

SPIM

Thèse de Doctorat

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ
UFC

école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Aspects spatiaux de l'intrication en amplification paramétrique : paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen dans les images jumelles et expérience de Hong-Ou-Mandel

■ PAUL-ANTOINE MOREAU

Thèse soutenue publiquement le 9 avril 2015 devant le Jury composé de :

PASCAL BALDI	Rapporteur	Professeur à l'Université de Nice Sophia Antipolis
FABRICE DEVAUX		Professeur à l'Université de Franche-Comté
CLAUDE FABRE	Rapporteur	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
PHILIPPE GRANGIER		Directeur de Recherche CNRS, Institut d'Optique
ERIC LANTZ		Professeur à l'Université de Franche-Comté
HERVÉ MAILLOTTE		Directeur de Recherche CNRS, Institut Femto-ST

SPIM

Thèse de Doctorat

UFC

école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

THÈSE présentée par

PAUL-ANTOINE MOREAU

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Franche-Comté

Spécialité : **Optique et Photonique**

Aspects spatiaux de l'intrication en amplification paramétrique : paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen dans les images jumelles et expérience de Hong-Ou-Mandel

Unité de Recherche :
Département d'Optique P.M. Duffieux, Institut Femto-ST

Soutenue publiquement le 9 avril 2015 devant le Jury composé de :

PASCAL BALDI	Rapporteur	Professeur à l'Université de Nice Sophia Antipolis
FABRICE DEVAUX		Professeur à l'Université de Franche-Comté
CLAUDE FABRE	Rapporteur	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
PHILIPPE GRANGIER		Directeur de Recherche CNRS, Institut d'Optique
ERIC LANTZ		Professeur à l'Université de Franche-Comté
HERVÉ MAILLOTTE		Directeur de Recherche CNRS, Institut Femto-ST

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du département d'Optique de l'institut Femto-ST, sous tutelle de l'Université de Franche-Comté. Je remercie Hervé Maillotte, directeur du département d'optique, de m'avoir accueilli dans ce laboratoire.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury qui ont accepté de lire et d'apprécier mes travaux : Pascal Baldi, professeur à l'Université de Nice Sophia Antipolis. Fabrice Devaux, professeur à l'Université de Franche-Comté. Claude Fabre, professeur à l'Université Pierre et Marie Curie. Philippe Grangier, directeur de Recherche CNRS, institut d'Optique. Eric Lantz, professeur à l'Université de Franche-Comté. Hervé Maillotte, directeur de Recherche CNRS, institut Femto-ST. Je suis en particulier très reconnaissant à Pascal Baldi et Claude Fabre d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Eric Lantz et Fabrice Devaux qui ont dirigé ces travaux et au contact desquels j'ai énormément appris. Merci à Eric qui m'a initié à la recherche au cours de mon stage de Master, et pour toutes les connaissances qu'il m'a apportées au cours de ces années de thèse. Et merci à Fabrice pour tous ses conseils et pour ses idées expérimentales toujours pertinentes qui m'ont permis de mener à bien la partie expérimentale de ce travail de thèse. Je les remercie tous deux pour leur disponibilité et pour la confiance qu'ils m'ont accordée tout au long de la réalisation de cette thèse.

Je remercie également tout les membres de l'équipe d'Optique Non Linéaire qui m'ont soutenu, aidé, conseillé au cours de cette thèse. Merci notamment à Thibaut Sylvestre, Jean-Charles Beugnot et Gil Fanjoux, leur porte de bureau a toujours été ouverte pour

moi, je les remercie pour leur accueil au sein de l'équipe et pour leurs conseils avisés. Merci à Kien Phan Huy, pour les discussions parfois enflammées et pour l'ordinateur qu'il m'a prêté et qui m'a permis de réaliser cette thèse dans de bonnes conditions mais aussi à Mathieu Chauvet qui a bien souvent dû manipuler dans une profonde obscurité pour ne pas perturber nos expériences.

Merci à Joé avec qui j'ai débuté cette thèse et à Séverine, qui a désormais pleinement repris l'expérience à son compte et à qui je souhaite succès pour les réalisations à venir.

Je remercie toutes les personnes du département d'optique, pour l'ambiance motivante qu'ils ont su créer au sein de ce laboratoire. Merci en particulier à Emmanuel Dordor dont l'efficacité nous a permis de mettre rapidement sur pied les dispositifs mécaniques de nos expériences. Merci aussi à Luca Furfaro pour ses conseils expérimentaux. Merci enfin à Valérie Fauvez, Aline Chagrot, Sarah Djaouti, Bélinda Lafon dont le travail nous épaula toujours efficacement dans nos réalisations.

Je remercie aussi tout particulièrement les amis du laboratoire. Merci pour l'ambiance amicale, pour les soirées, les pauses cafés et tout ce que nous avons partagé durant ces années : Batiste, Jacques, Antonio, Romain, Clément, Ludo, Rémi, Pierre-Ambroise, Benjamin, Amaury, Birgit, Nour, Mischa, Abdoulaye, Luai, Yannick, Bogdan, Guoping, Souleymane, Joël et tant d'autres.

Merci à mes proches de m'avoir soutenu dans mes projets.

Merci à Chien-Fan pour sa présence à mes côtés et son soutien tout au long de la rédaction de ce mémoire. 謝謝倩帆。

Je remercie enfin mes parents et ma famille pour leur soutien et leurs encouragements.

Table des matières

Remerciements	i
Liste des abréviations	vii
Introduction	1
CHAPITRE 1	5
1 Paradoxe EPR spatial et optique quantique.	5
1.1 Le paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen (EPR).	5
1.1.1 Naissance de l'intrication.	6
1.1.2 Intrication, paradoxe EPR et état de Bell : une classification.	9
1.1.3 Critère pratique pour les corrélations spatiales EPR.	11
1.2 Quantification du champ électro-magnétique.	13
1.2.1 Quantification canonique du champ libre.	13
1.2.2 Quantification du champ en présence de particules chargées.	19
1.3 Photodétection.	21
1.4 Localisation des photons, et fonction d'onde photonique?	24
1.5 Construction d'un état EPR. La fluorescence paramétrique.	25
1.5.1 Description classique de l'amplification paramétrique.	26
1.5.2 Description quantique de la SPDC.	28
1.6 Démonstrations du paradoxe EPR dans le domaine spatial, état de l'art.	34
1.6.1 Démonstrations expérimentales du paradoxe EPR.	34
1.6.2 Démonstrations dans le domaine spatial.	35
1.6.3 Démonstration du principe d'incertitude de Heisenberg et contrainte sur la détection.	38

CHAPITRE 2	43
2 Paradoxe EPR dans les images.	43
2.1 Imager la position de photons grâce aux caméras CCD.	43
2.1.1 Bruits dominants des caméras CCD et EMCCD.	44
2.1.2 Niveau d'obscurité.	48
2.1.3 Détermination du niveau du seuil.	50
2.2 Corrélations quantiques dans les images.	53
2.2.1 Détection de corrélations quantiques à l'aide de caméras.	53
2.2.2 Probabilité de détection conjointe de deux photons.	55
2.3 Valeurs théoriques des incertitudes conditionnelles.	59
2.3.1 Théorie de la SPDC	59
2.3.2 Évaluation de l'élargissement due au filtre par simulations numériques.	61
2.4 Le paradoxe EPR dans des images.	64
2.4.1 Expérience à une caméra.	64
2.4.2 Résultats.	67
2.4.3 Comparaison théorie-expérience.	73
CHAPITRE 3	77
3 Paradoxe EPR dans les images jumelles.	77
3.1 Expérience EPR avec des images jumelles.	77
3.1.1 Limites des précédentes expériences.	77
3.1.2 Expérience EPR à deux caméras.	79
3.2 Steering EPR à sens unique dans le domaine spatial.	89
3.2.1 Principe de démonstration du steering EPR à sens unique.	89
3.2.2 État EPR à sens unique dans le domaine spatial.	90
3.2.3 Simulation sur des images expérimentales.	94
3.3 Signal fantôme.	95
3.3.1 <i>Ghost imaging</i>	95
3.3.2 Détection d'un signal fantôme.	96
CHAPITRE 4	101
4 Non localité dans les expériences de Hong-Ou-Mandel.	101
4.1 Simulations par la méthode des fonctions de Green.	102
4.1.1 Equations de propagation.	102
4.1.2 Solutions, méthode des fonctions de Green.	103
4.1.3 Propagation numérique.	104
4.1.4 Observables.	105

4.2	Coalescence des faisceaux de fluorescence paramétrique.	108
4.2.1	Fonctions de Green et expérience de Hong-Ou-Mandel.	108
4.2.2	Observables et interférences.	110
4.2.3	Conditions d'interférences.	111
4.2.4	Simulations.	114
4.3	Non localité du comportement dual onde corpuscule.	122
4.3.1	Non localité du phénomène Hong-Ou-Mandel.	123
4.3.2	Non-localité de la dualité onde-corpuscule dans le contexte de l'interférence à deux photons.	124
4.4	Théories non-locales à variables cachées : quel type de non-localité? Proposition expérimentale.	132
4.4.1	Les théories non-locales à variables cachées.	132
4.4.2	Test des inégalités de Bell avec "décisions quantiques".	134
4.4.3	Conclusion	138
	Conclusion	139
	Publications	141
	Bibliographie	169

Liste des abréviations

B

BBO : bêta-borate de baryum (β - BaB_2O_4) .
BS : Beam Splitter (diviseur de faisceau).

