tous les sous-ensembles de $\mathcal{C}_p$.

Dans $\mathcal{M}_p$ on définit la norme $\|\;\|_\star$, duale de la norme $\|\;\|$, en posant $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p$

$$\boxed{\|\tilde{\mu}\|_\star \;=\; \sup_{g \in \mathcal{E}_p\,,\, \|g\| = 1} |\tilde{\mu}(g)| \;=\; \sup_{g \in \mathcal{E}_p\,,\, \|g\| = 1} \tilde{\mu}(g)}$$

La norme $\|\;\|_\star$ prolonge la norme $\|\;\|_1$ sur $\underline{\mathcal{C}_p}$.

On note $\mathcal{L}^1_p$ la fermeture de $\underline{\mathcal{E}_p}$ dans $\mathcal{M}_p$. On a $\underline{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{L}^1_p$. Les éléments de $\mathcal{L}^1_p$ s'appellent les <u>fonctionnelles sommables</u> sur $\mathbb{Z}_p$. On note $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1_p$ $\boxed{\|\tilde{f}\|_1 = \|\tilde{f}\|_\star}$.

<u>*Notation intégrale*</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1_p$ on écrit $\int_{\mathbf{Z}_p} \tilde{f}(x)\;\delta x$ au lieu de $\int_{\mathbf{Z}_p} \tilde{f}(x)$; on a donc

$$\boxed{\int_{\mathbf{Z}_p} \tilde{f}(x)\;\delta x = \int_{\mathbf{Z}_p} \tilde{f}(x) \;=\; \tilde{f}(\mathbb{1})} \quad (\text{avec } \mathbb{1} = \mathbb{1}_{\mathbf{Z}_p}).$$

Le N-dual de l'espace normé $\big(\mathcal{E}_p\,,\,\|\;\|_2\big)$ se note $\mathcal{L}^2_p$ et ses éléments s'appellent les <u>fonctionnelles hilbertiennes</u> sur $\mathbb{Z}_p$. On a $\underline{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{L}^2_p \subset \mathcal{L}^1_p$ et la norme sur $\mathcal{L}^2_p$ se note encore $\|\;\|_2$ car elle prolonge la norme $\|\;\|_2$ sur $\underline{\mathcal{C}_p}$; de plus $\underline{\mathcal{E}_p}$ est dense dans $\mathcal{L}^2_p$.

On a $\forall\, f \in \mathcal{C}_p$ $\boxed{\|f\|_2 \le \|f\|_1 \le \|f\|}$ et $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2_p$ $\boxed{\|\tilde{f}\|_2 \le \|\tilde{f}\|_1}$.

Le N-dual de l'espace normé $\big(\mathcal{E}_p\,,\,\|\;\|_1\big)$ se note $\mathcal{B}_p$ et ses éléments s'appellent les <u>fonctionnelles bornées</u> sur $\mathbb{Z}_p$. On a $\underline{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{B}_p \subset \mathcal{L}^2_p$. On note $\|\;\|_{\mathrm{B}}$ la norme sur $\mathcal{B}_p$ et on a $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}_p$ $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} \le \|\tilde{f}\|_2}$.

$\mathcal{M}_p$ et $\mathcal{L}^1_p$ sont des espaces de Riesz-Banach ; $\mathcal{L}^2_p$ est un espace de Riesz-Hilbert ; $\mathcal{B}_p$ est une algèbre de Riesz-Banach.

L'ensemble $\mathcal{K}_p$ des <u>fonctionnelles caractéristiques</u> et l'espace $\mathcal{N}_p$ des <u>fonctionnelles totalement singulières</u> se définissent comme sur $[\,\mathrm{a}, \mathrm{b}\,]$.

On dispose du théorème de Radon-Nikodym $\boxed{\mathcal{M}_p = \mathcal{L}^1_p \oplus \mathcal{N}_p}$.

On peut de même définir les espaces de fonctions $\mathcal{BA}_p$ et $\mathcal{W}_p$, espaces respectivement des fonctions de Baire et des fonctions universelles sur $\mathbb{Z}_p$.

Tous les espaces que nous avons définis dans ce qui précède vérifient les mêmes propriétés que leurs correspondants sur $[\,a\,,b\,]$; quant aux démonstrations elles se transposent quasiment sans changement. De plus on dispose toujours des incontournables théorèmes de convergence monotone ou bornée.

Finalement on peut construire l'algèbre de Riesz $\mathcal{FO}_p$ des fonctionnelles (générales) sur $\mathbb{Z}_p$, et développer la même théorie à leur sujet que pour $[\,a\,,b\,]$.

Récapitulatif

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & \mathcal{F}_p & & & & & & \mathcal{FO}_p & & \\ & & & & & & \cup & & & & & & \cup & & \\ \mathcal{E}_p & \subset & \mathcal{C}_p & \subset & \mathcal{BA}_p & \subset & \mathcal{W}_p & \hookrightarrow & \mathcal{B}_p & \subset & \mathcal{L}^2_p & \subset & \mathcal{L}^1_p & \subset & \mathcal{M}_p \\ & & & & & & & & \cup & & & & & & \cup \\ & & & & & & & & \mathcal{K}_p & & & & & & \mathcal{N}_p \end{array}}$$

La théorie s'étend à $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ et permet de démontrer le théorème de Fubini.

Ces résultats se généralisent sans difficulté à des fonctions ou des mesures complexes ; nous utiliserons pour les espaces correspondants les notations $\widehat{\mathcal{C}_p}$, etc ...

§ 4. Moyenne d'une mesure sur une boule

4.1. Définition : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ $\forall\, v \in \mathbb{Z}_p$ $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ on pose

$$\boxed{\mathrm{T}_\ell\,(\tilde{\mu})\,(v) \;=\; p^\ell\;\tilde{\mu}\,(\mathbb{1}_{\mathrm{B}\,(v\,,\,\ell\,)}) \;=\; p^\ell \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}\,(v\,,\,\ell\,)}\,(x)\;\tilde{\mu}\,(x)}\,.$$

$\mathrm{T}_\ell\,(\tilde{\mu})\,(v)$ est la moyenne de $\tilde{\mu}$ sur la boule $\mathrm{B}\,(v\,,\ell\,)$.

4.2. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell\,(\tilde{\mu}) \in \widehat{\mathcal{E}_p}$ et $\big\|\mathrm{T}_\ell\,(\tilde{\mu})\big\| \leq p^\ell\,\|\tilde{\mu}\|_\star$.

Dém : Il existe exactement p^ℓ boules (disjointes) de « rayon » p^ℓ ; $\mathrm{T}_\ell\,(\tilde{\mu})$ est constant sur chacune d'entre elles, donc $\mathrm{T}_\ell\,(\tilde{\mu}) \in \widehat{\mathcal{E}_p}$. Par ailleurs on a clairement $\forall\, v \in \mathbb{Z}_p$ $\big|\mathrm{T}_\ell\,(\tilde{\mu})\,(v)\big| \leq p^\ell\,\|\tilde{\mu}\|_\star$.

4.3. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ on a $\boxed{\big\| \mathrm{T}_\ell(\tilde\mu) \big\|_1 \le \|\tilde\mu\|_\star}$.

<u>Dém</u> : $\big\| \mathrm{T}_\ell(\tilde\mu) \big\|_1 = \int_{\mathbb{Z}_p} \big| \mathrm{T}_\ell(\tilde\mu)(v) \big|\, \delta(v) \le p^\ell \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)\, |\tilde\mu|(x) \Big]\, \delta(v)$;

or $\forall\, v, x \in \mathbb{Z}_p$ $\mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x) = \mathbb{1}_{\mathrm{B}(x,\ell)}(v)$, donc

$$\big\| \mathrm{T}_\ell(\tilde\mu) \big\|_1 = p^\ell \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(x,\ell)}(v)\, \delta(v) \Big]\, |\tilde\mu|(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} |\tilde\mu|(x) = \|\tilde\mu\|_\star .$$

4.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell(f) \xrightarrow{\mathbf{u}} f$ quand $\ell \to +\infty$.

<u>Dém</u> : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}_p$ on ait $\big| f(a + b\,p^m) - f(a) \big| \le \varepsilon$; on peut alors écrire $\forall\, \ell \ge m$ $\forall\, v \in \mathbb{Z}_p$

$$\big| \mathrm{T}_\ell(f)(v) - f(v) \big| \le \int_{\mathbb{Z}_p} \big| f(v + p^\ell x) - f(v) \big|\, \delta x \le \varepsilon ,$$

c-à-d $\forall\, \ell \ge m$ $\big\| \mathrm{T}_\ell(f)(v) - f(v) \big\| \le \varepsilon$.

4.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \widehat{\mathcal{L}^1_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell(\tilde f) \xrightarrow{1} \tilde f$ quand $\ell \to +\infty$.

<u>Dém</u> : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $\mathrm{T}_\ell - \mathrm{I} : \widehat{\mathcal{L}^1_p} \to \widehat{\mathcal{L}^1_p}$.

4.6. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \widehat{\mathcal{L}^2_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell(\tilde f) \xrightarrow{2} \tilde f$ quand $\ell \to +\infty$.

<u>Dém</u> : Analogue à la précédente.

4.7. <u>Définition</u> : Soient $\tilde\mu_n, \tilde\mu \in \mathcal{M}_p$; on dit que la suite $\tilde\mu_n$ converge <u>faiblement</u> vers $\tilde\mu$ ssi $\forall\, h \in \mathcal{C}_p$ $\tilde\mu_n(h) \to \tilde\mu(h)$. On écrit $\tilde\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde\mu$.

4.8. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde\mu \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell(\tilde\mu) \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde\mu$ quand $\ell \to +\infty$.

<u>Dém</u> : Il faut montrer que $\forall\, h \in \mathcal{C}_p$ $\int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, \mathrm{T}_\ell(\tilde\mu)(v)\, \delta(v) \to \int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\, \tilde\mu(x)$ quand $\ell \to +\infty$. On a $\int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, \mathrm{T}_\ell(\tilde\mu)(v)\, \delta(v) = \int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, p^\ell \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)\, \tilde\mu(x) \Big]\, \delta(v)$

$= p^\ell \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(x,\ell)}(v)\, h(v)\, \delta(v) \Big]\, \tilde\mu(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{T}_\ell(h)(x)\, \tilde\mu(x)$; comme $\mathrm{T}_\ell(h) \xrightarrow{\mathbf{u}} h$,

on en déduit $\int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{T}_\ell(h)(x)\, \tilde\mu(x) \to \int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\, \tilde\mu(x)$ quand $\ell \to +\infty$.

Chapitre XXI : Séries de Fourier sur $\mathbb{Z}_p$

Contenu : Nous développons la théorie des séries de Fourier des mesures complexes sur $\mathbb{Z}_p$. Ces séries sont des combinaisons linéaires infinies à coefficients complexes de la fonction $\mathbb{1}$ et des fonctions de la forme $e^{-2\pi i m x/p^n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*,\ \underline{m \leq p^n - 1}$ et m non multiple de $p)$, qui constituent les *caractères* de $\mathbb{Z}_p$.

Nous proposons ensuite des exemples explicites de calcul de séries de Fourier sur $\mathbb{Z}_p$.

§ 1. Caractères de $\mathbb{Z}_p$

Notation : $\mathbb{K}$ = corps des rationnels

$\mathbb{K}_p$ = complété p-adique de $\mathbb{K}$ = corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$.

1.1. Théorème : La fonction $\boxed{E : \mathbb{K}_p \to \mathbb{C} \ :\ u \mapsto e^{2\pi i u}}$ est bien définie.

Dém : Comme $\mathbb{K}_p/\mathbb{Z}_p$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}/\mathbb{Z}$ et que la fonction $\mathbb{K}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C} : u \mapsto e^{2\pi i u}$ est bien définie, il en est de même de la fonction E.

1.2.* Théorème : $E \in \mathcal{C}_p$; de plus $\forall x \in \mathbb{K}_p\ \left[E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}_p \right]$.

Notation : On pose $\mathbf{U} = \{ z \in \mathbb{C} \,\|\, |z| = 1 \}$.

1.3. Définition : Une fonction $F : \mathbb{Z}_p \to \mathbf{U}$ est un caractère de $\mathbb{Z}_p$ ssi $F \in \mathcal{C}_p$ et ssi $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p\ \ F(x+y) = F(x)\,F(y)$.

1.4.* Théorème :

La fonction constante $E_0 : \mathbb{Z}_p \to \mathbf{U} : x \mapsto 1$ est un caractère de $\mathbb{Z}_p$.

1.5.* Théorème : $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\boxed{p \nmid m \leq p^n - 1}$ la fonction

$\boxed{E_{m,n} : \mathbb{Z}_p \to \mathbf{U} : x \mapsto E(mx/p^n) = e^{2\pi i m x/p^n}}$ est un caractère de $\mathbb{Z}_p$.

1.6.* Théorème : $E_{m,n} = E_{m',n'} \Leftrightarrow \Big[m = m' \text{ et } n = n' \Big]$.

Remarque : Nous verrons plus loin que E_0 et les $E_{m,n}$ sont les seuls caractères de $\mathbb{Z}_p$, mais nous ne ferons pas usage de ce résultat pour l'instant.

1.7.* Théorème : Les caractères de $\mathbb{Z}_p$ forment un groupe multiplicatif $\mathcal{G}_p$.

Notation : $\forall\, z \in \mathbb{C}$ nous notons $z^{\#}$ le conjugué de z.

1.8.* Théorème : $\forall\, F \in \mathcal{G}_p \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}_p$ on a $F(-x) = F(x)^{\#} = 1/F(x)$.

1.9.* Théorème : $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p \quad E_{m,n}(-x) = E_{m,n}(x)^{\#} = E_{p^n - m,n}(x)$.

1.10. Lemme : Si deux caractères de $\mathbb{Z}_p$ sont proportionnels ils sont égaux.

Dém : Soient F et G deux caractères de $\mathbb{Z}_p$ et soit $c \in \mathbf{U}$ tel que $G = c\,F$; on a $c^2 F(1)^2 = G(1)^2 = G(2) = c\,F(2) = c\,F(1)^2$, donc $c^2 = c$, donc $c = 1$.

1.11. Théorème :

Si F et G sont deux caractères distincts de $\mathbb{Z}_p$ on a $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x = 0$.

Dém : On a $\forall\, y \in \mathbb{Z}_p \quad \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} F(x+y)\,G(x+y)^{\#}\,\delta x$

$= F(y)\,G(y)^{\#} \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x$; puisque $\mathrm{F} \neq \mathrm{G}$, il existe au moins un $y \in \mathbb{Z}_p$

tel que $\mathrm{F}(y)\,\mathrm{G}(y)^{\#} = \mathrm{F}(y)/\mathrm{G}(y) \neq 1$; donc $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x = 0$.

1.12. Corollaire :

$\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \nmid m \leq p^n - 1$ on a $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} e^{\pm 2\pi i m x/p^n}\,\delta x = 0}$.

§ 2. Séries de Fourier sur $\mathbb{Z}_p$

2.1. Définition : Soit $\tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$; on pose $\boxed{c_0 = \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mu}(x)} \in \mathbb{C}$

et $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\boxed{p \nmid m \leq p^n - 1}$ $\boxed{c_{m,n} = \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^n}\,\tilde{\mu}(x)} \in \mathbb{C}$.

Ce sont les coefficients de Fourier de $\tilde{\mu}$.

2.2.* Théorème : $|c_0| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$ et $|c_{m,n}| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$.

2.3. Définition :

La série $\displaystyle c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n - 1} c_{m,n}\, e^{2\pi i m x/p^n} \Bigg)$ est la série de Fourier de $\tilde{\mu}$.

On pose $\forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall v \in \mathbb{Z}_p \quad \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v) = c_0 + \sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n}\, e^{2\pi i m v / p^n} \Big)$;

$\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu}) \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ est la somme partielle d'ordre ℓ de la série de Fourier de $\tilde{\mu}$.

2.4. Théorème : $\forall \ell \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu}) = \mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})}$.

Dém : On a $\forall v \in \mathbb{Z}_p \quad \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v) = c_0 + \sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n}\, e^{2\pi i m v / p^n} \Big)$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mu}(x) + \sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x / p^n}\, \tilde{\mu}(x) \Big] e^{2\pi i m v / p^n} \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mu}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^n} \Big) \Big] \tilde{\mu}(x)$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\sum_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} \Big] \tilde{\mu}(x) .$$

Si $x \in \mathrm{B}(v, \ell)$, c-à-d si $(x-v)/p^\ell \in \mathbb{Z}_p$, on a $\sum_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} = p^\ell$;

si $x \notin \mathrm{B}(v, \ell)$, c-à-d si $(x-v)/p^\ell \notin \mathbb{Z}_p$, on a

$$\sum_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} = \frac{e^{2\pi i m (v-x)} - 1}{e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} - 1} = 0 ;$$

donc $\sum_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} = p^\ell\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)$, donc

$$\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v) = p^\ell \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)\, \tilde{\mu}(x) = \mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v) .$$

On en déduit le corollaire suivant :

2.5.* Corollaire : $\forall f \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on a $\mathrm{S}_\ell(f) \xrightarrow{\mathbf{u}} f$ quand $\ell \to +\infty$.

$\forall \tilde{f} \in \widehat{\mathcal{L}_p^1}$ on a $\mathrm{S}_\ell(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \tilde{f}$ quand $\ell \to +\infty$.

$\forall \tilde{f} \in \widehat{\mathcal{L}_p^2}$ on a $\mathrm{S}_\ell(\tilde{f}) \xrightarrow{2} \tilde{f}$ quand $\ell \to +\infty$.

Remarquons que, contrairement aux séries de Fourier sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on se trouve dans la situation la plus favorable possible.

2.6. Relation de Parseval : $\forall \tilde{f} \in \widehat{\mathcal{L}_p^2}$ on a

$$\boxed{|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} |c_{m,n}|^2 \Big) = \int_{\mathbb{Z}_p} |\tilde{f}|^2(x)\, \delta x}$$

Dém :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{f}(x)^{\#}\, \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(x)\, \delta x \;=\; c_0 \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)^{\#}\, \delta x \;+\; \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{\substack{m=1 \\ p\, \nmid\, m}}^{p^n-1} c_{m,n} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)^{\#}\, e^{2\pi i m x/p^n}\, \delta x \Big]$$

$$= |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p\, \nmid\, m}}^{p^n-1} |c_{m,n}|^2 \Big) ;$$

de plus $\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu}) \xrightarrow{2} \tilde{f}$, donc $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{f}(x)^{\#}\, \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(x)\, \delta x \to \int_{\mathbb{Z}_p} |\tilde{f}|^2(x)\, \delta x$ quand $\ell \to +\infty$.

2.7. Corollaire : Les seuls caractères de $\mathbb{Z}_p$ sont la fonction E_0 et les fonctions $E_{m,n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \nmid m \le p^n - 1$.

Dém : Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{G}_p$ distinct des caractères énoncés ci-dessus ; on a $\mathrm{F} \in \widehat{\mathcal{C}_p} \subset \widehat{\mathcal{L}_p^2}$; or tous les coefficients de Fourier de F sont nuls car F est orthogonal à tous les autres caractères de $\mathbb{Z}_p$; on en déduit $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} |\mathrm{F}|^2(x)\, \delta x = 0$, donc $\mathrm{F} = 0$.

2.8. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p} \quad \forall\, h \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on a

$$\boxed{c_0 \int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, \delta(v) \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{m=1 \\ p\, \nmid\, m}}^{p^n-1} c_{m,n} \int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, e^{2\pi i m v/p^n}\, \delta(v) \Big] = \int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\, \tilde{\mu}(x)}$$

Dém : On a $\forall\, \ell \in \mathbb{N}^*$

$$c_0 \int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, \delta(x) \;+\; \sum_{n=1}^{\ell} \Big[\sum_{\substack{m=1 \\ p\, \nmid\, m}}^{p^n-1} c_{m,n} \int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, e^{2\pi i m v/p^n}\, \delta(v) \Big] = \int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v)\, \delta(v)$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} h(v)\, \mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v)\, \delta(v) \to \int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\, \tilde{\mu}(x) \quad \text{quand} \quad \ell \to +\infty .$$

2.9. Corollaire :

Soit $\tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ tel que tous ses coefficients de Fourier sont nuls ; alors $\tilde{\mu} = 0$.

Dém : Si tous les coefficients de Fourier de $\tilde{\mu}$ sont nuls, alors $\forall\, h \in \mathcal{E}_p$ $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\, \tilde{\mu}(x) = 0$; donc par définition $\tilde{\mu} = 0$.

§ 3. **Exemples de séries de Fourier sur $\mathbb{Z}_p$**

Exemple 1• $\quad f_s \,:\, \mathbb{Z}_p \to [0\,,1] \,:\, x \mapsto |x|_p^s \quad$ avec $\quad s \in \mathbb{R}_\star^+$.

Calcul de c_0 :

$$c_0 = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \;\delta(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{p^r\mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \;\delta(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \int_{p^r\mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} \delta(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \left(\frac{1}{p^r} - \frac{1}{p^{r+1}}\right) = \frac{p-1}{p} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{r(s+1)}} = \frac{(p-1)\,p^s}{p^{s+1}-1}\,.$$

Calcul de $c_{m,n}$:

$$c_{m,n} = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \; e^{-2\pi i m x/p^n}\,\delta(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{p^r\mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \; e^{-2\pi i m x/p^n}\,\delta(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \int_{p^r\mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^n}\,\delta(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \left[\frac{1}{p^r}\int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r}}\,\delta(x) - \frac{1}{p^{r+1}}\int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r-1}}\,\delta(x)\right]$$

$$= \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \left[\frac{1}{p^r}\int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r}}\,\delta(x) - \frac{1}{p^{r+1}}\int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r-1}}\,\delta(x)\right]$$

$$= -\frac{1}{p^{(n-1)s}}\,\frac{1}{p^n} + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}}\left(\frac{1}{p^r} - \frac{1}{p^{r+1}}\right) = -\frac{1}{p^{n(s+1)-s}} + \frac{p-1}{p}\sum_{r=n}^{\infty}\frac{1}{p^{r(s+1)}}$$

$$= -\frac{1}{p^{n(s+1)}}\left[p^s - \frac{p-1}{p}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^{r(s+1)}}\right] = -\frac{1}{p^{n(s+1)}}\left[p^s - \frac{p-1}{p}\,\frac{p^{s+1}}{p^{s+1}-1}\right]$$

$$= -\frac{p^s}{p^{n(s+1)}}\left[1 - \frac{p-1}{p^{s+1}-1}\right] = -\frac{p^s}{p^{n(s+1)}}\,\frac{p^{s+1}-p}{p^{s+1}-1} = -\frac{1}{p^{(n-1)(s+1)}}\,\frac{p^s-1}{p^{s+1}-1}\,.$$

Comme $f_s \in \mathcal{C}_p$ on peut écrire $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$

$$\boxed{|x|_p^s = \frac{(p-1)\,p^s}{p^{s+1}-1} - \frac{p^s-1}{p^{s+1}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^{(n-1)(s+1)}}\sum_{\substack{m=1\\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m x/p^n}}\,.$$

Puisque f_s est une fonction réelle on en déduit :

$$(p^{s+1}-1)\,|x|_p^s = (p-1)\,p^s - (p^s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^{(n-1)(s+1)}}\sum_{\substack{m=1\\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1}\cos\left(2\pi m x/p^n\right)\;;$$

en particulier pour $s = 1$ on obtient :

$$\boxed{(p+1)\,|x|_p \;=\; p \;-\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\,2\,(n-1)}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right)}\,.$$

Par ailleurs on a $\forall\, n \geq 2$

$$\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right) \;=\; \sum_{m=1}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right) \;-\; \sum_{m=1}^{p^{n-1}-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^{n-1}\right).$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{|x|_p \;=\; \frac{p}{p+1} \;-\; (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\,n}} \sum_{m=1}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right)}\,.$$

Remarquons que ces séries n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls ; les termes d'indice $n > k+1$ sont nuls quand $|x|_p = \dfrac{1}{p^k}$.

<u>Exemple 2</u>$^\bullet$

On définit la fonction $\sigma \;:\; \mathbb{Z}_p \to [\,0\,,1\,]$ de la manière suivante :

si $\underline{\ldots\, d_k\; d_{k-1}\, \ldots\, d_2\; d_1}$ est le développement p-adique de $x \in \mathbb{Z}_p\,,$ on pose

$\sigma\,(x) \,=\, 0\,, \underline{d_1\, d_2\, \ldots\, d_{k-1}\, d_k\, \ldots}$ que l'on considère comme le développement p-adique d'un nombre <u>réel</u> $\in [\,0\,,1\,]$; autrement dit si $x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, p^{\,k-1} \in \mathbb{Z}_p\,,$ avec $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $d_k \in [\![\,0\,,\, p-1\,]\!]\,,$ on pose $\sigma\,(x) \,=\, \sum_{k=1}^{\infty} d_k\,/\,p^k \,\in\, [\,0\,,1\,]\,.$

<u>*Calcul de* c_0</u> :

$$c_0 \;=\; \int_{\mathbb{Z}_p} \sigma\,(x)\;\delta\,(x) \;=\; \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell-1} \sigma\,(r)\;;\;\text{ on a }\;\forall\, \ell \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell-1} \sigma\,(r) \;=\; \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} \,+\, \frac{d_2}{p^2} \,+\, \ldots \,+\, \frac{d_\ell}{p^\ell} \right)$$

$$=\; \frac{1}{p^\ell} \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \ldots \sum_{c_\ell=0}^{p-1} \Big(d_\ell \,+\, d_{\ell-1}\, p \,+\, \ldots \,+\, d_2\, p^{\ell-2} \,+\, d_1\, p^{\ell-1} \Big)$$

$$=\; \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell-1} r \;=\; \frac{p^{\,\ell}-1}{2}\;;\;\text{ donc }\; c_0 \;=\; \lim_{\ell \to +\infty} \frac{p^{\,\ell}-1}{2\;p^\ell} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

<u>*Lemme*</u> : $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ tel que $\boxed{p \nmid m}$ on a 1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} e^{\,2\,\pi\,i\,m\,k/p} \;=\; 0$

$$2)\quad \sum_{k=0}^{p-1} k\ e^{2\pi i m k/p} = \frac{p}{e^{2\pi i m/p}-1}.$$

Dém : On a $\forall u \in \mathbb{C}^* \quad \sum_{k=0}^{p-1} e^{ku} = \dfrac{e^{pu}-1}{e^{u}-1}$; en dérivant par rapport à u

on trouve $\sum_{k=0}^{p-1} k\, e^{ku} = \dfrac{p\, e^{pu}}{e^{u}-1} - e^{u}\, \dfrac{e^{pu}-1}{(e^{u}-1)^2}$; en posant $u = 2\pi i m/p$

on obtient les deux résultats.

Calcul de $c_{m,n}$:

Nous calculons $c_{m,3}$, le cas général s'en déduisant aisément.

$$c_{m,3} = \int_{\mathbb{Z}_p} \sigma(x)\, e^{-2\pi i m x/p^3}\, \delta(x) = \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell-1} \sigma(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3};$$

on a $\forall \ell \geq 4 \quad \sum_{r=0}^{p^\ell-1} \sigma(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3}$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \frac{d_3}{p^3} + \dots + \frac{d_\ell}{p^\ell}\right) \times \exp\left\{-2\pi i \frac{m}{p^3}\left(d_1 + d_2\, p + \dots + d_\ell\, p^{\ell-1}\right)\right\}$$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \frac{d_3}{p^3} + \dots + \frac{c_\ell}{p^\ell}\right) \exp\{-2\pi i m \frac{d_1}{p^3}\} \times \exp\{-2\pi i m \frac{d_2}{p^2}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_3}{p}\} \dots \exp\{-2\pi i m\, d_n\, p^{\ell-4}\}$$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \frac{d_3}{p^3} + \dots + \frac{d_\ell}{p^\ell}\right) \times \exp\{-2\pi i m \frac{d_1}{p^3}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_2}{p^2}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_3}{p}\};$$

or $\sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\{-2\pi i m \frac{d_3}{p}\} = 0$, donc l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=1}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \frac{d_3}{p^3} \exp\{-2\pi i m \frac{d_1}{p^3}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_2}{p^2}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_3}{p}\}$$

$$= p^{\ell-6} \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} d_3 \exp\{-2\pi i m \frac{d_1}{p^3}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_2}{p^2}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_3}{p}\};$$

donc $\quad c_{m,3} = \dfrac{1}{p^6}\ \dfrac{e^{-2\pi i m/p^2}-1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1}\ \dfrac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^2}-1}\ \dfrac{p}{e^{-2\pi i m/p}-1} = \dfrac{1}{p^5}\ \dfrac{1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1}.$

En généralisant on trouve donc $\boxed{c_{m,n} = \dfrac{1}{p^{2n-1}} \dfrac{1}{e^{-2\pi i m/p^n} - 1}}$;

or $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \dfrac{1}{e^{-i\alpha} - 1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2} \cot\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

donc $\quad c_{m,n} = \dfrac{1}{2\,p^{2n-1}} \left[-1 + i \cot\left(\dfrac{\pi m}{p^n}\right)\right]$.

Comme $\sigma \in \mathcal{C}_p$ on peut écrire $\forall x \in \mathbb{Z}_p$

$$\boxed{2\,\sigma(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \left[-1 + i \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right)\right] e^{2\pi i m x/p^n}}.$$

Puisque σ est une fonction réelle on en déduit :

$$2\,\sigma(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \left[\cos(2\pi m x/p^n) + \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right) \sin(2\pi m x/p^n)\right].$$

Par ailleurs on sait que

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \cos(2\pi m x/p^n) = \frac{p+1}{p} |x|_p \;;$$

on obtient donc

$$\boxed{2\,\sigma(x) = \frac{p+1}{p} |x|_p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right) \sin(2\pi m x/p^n)},$$

ce qui montre d'ailleurs que $\dfrac{p+1}{2\,p} |x|_p$ est la partie <u>paire</u> de $\sigma(x)$.

Par ailleurs on a $\forall n \geq 2 \quad \displaystyle\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right) \sin(2\pi m x/p^n)$

$$= \sum_{m=1}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right) \sin(2\pi m x/p^n) - \sum_{m=1}^{p^{n-1}-1} \cot\left(\frac{m\pi}{p^{n-1}}\right) \sin(2\pi m x/p^{n-1}).$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{2\,\frac{p}{p+1}\,\sigma(x) = |x|_p - (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} \sum_{m=1}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right) \sin(2\pi m x/p^n)}.$$

Exemple $3^{\bullet}$: généralisation de l'exemple $2^{\bullet}$

On définit la fonction $\tau \; : \; \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ de la manière suivante :

si $x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, p^{k-1}$ avec $\forall \, k \in \mathbb{N} \quad c_k \in [[\, 0 \,,\, p-1 \,]]$, on pose $\tau\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, \lambda^{k-1}$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| < 1$.