C

cl : Champ lointain.
cp : Champ proche.

D

DMD : Digital Micromirror device.

E

EMCCD : Electron Multiplying Charge Coupled Device.
EPR : Einstein-Podolsky-Rosen.

F

FEMTO-ST : Franche-Comté électronique Mécanique Thermique Optique – Sciences Technologies.

G

GUI : Graphical User Interface.

H

HOM : Hong-Ou-Mandel.

L

LHS : Local Hidden State.

LHV : Local Hidden Variable.

O

OPO : Optical Parametric Oscillator.

OPA : Optical Parametric Amplifier.

S

SPDC : Spontaneous Parametric Down Conversion.

SDK : Software Development Kit.

SNR : Signal to Noise Ratio.

T

TTL : Transistor-Transistor logic.

Introduction

Par l'analyse rapide d'une image, on peut recueillir consciemment ou inconsciemment un ensemble très divers et très large d'informations. On pourrait y trouver des détails temporels, historiques, numéraires, psychologiques, physiques, situer un contexte social, géographique ou ethnologique, etc. La lumière, qui achemine ces images, renferme ainsi à travers son organisation spatiale, une très grande richesse informationnelle. On peut dégager deux raisons principales à cette richesse. D'une part, les longueurs d'ondes visibles qui fixent la limite des détails accessibles aux images sont des grandeurs très faibles à notre échelle macroscopique. La quantité d'information qu'il est alors possible de transmettre dans une image de dimension macroscopique est considérable. D'autre part, les images se présentent dans un espace à deux dimensions¹ : les dimensions de l'optique transverse. Cette double dimensionnalité permet d'augmenter la quantité d'informations en offrant un degré de liberté supplémentaire par rapport à des phénomènes monodimensionnels.

Une preuve de l'efficacité des aspects spatiaux de la lumière à convoier de l'information tient en l'omniprésence du sens de la vision dans le règne animal. Du point de vue de l'évolution, la vue semble être un atout important dans la survie des espèces.

En rendant possible et efficace la manipulation et l'étude d'états de nature quantique, l'optique quantique a permis le développement de protocoles de traitement et de communication de l'information quantique [Bennett et al., 1992, Boschi et al., 1998]. Ces protocoles quittent petit à petit l'état de démonstration de principe et sont désormais amenés à se complexifier. Pour qu'ils puissent trouver un réel intérêt pratique, la quantité d'information qui leur est donnée et l'efficacité de ces protocoles d'information quantique doivent être augmentées. Dans ce contexte, la détection et la manipulation

1. Voir trois dimensions : imagerie hyperspectrale, holographie, vision binoculaire ...

d'états intriqués de grande dimensionnalité tient un rôle important [Franke-Arnold et al., 2013, Roslund et al., 2014]. Cette importance des phénomènes d'intrication de grande dimensionnalité fait donc prendre tout son intérêt à l'étude de l'intrication des aspects spatiaux qui, comme nous l'avons vu, sont un vecteur de communication efficace d'information [Kolobov, 2007].

C'est dans ce contexte que se situe la présente étude dont le résultat principal est la démonstration d'un comportement intriqué de haute dimensionnalité. L'état intriqué particulier qui est étudié ici est un état Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) dans le domaine spatial, c'est à dire au plus proche de sa formulation originelle [Einstein et al., 1935]. L'état est généré au sein d'un amplificateur paramétrique optique. Nous démontrons l'existence d'un paradoxe EPR de haut degré. Le résultat final de cette étude expérimentale montre le comportement intriqué d'images jumelles par l'acquisition d'une vingtaine de couples d'images correspondant à un temps d'acquisition d'environ 4 secondes.

On s'est ensuite intéressé à l'effet Hong-Ou-Mandel (HOM) dans le cadre de simulations utilisant la méthode des fonctions de Green pour résoudre les équations de propagation. La lumière utilisée dans le cadre de ces simulations est la même lumière de fluorescence paramétrique sur laquelle ont été démontrées les propriétés d'intrication. Ces travaux théoriques trouveront leur pendant expérimental dans le cadre d'une future thèse. L'objectif principal de cette étude est de démontrer sur cette lumière fortement multimode la possibilité d'obtenir une coalescence de la quasi totalité des paires de photons intriqués par effet HOM. On s'intéressera enfin à la non localité du phénomène HOM observé par le biais de ces simulations et nous établirons une inégalité de Bell dans ce contexte d'interférométrie dont il est possible de démontrer la violation par l'état EPR tel qu'il a été introduit en 1935.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Les trois premiers chapitres sont consacrés au paradoxe EPR, le quatrième traite de l'effet Hong-Ou-Mandel.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous introduisons le paradoxe EPR et nous effectuons de brefs rappels sur la quantification du champ électromagnétique. Suite à cela nous verrons que, sous certaines conditions, un amplificateur paramétrique optique permet de fournir une lumière dont l'état est proche de l'état décrit par EPR dans leur article de 1935 [Einstein et al., 1935]. Nous présenterons enfin l'état de l'art concernant la démonstration du paradoxe EPR dans le domaine spatial.

Le second chapitre est consacré à une première réalisation expérimentale du paradoxe EPR, sur des faisceaux de fluorescence paramétrique. Cette première réalisation utilise une caméra EMCCD dont nous présentons le fonctionnement. Nous montrons

notamment comment l'utilisation d'une technique de seuillage permet d'utiliser ces caméras pour détecter sur chaque pixel l'arrivée éventuelle d'un photon. Un tel régime de comptage de photons est ensuite mis à profit pour effectuer une démonstration du paradoxe EPR dans le domaine spatial en imageant les deux faisceaux de fluorescence paramétriques sur le même capteur, et en enregistrant des images de photodétection de ces faisceaux. Le protocole expérimental présenté dans cette expérience souffre de quelques inconvénients liés au fait d'imager les deux faisceaux sur le même capteur. Comme nous le verrons, ces inconvénients ont pour effet de limiter la dimensionnalité de l'intrication accessible à la mesure. Nous obtiendrons donc un paradoxe EPR de faible degré.

Le troisième chapitre présente des résultats obtenus à l'aide d'un protocole expérimental à deux caméras EMCCD qui vise à corriger ces défauts. Les deux faisceaux de fluorescence sont alors indépendamment imagés. Contrairement à la précédente réalisation expérimentale, les faisceaux sont pleinement séparés dans ce contexte, ce qui nous a permis de démontrer un paradoxe EPR de très haut degré. Nous présentons ensuite des simulations qui montrent la possibilité de réaliser un paradoxe EPR à sens unique ("one way steering") dans le cadre de cette expérience. Nous verrons enfin que les corrélations mesurées pourraient permettre la reconstitution d'un signal fantôme temporel en utilisant le principe du *ghost imaging*.

Le quatrième et dernier chapitre concerne l'effet Hong-Ou-Mandel. Dans un premier temps nous cherchons à montrer, par l'utilisation de simulations, qu'une coalescence de l'ensemble des paires de photons d'une lumière de fluorescence paramétrique est envisageable, dans un contexte réaliste, sur toute l'extension spatiale des faisceaux. Ces simulations seront associées à une future réalisation expérimentale. Elles mettent en lumière la non-localité du phénomène HOM et nous montrerons que cette non-localité peut être mise à profit pour établir une inégalité de Bell dans ce contexte d'interférence HOM. Les bases de projections habituelles des tests d'inégalité de Bell sont alors remplacées par des bases permettant d'observer plus ou moins l'aspect corpusculaire ou ondulatoire des particules par rapport au phénomène d'interférence à deux particules. L'inégalité de Bell ainsi établie nous permet enfin d'imaginer un protocole expérimental de test basé sur des technologies existantes et pour lequel le choix de la base de mesure est effectué via un contrôle quantique. Nous discutons dans cette dernière partie des implications théoriques d'une telle expérience de test d'une inégalité de Bell à décision quantique.