Calcul de c_0 :

$$c_0 = \int_{\mathbb{Z}_p} \tau\,(x)\;\delta\,(x) = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell - 1} \tau\,(r) \;;\; \text{on a} \quad \forall \, \ell \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell - 1} \tau\,(r) = \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 + d_2 \, \lambda + \ldots + d_\ell \, \lambda^{\ell-1} \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \, p^\ell \, (p-1) \, \frac{1-\lambda^\ell}{1-\lambda} \;;\; \text{donc} \quad c_0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \, (p-1) \, \frac{1-\lambda^\ell}{1-\lambda} = \frac{1}{2} \, \frac{p-1}{1-\lambda} \, .$$

Calcul de $c_{m\,,\,n}$:

Nous calculons $c_{m\,,\,3}$, le cas général s'en déduisant aisément .

$$c_{m\,,\,3} = \int_{\mathbb{Z}_p} \tau\,(x)\; e^{-2\,\pi\, i\, m\, x/p^3}\;\delta\,(x) = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell - 1} \tau\,(r)\; e^{-2\,\pi\, i\, m\, r/p^3} \, ;$$

on a $\forall \, \ell \geq 4 \quad \sum_{r=0}^{p^\ell - 1} \tau\,(r)\; e^{-2\,\pi\, i\, m\, r/p^3}$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 + d_2 \, \lambda + d_3 \, \lambda^2 + \ldots + d_\ell \, \lambda^{\ell-1} \Big)$$

$$\times \; \exp \Big\{ -2\,\pi\, i \, \frac{m}{p^3} \, \big(d_1 + d_2 \, p + \ldots + d_\ell \, p^{\ell-1} \big) \Big\}$$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 + d_2 \, \lambda + d_3 \, \lambda^2 + \ldots + d_\ell \, \lambda^{\ell-1} \Big) \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_1}{p^3} \}$$

$$\times \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_2}{p^2} \} \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_3}{p} \} \; \ldots \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, d_\ell \, p^{\ell-4} \}$$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 + d_2 \, \lambda + d_3 \, \lambda^2 + \ldots + d_\ell \, \lambda^{\ell-1} \Big)$$

$$\times \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_1}{p^3} \} \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_2}{p^2} \} \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_3}{p} \} \; ;$$

or $\sum_{c_2=0}^{p-1} \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{c_2}{p} \} = 0$, donc l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} d_3 \, \lambda^2 \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_1}{p^3} \} \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_2}{p^2} \} \; \exp \{ -2\,\pi\, i\, m \, \frac{d_3}{p} \}$$

$$= p^{\ell-3}\,\lambda^2 \sum_{d_1=0}^{p-1}\sum_{d_2=0}^{p-1}\sum_{d_3=0}^{p-1} d_3\ \exp\{-2\pi i m\,\frac{d_1}{p^3}\}\ \exp\{-2\pi i m\,\frac{d_2}{p^2}\}\ \exp\{-2\pi i m\,\frac{d_3}{p}\}$$

donc finalement

$$c_{m,3} = \frac{\lambda^2}{p^3}\ \frac{e^{-2\pi i m/p^2}-1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1}\ \frac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^2}-1}\ \frac{p}{e^{-2\pi i m/p}-1} = \frac{\lambda^2}{p^2}\ \frac{1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1}\,.$$

En généralisant on trouve donc $\boxed{c_{m,n} = \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1}\frac{1}{e^{-2\pi i m/p^n}-1}}$,

c-à-d $\quad c_{m,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1}\left[-1+i\,\cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right)\right].$

Comme $\tau\in\widehat{\mathcal{C}_p}$ on peut écrire $\forall\, x\in\mathbb{Z}_p$

$$\boxed{2\,\tau(x) = \frac{p-1}{1-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1}\sum_{\substack{m=1\\ p\nmid m}}^{p^n-1}\left[-1+i\,\cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right)\right]e^{2\pi i m x/p^n}}\,.$$

On pose $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{d_n(x) = n^{\text{ième}}\text{ chiffre dans le développement p-adique de } x\in\mathbb{Z}_p}$.

En identifiant les coefficients des puissances de λ on obtient $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{2\,d_n(x) = p-1 + \frac{1}{p^{n-1}}\sum_{\substack{m=1\\ p\nmid m}}^{p^n-1}\left[-1+i\,\cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right)\right]e^{2\pi i m x/p^n}}\,,$$

ou encore

$$\boxed{2\,d_n(x) = p-1 - \frac{1}{p^{n-1}}\sum_{\substack{m=1\\ p\nmid m}}^{p^n-1}\left[\cos(2\pi m x/p^n) + \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right)\sin(2\pi m x/p^n)\right]}\,.$$

Relation de Parseval :

Calculons $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} d_n(x)^2\ \delta(x) = \lim_{\ell\to+\infty}\frac{1}{p^\ell}\sum_{r=0}^{p^\ell-1} d_n(r)^2$; on a $\forall\,\ell\geq n$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell-1} d_n(r)^2 = \sum_{d_1=0}^{p-1}\sum_{d_2=0}^{p-1}\ldots\sum_{d_\ell=0}^{p-1} d_n^2 = \frac{1}{6}\,p^\ell\,(p-1)\,(2p-1)\ ;$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} d_n(x)^2\ \delta(x) = \frac{1}{6}\,(p-1)\,(2p-1)\,.$

En appliquant la formule de Parseval à la série de Fourier de $d_n(x)$ on trouve donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2}{3}\,(p-1)\,(2\,p-1) \;=\; (p-1)^2 + \frac{1}{p^{2(n-1)}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)}\,,$$

c-à-d $\displaystyle\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^2-1)\,p^{2(n-1)}$, donc

$$\sum_{m=1}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} = \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p}\right)} + \sum_{r=2}^{n} \Big[\sum_{m=1}^{p^r-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^r}\right)} - \sum_{m=1}^{p^{r-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^{r-1}}\right)}\Big]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^2-1) \sum_{r=1}^{n} p^{2(r-1)} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^2-1)\,\frac{p^{2n}-1}{p^2-1} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^{2n}-1)\,,$$

c-à-d

$$\boxed{\sum_{m=1}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,\left(p^{2n}-1\right)}\,,$$

qui est un cas particulier de la formule $(n \geq 2)$

$$\boxed{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,\left(n^2-1\right)}\,.$$

<u>Exemple $4^{\bullet}$</u> :

On définit la fonction $\varphi \;:\; \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ de la manière suivante :

si $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\, p^{k-1}$ avec $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad c_k \in [[\,0\,,\,p-1\,]]$, on pose

$\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} \exp\{2\,\pi\, i\, w\, \dfrac{d_k}{p}\}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$ et $w \in [[\,1\,,\,p-1\,]]$.

<u>*Calcul de c_0*</u> :

$c_0 \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\,\delta(x) \;=\; \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell-1} \varphi(r)$; on a $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell-1} \varphi(r) \;=\; \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \cdots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big[\exp\{2\,\pi\, i\, w\, \frac{d_1}{p}\} + \lambda\,\exp\{2\,\pi\, i\, w\, \frac{d_2}{p}\}$$
$$+ \ldots + \lambda^{\ell-1} \exp\{2\,\pi\, i\, w\, \frac{d_\ell}{p}\}\Big] \;=\; 0 \text{ ; donc } \quad c_0 = 0\,.$$

<u>*Calcul de $c_{m,n}$*</u> :

Nous calculons $c_{m,3}$, le cas général s'en déduisant aisément.

$$c_{m,3} = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\, e^{-2\pi i m x/p^3}\, \delta(x) = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell - 1} \varphi(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3};$$

en raisonnant comme à l'exemple $3^\bullet$ on trouve $\forall\, \ell \geq 4$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell-1} \varphi(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3} = p^{\ell-3}\, \lambda^2 \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\{2\pi i\, w\, \frac{d_3}{p}\}$$

$$\times \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_1}{p^3}\} \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_2}{p^2}\} \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_3}{p}\}$$

$$= p^{\ell-3}\, \lambda^2 \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_1}{p^3}\} \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_2}{p^2}\} \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$$

$$= p^{\ell-3}\, \lambda^2\, \frac{e^{-2\pi i m/p^2} - 1}{e^{-2\pi i m/p^3} - 1}\, \frac{e^{-2\pi i m/p} - 1}{e^{-2\pi i m/p^2} - 1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$$

$$= p^{\ell-3}\, \lambda^2\, \frac{e^{-2\pi i m/p} - 1}{e^{-2\pi i m/p^3} - 1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$$

donc $$c_{m,3} = \frac{\lambda^2}{p^3}\, \frac{e^{-2\pi i m/p} - 1}{e^{-2\pi i m/p^3} - 1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{p^2}\, \dfrac{e^{-2\pi i m/p} - 1}{e^{-2\pi i m/p^3} - 1} & \text{ssi} \quad m \equiv w \pmod p \\[2ex] 0 \quad \text{ssi} \quad m \not\equiv w \pmod p\,. \end{cases}$$

En généralisant on trouve $$c_{m,n} = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \dfrac{e^{-2\pi i m/p} - 1}{e^{-2\pi i m/p^n} - 1} & \text{ssi} \quad m \equiv w \pmod p \\[2ex] 0 \quad \text{ssi} \quad m \not\equiv w \pmod p\,, \end{cases}$$

c-à-d $$c_{m,n} = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \dfrac{e^{-2\pi i w/p} - 1}{e^{-2\pi i m/p^n} - 1} & \text{ssi} \quad m \equiv w \pmod p \\[2ex] 0 \quad \text{ssi} \quad m \not\equiv w \pmod p\,. \end{cases}$$

Comme $\varphi \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on peut écrire $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$

$$\boxed{\left[-1 + i \cot\left(\frac{w\,\pi}{p}\right)\right] \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv w \pmod p}}^{p^n-1} \left[-1 + i \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\right] e^{2\pi i m x/p^n}}$$

$$\boxed{\left[-1 + i \cot\left(\frac{w\,\pi}{p}\right)\right] \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \sum_{r=0}^{p^{n-1}-1} \left[-1 + i \cot\left(\frac{w + r\,p}{p^n}\,\pi\right)\right] e^{2\pi i (w + r p) x/p^n}}\,.$$

En identifiant les coefficients des puissances de λ on obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Big[-1+\, i\, \cot\Big(\frac{w\,\pi}{p}\Big)\Big]\, \exp\Big\{2\,\pi\, i\, w\, \frac{d_n(x)}{p}\Big\}\\ &\quad = \frac{1}{p^{n-1}}\, \exp\Big\{2\,\pi\, i\, w\, \frac{x}{p^n}\Big\} \sum_{r=0}^{p^{n-1}-1} \Big[-1+\, i\, \cot\Big(\frac{w+r\,p}{p^n}\,\pi\Big)\Big]\, e^{2\,\pi\, i\, r\, x/p^{n-1}}\end{aligned}}$$

<u>*Relation de Parseval*</u> :

On a $\displaystyle \int_{\mathbb{Z}_p} \Big|\exp\Big\{2\,\pi\, i\, w\, \frac{d_n(x)}{p}\Big\}\Big|^2\, \delta(x) \;=\; \int_{\mathbb{Z}_p} \delta(x) \;=\; 1$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sum_{r=0}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\Big(\dfrac{w+r\,p}{p^{n+1}}\,\pi\Big)} \;=\; \frac{p^{2\,n}}{\sin^2\Big(\dfrac{w\,\pi}{p}\Big)}}$$

Chapitre XXII : Convolution sur $\mathbb{Z}_p$

Contenu : Nous étudions la *convolution* de deux mesures complexes sur $\mathbb{Z}_p$ avec les mêmes méthodes que sur $\mathbb{R}$. Nous présentons deux exemples explicites de calcul de convolution sur $\mathbb{Z}_p$.

1.* Lemme :

Soit $h \in \mathcal{E}_p$; posons $H : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{R} : (r, s) \mapsto h(r+s)$; alors on a $H \in \mathcal{C}_p(\mathbb{Z}_p^2)$.

2. Définition : On pose $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}_p$

$$\boxed{\tilde{\mu} * \tilde{\nu} : \mathcal{E}_p \to \mathbb{R} : h \mapsto \iint_{\mathbb{Z}_p^2} h(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)}.$$

3.* Théorème : $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}_p$ on a $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}_p$ et $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_\star \leq \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star$.

4. Théorème : $(\mathcal{M}_p, *)$ est une algèbre de Banach associative, commutative et unitaire.

Dém : Classique.

5. Théorème : $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p$ on a $\boxed{\tilde{\mu} * \mathbb{1} = \tilde{\mu}(\mathbb{1})}$; en particulier $\mathbb{1} * \mathbb{1} = \mathbb{1}$.

Dém : $\forall h \in \mathcal{E}_p \quad (\tilde{\mu} * \mathbb{1})(h) = \iint_{\mathbb{Z}_p^2} h(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \delta(s) = \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h(r+s)\, \delta(s) \Big] \tilde{\mu}(r)$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h(s)\, \delta(s) \Big] \tilde{\mu}(r) = \tilde{\mu}(\mathbb{1}) \int_{\mathbb{Z}_p} h(s)\, \delta(s).$$

6. Théorème :

$\forall u, v \in \mathbb{Z}_p \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}$ avec $\boxed{k \leq \ell}$ on a $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,k)} * \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)} = \dfrac{1}{p^\ell}\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(u+v,k)}}$.

Dém : $\forall h \in \mathcal{E}_p \quad \iint_{\mathbb{Z}_p^2} h(r+s)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,k)}(r)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(r)\, \delta(s)$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h(r+s)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,k)}(r)\, \delta(r) \Big] \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(s)$$

$$= \frac{1}{p^k} \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h(u + p^k r + s)\, \delta(r) \Big] \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(s)$$

$$= \frac{1}{p^k} \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h(u + p^k r + s)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(s) \Big] \delta(r)$$

$$= \frac{1}{p^{k+\ell}} \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h(u + p^k r + v + p^\ell s)\, \delta(s) \Big] \delta(r)$$

$$= \frac{1}{p^{k+\ell}} \int_{\mathbf{Z}_p} \Big[\int_{\mathbf{Z}_p} h\big[u+v+p^k\,(r+p^{\ell-k}\,s)\big]\ \delta(r) \Big]\ \delta(s)$$

$$= \frac{1}{p^{k+\ell}} \int_{\mathbf{Z}_p} h\,(u+v+p^k\,r)\ \delta(r)\ =\ \frac{1}{p^{\ell}} \int_{\mathbf{Z}_p} h\,(r)\ \mathbb{1}_{\mathrm{B}\,(u+v\,,\,k)}\,(r)\ \delta(r)\,.$$

7.* <u>Corollaire</u> : $\mathcal{E}_p * \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_p$.

8. <u>Théorème</u> : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{C}_p \quad \forall\, u \in \mathbb{Z}_p$ on a $(f*g)\,(u) = \int_{\mathbf{Z}_p} f\,(x)\, g\,(u-x)\ \delta x$;
on en déduit $f * g \in \mathcal{C}_p$.

<u>Dém</u> : C'est une conséquence du théorème de Fubini.

9. <u>Lemme</u> : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{C}_p$ on a $(f*g)^2 \le f^2 * g^2$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p$

$$(f*g)^2\,(u)\ =\ \Big[\int_{\mathbf{Z}_p} f\,(x)\, g\,(u-x)\ \delta x \Big]^2 \le \int_{\mathbf{Z}_p} f^2(x)\, g^2(u-x)\ \delta x\ =\ (f^2 * g^2)\,(u)\,.$$

10. <u>Théorème</u> : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{C}_p$ on a 1) $\|\, f*g\,\| \le \|\, f\,\|\ \|g\|$

2) $\|\, f*g\,\|_1 \le \|\, f\,\|_1\ \|g\|_1$

3) $\|\, f*g\,\|_2 \le \|\, f\,\|_2\ \|g\|_2$

<u>Dém</u> : 1) Trivial 2) Conséquence du Théorème 3

3) $\|\, f*g\,\|_2^2\ =\ \|\,(f*g)^2\|_1\ \le\ \|\, f^2 * g^2\|_1\ \le\ \|\, f^2\|_1\ \|g^2\|_1\ =\ \|\, f\,\|_2\ \|g\|_2\,.$

11.* <u>Corollaire</u> : $\mathcal{C}_p * \mathcal{C}_p \subset \mathcal{C}_p$; $\mathcal{L}_p^1 * \mathcal{L}_p^1 \subset \mathcal{L}_p^1$; $\mathcal{L}_p^2 * \mathcal{L}_p^2 \subset \mathcal{L}_p^2$.

12. <u>Théorème</u> : $\mathcal{B}_p * \mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_p$ et $\forall\, \tilde f\ \tilde g \in \mathcal{B}_p \quad \|\, f*g\,\|_{\mathrm{B}} \le \|\, f\,\|_{\mathrm{B}}\ \|g\|_{\mathrm{B}}\,.$

<u>Dém</u> : Soient $\tilde f,\, \tilde g \in \mathcal{B}_p$ et soit $h \in \mathcal{E}_p$; on a

$$\big|\,(\tilde f * \tilde g)\,(h)\big| \le \iint_{\mathbf{Z}_p^2} |\,h\,(r+s)|\ |\tilde f|\,(r)\ |\tilde g|\,(s)\ \delta(r)\ \delta(s)$$

$$= \int_{\mathbf{Z}_p} \Big[\int_{\mathbf{Z}_p} \big|h\,(r+s)\big|\ |\tilde f|\,(r)\ \delta(r) \Big]\ |\tilde g|\,(s)\ \delta(s)\ ;$$

or la fonction $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}\ :\ s \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p} |\,h\,(r+s)|\ |\tilde f|\,(r)\ \delta(r)$ est continue,

donc $\big|\,(\tilde f * \tilde g)\,(h)\big|\ \le\ \|\tilde g\|_{\mathrm{B}} \int_{\mathbf{Z}_p} \Big[\int_{\mathbf{Z}_p} |\,h\,(r+s)|\ |\tilde f|\,(r)\ \delta(r) \Big]\ \delta(s)$

$$= \|\tilde g\|_{\mathrm B} \int_{\mathbb Z_p} \Big[\int_{\mathbb Z_p} |h(r+s)| \, \delta(s) \Big] \, |\tilde f|(r) \, \delta(r) \; ;$$

de même la fonction $\mathbb Z_p \to \mathbb R \; : \; r \mapsto \int_{\mathbb Z_p} |h(r+s)| \, \delta(s)$ est continue,

donc $\big|(\tilde f * \tilde g)(h)\big| \le \|\tilde f\|_{\mathrm B} \, \|\tilde g\|_{\mathrm B} \int_{\mathbb Z_p} \Big[\int_{\mathbb Z_p} |h(r+s)| \, \delta(s) \Big] \, \delta(r)$

$$= \|\tilde f\|_{\mathrm B} \, \|\tilde g\|_{\mathrm B} \int_{\mathbb Z_p} |h(s)| \, \delta(s) \; = \; \|\tilde f\|_{\mathrm B} \, \|\tilde g\|_{\mathrm B} \, \|h\|_1 \; ;$$

donc $\tilde f * \tilde g \in \mathcal B_p$ et $\|f * g\|_{\mathrm B} \le \|f\|_{\mathrm B} \, \|g\|_{\mathrm B}$.

Notation : $\forall \, \tilde\mu \in \widehat{\mathcal M_p}$ on note $c_0(\tilde\mu)$ et $c_{m,n}(\tilde\mu)$ les coefficients de Fourier de $\tilde\mu$.

13. Théorème :

$\forall \, \tilde\mu, \, \tilde\nu \in \widehat{\mathcal M_p}$ on a $c_0(\tilde\mu * \tilde\nu) = c_0(\tilde\mu) \, c_0(\tilde\nu)$ et $c_{m,n}(\tilde\mu * \tilde\nu) = c_{m,n}(\tilde\mu) \, c_{m,n}(\tilde\nu)$.

Dém : $c_{m,n}(\tilde\mu * \tilde\nu) = \iint_{\mathbb Z_p^2} e^{-2\pi i m (r+s)/p^n} \, \tilde\mu(r) \, \tilde\nu(s)$

$$= \int_{\mathbb Z_p} e^{-2\pi i m r/p^n} \, \tilde\mu(r) \int_{\mathbb Z_p} e^{-2\pi i m s/p^n} \, \tilde\nu(s) \; = \; c_{m,n}(\tilde\mu) \, c_{m,n}(\tilde\nu) \, .$$

14. Calcul de $|x|_p^r * |x|_p^s$ $(r, \, s \in \mathbb R^+)$.

A partir des séries de Fourier de $|x|_p^r$ et $|x|_p^s$, et en vertu du théorème précédent, on peut écrire $\forall \, x \in \mathbb Z_p$

$$|x|_p^r * |x|_p^s \; = \; \frac{(p-1)^2 \, p^{r+s}}{(p^{r+1}-1)\,(p^{s+1}-1)} + \frac{(p^r-1)\,(p^s-1)}{(p^{r+1}-1)\,(p^{s+1}-1)}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{(n-1)(r+s+2)}} \Bigg(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m x/p^n} \Bigg) \; ;$$

or on a

$$|x|_p^{r+s+1} \; = \; \frac{(p-1)\, p^{r+s+1}}{p^{r+s+2}-1} - \frac{p^{r+s+1}-1}{p^{r+s+2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{(n-1)(r+s+2)}} \Bigg(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m x/p^n} \Bigg) \; ;$$

on en déduit

$$|x|_p^r * |x|_p^s \; = \; \frac{(p-1)^2 \, p^{r+s}}{(p^{r+1}-1)\,(p^{s+1}-1)} \quad \Downarrow \Downarrow \Downarrow$$

$$+ \frac{(p^{r}-1)(p^{s}-1)}{(p^{r+1}-1)(p^{s+1}-1)} \frac{(p-1)p^{r+s+1}-(p^{r+s+2}-1)|x|_p^{r+s+1}}{p^{r+s+1}-1}$$

$$= \frac{1}{p^{r+s+1}-1}\left[(p-1)p^{r+s}-\frac{(p^{r}-1)(p^{s}-1)}{(p^{r+1}-1)(p^{s+1}-1)}(p^{r+s+2}-1)|x|_p^{r+s+1}\right].$$

En particulier pour $r = s = 1$ on obtient

$$\boxed{|x|_p * |x|_p = \frac{1}{p^2+p+1}\left(p^2-\frac{p^2+1}{p+1}|x|_p^3\right)}.$$

ADDENDUM

SIXIÈME PARTIE : **Intégration sur les espaces de suites**

Contenu : Les espaces de suites constituent le cadre naturel dans lequel traiter les problèmes relatifs aux processus stochastiques, en particulier ceux concernant les suites de variables aléatoires indépendantes ou les martingales. Nous commençons par le cas très particulier du produit cartésien d'une suite d'ensembles finis, espace topologique compact, qui permet d'introduire de manière simple et significative les concepts de base.

Nous réexaminons ensuite ces concepts pour l'espace vectoriel des suites réelles, muni d'une topologie convenable, qui constitue l'espace fondamental de la théorie des processus. Cet espace n'étant pas localement compact, contrairement aux espaces $\mathbb{R}^n$, nous serons amenés à travailler avec une compacité pseudo-locale, utilisant une famille de compacts suffisamment représentatifs : les compacts élémentaires.

Chapitre XXIII : Espaces de suites

§ 1. Les espaces Ω

Soit H_i une suite d'ensembles finis non vides ; on note Ω l'ensemble des suites X telles que $\forall\, i \in \mathbb{N} \;\; X(i) \in \mathrm{H}_i$. On munit Ω de la topologie de la convergence simple : une suite d'éléments $X_n \in \Omega$ converge simplement vers $X \in \Omega$ ssi $\forall\, j \in \mathbb{N}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, i \leq j \;\; \forall\, n \geq N \;\; X_n(i) = X(i)$; on écrit $X_n \xrightarrow{\mathsf{S}} X$.

L'espace Ω est homéomorphe au produit cartésien infini $\underset{i \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}} \mathrm{H}_i$.

Remarque : $\mathbb{Z}_p$ est un cas particulier d'espace Ω : en effet $\mathbb{Z}_p$ est homéomorphe à Ω avec $\forall\, i \in \mathbb{N} \;\; \mathrm{H}_i = \{0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,p-1\}$.

1.1.* Théorème : Ω est un espace topologique $\boxed{\text{compact}}$.

1.2. Définition : Les boules de Ω de centre $X \in \Omega$ sont les parties

$$B_j(X) \;=\; \big\{\, Y \in \Omega \;\big\|\; \forall\, i \leq j \;\; Y(i) = X(i) \,\big\} \quad \text{avec } \; j \in \mathbb{N}\,.$$

1.3.* Théorème : Les boules sont à la fois ouvertes et fermées dans Ω. Une partie A de Ω est ouverte ssi $\forall\, X \in A$ il existe une boule B avec $X \in B \subset A$.

Notation : On note $\mathcal{F}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions bornées $\Omega \to \mathbb{R}$, que l'on munit de la norme uniforme $\|f\| = \sup_{X \in \Omega} |f(X)|$.

1.4.* Théorème : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue en $X \in \Omega$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\forall Y \in \Omega$ $\boxed{\left[\forall i \leq j \;\; Y(i) = X(i)\right] \Rightarrow |f(Y) - f(X)| \leq \varepsilon}$.

On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions continues $\Omega \to \mathbb{R}$. On a clairement $\mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$.

On pose $\forall j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\Omega_j = \times_{i \leq j} \mathrm{H}_i}$ et on note $\mathcal{F}(\Omega_j)$ l'algèbre des fonctions $\Omega_j \to \mathbb{R}$.

1.5. Définition : Soit $j \in \mathbb{N}$; pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ on identifie f à la fonction de $\mathcal{F}(\Omega)$ définie par

$$\boxed{f : \Omega \to \mathbb{R} : X \mapsto f\left[X(0), X(1), \ldots, X(j)\right]}.$$

1.6.* Théorème : $\mathcal{F}(\Omega_j)$ est une algèbre de Riesz (finidimensionnelle) et $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\mathcal{F}(\Omega_j) \subset \mathcal{F}(\Omega_{j+1}) \subset \mathcal{C}(\Omega)}.$$

Notation : On pose $\boxed{\mathcal{E}(\Omega) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(\Omega_j)} \subset \mathcal{C}(\Omega)$.

Les éléments de l'algèbre de Riesz $\mathcal{E}(\Omega)$ s'appellent les fonctions étagées sur Ω ; ce sont des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de boules de Ω.

1.7.* Théorème : $\mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$ pour la norme uniforme.

1.8. Définition fondamentale :

$$\boxed{\text{Une mesure sur } \Omega \text{ est un élément du N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}(\Omega), \|\;\|\big).}$$

Ou encore : Une mesure sur Ω est une forme linéaire $\tilde{\mu} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété : $\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{E}(\Omega) \;\; |\tilde{\mu}(f)| \leq M\,\|f\|.}$

On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace vectoriel des mesures sur Ω.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{M}(\Omega) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}(\Omega), \|\;\|\big).}$

On munit $\mathcal{M}(\Omega)$ de la norme duale $\|\;\|_\star$.

Notation intégrale :

$\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \quad \forall\, f \in \mathcal{E}(\Omega)$ on note $\boxed{\int_\Omega f(X)\, \tilde\mu(X) = \int_\Omega f\, \tilde\mu = \tilde\mu(f)}$.

1.9. Définition : Soit $\tilde\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$; $\forall\, j \in \mathbb{N}$ on note $\tilde\mu_{(j)}$ la restriction de $\tilde\mu$ à $\mathcal{F}(\Omega_j)$. $\tilde\mu_{(j)}$ peut être considéré de manière naturelle comme une mesure sur Ω_j.

Réciproquement soit une suite de mesures $\tilde\mu_j$ sur Ω_j telle que $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde\mu_j\|_\star < +\infty$ et $\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, f \in \mathcal{E}_j(\Omega) \quad \tilde\mu_{j+1}(f) = \tilde\mu_j(f)$; alors la suite $\tilde\mu_j$ définit de manière naturelle une mesure sur Ω.

Ce que l'on peut énoncer dans le théorème suivant :

1.10.* Théorème : La donnée d'une mesure $\tilde\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ est équivalente à la donnée d'une suite de mesures $\tilde\mu_j$ sur Ω_j telle que

$$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde\mu_j\|_\star < +\infty} \quad \underline{\text{et}} \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, f \in \mathcal{F}(\Omega_j) \quad \boxed{\tilde\mu_{j+1}(f) = \tilde\mu_j(f)}.$$

La suite $\|\tilde\mu_j\|_\star$ est alors croissante et on a $\boxed{\|\tilde\mu\|_\star = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde\mu_j\|_\star}$.

Remarque : Comme Ω_j est un ensemble fini, une mesure $\tilde\mu_j$ sur Ω_j est simplement une « fonction de poids » $\tilde\mu_j : \Omega_j \to \mathbb{R}$.

Les conditions du théorème précédent signifient donc explicitement :

$$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\omega \in \Omega_j} |\tilde\mu_j(\omega)| < +\infty} \quad \underline{\text{et}} \quad \boxed{\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, \omega \in \Omega_j \sum_{x \in \mathrm{H}_{j+1}} \tilde\mu_{j+1}(\omega, x) = \tilde\mu_j(\omega)}.$$

1.11.* Théorème : $\forall\, \tilde\mu, \tilde\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ $\boxed{\tilde\mu \le \tilde\nu \;\Leftrightarrow\; \left[\,\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \tilde\mu_{(j)} \le \tilde\nu_{(j)}\right]}$.

1.12.* Théorème : $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$ $\boxed{|\tilde\mu|_{(j)} = |\tilde\mu_{(j)}|}$.

1.13.* Théorème : $\mathcal{M}(\Omega)$ est un espace de Riesz-Banach.

1.14. Définition : $\tilde\mu \in \mathcal{M}(\Omega)^+$ est une (mesure de) probabilité sur Ω ssi $\boxed{\|\tilde\mu\|_\star = 1}$.

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω.

1.15. Définition :

$\tilde\mu \in \mathcal{M}(\Omega)^+$ est une probabilité graduée sur Ω ssi $\boxed{\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \tilde\mu_{(j)} \in \mathcal{P}(\Omega_j)}$.

On note $\mathcal{PG}(\Omega)$ l'ensemble des probabilités graduées ; on a clairement $\mathcal{PG}(\Omega) \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Comme sur $[a,b]$ on définira les algèbres suivantes de fonctions sur Ω :

1.16. Définition : Une fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ est de Baire ssi elle est limite simple bornée d'une suite de fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$.

On note $\mathcal{BA}(\Omega) = \{\text{fonctions de Baire}\}$.

1.17. Définition : Une fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ est universelle ssi

$$\boxed{\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)^+ \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad g\,,h \in \mathcal{BA}(\Omega) \quad \text{tels que} \quad g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}\,(h-g) \leq \varepsilon}\,.$$

On note $\mathcal{W}(\Omega) = \{\text{fonctions universelles}\}$.

1.18.* Théorème : $\boxed{\mathcal{E}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{BA}(\Omega) \subset \mathcal{W}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)}$.

1.19.* Théorème : $\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{BA}(\Omega)$, $\mathcal{W}(\Omega)$, $\mathcal{F}(\Omega)$ sont des algèbres de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

1.20.* Théorème : $\mathcal{M}(\Omega)$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\Omega)$.

Ces espaces vérifient les mêmes propriétés et théorèmes que sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

§ 2. L'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

2.1. Définition : $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est l'algèbre des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (c-à-d des suites réelles). On munit cet espace de la topologie de la convergence simple : une suite d'éléments $X_n \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ converge simplement vers $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $\forall\, i \in \mathbb{N} \quad X_n(i) \to X(i)$; on écrit $X_n \xrightarrow{\mathsf{S}} X$. L'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au produit cartésien infini $\underset{i \in \mathbb{N}}{\times} \mathbb{R}$.

2.2.* Théorème : $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est un espace métrisable et même pseudo-normable pour la pseudo-norme $\| \; \|_{\mathsf{S}}$ définie par $\boxed{\|X\|_{\mathsf{S}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \wedge |X(i)|}$; de plus $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est complet pour cette pseudo-norme.

2.3.* Corollaire : $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est un pseudo-espace de Riesz-Banach.