CHAPITRE 1

Paradoxe EPR spatial et optique quantique.

Nous allons dans ce premier chapitre nous intéresser au paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen, et à sa réalisation dans le domaine de l'optique quantique. Après avoir présenté le paradoxe d'un point de vue historique puis de façon formelle dans une première partie, nous effectuerons de brefs rappels sur la quantification du champ électromagnétique dans une deuxième partie. Nous verrons dans un troisième temps quelles sont les quantités expérimentalement détectables du champ électromagnétique quantifié suite à quoi nous nous demanderons dans quelle mesure on peut parler de localisation pour les particules élémentaires de ce champ que sont les photons. Dans une cinquième partie, nous étudierons une source particulière de lumière quantique comme candidate à la réalisation d'un paradoxe EPR. Enfin dans une dernière partie nous chercherons à situer les travaux effectués dans le cadre de cette thèse par rapport à l'état de l'art.

1.1 Le paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen (EPR).

En 1935 Albert Einstein, Boris Podolsky et Nathan Rosen cherchent à pousser dans ses retranchements la théorie quantique qui vient d'émerger. Ils démontrent que le formalisme quantique prédit l'existence de corrélations parfaites pour tout à la fois les positions et les impulsions de deux particules séparées spatialement [Einstein et al., 1935]. Si cette démonstration avait pour but originel de mettre en lumière une incomplétude supposée de la mécanique quantique, elle a surtout mis en évidence le caractère non local de la théorie quantique. De telles corrélations bouleversent en effet les cadres conceptuels dans lesquelles s'exerce la pensée du monde physique jusqu'alors. Voyons dans un premier temps comment ce paradoxe a fait émerger la notion d'intrication.

1.1.1 Naissance de l'intrication.

L'état quantique décrit par EPR est celui de deux particules pour lesquelles la contribution de chacune à l'état complet du système n'est pas séparable. Cela signifie que, bien qu'elles soient séparées spatialement, le sort de ces deux particules reste lié. Formellement, voici la fonction d'onde qu'ils ont écrite :

$$\Psi(x_A, x_B) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ip/\hbar)(x_A - x_B)} dp \quad (1.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_A) \phi_p(x_B) dp \quad (1.2)$$

où x_1 et x_2 sont les positions de deux particules distinctes notées A et B , $\psi_p(x_A) = e^{ip/\hbar x_A}$ et $\phi_p(x_B) = e^{-ip/\hbar x_B}$ sont les fonctions propres des opérateurs impulsion $\hat{p}_A = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_A}$ et $\hat{p}_B = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_B}$ associés aux particules A et B ayant pour valeur propre p et $-p$. On voit donc qu'il existe des corrélations parfaites entre les impulsions des deux particules. De même on pourra constater que $\Psi(x_A, x_B)$ est nulle si $x_A \neq x_B$ due à la somme infinie d'exponentielles complexes qui fait apparaître une distribution de Dirac. Ceci signifie que les particules vérifient également des corrélations parfaites de leurs positions. Il est à noter que l'état décrit par l'équation (1.2) qui se trouve dans [Einstein et al., 1935] est déjà développé en terme de modes de Schmidt. Cette notion peut être vue comme la décomposition naturelle des modes d'intrication. En utilisant des notations plus contemporaines, c'est à dire en terme de vecteurs d'ondes, l'état EPR s'écrit :

$$|EPR\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |p, -p\rangle dp \quad (1.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x, x\rangle dx \quad (1.4)$$

L'état écrit par EPR est en fait le premier du genre et sera ensuite généralisé et qualifié d'état intriqué par Schrödinger [Schrödinger, 1935]. Formellement, on peut écrire un état intriqué à deux particules de la façon suivante :

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |A_i\rangle |B_j\rangle \quad (1.5)$$

On voit bien que de façon générale l'état précédent ne peut pas être écrit comme un produit tensoriel de deux états $|\Psi_A\rangle$ et $|\Psi_B\rangle$ associés à chacune des particules $|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle |\Psi_B\rangle$. L'état sera donc séparable à la seule condition que les coefficients c_{ij} puissent s'écrire $c_{ij} = c_i^A c_j^B$. Alors seulement la mesure sur l'une des particules, qui modifie l'état du système sur lequel elle s'opère, n'affectera pas l'état de la seconde particule. Si au contraire les contributions des deux particules à la fonction d'onde totale

ne sont pas factorisables, la mesure opérée sur l'une d'elle perturbe instantanément le système complet et donc projette l'état de l'autre particule quelle que soit la distance qui les sépare. Il en est ainsi pour la fonction d'onde (1.1), qui n'est pas factorisable en x_A d'une part et x_B d'autre part.

Une telle idée de perturbation instantanée à distance dérange Einstein, père de la relativité restreinte qui stipule qu'aucune influence ne peut se propager à une vitesse superluminique. Et de fait, l'existence des corrélations décrites par EPR remet en question ce que l'on appelle le réalisme local [Laloë, 2013]. Cette notion correspond à la conjugaison du principe de localité et du réalisme physique. Le premier stipule que les influences ne peuvent se transmettre que localement, de proche en proche. Le second, quant à lui, impose que les propriétés de tout objet ont dans une certaine mesure une existence réelle avant d'être observée¹. De telle sorte que si la mesure sur une particule est capable de modifier instantanément la valeur du résultat sur une autre particule distante, alors il faut rejeter le principe de localité et admettre que les particules s'influencent à distance parce que le système qu'elles composent n'est pas local ou bien rejeter le réalisme et admettre que la seconde particule n'a pas été perturbée car la propriété mesurée sur celle-ci n'était pas définie avant la mesure. Mais pour Einstein, Podolsky et Rosen, si la mécanique quantique exprime un comportement si contre-intuitif du monde, c'est qu'elle doit être une théorie incomplète. Ils proposent de la compléter d'une manière qui permettrait de maintenir le réalisme local. Ils suggèrent pour cela l'introduction d'éléments de réalité locale plus tard conceptualisés sous la forme de variables cachées qui, partagées par les particules lorsqu'elles sont voisines, expliqueraient les résultats des mesures futures. Ils pensent ainsi avoir résolu ce qui était pour eux un paradoxe. Mais en 1964 John Stewart Bell [Bell, 1964] démontre que toute théorie locale à variables cachées doit satisfaire une inégalité qui s'avère être violée par certains états quantiques. L'étrangeté des résultats de la mécanique quantique est donc sur ce point numériquement testable. Il faudra toutefois attendre 1982 et le développement de l'optique quantique pour qu'une première démonstration expérimentale de la validité des prédictions de la mécanique quantique puisse être opérée grâce aux expériences conduites par Aspect *et al.* [Aspect et al., 1981, Aspect et al., 1982b, Aspect et al., 1982a].

Toutefois, si toutes les expériences menées jusqu'à présent vont dans le sens d'une démonstration de la validité de la théorie quantique, l'échec du réalisme local n'a pas encore été constaté en fermant la totalité des "loopholes". Ces "loopholes" sont des failles générant des ambiguïtés qui demeurent dans les expériences de test. Pour des raisons bien souvent techniques elles permettent par des explications complexes de retrouver les résultats expérimentaux en préservant le réalisme local. Il convient de noter que ces "loopholes" sont petit à petit comblés par les expériences qui se complexifient,

1. Le réalisme n'impose pas le déterminisme, mais l'introduction d'éléments de réalité qui peuvent éventuellement rendre compte d'une réalité existante avant la mesure.

rendant les potentielles interprétations classiques de plus en plus alambiquées. Parmi les failles pointées du doigt dans la plupart des démonstrations, on trouve celle de l'échantillonnage. Cette dernière correspond au fait que toutes les particules qui composent un ensemble quantique ne sont pas détectées dans une expérience donnée, et il faut alors supposer que le comportement des particules détectées représente fidèlement le comportement moyen de l'ensemble. C'est cette supposition qui compose l'une des principales lacunes de ce genre d'expériences. Nous verrons à la fin de ce chapitre comment un mauvais échantillonnage spatial peut conduire un faisceau de lumière classique à violer en apparence le principe d'incertitude de Heisenberg. Cet exemple sera ici d'intérêt puisque, comme nous le verrons, ce principe d'incertitude fournit un critère pour caractériser les corrélations EPR.