On note $\mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'algèbre des fonctions $\overset{\infty}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ bornées sur tout compact de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

2.4. Théorème : $f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est continue en $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que $\forall Y \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\big[\, \forall i \le j \ \ |Y(i) - X(i)| \le \eta \,\big] \ \Rightarrow \ |f(Y) - f(X)| \le \varepsilon} \quad (*)\,.$$

Dém : f est continue en X ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\forall Y \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\|Y - X\|_{\mathsf{S}} \le \eta \ \Rightarrow \ |f(Y) - f(X)| \le \varepsilon} \quad (**)\,.$$

Montrons l'équivalence des conditions (*) et (**) ; il suffit de le montrer pour $X = 0$.

a) $(*) \Rightarrow (**)$: Soient $j \in \mathbb{N}$ et $\eta < 1$ vérifiant (*) ; supposons $\|Y\|_{\mathsf{S}} \le \dfrac{\eta}{2^j}$;

alors $\forall i \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{2^i} \wedge |Y(i)| \le \dfrac{\eta}{2^j}$; donc $\forall i \le j$ $|Y(i)| \le \dfrac{\eta}{2^j} \le \eta$; donc $|f(Y) - f(0)| \le \varepsilon$.

b) $(**) \Rightarrow (*)$: Soit $\eta < 2$ vérifiant (**) ; soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^j} \le \dfrac{\eta}{2}$;

supposons $\forall i \le j$ $|Y(i)| \le \dfrac{\eta}{2^{j+1}}$; alors on a

$$\|Y\|_{\mathsf{S}} = \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{2^i} \wedge |Y(i)| + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \wedge |Y(i)| \le \sum_{i=0}^{j} \frac{\eta}{2^{j+1}} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$\le \frac{j+1}{2^{j+1}}\,\eta + \frac{1}{2^j} \le \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta\ ; \text{ donc } |f(Y) - f(0)| \le \varepsilon\,.$$

Notation : On note $\mathcal{C}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'algèbre des fonctions continues $\overset{\infty}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

2.5. Définition : Les pavés (ouverts, fermés) de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ sont les ensembles de la forme $\mathsf{P} \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ où P est un pavé (ouvert, fermé) de $\mathbb{R}^{j+1}$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$.

2.6.* Théorème : Une partie A de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est ouverte ssi $\forall X \in \mathsf{A}$ il existe un pavé ouvert $\mathsf{B} \subset \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ tel que $X \in \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$.

2.7. Théorème : Soit A un fermé de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$; on note $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{A}_j = \Big\{ \big[\, X(0)\,,\, X(1)\,,\, \ldots\,,\, X(j) \,\big] \in \mathbb{R}^{j+1} \,\big\|\, X \in \mathsf{A} \Big\}\ ;$$

soit $\overline{\mathsf{A}}_j$ la fermeture de A_j dans $\mathbb{R}^{j+1}$; alors la suite $\overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}} \subset \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est décroissante et on a $\boxed{\mathsf{A} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}}$.

Dém : Posons $\mathsf{A}^* = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$; soit $X \in \mathsf{A}$; on a clairement $\forall j \in \mathbb{N}$ $X \in \mathsf{A}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$, donc $X \in \mathsf{A}^*$; on en déduit $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}^*$.

Montrons maintenant $\mathsf{A}^* \subset \mathsf{A}$, c-à-d $\left[X \notin \mathsf{A} \Rightarrow X \notin \mathsf{A}^* \right]$; soit $X \notin \mathsf{A}$; comme A est fermé dans $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$, il existe un pavé ouvert B tel que $X \in \mathsf{B}$ et $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$; il existe donc $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{B} = \mathsf{P} \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ où P est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^{j+1}$; supposons $X \in \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$; alors il existe une suite $X_n \in \mathsf{A}$ telle que $\forall\, 1 \le i \le j \quad X_n(i) \to X(i)$; donc pour n suffisamment grand $\left[X_n(0)\,, X_n(1)\,, \ldots\,, X_n(j) \right] \in \mathsf{P}$, c-à-d $X_n \in \mathsf{B}$; ce résultat est en contradiction avec $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$; on en déduit $X \notin \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$, donc $X \notin \mathsf{A}^*$.

2.8. Définition : Un fermé A de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est régulier ssi $\forall\, j \in \mathbb{N} \;\; \mathsf{A}_j$ est fermé.

2.9.* Théorème : Les compacts de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ sont réguliers.

2.10. Définition : Une partie de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est primitive ssi elle est de la forme $\mathsf{A} \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ où A est une partie de $\mathbb{R}^{j+1}$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$.

2.11.* Théorème : Tout fermé de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est l'intersection d'une *suite* de fermés primitifs et tout ouvert de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est la réunion d'une *suite* d'ouverts primitifs.

2.12. Définition : Soit $j \in \mathbb{N}$; pour toute fonction $f \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^{j+1})$ on identifie f à la fonction de $\mathcal{F}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ définie par

$$\boxed{f \,:\, \overset{\infty}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \,:\, X \mapsto f\left[X(0)\,, X(1)\,, \ldots\,, X(j) \right]}\,.$$

On a donc $\forall\, j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathcal{W}(\mathbb{R}^{j+1}) \subset \mathcal{W}(\mathbb{R}^{j+2}) \subset \mathcal{F}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)}$ et $\boxed{\mathcal{C}(\mathbb{R}^{j+1}) \subset \mathcal{C}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)}$.

2.13. Définition : On pose $\boxed{\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})} \subset \mathcal{F}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$.

Les éléments de $\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ s'appellent les fonctions étagées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$. Elles sont bornées mais ne sont pas nulles en dehors d'un compact de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ (sauf la fonction nulle).

On munit l'algèbre de Riesz $\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ de la norme uniforme $\|f\| = \sup\limits_{X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}} |f(X)|$.

Nous nous restreindrons à l'étude des pseudo-mesures *normées* sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

2.14. Définition fondamentale :

$$\boxed{\text{Une pseudo-mesure normée sur } \overset{\infty}{\mathbb{R}} \text{ est un élément du N-dual de l'espace normé } \Big(\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big), \|\;\|\Big).}$$

Ou encore : Une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est une forme linéaire $\tilde{\mu} : \mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big) \to \mathbb{R}$

vérifiant la propriété : $\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big) \ \ |\tilde{\mu}(f)| \leq M \, \| f \| .}$

On note $\mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures normées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \Big(\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big), \| \ \|\Big).}$

On munit $\mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ de la norme duale $\| \ \|_{\star}$.

Notation intégrale :

$\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big) \ \ \forall f \in \mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ on note $\boxed{\int_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}} f(X) \, \tilde{\mu}(X) = \int_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}} f \, \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(f)}$.

2.15. Définition :

Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$; on note $\forall j \in \mathbb{N} \ \ \tilde{\mu}_{(j)}$ la restriction de $\tilde{\mu}$ à $\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})$.

$\tilde{\mu}_{(j)}$ peut être considéré de manière naturelle comme une pseudo-mesure normée sur $\mathbb{R}^{j+1}$.

2.16.* Théorème : Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$; alors on a $\forall j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\tilde{\mu}_{(j)} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\mathbb{R}^{j+1})}$,

$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \| \tilde{\mu}_{(j)} \|_{\star} = \| \tilde{\mu} \|_{\star}}$ et $\forall j \in \mathbb{N} \ \ \forall f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{(j+1)}(f) = \tilde{\mu}_{(j)}(f)}$.

Réciproquement soit une suite $\tilde{\mu}_j \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\mathbb{R}^{j+1})$ telle que $\sup_{j \in \mathbb{N}} \| \tilde{\mu}_j \|_{\star} < +\infty$ et $\forall j \in \mathbb{N} \ \ \forall f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1}) \ \ \tilde{\mu}_{j+1}(f) = \tilde{\mu}_j(f)$; alors la suite $\tilde{\mu}_j$ définit de manière naturelle une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

Ce que l'on peut énoncer dans le théorème suivant :

2.17.* Théorème : La donnée d'une pseudo-mesure normée $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ est équivalente à la donnée d'une suite de pseudo-mesures normées $\tilde{\mu}_j \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\mathbb{R}^{j+1})$ telle que

$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \| \tilde{\mu}_j \|_{\star} < +\infty}$ et $\forall j \in \mathbb{N} \ \ \forall f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{j+1}(f) = \tilde{\mu}_j(f)}$.

La suite $\| \tilde{\mu}_j \|_{\star}$ est alors croissante et on a $\boxed{\| \tilde{\mu} \|_{\star} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \| \tilde{\mu}_j \|_{\star}}$.

2.18.* Théorème : $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ $\boxed{\tilde{\mu} \leq \tilde{\nu} \Leftrightarrow \big[\forall j \in \mathbb{N} \ \ \tilde{\mu}_{(j)} \leq \tilde{\nu}_{(j)} \big]}$.

2.19.* Théorème : $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big) \ \ \forall j \in \mathbb{N}$ $\boxed{|\tilde{\mu}|_{(j)} = |\tilde{\mu}_{(j)}|}$.

2.20. Définition :

$\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ est une mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ ssi $\boxed{\forall\, j \in \mathrm{I\!N} \quad \tilde{\mu}_{(j)} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^{j+1})}$.

On note $\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ l'espace vectoriel des mesures normées sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$.

2.21.* Théorème : $\mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ et $\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ sont des espaces de Riesz-Banach.

2.22. Définition : $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})^+$ est une (mesure de) probabilité sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ ssi $\boxed{\|\,\tilde{\mu}\,\|_\star = 1}$.

On note $\mathcal{P}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ l'ensemble des probabilités sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$.

2.23. Définition :

$\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})^+$ est une probabilité graduée sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ ssi $\boxed{\forall\, j \in \mathrm{I\!N} \quad \tilde{\mu}_{(j)} \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^{j+1})}$.

On note $\mathcal{PG}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}) \subset \mathcal{P}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ l'ensemble des probabilités graduées.

§ 3. Compacts élémentaires de $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$

Soit T_i une suite d'intervalles compacts non vides de $\mathrm{I\!R}$; on pose

$$\mathsf{K} = \left\{ X \in \overset{\infty}{\mathrm{I\!R}} \,\middle\|\, \forall\, i \in \mathrm{I\!N} \;\; X(i) \in \mathrm{T}_i \right\} \subset \overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}.$$

On munit K de la topologie induite par celle de $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$. L'espace K est donc métrisable. C'est l'espace des suites réelles dont le $i^{\text{ème}}$ terme appartient à T_i pour tout $i \in \mathrm{I\!N}$. L'espace K est homéomorphe au produit cartésien infini $\underset{i \in \mathrm{I\!N}}{\mathsf{X}} \mathrm{T}_i$.

3.1. Théorème : K est un espace topologique $\boxed{\text{compact}}$; un tel compact s'appelle un compact élémentaire (coel) de $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$.

Dém : Classique.

3.2. Théorème : Tout compact de $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ est inclus à un coel.

Dém : Soit K un compact de $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$; Supposons qu'il existe $i \in \mathrm{I\!N}$ tel que $\sup\limits_{X \in \mathsf{K}} |X(i)| = +\infty$; soit une suite $X_n \in \mathsf{K}$ telle que $|X_n(i)| \to +\infty$; alors aucune sous-suite de X_n ne pourrait converger dans $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ car la convergence dans $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ implique la convergence en i ; donc $\sup\limits_{X \in \mathsf{K}} |X(i)| < +\infty$; posons $\forall\, i \in \mathrm{I\!N} \quad \theta_i = \sup\limits_{X \in \mathsf{K}} |X(i)|$ et $\mathrm{T}_i = [-\theta_i\,,\,\theta_i\,]$; on a alors $\mathsf{K} \subset \underset{i \in \mathrm{I\!N}}{\mathsf{X}} \mathrm{T}_i$.

3.3.* Corollaire : $\mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est l'algèbre des fonctions bornées sur tout coel de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

3.4. Définition : $f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est continue en $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ sur le coel $\mathsf{K} \ni X$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que $\forall\, Y \in \mathsf{K}$

$$\boxed{\big[\,\forall\, i \le j \quad |Y(i) - X(i)| \le \eta\,\big] \;\Rightarrow\; |f(Y) - f(X)| \le \varepsilon} \quad .$$

Remarque : Ceci revient à exiger que $f|_{\mathsf{K}}$ est continue en X.

3.5. Théorème :

$f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est continue en $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi f est continue sur tout coel $\mathsf{K} \ni X$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Trivial.

b) $\Leftarrow$: Supposons par exemple que f n'est pas continue en 0 ; alors il existe $\varepsilon > 0$, une suite $\eta_j > 0$, que l'on peut supposer décroissante, et une suite Y_j tels que $\forall\, i \le j \quad |Y_j(i)| \le \eta_j$ et $|f(Y_j)| > \varepsilon$. Posons $\forall\, i \in \mathbb{N} \quad \theta_i = \max\limits_{j \in \mathbb{N}} |Y_j(i)|$, ce qui a un sens car $\forall\, j \ge i \quad |Y_j(i)| \le \eta_j \le \eta_i$; posons $\forall\, i \in \mathbb{N} \quad \mathrm{T}_i = [-\theta_i\,,\,\theta_i]$ et $\mathsf{K} = \underset{i \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}}\, \mathrm{T}_i$; on a $\forall\, i\,,\, j \in \mathbb{N} \quad Y_j(i) \le \theta_i$, donc $\forall\, j \in \mathbb{N} \quad Y_j \in \mathsf{K}$, donc f n'est pas continue en 0 sur $\mathsf{K} \ni 0$.

Notation : Pour tout coel K on note $\mathcal{F}(\mathsf{K})$ l'algèbre des fonctions bornées $\mathsf{K} \to \mathbb{R}$.

3.6. Définition : Une fonction de $\mathcal{F}(\mathsf{K})$ est étagée sur K ssi elle est la restriction à K d'une fonction de $\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$. On note $\mathcal{E}(\mathsf{K})$ l'algèbre de Riesz des fonctions étagées sur K.

On peut faire sur un coel K la même théorie que sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ dans la Première partie :

3.7. Définition fondamentale :

$$\boxed{\text{Une pseudo-mesure sur } \mathsf{K} \text{ est un élément du N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}(\mathsf{K}),\, \|\ \|\big).}$$

Ou encore : Une pseudo-mesure sur K est une forme linéaire $\tilde{\mu} : \mathcal{E}(\mathsf{K}) \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété : $\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall\, f \in \mathcal{E}(\mathsf{K}) \quad |\tilde{\mu}(f)| \le M\,\|f\|.}$

On note $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures sur K.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{PM}(\mathsf{K}) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}(\mathsf{K}),\, \|\ \|\big).}$

Contrairement à ce qui se passe pour les espaces $\mathbb{R}^n$, qui sont localement compacts, le prolongement par 0 d'une fonction de $\mathcal{E}(\mathsf{K})$ n'est pas une fonction de $\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ (sauf pour la fonction nulle). Une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ n'a donc pas pour l'instant de valeur naturelle sur $\mathcal{E}(\mathsf{K})$; c'est l'objet de la définition suivante.

3.8. Théorème-Définition :

Soit un coel $\mathsf{K} = \underset{i \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}} \mathrm{T}_i$; $\forall j \in \mathbb{N}$ on note $\Lambda_j \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ la fonction caractéristique de $\mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2 \times \ldots \times \mathrm{T}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$; soit $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$; alors la suite $\Lambda_j \tilde{\mu}$ est convergente en norme $\| \, \|_\star$ dans $\mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ et on pose $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathsf{K}} = {}^\star\lim_j \, (\Lambda_j \tilde{\mu})} \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

On a $\boxed{\|\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}\|_\star \leq \|\tilde{\mu}\|_\star}$ et $\forall g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\boxed{g.(\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}) = (g\,\tilde{\mu})_{\mathsf{K}}}$; de plus $\boxed{|\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}| = |\tilde{\mu}|_{\mathsf{K}}}$,

donc aussi $\boxed{(\tilde{\mu}_{\mathsf{K}})^+ = (\tilde{\mu}^+)_{\mathsf{K}}}$ et $\boxed{(\tilde{\mu}_{\mathsf{K}})^- = (\tilde{\mu}^-)_{\mathsf{K}}}$.

$\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}$ s'appelle la restriction à K de $\tilde{\mu}$ et on note $\boxed{\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \quad \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f) = \int_{\mathsf{K}} f\,\tilde{\mu}}$.

Dém : Soit d'abord $\tilde{\mu} \geq 0$; alors la suite $\Lambda_j \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est positive et décroissante ; elle est dès lors convergente en norme $\| \, \|_\star$ dans $\mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$;
pour $\tilde{\mu}$ quelconque on a $\Lambda_j \tilde{\mu} = \Lambda_j \tilde{\mu}^+ - \Lambda_j \tilde{\mu}^-$, qui est donc aussi convergente.