Comme nous le préciserons en détail plus loin, la détection de corrélations EPR ne met pas directement en échec les théories à variables cachées. De façon très naïve, on peut obtenir des corrélations parfaites en position et en impulsion en imaginant pour cela que les deux particules de l'état subissent à leur génération deux tirages au sort indépendant de deux variables cachées, l'une décrivant leur position λ_x , l'autre leur impulsion λ_p . Les deux particules partent alors indépendamment emportant avec elles l'information sur les valeurs λ_x et λ_p . Elles suivent ensuite à la détection les consignes imposées par ces valeurs. Les particules A et B se localisent en λ_x si leurs positions sont détectées ; la particule A se localise en λ_p si son impulsion est détectée ; la particule B se localise en $-\lambda_p$ si son impulsion est détectée. Le point important est ici que les particules ne s'influencent plus après leur départ. On a ainsi reproduit les corrélations EPR avec un modèle à variables cachées à condition que les deux tirages au sort soient indépendants et suivent une loi de distribution conforme à la distribution de Wigner de l'état EPR (1.1). Il est en fait dans ce cas possible d'associer à la loi de probabilité des variables cachées la distribution de Wigner de l'état EPR car cet état est dit gaussien, c'est à dire vérifie une distribution de Wigner gaussienne positive partout [Bell, 1986]. Pour un état non gaussien, la distribution de Wigner prend des valeurs négatives, et elle ne peut pas être associée avec une distribution de probabilité. On parle de distribution de quasi-probabilité pour décrire la distribution de Wigner.

Bien sûr, un modèle à variables cachées aussi fantasque n'est en rien satisfaisant eu égard à tout ce que l'on connaît par ailleurs du comportement des systèmes quantiques. Comment expliquer par exemple que si l'une des particules passe par un trou placé dans l'espace des positions, alors elle perd sa consigne λ_p et donc que les corrélations en impulsion soient perdues ? Comment pourrait-elle avoir connaissance de la présence du matériau qui bloque ailleurs le passage des particules alors qu'elle est précisément passée là où ce matériau n'est pas, i.e. au niveau du trou ? Une telle connaissance serait la signature d'une non-localité plus explicite encore que dans le cadre de l'interprétation orthodoxe de la mécanique quantique. Le modèle décrit plus haut permet toutefois

de comprendre que la stricte observation de corrélations EPR ne saurait écarter une explication en terme de variables cachées locales. A l’opposé, la démonstration de corrélations qui violent une inégalité de Bell met bien, elle, en défaut toute théorie locale à variables cachées.

Toutefois il ne faudrait pas conclure que l’état (1.1) est un état parfaitement local. D’une part, si les corrélations EPR ne sont pas suffisantes pour exclure une théorie locale à variables cachées, ces corrélations n’en sont pas moins non-locales dans le formalisme orthodoxe de la mécanique quantique dont les prédictions excluent par ailleurs ces variables cachées locales. D’autre part malgré les conclusions sur la localité de l’état EPR données par Bell dans [Bell, 1986] au vu du caractère gaussien de cet état, il a par la suite été démontré que des états Gaussiens pouvaient violer une inégalité de Bell pour des choix particuliers d’observables [Revzen et al., 2005]. Ainsi certains auteurs ont pu mettre en évidence le caractère non local des états EPR [Johansen, 1997, Cohen, 1997, Banaszek and Wódkiewicz, 1998], et ce y compris dans le domaine spatial tel que démontré théoriquement par Abouraddy *et al.* [Abouraddy et al., 2007] puis expérimentalement par la même équipe [Yarnall et al., 2007]. L’état (1.1) présente donc une forme de non localité au sens d’une possible violation d’inégalités de Bell.

Comme nous l’avons vu plus haut, les efforts pour améliorer la démonstration du comportement quantique de la nature sont donc pleinement d’actualité et c’est dans ce contexte que nous avons cherché à effectuer une démonstration qui permette, par l’utilisation de caméras, de détecter simultanément et complètement tout le champ spatial dans lequel s’étend l’état observé. Au contraire des démonstrations précédentes qui utilisaient des détecteurs ponctuels translatsés [Howell et al., 2004, Leach et al., 2012], nous mesurons simultanément l’état quantique dans son ensemble, rapprochant l’expérience d’une fermeture de la faille d’échantillonnage. En capturant des images quantiques, nous nous sommes donc efforcés de réaliser le paradoxe EPR au plus près de sa forme originelle. Nous allons donc nous efforcer de trouver un critère expérimental permettant le test.

1.1.2 Intrication, paradoxe EPR et état de Bell : une classification.

Pour résumer la situation du paradoxe EPR par rapport à la non séparabilité d’un état et à la non-localité au sens de Bell, nous allons expliciter la classification énoncée par Wiseman *et al.* [Wiseman et al., 2007]. La forme de non-localité la plus forte est celle de Bell, elle correspond à une situation pour laquelle il existe au moins un couple d’observables A et B sur les systèmes S_A et S_B correspondant à chacune des particules, dont la mesure ne peut satisfaire à une distribution de probabilité conforme à l’égalité suivante :

$$P(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} P(\lambda)P(a|A, \lambda)P(b|B, \lambda) \quad (1.6)$$

où a et b correspondent à l'ensemble des valeurs propres des observables A et B , et λ est une variable cachée vérifiant une distribution de probabilité $P(\lambda)$. Autrement dit, comme nous l'avons vu précédemment, les résultats de mesures sur un état de Bell ne peuvent être obtenus par une théorie à variable cachée imposée aux deux parties S_A et S_B et la distribution de probabilité des mesures ne peut s'expliquer que si la partie S_A du système subit une influence du choix de l'observable B et réciproquement.

Voyons maintenant le critère équivalent pour un état intriqué général. La définition d'un état séparable peut être écrite en terme de matrice d'état, il vient alors l'état d'un système séparable $\rho = \sum_{\lambda} P(\lambda) \sigma_{\lambda} \otimes \zeta_{\lambda}$, où \otimes est le produit tensoriel. Un tel état exprime le mélange statistique d'états tous séparables $\sigma_{\lambda} \otimes \zeta_{\lambda}$ il entraîne donc la distribution de probabilité suivante :

$$P(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} P(\lambda) P(a|A; \sigma_{\lambda}) P(b|B, \zeta_{\lambda}) \quad (1.7)$$

où les états σ_{λ} et ζ_{λ} sont des états quantiques indicés par λ , on parle alors d'états locaux cachés ou LHS (Local Hidden States). Ces états satisfont aux règles de la mécanique quantique et notamment aux principes d'incertitude associés à A et B . Un état intriqué ne pourra pas satisfaire une telle équation. Il est à noter que si les mesures sont toujours indépendantes, comme dans un modèle à variables cachées, les contraintes imposées aux distributions de probabilité des résultats de mesure $P(a|A; \sigma_{\lambda})$ et $P(b|B, \zeta_{\lambda})$ sont plus fortes que dans le cas d'un test de Bell. La condition est en effet plus restrictive puisqu'elle impose que les lois de probabilité sur chaque partie suivent le comportement d'un état quantique. Par conséquent l'ensemble des états ne satisfaisant pas (1.6) ne peuvent satisfaire (1.7), la réciproque est fautive. Ainsi les états ne satisfaisant pas les inégalités de Bell sont des états non séparables particuliers.

Les états EPR sont quant à eux des états hybrides entre intrication et non localité de Bell. Ils correspondent à la possibilité d'opérer un "steering" depuis l'une des parties A ou B , c'est à dire de piloter l'état mesuré par l'autre partie. L'une des parties peut alors imposer des résultats qui ne s'expliqueraient pas si la seconde partie effectuait la mesure sur un état quantique indépendant qu'elle posséderait. Formellement cela signifie que les états EPR présentent des corrélations qui ne peuvent être reproduites si la partie A voit sa mesure liée à une variable cachée λ qui définit l'état ζ_{λ} conditionnant les mesures effectuées par B . Un état EPR ne pourra donc pas vérifier l'égalité suivante :

$$P(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} P(\lambda) P(a|A, \lambda) P(b|B, \zeta_{\lambda}) \quad (1.8)$$

En résumé on a donc les inclusions suivantes : un état qui ne vérifie pas les inégalités de Bell est un état particulier de l'ensemble des états EPR qui sont eux même des états intriqués particuliers.

1.1.3 Critère pratique pour les corrélations spatiales EPR.

L'état EPR (1.1) présente des corrélations parfaites en position et impulsion. Cet état n'est donc pas réaliste et il convient de chercher à étendre l'argumentation qui donne naissance au paradoxe EPR pour qu'il inclue des états décrivant des corrélations physiques. Nous suivons pour cela le développement théorique effectué dans [Reid et al., 2009] qui s'inspire des travaux de Margaret Reid [Reid, 1989] visant à obtenir un critère pratique de test du paradoxe EPR.

Nous allons dans un premier temps quantifier les corrélations spatiales qui peuvent exister pour des états bi-parties. Une façon de quantifier ces corrélations est d'évaluer notre capacité à inférer le résultat de mesure x sur la particule A² connaissant le résultat x_B de la position de la particule B :

$$\begin{aligned}\Delta_{inf}^2 x &= \int dx dx_B P(x, x_B) [x - x_{est}(x_B)]^2 \\ &= \int dx_B P(x_B) \Delta_{inf}^2(x|x_B)\end{aligned}\tag{1.9}$$

où $x_{est}(x_B)$ est une estimation de la position x de la particule A en fonction de la valeur x_B obtenue pour la particule B. Avec $\Delta_{inf}^2(x|x_B)$ défini par :

$$\Delta_{inf}^2(x|x_B) = \int dx P(x|x_B) [x - x_{est}(x_B)]^2\tag{1.10}$$

Puisque pour tout résultat x_B , on minimisera l'erreur sur l'inférence si on choisit pour $x_{est}(x_B)$ la valeur moyenne de la distribution $P(x|x_B)$. Pour un tel choix $\Delta_{inf}^2(x|x_B)$ s'identifie à la variance de $P(x|x_B)$ noté $\Delta^2(x|x_B)$ et le minimum d'erreur d'inférence est alors donné par la variance :

$$V_{A|B}^x = \Delta_{inf}^2 x|_{min} = \int dx_B P(x_B) \Delta^2(x|x_B)\tag{1.11}$$

Pour l'observation des impulsions on peut définir $V_{A|B}^p$ de façon analogue. Ces deux variances quantifient l'inférence optimale qui est accessible dans une situation statistique donnée par les distributions $P(x, x_B)$ et $\Delta^2(p, p_B)$. Par là même, elles correspondent à une quantification des corrélations.

On va maintenant faire un choix de modèle, et évaluer une limite à l'inférence sur la position x dans ce cadre. De la même façon que pour (1.8), on va considérer un jeu de variables cachées mesurées sur la particule S_B d'une part et d'autre part un état local caché (LHS) lié à cette variable qui gouverne la statistique en A. On notera λ_x et λ_p les variables cachées qui correspondent aux mesures effectuées sur S_B et $\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}$ le LHS associé à S_A . A ces éléments de réalité sont associées des distributions de probabilité

2. On omet ici sciemment l'indice A pour la position x_A de façon à alléger les notations

$P(x|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x})$ et de la même façon $P(p|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x})$ pour les impulsions. On a alors en inférant x à partir des variables cachées :

$$\Delta_{inf}^2 x|_{min\lambda} = \int d\lambda_x d\lambda_p P(\lambda_x, \lambda_p) \Delta^2(x|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \quad (1.12)$$

Il en est de façon similaire pour $\Delta_{inf}^2 p|_{min\lambda}$ et $\Delta^2(p|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x})$. La condition que l'état local caché soit un état quantique implique que les variances de ces probabilités conditionnelles satisfassent au principe d'incertitude de Heisenberg, i.e. :

$$\Delta^2(x|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \Delta^2(p|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Ce qui par application des inégalités de Cauchy-Schwartz donne :

$$\begin{aligned} \Delta_{inf}^2 x \Delta_{inf}^2 p &\geq V_{A|B}^x V_{A|B}^p \geq \Delta_{inf}^2 x|_{min\lambda} \Delta_{inf}^2 p|_{min\lambda} = \langle \Delta^2(x|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \rangle \langle \Delta^2(p|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \rangle \\ &\geq \left| \langle \Delta(x|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \Delta(p|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \rangle \right|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned} \quad (1.13)$$

L'inégalité

$$V_{A|B}^x V_{A|B}^p \geq \Delta_{inf}^2 x|_{min\lambda} \Delta_{inf}^2 p|_{min\lambda} \quad (1.14)$$

étant due au fait que dans le cas d'une inégalité inverse le modèle n'est pas à même de reproduire les résultats expérimentaux puisque $\langle \Delta^2(x|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \rangle$ et $\langle \Delta^2(p|\sigma_{\lambda_p, \lambda_x}) \rangle$ sont les inférences optimales accessibles par ce modèle. Par conséquent si des observations donnent :

$$\Delta_{inf}^2 x \Delta_{inf}^2 p < \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.15)$$

Alors aucun modèle à état caché local ne permet d'expliquer les résultats expérimentaux.

N.b. il se peut que, bien que $\Delta_{inf}^2 x \Delta_{inf}^2 p \geq \frac{\hbar^2}{4}$, aucun modèle à état caché local ne corresponde aux résultats expérimentaux. L'évaluation des quantité inférées $\Delta_{inf}^2 x$ et $\Delta_{inf}^2 p$ ne reflètent pas en effet toute la richesse informationnelle contenue dans la distribution $P(x, x_B)$. Ainsi, il a pu être démontré en utilisant des critères entropiques que certains états vérifient un paradoxe EPR bien que (1.15) ne soit pas vérifié [Walborn et al., 2011].

Pratiquement, nous n'utiliserons pas directement le critère (1.15) mais le suivant

$$\Delta^2(x - x_B) \Delta^2(p + p_B) < \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.16)$$

Un tel critère implique que (1.15) soit vérifié et signifie donc l'existence d'un paradoxe EPR. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que $\Delta^2(x - x_B)$ est équivalent à

$\Delta_{inf}^2 x$ dont l'expression est donnée par (1.9), avec l'estimation $x_{est} = x_B$. Un tel choix implique que

$$\Delta^2(x - x_B)\Delta^2(p + p_B) \geq \Delta_{inf}^2 x \Delta_{inf}^2 p \quad (1.17)$$

Par conséquent nous pourrions utiliser le critère (1.16) pour détecter expérimentalement l'existence d'un paradoxe EPR.

Pour terminer, on définit le degré de paradoxe qui représente l'écart de l'estimation expérimentale $\epsilon^2 = \Delta_{inf}^2 x \Delta_{inf}^2 p$ à sa limite classique

$$K = \frac{\hbar^2}{\epsilon^2} \quad (1.18)$$

Le degré de paradoxe sera donc inférieur ou égal à un en l'absence de paradoxe mesuré et supérieur à un pour une mesure du paradoxe EPR.

1.2 Quantification du champ électro-magnétique.

Le but de cette partie est d'effectuer les rappels nécessaires sur la quantification de la théorie électromagnétique mais aussi de présenter les notations qui seront utilisées par la suite.

1.2.1 Quantification canonique du champ libre.

Transversalité du champ électromagnétique.

Si on considère un système de champ électromagnétique contenu dans un volume L^3 , alors le vecteur champ électrique classique peut être décomposé de la façon suivante [Grynberg et al., 2010] :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{n}}(t) e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.19)$$

où $\sum_{\mathbf{n}}$ est une notation abrégée pour \sum_{n_x, n_y, n_z} ou n_x , n_y et n_z définissent les trois composantes du vecteur $\mathbf{k}_{\mathbf{n}}$:

$$(\mathbf{k}_{\mathbf{n}})_x = n_x \frac{2\pi}{L} \quad ; \quad (\mathbf{k}_{\mathbf{n}})_y = n_y \frac{2\pi}{L} \quad ; \quad (\mathbf{k}_{\mathbf{n}})_z = n_z \frac{2\pi}{L} \quad (1.20)$$

N.b. la notation discrète en \mathbf{k}_l est utilisée par commodité et découle de l'hypothèse d'un système contenu dans un volume L^3 , les résultats continus se déduisant des résultats discrets lorsque l'on fait tendre le volume L vers l'infini.

Compte tenu des équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.24)$$

Du fait de (1.21) et (1.22) on a :

$$\mathbf{k}_n \cdot \tilde{\mathbf{E}}_n = 0 \quad (1.25)$$

$$\mathbf{k}_n \cdot \tilde{\mathbf{B}}_n = 0 \quad (1.26)$$

De sorte que l'on peut définir deux vecteurs unitaires mutuellement orthogonaux $\epsilon_{n,1}$ et $\epsilon_{n,2}$ et appartenant au plan orthogonal à \mathbf{k}_n tel que :

$$\tilde{\mathbf{E}}_n = \tilde{E}_{n,1} \epsilon_{n,1} + \tilde{E}_{n,2} \epsilon_{n,2} \quad (1.27)$$

Les équations (1.19) et (1.27) montrent que le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ peut être décomposé sur une base de composantes de Fourier polarisées de vecteur d'onde \mathbf{k}_n et de polarisation $\epsilon_{n,s}$ orthogonale à \mathbf{k}_n . Chaque composante est indicée par les quatre indices $\{n_x, n_y, n_z; s\}$ les trois premiers définissant \mathbf{k}_n tandis que le quatrième peut prendre les valeurs $s = 1$ ou 2 qui caractérisent la base de polarisation. On utilise alors l'indice l pour représenter ces quatre nombres :

$$l = \{n_x, n_y, n_z; s\} \quad (1.28)$$

et nous écrivons :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \epsilon_l \tilde{\mathbf{E}}_l(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \quad (1.29)$$

De façon analogue pour le champ magnétique on écrira :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \epsilon'_l \tilde{\mathbf{B}}_l(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \quad (1.30)$$

où la composante de \mathbf{B} le long de ϵ'_l est directement associé à la composante $\epsilon_l \tilde{\mathbf{E}}_l(t)$ du champ magnétique par 1.23 avec :

$$\epsilon'_l = \frac{\mathbf{k}_l}{k_l} \times \epsilon_l \quad (1.31)$$

On peut encore appliquer cette décomposition sur le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (1.32)$$

en choisissant la jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$. On aura donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \epsilon_l \tilde{\mathbf{A}}_l(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \quad (1.33)$$

Variables normales.