3.9. Théorème : $\forall f, g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ on a $\Big[f|_{\mathsf{K}} = g|_{\mathsf{K}} \Rightarrow \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f) = \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(g) \Big]$.

Dém : On a $\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f) = \lim_j \big[(\Lambda_j \tilde{\mu})(f)\big] = \lim_j \tilde{\mu}(\Lambda_j f)$; or pour j suffisamment grand $\Lambda_j f = \Lambda_j g$; d'où le résultat.

3.10. Définition : En vertu du théorème précédent on peut identifier $\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}$ à l'élément de $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ défini par $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f|_{\mathsf{K}}) = \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f)}$. $\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}$ a d'ailleurs la même norme en tant qu'élément de $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ qu'en tant qu'élément de $\mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

3.11. Théorème : $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathsf{K})$ il existe un unique $\langle \tilde{\mu} \rangle \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ tel que $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} = \tilde{\mu}}$ et $\boxed{\|\langle \tilde{\mu} \rangle\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star}$. $\langle \tilde{\mu} \rangle$ est défini par $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle(f) = \tilde{\mu}(f|_{\mathsf{K}})}$ et s'appelle la pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ engendrée par $\tilde{\mu}$.

On a $\forall g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\boxed{g.\langle \tilde{\mu} \rangle = \langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu} \rangle}$; de plus $\boxed{|\langle \tilde{\mu} \rangle| = \langle |\tilde{\mu}| \rangle}$,

donc aussi $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle^+ = \langle \tilde{\mu}^+ \rangle}$ et $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle^- = \langle \tilde{\mu}^- \rangle}$.

Dém :

1) Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathsf{K})$; posons $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\langle \tilde{\mu} \rangle (f) = \tilde{\mu}\big(f|_{\mathsf{K}}\big)$; montrons que $\langle \tilde{\mu} \rangle \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$. La linéarité de $\langle \tilde{\mu} \rangle$ est évidente ; par ailleurs on a $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $|\langle \tilde{\mu} \rangle (f)| = |\tilde{\mu}\big(f|_{\mathsf{K}}\big)| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star \|f|_{\mathsf{K}}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star \|f\|$; donc $\langle \tilde{\mu} \rangle \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ et $\|\langle \tilde{\mu} \rangle\|_\star \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$.

Montrons maintenant $\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} = \tilde{\mu}$; soit $f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$; on a $\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} (f|_{\mathsf{K}}) = \langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} (f)$ $= \lim_j \langle \tilde{\mu} \rangle (\Lambda_j f) = \lim_j \tilde{\mu}\big[(\Lambda_j f)|_{\mathsf{K}}\big] = \tilde{\mu}(f|_{\mathsf{K}})$ car $\forall j \in \mathbb{N}$ $(\Lambda_j f)|_{\mathsf{K}} = f|_{\mathsf{K}}$; on en déduit $\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} = \tilde{\mu}$; on a donc aussi $\|\tilde{\mu}\|_\star = \|\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}}\|_\star \leq \|\langle \tilde{\mu} \rangle\|_\star$; donc $\|\tilde{\mu}\|_\star = \|\langle \tilde{\mu} \rangle\|_\star$.

2) Soit $g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$; on a $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\big[g.\langle \tilde{\mu} \rangle\big](f) = \langle \tilde{\mu} \rangle (g f) = \tilde{\mu}\big[(f g)|_{\mathsf{K}}\big]$ $= \tilde{\mu}\big[f|_{\mathsf{K}}\, g|_{\mathsf{K}}\big] = \big(g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu}\big)\big(f|_{\mathsf{K}}\big) = \langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu} \rangle (f)$; donc $g.\langle \tilde{\mu} \rangle = \langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu} \rangle$.

3) $\forall g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+$ on a $|\langle \tilde{\mu} \rangle|(g) = \|g.\langle \tilde{\mu} \rangle\|_\star = \|\langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu} \rangle\|_\star = \sup_{\|f\| \leq 1} \langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu} \rangle (f)$ $= \sup_{\|f\| \leq 1} \big(g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu}\big)(f|_{\mathsf{K}}) = \sup_{\|f|_{\mathsf{K}}\| \leq 1} \big(g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu}\big)(f|_{\mathsf{K}}) = \|g|_{\mathsf{K}}\, \tilde{\mu}\|_\star = |\tilde{\mu}|\big(g|_{\mathsf{K}}\big) = \langle |\tilde{\mu}| \rangle (g)$.

4) Montrons l'unicité. Soit $\tilde{\pi} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ tel que $\tilde{\pi}_{\mathsf{K}} = \tilde{\mu}$ et $\|\tilde{\pi}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star$; supposons d'abord $\tilde{\mu} \geq 0$; alors $\langle \tilde{\mu} \rangle \geq 0$; on a $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+$ $\tilde{\pi}_{\mathsf{K}}(f|_{\mathsf{K}}) = \tilde{\pi}_{\mathsf{K}}(f)$ $= \lim_j (\Lambda_j \tilde{\pi})(f) = \lim_j (\Lambda_j \tilde{\pi}^+)(f) - \lim_j (\Lambda_j \tilde{\pi}^-)(f) = \tilde{\mu}(f|_{\mathsf{K}}) = \langle \tilde{\mu} \rangle (f)$; donc $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+$ $\tilde{\pi}^+(f) \geq \lim_j (\Lambda_j \tilde{\pi}^+)(f) \geq \langle \tilde{\mu} \rangle (f)$; donc $\tilde{\pi}^+ \geq \langle \tilde{\mu} \rangle \geq 0$, par ailleurs $\|\tilde{\pi}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star = \|\langle \tilde{\mu} \rangle\|_\star$, donc $\tilde{\pi} = \langle \tilde{\mu} \rangle$.

Supposons maintenant $\tilde{\mu}$ non nécessairement ≥ 0 ; on a $(\tilde{\pi}^+)_{\mathsf{K}} = (\tilde{\pi}_{\mathsf{K}})^+ = \tilde{\mu}^+$; donc $\|\tilde{\pi}^+\|_\star \geq \|\tilde{\mu}^+\|_\star$; de même $(\tilde{\pi}^-)_{\mathsf{K}} = (\tilde{\pi}_{\mathsf{K}})^- = \tilde{\mu}^-$, donc $\|\tilde{\pi}^-\|_\star \geq \|\tilde{\mu}^-\|_\star$; comme on a $\|\tilde{\pi}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star$, on en déduit $\|\tilde{\pi}^+\|_\star = \|\tilde{\mu}^+\|_\star$ et $\|\tilde{\pi}^-\|_\star = \|\tilde{\mu}^-\|_\star$, donc $\tilde{\pi}^+ = \langle \tilde{\mu}^+ \rangle = \langle \tilde{\mu} \rangle^+$ et $\tilde{\pi}^- = \langle \tilde{\mu}^- \rangle = \langle \tilde{\mu} \rangle^-$, c-à-d $\tilde{\pi} = \langle \tilde{\mu} \rangle$.

3.12. Corollaire : Toute pseudo-mesure sur K est la restriction à K d'une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

Le corollaire précédent justifie la définition suivante :

3.13. Définition : Une mesure sur K est une pseudo-mesure sur K qui est la restriction à K d'une mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

On note $\mathcal{M}(\mathsf{K})$ l'espace vectoriel des mesures sur K.

3.14.* Théorème : $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ et $\mathcal{M}(\mathsf{K})$ sont des espaces de Riesz-Banach.

Comme sur $[a,b]$ on définira successivement les algèbres suivantes de fonctions sur K :

$\mathcal{R}(\mathsf{K}) =$ fonctions <u>réglées</u> sur K $=$ limites uniformes de fonctions de $\mathcal{E}(\mathsf{K})$

$\mathcal{PR}(\mathsf{K}) =$ fonctions <u>pseudo-réglées</u> sur K $=$ limites simples bornées de fonctions de $\mathcal{E}(\mathsf{K})$

$\mathcal{W}(\mathsf{K}) =$ fonctions <u>universelles</u> sur K : une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathsf{K})$ est <u>universelle</u> ssi

$\boxed{\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathsf{K})^+ \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad g, h \in \mathcal{PR}(\mathsf{K}) \quad \text{tels que} \quad g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}\,(h-g) \leq \varepsilon}$.

avec les mêmes propriétés et théorèmes que sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

On a $\boxed{\mathcal{E}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{R}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{PR}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{W}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{F}(\mathsf{K})}$.

$\mathcal{R}(\mathsf{K})$, $\mathcal{PR}(\mathsf{K})$, $\mathcal{W}(\mathsf{K})$, $\mathcal{F}(\mathsf{K})$ sont des algèbres de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

On peut alors définir les algèbres correspondantes sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$:

3.15. <u>Définition</u> :

$f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est <u>réglée</u> sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $f|_{\mathsf{K}} \in \mathcal{R}(\mathsf{K})$ pour tout $\mathsf{coel}\ \mathsf{K}$.

$f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est <u>pseudo-réglée</u> sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $f|_{\mathsf{K}} \in \mathcal{PR}(\mathsf{K})$ pour tout $\mathsf{coel}\ \mathsf{K}$.

$f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est <u>universelle</u> sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $f|_{\mathsf{K}} \in \mathcal{W}(\mathsf{K})$ pour tout $\mathsf{coel}\ \mathsf{K}$.

<u>*Notation*</u> : $\mathcal{R}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) =$ algèbre de Riesz des fonctions réglées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$\mathcal{PR}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) =$ algèbre de Riesz des fonctions pseudo-réglées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$\mathcal{W}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) =$ algèbre de Riesz des fonctions universelles sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

On a $\boxed{\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{R}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{PR}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{W}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})}$.

On note $\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'algèbre des fonctions universelles bornées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.
$\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est une algèbre de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

3.16. <u>Définition</u> : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+ \quad \forall\, f \in \mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}\,(f) = \sup_{\mathsf{K}\ \mathsf{coel}} \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}\big(f|_{\mathsf{K}}\big)}$;

$\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \quad \forall\, f \in \mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}\,(f) = \tilde{\mu}^+(f^+) - \tilde{\mu}^+(f^-) - \tilde{\mu}^-(f^+) + \tilde{\mu}^-(f^-)}$.

On a ainsi étendu l'action de $\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ à $\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$; jusqu'à présent cette action n'était définie que sur $\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

3.17. <u>Théorème</u> : $\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

§ 4. Espaces associés à une mesure normée positive sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

On se donne une mesure positive $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^{+}}$.

Les espaces Ω peuvent s'étudier comme cas particuliers de l'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$, en choisissant des mesures $\tilde{\mu}$ dont les restrictions $\tilde{\mu}_{(j)}$ à $\mathbb{R}^{j+1}$ sont discrètes.

Il en va de même pour l'espace $\mathbb{R}^n$, qui peut être considéré comme l'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$, portant une mesure définie par la suite $\forall\, j \geq n \;\; \tilde{\mu}_j = \tilde{\pi} \otimes \underbrace{\delta_0 \otimes \ldots \otimes \delta_0}_{j+1-n \text{ fois}}$, où $\tilde{\pi}$ est une mesure sur $\mathbb{R}^n$ et δ_0 est la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$ en 0.

4.1. <u>Définition</u> : On pose $\boxed{\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})\,.\,\tilde{\mu} = \{ h\,.\,\tilde{\mu} \parallel h \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \}}$.

$\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})\,.\,\tilde{\mu}$ est un sous-espace de l'espace de Riesz-Banach $\mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

4.2. <u>Définition</u> :

$\boxed{[\,\tilde{\mu}\,] \text{ est la } \underline{\text{fermeture}} \text{ de } \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})\,.\,\tilde{\mu} \text{ dans } \mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \text{ pour la norme } \|\;\|_{\star}}$.

Les éléments de $[\,\tilde{\mu}\,]$ s'appellent les $\boxed{\text{mesures de base } \tilde{\mu}}$.

4.3.* <u>Théorème</u> : $[\,\tilde{\mu}\,]$ est un espace de Riesz-Banach pour la norme $\|\;\|_{\star}$.

4.4.* <u>Théorème</u> : $\boxed{[\,\tilde{\mu}\,] \text{ est un sous-espace intégral de } \mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}).}$

4.5. <u>Définition</u> :

On pose $\boxed{\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) = \dfrac{1}{\tilde{\mu}}\,[\,\tilde{\mu}\,] = \left\{ \dfrac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} \parallel \tilde{\nu} \in [\,\tilde{\mu}\,] \right\}}$; on a donc $\boxed{[\,\tilde{\mu}\,] = \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})\,.\,\tilde{\mu}}$.

Les éléments de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ s'appellent les <u>$\tilde{\mu}$–fonctionnelles sommables</u> ; elles sont représentées par des lettres « droites » ; on peut écrire

$$\boxed{\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;\Rightarrow\; \mathrm{f}\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,] \subset \mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})}.$$

4.6. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}\,(\mathrm{f}) = (\mathrm{f}\,\tilde{\mu})\,(\mathbb{1}) \;\text{ avec }\; \mathbb{1} = \mathbb{1}_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}}}$.

4.7. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},1} = \|\,\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\,\|_{\star} = \tilde{\mu}\,(|\,\mathrm{f}\,|)}$.

<u>*Notation intégrale*</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on note $\boxed{\displaystyle\int_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}} \mathrm{f}\,(X)\,\tilde{\mu}\,(X) = \int_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}} \mathrm{f}\,\tilde{\mu} = \tilde{\mu}\,(\mathrm{f})}$.

4.8. <u>Définition</u> : $\forall\, f \in \mathcal{W}_B\big(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}\big)$ on pose $\boxed{\{f\}_{\tilde{\mu}} = \dfrac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

$\{f\}_{\tilde{\mu}}$ s'appelle la $\tilde{\mu}$–fonctionnelle <u>associée</u> à f.

4.9.* <u>Théorème</u> :

L'application $\boxed{\mathcal{W}_B\big(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}\big) \to \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;:\; f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}}$ est un <u>morphisme de Riesz</u>.

On définit $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$, $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$, $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$, $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ comme dans la Quatrième partie, **avec les mêmes propriétés et théorèmes**.

<u>*Notation pratique*</u> : Soit A une partie de $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ telle que $1\!\!1_{\mathsf{A}} \in \mathcal{W}_B\big(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}\big)$;

alors on note $\boxed{\tilde{\mu}\,(\mathsf{A}) = \tilde{\mu}\,(1\!\!1_{\mathsf{A}})}$; si de plus $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on note $\boxed{\displaystyle\int_{\mathsf{A}} \mathrm{f}\,\tilde{\mu} = \tilde{\mu}\,(\mathrm{f}.1\!\!1_{\mathsf{A}})}$.

4.10.* <u>Théorème</u> : Soit $j \in \mathrm{I\!N}$ et A une partie de $\mathrm{I\!R}^{j+1}$ telle que $1\!\!1_{\mathsf{A}} \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^{j+1})$;

alors on a $\boxed{\tilde{\mu}_{(j)}\,(\mathsf{A}) = \tilde{\mu}\,(\mathsf{A} \times \overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})}$.

Chapitre XXIV : Probabilités

$\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est muni d'une probabilité $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})}$.

§ 1. Vocabulaire des probabilités

Elément de $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ = Variable aléatoire = v. a.

Si $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$: $\tilde{\mu}(\mathrm{f}) = \bar{m}(\mathrm{f})$ = Moyenne de f

$$\tilde{\mu}\big(|\mathrm{f} - \tilde{\mu}(\mathrm{f})|\big) = U(\mathrm{f}) = \text{Ecart moyen de f}$$

Si $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$: $\tilde{\mu}\big[\mathrm{f} - \tilde{\mu}(\mathrm{f})\big]^2 = V(\mathrm{f})$ = Variance de f.

On a $\boxed{U(\mathrm{f})^2 \leq V(\mathrm{f})}$.

Si $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^4(\tilde{\mu})$: $\tilde{\mu}\big[\mathrm{f} - \tilde{\mu}(\mathrm{f})\big]^4 = W(\mathrm{f})$ = Bivariance de f.