On peut alors définir les variables normales qui vont nous être utiles pour quantifier le champ électromagnétique. Elles sont au nombre de deux pour chaque valeur de l et sont définies par

$$\alpha_l = \frac{1}{2\mathcal{E}_l^{(1)}} (\omega_l \tilde{\mathbf{A}}_l - i\tilde{\mathbf{E}}_l) \quad (1.34)$$

$$\beta_l = \frac{1}{2\mathcal{E}_l^{(1)}} (\omega_l \tilde{\mathbf{A}}_l + i\tilde{\mathbf{E}}_l) \quad (1.35)$$

Où $\mathcal{E}_l^{(1)}$ est une constante dont la valeur fixe la définition prise pour les variables normales utilisées pour décrire le champ. Cette valeur sera généralement choisie de manière à rendre explicites l'Hamiltonien et les relations de commutations obtenues après quantification. Les variables normales vérifient les équations d'évolution suivantes qui découlent des équations de Maxwell

$$\frac{d\alpha_l}{dt} + i\omega_l \alpha_l = 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{d\beta_l}{dt} - i\omega_l \beta_l = 0 \quad (1.37)$$

si bien que

$$\alpha_l(t) = \alpha_l(0)e^{-i\omega_l t} \quad (1.38)$$

$$\beta_l(t) = \beta_l(0)e^{i\omega_l t} \quad (1.39)$$

D'autre part, la réalité des champs impose que

$$\beta_l^*(t) = \alpha_{-l}(t) \quad (1.40)$$

par $-l$ on entend

$$-l = \{-n_x, -n_y, -n_z; s\} \quad (1.41)$$

Ce qui permet d'écrire les champs sous la forme suivante, après avoir effectué le regroupement des termes en α_l dans la somme pour faire disparaître l'indice $-l$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.42)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_l \boldsymbol{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^{(1)} \alpha_l(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) &= [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^* \end{aligned} \quad (1.43)$$

On peut démontrer que l'Hamiltonien du rayonnement s'exprime par

$$H_R = 2\epsilon_0 L^3 \sum_l |\mathcal{E}_l^{(1)}|^2 |\alpha_l|^2 \quad (1.44)$$

De sorte que les coefficients Q_l et P_l , définis par

$$\begin{aligned} Q_l &= \sqrt{\frac{4\epsilon_0 L^3}{\omega_l}} \mathcal{E}_l^{(1)} \operatorname{Re}(\alpha_l) \\ P_l &= \sqrt{\frac{4\epsilon_0 L^3}{\omega_l}} \mathcal{E}_l^{(1)} \operatorname{Im}(\alpha_l) \end{aligned} \quad (1.45)$$

vérifient les équations de Hamilton :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_l}{dt} &= \frac{\partial H_R}{\partial P_l} \\ \frac{dP_l}{dt} &= -\frac{\partial H_R}{\partial Q_l} \end{aligned} \quad (1.46)$$

et sont donc des variables dynamiques canoniquement conjugués.

Quantification

La quantification s'opère alors de façon analogue à celle opérée sur les systèmes de particules matérielles en position et impulsion dont on sait qu'elle permet une description des résultats expérimentaux. Les équations régissant la dynamique des variables normales sont analogues à celles d'un oscillateur harmonique [Cohen-Tannoudji et al., 1997], et l'on va donc retrouver le formalisme d'opérateurs de création et d'annihilation de quantum d'énergie. Dans le cas présent, ces quanta d'énergie seront les photons. On associe donc aux variables canoniquement conjuguées $Q_l(t)$ et $P_l(t)$ les opérateurs Hermitiens indépendant du temps \hat{Q}_l et \hat{P}_l . Et l'on impose les relations de commutation

$$[\hat{Q}_l, \hat{P}_{l'}] = i\hbar\delta_{l,l'} \quad (1.47)$$

$$[\hat{Q}_l, \hat{Q}_{l'}] = [\hat{P}_l, \hat{P}_{l'}] = 0 \quad (1.48)$$

Cette dernière relation exprime l'indépendance dynamique des différents modes qui sont apparus dans le développement du champ. Le choix des relations de commutation effectué permet d'imposer que les équations d'évolution des opérateurs, dans le point de vue de Heisenberg, ont une forme analogue aux équations dynamiques du champ classique. Par là-même, on impose à la théorie quantique construite ici, de reproduire tous les résultats classiques dans les conditions où cette théorie quantique sous-jacente sera observée à des échelles classiques. Dans le cas présent, la théorie classique est

celle de l'électromagnétisme et les conditions d'observation classiques sont celles qui ne distinguent pas assez finement les énergies pour que la granularité de la lumière soit apparente.

Utilisant les équations (1.45), on peut définir l'opérateur d'annihilation \hat{a}_l associé à α_l par

$$\hat{Q}_l + i\hat{P}_l = \sqrt{\frac{4\epsilon_0 L^3}{\omega_l}} \mathcal{E}_l^{(1)} \hat{a}_l \quad (1.49)$$

En choisissant alors

$$\mathcal{E}_l^{(1)} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 L^3}} \quad (1.50)$$

on fixe la définition des variables normales et on rend l'expression de l'Hamiltonien et des relations de commutations explicites en terme d'opérateurs annihilation \hat{a}_l et de leurs conjugués hermitiens appelés opérateurs de création \hat{a}_l^\dagger . Les relations de commutation se déduisent de celles imposées à \hat{Q}_l et \hat{P}_l

$$\begin{aligned} [\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}^\dagger] &= \delta_{l,l'} \\ [\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

L'Hamiltonien du rayonnement s'écrit alors

$$\hat{H}_R = \sum_l \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l) = \sum_l \hbar\omega \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \quad (1.52)$$

Les champs eux-mêmes devenus des opérateurs s'écrivent alors

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_l i\epsilon_l \mathcal{E}_l^{(1)} (e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_l - e^{-i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_l^\dagger) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}) \quad (1.53)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_l \epsilon_l \frac{\mathcal{E}_l^{(1)}}{\omega_l} (e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_l + e^{-i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_l^\dagger) = \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}) \quad (1.54)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \sum_l i \frac{\mathbf{k}_l \times \epsilon_l}{\omega_l} \mathcal{E}_l^{(1)} (e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_l - e^{-i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_l^\dagger) = \hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{B}}^{(-)}(\mathbf{r}) \quad (1.55)$$

On peut noter le rôle particulier du temps sous la quantification, on utilise des opérateurs quantifiés indépendants du temps car dans la représentation de Schrödinger c'est l'état qui portera la dépendance temporelle.

Valeurs propres et état propres de l'Hamiltonien du rayonnement.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le champ électromagnétique suit des équations indépendantes pour chaque mode l et qui s'identifient au comportement d'un oscillateur harmonique. Il peut donc être vu comme étant composé de l'ensemble $\{l\}$

des oscillateurs harmoniques quantiques. Et nous allons ici utiliser les résultats du traitement quantique de l'oscillateur harmonique [Cohen-Tannoudji et al., 1997].