On a $\boxed{V(\mathrm{f})^2 \leq W(\mathrm{f})}$.

Elément de $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$ = Evénement

Si σ est un événement : $1 - \sigma$ = non σ

Si σ et τ sont des événements : $\sigma \vee \tau = \sigma$ ou τ

$$\sigma \wedge \tau = \sigma\, \tau = \sigma \text{ et } \tau$$

Si σ_n est une suite d'événements : $\operatorname*{Sup}_n \ \sigma_n$ = au moins un σ_n

$$\operatorname*{Inf}_n \ \sigma_n = \text{tous les } \sigma_n$$

$$\overline{\operatorname*{Lim}}_{n \to +\infty} \ \sigma_n = \text{une infinité de } \sigma_n$$

$$\underline{\operatorname*{Lim}}_{n \to +\infty} \ \sigma_n = \text{une infinité de } \sigma_n \text{ consécutifs}$$

Les événements $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont indépendants ssi pour toute suite de k indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(2 \leq k \leq n)$ on a $\boxed{\tilde{\mu}(\sigma_{i_1}\, \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_k}) = \tilde{\mu}(\sigma_{i_1})\, \tilde{\mu}(\sigma_{i_2}) \ldots \tilde{\mu}(\sigma_{i_k})}$.

Une suite $\sigma_n \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$ est une suite d'événements indépendants ssi toute sous-famille *finie* de la suite σ_n est constituée d'événements indépendants ; on a alors

$$\boxed{\tilde{\mu}\big(\operatorname*{Inf}_n \ \sigma_n\big) = \tilde{\mu}\big(\prod_i \sigma_n\big) = \prod_i \tilde{\mu}(\sigma_n)}.$$

Les v. a. $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots, \mathsf{F}_n$ sont indépendantes ssi $\forall\, g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$

$$\boxed{\tilde{\mu}\big[(g_1 \circ \mathsf{F}_1)\,(g_2 \circ \mathsf{F}_2) \ldots (g_n \circ \mathsf{F}_n)\big] = \tilde{\mu}(g_1 \circ \mathsf{F}_1)\, \tilde{\mu}(g_2 \circ \mathsf{F}_2) \ldots \tilde{\mu}(g_n \circ \mathsf{F}_n)}.$$

Alors l'égalité ci-dessus est encore vraie $\forall\, g_1\,,\, g_2\,,\,\ldots\,,\, g_n \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ du moment que $\forall\, i \quad g_i \circ \mathsf{F}_i \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et $(g_1 \circ \mathsf{F}_1)\,(g_2 \circ \mathsf{F}_2)\,\ldots\,(g_n \circ \mathsf{F}_n) \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

Une suite $\mathsf{F}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ est une suite de v. a. indépendantes ssi toute sous-famille *finie* de la suite f_n est constituée de v. a. indépendantes.

Les v. a. $\mathsf{F}_1\,,\, \mathsf{F}_2\,,\,\ldots\,,\, \mathsf{F}_n$ sont indépendantes deux à deux ssi $\forall\, i \neq j$ les v. a. F_i et F_j sont indépendantes ; si de plus $\forall\, i \quad \mathsf{F}_i \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on peut écrire

$$\boxed{V(\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2 + \ldots + \mathsf{F}_n) \,=\, V(\mathsf{F}_1) + V(\mathsf{F}_2) + \ldots + V(\mathsf{F}_n)}\,.$$

Exemple I :

Soit une suite $\tilde{\phi}_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$; $\forall\, j \in \mathbb{N}$ on pose $\tilde{\mu}_j \,=\, \tilde{\phi}_0 \otimes \tilde{\phi}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\phi}_j \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{j+1})$. On voit facilement que la suite $\tilde{\mu}_j$ définit une probabilité graduée $\tilde{\mu}$ sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

On pose $\forall\, i \in \mathbb{N} \quad X_i \,:\, \overset{\infty}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \,:\, X \mapsto X(i)$; alors $\forall\, i \in \mathbb{N} \quad X_i \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ et les v. a. X_i sont indépendantes.

$\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\,,\, \tilde{\mu}\big)$ constitue le modèle probabiliste associé à la donnée d'une suite abstraite de v. a. indépendantes X_i de lois $\tilde{\phi}_i$.

Exemple II :

Soit une suite de v. a. $\mathsf{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; $\forall\, j \in \mathbb{N}$ on note $\tilde{\nu}_j$ la loi conjointe de $\mathsf{F}_0\,,\, \mathsf{F}_1\,,\,\ldots\,,\, \mathsf{F}_j$; alors la suite $\tilde{\nu}_j$ définit une probabilité graduée $\tilde{\nu}$ sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

$\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\,,\, \tilde{\nu}\big)$ constitue le modèle probabiliste associé au processus représenté par la suite F_n.

§ 2. Applications

2.1. Lemme de Borel-Cantelli

Soit σ_n une suite d'événements et posons $\sigma \,=\, \overline{\mathrm{Lim}}_{n \to +\infty}\, \sigma_n$; alors on a

1) $\sum\limits_n \tilde{\mu}\,(\sigma_n) < +\,\infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mu}\,(\sigma) = 0$

2) $\Big[\, \sum\limits_n \tilde{\mu}\,(\sigma_n) = +\,\infty$ et les σ_n indépendants$\Big] \;\Rightarrow\; \tilde{\mu}\,(\sigma) = 1$.

Dém :

a) Posons $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \tau_p \,=\, \operatorname*{Sup}\limits_{n \geq p}\, \sigma_n$; on a alors $\tilde{\mu}\,(\tau_p) \leq \sum\limits_{n \geq p} \tilde{\mu}\,(\sigma_n)$; comme $\sigma \,=\, \operatorname*{Inf}\limits_{p}\, \tau_p$, on a $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}\,(\sigma) \leq \tilde{\mu}(\tau_p) \leq \sum\limits_{n \geq p} \tilde{\mu}\,(\sigma_n)$; or $\sum\limits_n \tilde{\mu}\,(\sigma_n)$ est convergente, donc $\tilde{\mu}\,(\sigma) = 0$.

b) On a $1-\sigma = \underline{\operatorname{Lim}}_{n\to+\infty} (1-\sigma_n) = \operatorname{Sup}_p \operatorname{Inf}_{n\geq p} (1-\sigma_n)$; posons $\forall p \in \mathbb{N}$ $\tau_p = \operatorname{Inf}_{n\geq p} (1-\sigma_n)$; comme les événements $1-\sigma_n$ sont indépendants, on a $\tilde{\mu}(\tau_p) = \prod_{n\geq p} \tilde{\mu}(1-\sigma_n) = \prod_{n\geq p} \left[1-\tilde{\mu}(\sigma_n)\right]$; or $\sum_n \tilde{\mu}(\sigma_n)$ est divergente, donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $\tilde{\mu}(\tau_p) = 0$, donc $1-\sigma = \operatorname{Sup}_p \tau_p = 0$, donc $1-\tilde{\mu}(\sigma) \leq \sum_p \tau_p = 0$, donc $\tilde{\mu}(\sigma) = 1$.

2.2. Théorème : Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{L}^4(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de moyenne $\bar{m}$; on suppose qu'il existe $W_* > 0$ tel que $\forall i$ $W(f_i) \leq W_*$; on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{S}_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$; alors $\forall \varepsilon > 0$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\left\{\left|\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \bar{m}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{3\,W_*}{n^2\,\varepsilon^4}}$.

Dém : $\tilde{\mu}\left\{\left|\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \bar{m}\right| \geq \varepsilon\right\} = \tilde{\mu}\left\{\left[\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \bar{m}\right]^4 \geq \varepsilon^4\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^4}\,\tilde{\mu}\left[\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \bar{m}\right]^4$

$$= \frac{1}{n^4\,\varepsilon^4}\,\tilde{\mu}\left[\mathsf{S}_n - n\,\bar{m}\right]^4 = \frac{1}{n^4\,\varepsilon^4}\,\tilde{\mu}\left[\sum_i (f_i - \bar{m})\right]^4$$

$$= \frac{1}{n^4\,\varepsilon^4}\left[\sum_i W(f_i) + 6\sum_{i<j} V(f_i)V(f_j)\right] \leq \frac{1}{n^4\,\varepsilon^4}\left[\sum_i W(f_i) + 6\sum_{i<j}\sqrt{W(f_i)W(f_j)}\right]$$

$$\leq \frac{1}{n^4\,\varepsilon^4}\left[\sum_i W_* + 6\sum_{i<j} W_*\right] \leq \frac{W_*}{n^4\,\varepsilon^4}\left[n + 3\,n\,(n-1)\right] \leq \frac{3\,n^2\,W_*}{n^4\,\varepsilon^4} = \frac{3\,W_*}{n^2\,\varepsilon^4}.$$

2.3. Loi forte des grands nombres I

Soit une suite de v.a. indépendantes $f_n \in \mathcal{L}^4(\tilde{\mu})$ de moyenne $\bar{m}$, telle que $\boxed{\sup_n W(f_n) < +\infty}$; on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{S}_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$; alors $\boxed{\frac{\mathsf{S}_n}{n} \xrightarrow{\text{pp}} \bar{m}}$, c-à-d $\forall \varepsilon > 0$ $\overline{\operatorname{Lim}}_n \left\{\left|\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \bar{m}\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$.

Dém : On applique le théorème précédent et le cas 1) du lemme de Borel-Cantelli.

2.4. Inégalité de Kolmogorov : Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de moyenne nulle ; on pose $\forall 1 \leq k \leq n$ $\mathsf{S}_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ et $V_n = V(\mathsf{S}_n)$; alors $\forall \varepsilon > 0$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\left\{|\mathsf{S}_1| \vee |\mathsf{S}_2| \vee \ldots \vee |\mathsf{S}_n| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{V_n}{\varepsilon^2}}$.

Dém : Posons

$\sigma = \left\{|\mathsf{S}_1| \vee |\mathsf{S}_2| \vee \ldots \vee |\mathsf{S}_n| \geq \varepsilon\right\} = \left\{|\mathsf{S}_1| \geq \varepsilon\right\} \vee \left\{|\mathsf{S}_2| \geq \varepsilon\right\} \vee \ldots \vee \left\{|\mathsf{S}_n| \geq \varepsilon\right\}$

et $\sigma_k = \left\{|\mathsf{S}_1| < \varepsilon\right\}\left\{|\mathsf{S}_2| < \varepsilon\right\} \ldots \left\{|\mathsf{S}_{k-1}| < \varepsilon\right\}\left\{|\mathsf{S}_k| \geq \varepsilon\right\}$;

on a $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$ et $\forall i \neq j$ $\sigma_i\,\sigma_j = 0$, donc $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$.

De plus $\tilde{\mu}(\sigma_k\,\mathsf{S}_n^2) = \tilde{\mu}\left[\sigma_k\,(\mathsf{S}_k + f_{k+1} + \ldots + f_n)^2\right]$

$= \tilde\mu\,(\sigma_k\ \mathsf{S}_k^2) + \tilde\mu\left[\sigma_k\,(\mathrm{f}_{k+1}+\ldots+\mathrm{f}_n)^2\right] + 2\,\tilde\mu\left[\sigma_k\ \mathsf{S}_k\,(\mathrm{f}_{k+1}+\ldots+\mathrm{f}_n)\right]$
$= \tilde\mu\,(\sigma_k\ \mathsf{S}_k^2) + \tilde\mu\,(\sigma_k)\ \tilde\mu\left[(\mathrm{f}_{k+1}+\ldots+\mathrm{f}_n)^2\right] + 2\,\tilde\mu\,(\sigma_k\ \mathsf{S}_k)\ \tilde\mu\,(\mathrm{f}_{k+1}+\ldots+\mathrm{f}_n)$
$= \tilde\mu\,(\sigma_k\ \mathsf{S}_k^2) + \tilde\mu\,(\sigma_k)\ \tilde\mu\left[(\mathrm{f}_{k+1}+\ldots+\mathrm{f}_n)^2\right]$;

donc $\tilde\mu\,(\sigma_k\ \mathsf{S}_n^2) \ge \tilde\mu\,(\sigma_k\ \mathsf{S}_k^2) = \tilde\mu\Big[\sigma_k\ \big\{|\mathsf{S}_k| \ge \varepsilon\big\}\ \mathsf{S}_k^2\Big] \ge \varepsilon^2\,\tilde\mu\,(\sigma_k)$,

donc en sommant sur k $\ \tilde\mu\,(\mathsf{S}_n^2) \ge \tilde\mu\,(\sigma\,\mathsf{S}_n^2) \ge \varepsilon^2\,\tilde\mu\,(\sigma)$; donc $\tilde\mu\,(\sigma) \le \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,\tilde\mu\,(\mathsf{S}_n^2) = \dfrac{V_n}{\varepsilon^2}$.

2.5. Théorème : Soit une suite $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu)$ de v. a. indépendantes de moyenne nulle, telle que $\sum\limits_{i=0}^{\infty} V(\mathrm{f}_i) < +\infty$; alors $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{f}_i$ converge p.p.

Dém :

Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\ \sigma_n = \operatorname*{Sup}\limits_{p \ge n} \Big\{ \Big| \sum\limits_{i=n}^{p} \mathrm{f}_i \Big| > \varepsilon \Big\} \le \operatorname*{Sup}\limits_{p \ge n} \Big\{ \operatorname*{Sup}\limits_{n \le r \le p} \Big| \sum\limits_{i=n}^{r} \mathrm{f}_i \Big| > \varepsilon \Big\}$.

Posons $\forall\, p \ge n$ $\ \sigma_{n,p} = \Big\{ \operatorname*{Sup}\limits_{n \le r \le p} \Big| \sum\limits_{i=n}^{r} \mathrm{f}_i \Big| > \varepsilon \Big\}$; on a $\ \sigma_n \le \operatorname*{Sup}\limits_{p \ge n} \sigma_{n,p}$;

de plus $\ \tilde\mu\,(\sigma_{n,p}) \le \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum\limits_{i=n}^{p} V(\mathrm{f}_i) \le \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum\limits_{i=n}^{\infty} V(\mathrm{f}_i)$.

Or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ la suite $\sigma_{n,p}$ est croissante, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\tilde\mu\,(\sigma_n) \le \sup\limits_{p \ge n} \tilde\mu\,(\sigma_{n,p}) \le \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum\limits_{i=n}^{\infty} V(\mathrm{f}_i)$; donc $\ \tilde\mu\,(\sigma_n) \to 0$.

2.6. Théorème : Soient $\mathsf{F}, \mathsf{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde\mu)$ tels que $\mathsf{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathsf{F}$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathsf{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i$; alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathsf{F}}$.