On peut exprimer l'hamiltonien du rayonnement en fonction de l'opérateur nombre de photons \hat{N}_l

$$\hat{H}_R = \sum_l \hbar\omega_l \left(\hat{N}_l + \frac{1}{2} \right) \quad (1.56)$$

avec

$$\hat{N}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \quad (1.57)$$

on peut alors montrer, partant des relations de commutations (1.51), que les valeurs propres de \hat{N}_l correspondent aux entiers naturels. Les états propres de \hat{N}_l sont alors notés $|n_l\rangle$ et appelés états de Fock

$$\hat{N}_l |n_l\rangle = n_l |n_l\rangle \quad (1.58)$$

ces états vérifient alors les relations

$$\hat{a}_l |n_l\rangle = \sqrt{n_l} |n_l - 1\rangle \quad \text{pour } n_l \geq 1 \quad (1.59)$$

$$\hat{a}_l |0_l\rangle = 0 \quad (1.60)$$

$$\hat{a}_l^\dagger |n_l\rangle = \sqrt{n_l + 1} |n_l + 1\rangle \quad (1.61)$$

Ainsi, si l'on part d'un état propre $|n_l\rangle$ de H_l correspondant à la valeur propre $E_n = (n_l + \frac{1}{2})\hbar\omega_l$, alors l'action de l'opérateur \hat{a}_l sur cet état fait passer à un état propre associé à la valeur propre $E_{n-1} = (n_l + \frac{1}{2})\hbar\omega_l - \hbar\omega_l$ et celle de \hat{a}_l^\dagger à un état propre associé à la valeur propre $E_{n+1} = (n_l + \frac{1}{2})\hbar\omega_l + \hbar\omega_l$. Ces opérateurs particuliers dont la définition est fixée par la valeur choisie de $\mathcal{E}_l^{(1)}$ peuvent alors être interprétés comme les opérateurs de création et d'annihilation d'un quantum d'énergie $\hbar\omega_l$ sur le mode l du champ. Ce qui correspond en fait à la création ou à l'annihilation d'un photon.

D'autre part l'interprétation qui consiste à voir le champ électromagnétique comme composé de quasi-particules est renforcé par le fait que l'impulsion du rayonnement libre \hat{P}_R ainsi que son moment angulaire intrinsèque \hat{S}_R s'expriment en terme d'opérateurs nombres de photons \hat{N}_l , ce qui signifie que l'on peut associer de telles quantités à chaque quantum d'énergie.

$$\hat{P}_R = \sum_l \hbar \mathbf{k}_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \quad (1.62)$$

$$\hat{S}_R = \sum_l \hbar \epsilon_l \frac{\mathbf{k}_l}{k_l} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \quad (1.63)$$

Nous verrons au chapitre 2 qu'il est possible de définir des opérateurs pratiques applicables pour la mesure sur des pixels et associés à un rayonnement non monochromatique [Treps, 2001].

1.2.2 Quantification du champ en présence de particules chargées.

Contexte théorique de l'optique quantique.

En présence de particules, la théorie doit être quantifiée en la conformant aux équations de Maxwell où apparaissent les charges et les courants ainsi qu'aux équations de Newton-Lorentz pour la dynamique des particules [Cohen-Tannoudji et al., 1987]. Il convient donc de quantifier à la fois le champ et le comportement des particules chargées. La quantification du champ électromagnétique donne de facto un comportement de la lumière respectant les principes de la relativité restreinte, les équations de Maxwell étant relativistes. Il convient alors de se demander si un traitement quantique non relativiste pour les particules est suffisant bien que ces particules soient en interaction avec un champ au comportement relativiste. Pour répondre à cette interrogation, on peut comparer la valeur des échanges d'énergie mis en jeu par l'interaction entre le champ et les particules à l'énergie de masse de ces particules. On définit alors la fréquence limite autour de laquelle les effets relativistes pour les particules ne sont plus négligeables au vu des énergies mises en jeu,

$$\nu_{lim} = \frac{mc^2}{h} \quad (1.64)$$

où m est la masse des particules en interaction avec le champ. Les particules de plus faible masse, grâce auxquelles nous observerons le champ, sont les électrons $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. On a donc $\nu_{lim} = 1,2373 \cdot 10^8 \text{ THz}$ les fréquences optiques étant incluses dans l'intervalle suivant $\nu_{opt} \in [430; 790] \text{ THz}$ on a bien $\nu_{opt} \ll \nu_{lim}$. Une description quantique et non relativiste des particules est donc suffisante pour expliquer les résultats de mesures obtenus à l'aide de nos caméras et en particulier la description de l'interaction pourra être effectuée à nombre de particules matérielles constant, ce qui n'est pas le cas pour les photons.

Variables dynamiques et Hamiltonien quantifié.

L'introduction des charges dans les équations de Maxwell nécessite deux modifications pour les champs. Les équations de Maxwell-Gauss (1.21) et de Maxwell-Ampère (1.24) sont modifiées comme suit

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.65)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (1.66)$$

D'une part (1.65) implique l'existence d'une composante longitudinale du champ électrique. D'autre part, les équations d'évolution des variables normales doivent être modifiées du fait de l'existence du courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

Dans un premier temps, on peut décomposer le champ électrique en deux composantes l'une transverse \mathbf{E}_\perp et l'autre longitudinale \mathbf{E}_\parallel . On peut alors montrer que le champ \mathbf{E}_\parallel n'est pas un rayonnement, il correspond en effet exactement au champ électrostatique de Coulomb. Cette partie du champ ne se propage pas, elle est instantanée.

$$\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)|^3} \quad (1.67)$$

où \mathbf{r}_α et q_α sont respectivement la position et la charge de la particule indiquée par α . Toute variation temporelle du champ serait due au déplacement des particules chargées entraînant l'existence d'un courant et donc d'un champ électrique transverse qui lui est un champ radiatif retardé³. On peut alors redéfinir les variables dynamiques en substituant simplement \mathbf{E}_\perp à \mathbf{E} dans leurs expressions (1.34) et (1.35)

$$\alpha_l = \frac{1}{2\mathcal{E}_l^{(1)}} (\omega_l \tilde{\mathbf{A}}_l - i \tilde{\mathbf{E}}_{\perp l}) \quad (1.68)$$

$$\beta_l = \frac{1}{2\mathcal{E}_l^{(1)}} (\omega_l \tilde{\mathbf{A}}_l + i \tilde{\mathbf{E}}_{\perp l}) \quad (1.69)$$

Toujours avec

$$\beta_l^*(t) = \alpha_{-l}(t) \quad (1.70)$$

Les équations du mouvement doivent alors être modifiées de la façon suivante

$$\frac{d\alpha_l}{dt} + i\omega_l \alpha_l = \frac{1}{2\epsilon_0 \mathcal{E}_l^{(1)}} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp l} \quad (1.71)$$

Dès lors le système des particules et du champ est complètement décrit par l'ensemble des variables dynamiques $\{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha; \alpha_l^*, \alpha_l\}$ qui après quantification devient l'ensemble des opérateurs $\{\hat{\mathbf{p}}_\alpha, \hat{\mathbf{r}}_\alpha; \hat{a}_l^\dagger, \hat{a}_l\}$. On obtient alors l'expression suivante de l'Hamiltonien gouvernant l'évolution du système particule et champ

$$\hat{H} = \hat{H}_P + \hat{H}_R + \hat{H}_I \quad (1.72)$$

où \hat{H}_P est l'Hamiltonien propre aux particules

$$\hat{H}_P = \sum_\alpha \frac{\hat{\mathbf{p}}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V_{Coul} \quad (1.73)$$

où V_{Coul} ne fait pas intervenir de variable dynamique propre au champ.

D'autre part \hat{H}_R est l'Hamiltonien propre au rayonnement

$$\hat{H}_R = \sum_l \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \quad (1.74)$$

3. Toute transmission d'information passe donc par cette seconde partie du champ, et est donc retardée, en accord avec la relativité restreinte.

et \hat{H}_I est l'Hamiltonien d'interaction entre les particules et le rayonnement

$$\hat{H}_I = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{2m_{\alpha}} \left[\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}) \right]^2 - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \hat{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}) \quad (1.75)$$

Du fait de la présence de \hat{H}_I dans l'Hamiltonien total, les états de Fock ne peuvent plus être des vecteurs propres de celui-ci. Aussi l'évolution du système, qui est guidé par l'application de l'Hamiltonien à l'état quantique via l'équation de Schrödinger dans la représentation éponyme, projettera les états de Fock sur d'autres états de Fock. Cette projection correspondra à la disparition ou à l'apparition de nouveaux photons guidée par l'interaction avec la matière.