Dém : En remplaçant F_n par $\mathsf{F}_n - \mathsf{F}$ on peut supposer $\mathsf{F} = 0$; soit $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$; alors on peut écrire $\forall\, n > p$

$$\operatorname*{Sup}_{q \ge n} \Big\{ \frac{|\mathsf{S}_q|}{q} > \varepsilon \Big\} \le \operatorname*{Sup}_{q \ge n} \Big\{ \frac{|\mathsf{S}_p|}{q} + \frac{1}{q} \Big| \sum_{i=p+1}^{q} \mathsf{F}_i \Big| > \varepsilon \Big\}$$
$$\le \operatorname*{Sup}_{q \ge n} \Big\{ \frac{|\mathsf{S}_p|}{q} > \varepsilon/2 \Big\} + \operatorname*{Sup}_{p \ge n} \Big\{ \frac{1}{q} \Big| \sum_{i=p+1}^{q} \mathsf{F}_i \Big| > \varepsilon/2 \Big\}$$
$$\le \Big\{ \frac{|\mathsf{S}_p|}{n} > \varepsilon/2 \Big\} + \operatorname*{Sup}_{q \ge n} \Big\{ \frac{1}{q} \sum_{i\ p+1}^{q} |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \Big\}$$
$$\le \Big\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \Big\} + \operatorname*{Sup}_{q \ge n} \Big\{ \frac{q-p}{q} \sum_{i=p+1}^{q} |\mathsf{F}_i| > (q-p)\,\varepsilon/2 \Big\}$$
$$\le \Big\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \Big\} + \operatorname*{Sup}_{q \ge n}\ \operatorname*{Sup}_{p+1 \le i \le q} \Big\{ \frac{q-p}{q}\,|\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \Big\}$$
$$\le \Big\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \Big\} + \operatorname*{Sup}_{q \ge n}\ \operatorname*{Sup}_{p+1 \le i \le q} \Big\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \Big\}$$

$$= \Big\{ \big| \mathsf{S}_p \big| > n\,\varepsilon/2 \Big\} + \operatorname*{Sup}_{i \geq p+1} \Big\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \Big\}.$$

Comme $\operatorname*{Inf}_n \Big\{ \big| \mathsf{S}_p \big| > n\,\varepsilon/2 \Big\} = 0$, on en déduit

$$\overline{\operatorname*{Lim}_n} \Big\{ \frac{1}{n} \Big| \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i \Big| > \varepsilon \Big\} \leq \operatorname*{Sup}_{i \geq p+1} \big\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \big\} \text{ ; de plus } \mathsf{F}_n \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{F}, \text{ donc}$$

$$\overline{\operatorname*{Lim}_n} \Big\{ \frac{1}{n} \Big| \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i \Big| > \varepsilon \Big\} \leq \operatorname*{Inf}_p \operatorname*{Sup}_{i \geq p+1} \big\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \big\} = \overline{\operatorname*{Lim}_n} \big\{ |\mathsf{F}_n| > \varepsilon/2 \big\} = 0.$$

2.7. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\mathsf{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{F}_i}{i}$ converge p.p. ; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathsf{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i$; alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} 0}$.

<u>Dém</u> : Posons $\mathsf{T} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{F}_i}{i} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathsf{T}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{F}_i}{i}$; on peut écrire

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{T}_j = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, \frac{\mathsf{F}_i}{i} = (n+1)\, \mathsf{T}_n - \mathsf{S}_n\,, \text{ donc } \frac{\mathsf{S}_n}{n} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\, \mathsf{T}_n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{T}_j\,.$$

On a $\mathsf{T}_n \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{T}$, donc aussi $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{T}_j \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{T}$; on en déduit $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} 0$.

2.8. <u>Loi forte des grands nombres II</u>

Soit une suite de v.a. indépendantes $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ de moyenne $\bar{m}$, telle que

$\boxed{\sup_n V(\mathrm{f}_n) < +\infty}$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$; alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} \bar{m}}$.

<u>Dém</u> : On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} V\Big(\frac{\mathrm{f}_i}{i}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V(\mathrm{f}_i)}{i^2} < +\infty$,

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}_i - \bar{m}}{i}$ converge p.p., donc $\dfrac{\mathsf{S}_n - n\,.\,\bar{m}}{n} \overset{\text{pp}}{\to} 0$, donc $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} \bar{m}$.

2.9. <u>Inégalité de Bernstein</u> : Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de <u>moyenne nulle</u> ; on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, i$ $|\mathrm{f}_i| \leq M$;

on pose $\mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$ et $V_n = V(\mathsf{S}_n)$; alors $\forall\, \lambda > 0$ on a

$\boxed{\tilde{\mu}\,\{\mathsf{S}_n \geq \lambda\} \leq \exp\Big[-\dfrac{V_n}{M^2}\, \Theta\Big(\dfrac{\lambda M}{V_n}\Big)\Big]}$ avec $\forall\, x \geq 0$ $\boxed{\Theta(x) = (1+x)\ln(1+x) - x}$.

<u>Dém</u> : D'après l'inégalité de Markov on a $\forall\, t > 0$

$$\tilde{\mu}\left\{\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{f}_n \geq \lambda\right\} = \tilde{\mu}\left\{e^{t\left(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{f}_n-\lambda\right)} \geq 1\right\}$$

$$\leq \tilde{\mu}\left[e^{t\left(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{f}_n-\lambda\right)}\right] \leq e^{-t\lambda}\,\tilde{\mu}\left[\prod_i e^{t\,\mathrm{f}_i}\right] = e^{-t\lambda}\prod_i \tilde{\mu}\left(e^{t\,\mathrm{f}_i}\right)$$

$$= \exp\left(-t\lambda + \sum_i \ln\left[\tilde{\mu}\left(e^{t\,\mathrm{f}_i}\right)\right]\right).$$

On pose $\forall\, x>0\quad \Phi(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(e^{x}-x-1\right)$; grâce au développement en série de Taylor de e^{x} il est clair que la fonction Φ est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit $\forall\, 1\leq i\leq n$:

$$\ln\left[\tilde{\mu}\left(e^{t\,\mathrm{f}_i}\right)\right] = \ln\left[\tilde{\mu}\left(e^{t\,\mathrm{f}_i}-t\,\mathrm{f}_i-1+t\,\mathrm{f}_i+1\right)\right] = \ln\left[\tilde{\mu}\left(e^{t\,\mathrm{f}_i}-t\,\mathrm{f}_i-1\right)+1\right]$$

$$= \ln\left(1+\tilde{\mu}\left[t^2\,\mathrm{f}_i^2\,\Phi\left(t\,\mathrm{f}_i\right)\right]\right) \leq \ln\left[1+t^2\,V(\mathrm{f}_i)\,\Phi\left(t\,M\right)\right] \leq t^2\,V(\mathrm{f}_i)\,\Phi(t\,M)\,,$$

donc $\tilde{\mu}\left\{\mathsf{S}_n \geq \lambda\right\} \leq \exp\left[-t\lambda + t^2\,V_n\,\Phi(t\,M)\right].$

On pose $H(t) = -t\lambda + t^2\,V_n\,\Phi(t\,M) = -t\lambda + \dfrac{V_n}{M^2}\left(e^{t\,M}-t\,M-1\right)$;

on choisit $t>0$ tel que $H(t)$ soit minimal ; t doit donc vérifier l'équation

$H'(t) = -\lambda + \dfrac{V_n}{M^2}\left(M\,e^{t\,M}-M\right) = 0\,,$ c-à-d $-\lambda + \dfrac{V_n}{M}\left(e^{t\,M}-1\right) = 0\,,$ c-à-d

$t = \dfrac{1}{M}\ln\left(1+\dfrac{\lambda\,M}{V_n}\right) = t_*$; on trouve bien $H(t_*) = -\dfrac{V_n}{M^2}\,\Theta\left(\dfrac{\lambda\,M}{V_n}\right).$

2.10.* <u>Corollaire 1</u> : Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de moyenne nulle et de même variance V ; on suppose qu'il existe $M>0$ tel que $\forall\, i\quad |\mathrm{f}_i| \leq M$; on pose $\mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{f}_n$; alors $\forall\,\varepsilon>0$ on a

$$\boxed{\tilde{\mu}\left\{\frac{\mathsf{S}_n}{n} \geq \varepsilon\right\} \leq \exp\left[-\frac{n\,V}{M^2}\,\Theta\left(\frac{\varepsilon\,M}{V}\right)\right]}\,.$$

2.11. <u>Corollaire 2</u> : Sous les mêmes hypothèses qu'au Corollaire 1 on a

$$\boxed{\tilde{\mu}\left\{\frac{\mathsf{S}_n}{n} \geq \varepsilon\right\} \leq \exp\left[-\frac{n\,\varepsilon^2}{2\,V}\left(1-\frac{\varepsilon\,M}{3\,V}\right)\right]}\,.$$

<u>Dém</u> : On montre facilement que $\forall\, x\geq 0\quad \Theta(x) \geq \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}$, d'où le résultat.

2.12.* <u>Corollaire 3</u> : Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de moyenne $\bar{m}$ et de variance V ; on suppose qu'il existe $M>0$ tel que $\forall\, i\quad |\mathrm{f}_i-\bar{m}| \leq M$; on pose $\mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{f}_n$; alors $\forall\,\varepsilon>0$ on a

$$\boxed{\tilde{\mu}\left\{\left|\frac{\mathsf{S}_n}{n}-\bar{m}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq 2\,\exp\left[-\frac{n\,\varepsilon^2}{2\,V}\left(1-\frac{\varepsilon\,M}{3\,V}\right)\right]}\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BAIRE. *Leçns sur les fonctions discontinues*. 1905. Gauthier-Villars. Paris.

[2] P. BILLINGSLEY. *Probability and measure*. 2nde édition, 1986. John Wiley and Sons. New York.

[3] G. BIRKHOFF. *Groupes réticulés*. Annales de l'institut Henri Poincaré 11, 1949 (5), p. 241–250.

[4] H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. 1983. Masson. Paris.

[5] Y. S. CHOW & H. TEICHER. *Probability theory*. 2nde édition, 1988. Springer Verlag. Berlin.

[6] D. L. COHN. *Measure theory*. 1980. Birkhäuser. Boston.

[7] D. DACUNHA-CASTELLE & M. DUFLO. *Probabilités et statistiques, Tome 1.* 1982. Masson. Paris.

[8] J. DIEUDONNE. *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym (I)*. Annals of Mathematics 42, 1941, p. 547–555.

[9] V. DITKINE & A. PROUDNIKOV. *Calcul opérationnel*. 1979. Editions Mir. Moscou.

[10] J. DIEUDONNE. *Eléments d'analyse, Tomes 1 et 2*. 1972 et 1974. Gauthier-Villars. Paris.

[11] P. DUBREIL & M. L. DUBREIL–JACOTIN. *Leçons d'algèbre moderne*. 1964. Dunod. Paris.

[12] W. FELLER. *Introduction to probability theory and its applications, Tome 1*. 3ème édition, 1968. John Wiley and Sons. New York.

[13] A. FROLKIN. *p-adic integration and the theory of groups*. 2005. En ligne : *www.eldamar.org.uk/maths/zeta.pdf*

[14] B. V. GNEDENKO. *The theory of probability*. 4ème édition, 1968. Chelsea Publishing Company. New York.

[15] P.R. HALMOS. *Measure theory*. 1969. Van Nostrand Reinhold Company. New York.

[16] P. HENRICI. *Applied and computational complex analysis, Tome 2*. 1991. John Wiley and Sons. New York.

[17] R. JEAN. *Mesure et intégration*. 1975. Presses de l'Université de Québec. Montréal.

[18] J.-P. KAHANE. *L'intgrale de Lebesgue au cours du vingtième siècle*. Panoramas et synthèses 18, 2004, p. 1–16. Société mathématique de France. Paris.

[19] V.-K. KHOAN. *Distributions. Analyse de Fourier. Opérateurs aux dérivées partielles, Tomes 1 et 2*. 1972. Vuibert. Paris.

[20] A. KOLMOGOROV & S. FOMINE. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. 2nde édition, 1977. Editions Mir. Moscou.

[21] H. LEBESGUE. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. 2 nde édition, 1928. Gauthier-Villars. Paris. (1989. Editions Jacques Gabay. Sceaux).

[22] B. V. LIMAYE. *Functional analysis*. 1981. Wiley Eastern Ltd. New Delhi.

[23] M. METIVIER. *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*. 2 nde édition, 1979. Dunod (Bordas). Paris.

[24] H. PEPIN. *Convergence monotone et convergence dominée*. RMS, octobre 1996, p. 199–205. Vuibert. Paris.

[25] F. RIESZ. *Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires*. Annals of Mathematics 41, 1940, p. 174–206.

[26] F. RIESZ & B. S. NAGY. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. 3 ème édition, 1955. Gauthier-Villars. Paris. (1990. Editions Jacques Gabay. Sceaux).

[27] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Nouvelle édition. 1966. Hermann. Paris.

[28] L. SCHWARTZ. *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle*. 2 nde édition, 1980. Hermann. Paris.

[29] SEMINAIRE PARIS-BERLIN. *Wavelets, approximation and statistical applications*. 1997. En ligne : *http ://www.quantlet.com/mdstat/scripts/wav/html*

[30] B. SPITTERS. *Constructive algebraic integration theory*. Annals of Pure and Applied Logic 137, 2006, p. 380–390.

[31] C. VILLANI. *Cours d'intégration et d'analyse de Fourier*. 2006. En ligne : *www.umpa.ens-lyon.fr/∼cvillani/Cours/iaf-2006.html*

[32] A. WARUSFEL. « *Nancy 1900. Le meurtre du père* ». RMS, 111 ème année, septembre 2000, p. 1–7. Vuibert. Paris.

[33] K. YOSIDA. *Functional analysis*. 2 nde édition, 1966. Springer Verlag. Berlin.

[34] A. C. ZAANEN. *Introduction to operator theory in Riesz spaces*. 1977. Springer Verlag. Berlin.

INDEX

NOTATIONS

1. NOMBRES

$\mathbb{C}$: nombres complexes

$z^{\#}$ = conjugué de z

$\mathbb{K}$: nombres rationnels

$\mathbb{N}$: nombres entiers naturels

$a \lceil b$ *signifie* « a divise b »

$a \nmid b$ *signifie* « a ne divise pas b »

$\mathbb{R}$: nombres réels

$|\mathrm{I}|$ = longueur de l'intervalle borné $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Z}$: nombres entiers relatifs

$[\![a, b]\!]$ = ensemble des entiers compris entre a et b (a et b inclus)

$\mathbb{K}_p$: nombres rationnels p-adiques

$\mathbb{Z}_p$: nombres entiers p-adiques

2. FONCTIONS SUR $[a, b]$

$\mathcal{BA}$: fonctions de Baire *80*

$\mathcal{C}$: fonctions continues *2*

$\mathcal{CV}$: fonctions continues à variation bornée *83*

$\mathcal{E}$: fonctions étagées *1*

$\mathcal{EK}$: fonctions étagées caractéristiques *60*

$\mathcal{ES}$: fonctions étagées positives semi-continues supérieurement *33*

$\mathcal{EU}$: fonctions étagées f telles que $|f| = 1$ *74*

$\mathcal{F}$: fonctions bornées *2*

$\mathcal{H}$: fonctions f telles que $\sum\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| < +\infty$ *77*

$\mathcal{PR}$: fonctions pseudo-réglées *39*

$\mathcal{R}$: fonctions réglées *2*

$\mathcal{RS}$: fonctions réglées positives semi-continues supérieurement *33*

$\mathcal{S}$: fonctions positives semi-continues supérieurement *33*

$\mathcal{W}$: fonctions universellles *44*

$\mathcal{Z}$: fonctions universellles nulles presque partout *59*

3. FONCTIONNELLES, MESURES ET PSEUDO-MESURES SUR $[a,b]$

4. FONCTIONS SUR $\mathbb{R}$

5. FONCTIONNELLES, MESURES ET PSEUDO-MESURES SUR $\mathbb{R}$

6. ESPACES ASSOCIÉES À UNE MESURE NORMÉE POSITIVE $\tilde{\mu}$ SUR $\mathbb{R}^n$

7. ESPACES SUR $\mathbb{Z}_p$

8. CONVERGENCES

9. <u>NORMES ET PSEUDO-NORMES</u>

10. <u>OPERATEURS</u>

$^{\mathsf{E}}\lim$: limite exacte *122*

$\{f\}$: fonctionnelle associée à la fonction f *4, 57, 127, 193*

$\{f\}_{\tilde{\mu}}$: $\tilde{\mu}$–fonctionnelle associée à la fonction f *168*

$\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$: mesure-image de $\tilde{\mu}$ par F *177*

$\mathsf{E}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)$: moyenne de g sachant F *185*

$\widehat{\mathsf{E}}\left(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\right)$: conditionnée de g sachant F *186*

11. FONCTIONS PARTICULIÈRES

H_n : n$^{\text{ème}}$ fonction de Hermite *163*

X_k : fonction caractéristique de $[-\mathrm{k}\,,\mathrm{k}]$ *129*

Y_a : fonction caractéristique de $[0\,,\mathrm{a}]$ *156*

12. DIVERS

scs : semi-continue supérieurement *33*

C-exacte : Cauchy-exacte *104, 122*

C-fine : Cauchy-fine *18*

C-plate : Cauchy-plate *103, 122*

C ms : de Cauchy en mesure *100, 113*

C pp : de Cauchy presque partout *101, 117*

D ms : dominée en mesure *100, 114*

D pp : dominée presque partout *102, 118*