1.3 Photodétection.

Nous avons ainsi dans la partie précédente procédé à la quantification du rayonnement. Il nous faut alors nous poser la question de ce qui est mesurable du champ électromagnétique quantifié, donc chercher à lier les quantités qui décrivent le champ quantifié à ce qui est mesurable sur la matière qui est en interaction avec lui. On va alors étudier le signal de photodétection théoriquement accessible pour un détecteur idéal [Cohen-Tannoudji et al., 2001].

$$\hat{H} = \hat{H}_P + \hat{H}_R + \hat{H}_I \quad (1.76)$$

On prend le parti d'exprimer l'interaction par un modèle dipolaire électrique [Cohen-Tannoudji et al., 1987] (Complément A_{IV}). L'atome susceptible de subir une photoionisation est donc complètement décrit par son moment dipolaire électrique \hat{d}

$$\hat{H}_I = -\hat{d}\hat{E}(\mathbf{r}) \quad (1.77)$$

L'opérateur champ électrique est bien le champ transverse, il est pris à la position \mathbf{r} , centre de gravité de l'atome. Le caractère vectoriel des opérateurs n'est pas pris en compte, on suppose en effet le détecteur \hat{d} idéal, donc orienté au mieux selon la direction du champ. Nous utilisons alors la représentation d'interaction, qui veut que les opérateurs vérifient une évolution analogue à celle de la représentation de Heisenberg mais guidée uniquement par la partie $H_P + H_R$ de l'Hamiltonien. L'état lui n'évolue, dans cette représentation, que par la contribution de l'Hamiltonien d'interaction. Alors l'opérateur $\hat{H}_I(t)$ s'écrit

$$\hat{H}_I(t) = -\hat{d}(t)\hat{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.78)$$

avec

$$\hat{d}(t) = e^{i\frac{\hat{H}_P t}{\hbar}} \hat{d} e^{-i\frac{\hat{H}_P t}{\hbar}} \quad (1.79)$$

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = e^{i\frac{\hat{H}_R t}{\hbar}} \hat{E}(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\hat{H}_R t}{\hbar}} \quad (1.80)$$

Si l'on applique maintenant un développement perturbatif limité au premier ordre en H_I alors l'opérateur d'évolution

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0) |\psi(0)\rangle \quad (1.81)$$

s'écrit après un temps Δt d'évolution

$$\hat{U}(\Delta t, 0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{\Delta t} dt \hat{H}_I(t) \quad (1.82)$$

supposant initialement l'atome dans l'état $|a\rangle$ et le rayonnement dans l'état $|\phi_R\rangle$ tel que

$$|\psi(0)\rangle = |a, \phi_R\rangle \quad (1.83)$$

on a la probabilité de transition vers l'ensemble des états excités $\{|c\rangle\}$ de l'atome et pour tout état final $\{|\mu\rangle\}$ du champ donnée par

$$P_{ext}(\Delta t) = \sum_{\mu, c} \left| \langle c, \mu | \hat{U}(\Delta t, 0) | a, \phi_R \rangle \right|^2 \quad (1.84)$$

avec

$$\begin{aligned} \left| \langle c, \mu | \hat{U}(\Delta t, 0) | a, \phi_R \rangle \right|^2 &= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \langle \phi_R | \hat{E}(\mathbf{r}, t') | \mu \rangle \langle \mu | \hat{E}(\mathbf{r}, t'') | \phi_R \rangle \\ &\quad \times \langle a | \hat{d}(t') | c \rangle \langle c | \hat{d}(t'') | a \rangle \end{aligned} \quad (1.85)$$

qui en utilisant les relations de fermeture sur $\{|c\rangle\}$ et $\{|\mu\rangle\}$ conduit à

$$P_{ext}(\Delta t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' G_A(t', t'') G_R(t', t'') \quad (1.86)$$

où

$$G_A(t', t'') = \langle a | \hat{d}(t') \hat{d}(t'') | a \rangle \quad (1.87)$$

$$G_R(t', t'') = \langle \phi_R | \hat{E}(\mathbf{r}, t') \hat{E}(\mathbf{r}, t'') | \phi_R \rangle \quad (1.88)$$

$G_A(t', t'')$ exprime en quelque sorte la fonction de transfert du détecteur. Il s'écrit

$$G_A(t', t'') = \sum_c \left| \langle a | \hat{d} | c \rangle \right|^2 e^{-i\omega_{ac}(t' - t'')} \quad (1.89)$$

où l'on utilise la pulsation de Bohr $\omega_{ac} = \frac{E_c - E_a}{\hbar}$. Puisque l'on suppose le détecteur idéal, donc le comportement de l'atome parfait, il aura une réaction transition instantanée et parfaite de sorte que $G_A(t', t'')$ sera nulle en dehors de $t' = t''$. Toutefois cette fonction ne s'identifie pas à une fonction de Dirac puisque seules les fréquences positives contribuent. De fait, si $E_c < E_a$ alors l'atome se comporte comme émetteur et non plus

comme détecteur.

Par ailleurs en décomposant les champs en suivant l'expression (1.53) on obtient

$$G_R(t', t'') = \langle \phi_R | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t'') | \phi_R \rangle + \langle \phi_R | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t'') | \phi_R \rangle \quad (1.90)$$

les autres combinaisons entraînant l'apparition de $\hat{a}\hat{a}$ ou $\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$ correspondent donc à des termes nuls. On peut alors montrer que dans l'expression (1.90), seul le premier terme est résonnant, c'est à dire conduit à un phénomène d'absorption sur un temps macroscopique. Le second terme correspond en effet au phénomène d'émission d'un photon puisqu'il correspond à une contribution $\hat{a}\hat{a}^\dagger$, or si ce terme contribue à $P_{ext}(\Delta t)$ par un terme initialement non nul, pour des valeurs macroscopiques de Δt il le deviendra. En effet ce terme contribue à $G_R(t', t'')$ par des fréquences positives $e^{-i\omega(t'-t'')}$, puisque $G_A(t', t'')$ est lui même composé de fréquences positives. La multiplication de ces termes pour former $P_{ext}(\Delta t)$ fera apparaître des exponentielles complexes de hautes fréquences. A l'inverse le terme $\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t'') \rangle$ étant composé de fréquences négatives, des résonances vont pouvoir apparaître. Physiquement cela signifie que seule l'absorption d'un photon pourra conduire à une transition atomique vers une énergie plus haute. Une transition accompagnée de l'émission d'un photon n'est pas viable, le photon sera périodiquement réabsorbé et la transition annulée [Mandel and Meltzer, 1969]. Un tel phénomène n'existe que dans la mesure où, sur un temps très court, les énergies mises en jeu ne sont pas bien définies.

Ainsi en supposant finalement que le temps d'intégration dt avant observation de l'état de l'atome est court devant le temps caractéristique d'évolution des enveloppes du champ détecté, on obtient l'expression suivante pour la probabilité d'excitation et donc de photo-détection par unité de temps

$$w_I(\mathbf{r}, t) = \frac{dP_{ext}(t)}{dt} \propto \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (1.91)$$

Les signaux physiques mesurables sur la matière, par exemple le nombre de photo électrons si l'état excité correspond à une photo-ionisation, seront donc proportionnels à cette quantité. D'autre part, on remarque qu'un tel processus correspond à des événements discrets. Les électrons ionisés seront dénombrables sous forme de clics, qui correspondront à leur ionisation accompagnée de l'absorption d'un photon. Les signaux physiques seront donc eux mêmes quantifiés, correspondant à l'absorption des quanta.

Par un traitement similaire et considérant cette fois deux moments électriques dipolaires, on peut démontrer que la probabilité de photo-détection conjointe par unité de temps est

$$w_{II}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \propto \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle \quad (1.92)$$

Si $\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle$ peut être identifié à l'intensité des ondes dans un traitement classique, le terme associé à $w_{II}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ n'a pas de contrepartie classique. En effet

$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ et $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ ne commutent pas, il n'est pas possible d'écrire $w_{II}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ sous la forme $w_I(\mathbf{r}, t)w_I(\mathbf{r}', t')$. Des corrélations impossibles à décrire par une théorie classique du rayonnement sont donc prévues par le traitement quantique et l'on verra au chapitre 2 que l'évaluation de la quantité,

$$\begin{aligned} w_{II}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') - w_I(\mathbf{r}, t)w_I(\mathbf{r}', t') \propto \\ \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle \\ - \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle \end{aligned} \quad (1.93)$$

nous permettra d'avoir accès à la nature quantique de ces corrélations.

1.4 Localisation des photons, et fonction d'onde photonique ?

Nous allons par la suite nous intéresser à la détection spatiale des quasi-particules que sont les photons. Contrairement à la localisation des particules matérielles pour lesquelles la définition de l'opérateur de position \hat{r} est clairement établie, la définition de tels opérateurs pour les photons ne s'inscrit pas dans le formalisme théorique qui leur donne naissance. D'autre part, les tentatives de formulations générales des propriétés de localisation de l'état des particules dans le cadre des théories quantiques relativistes se sont heurtées à la singularité que représentent les particules sans masse comme les photons [Newton and Wigner, 1949]. Il nous faut donc discuter dans quelle mesure nous pouvons parler de localisation des photons dans le cadre de la théorie de l'optique quantique. On peut commencer par se demander s'il est possible de définir une fonction d'onde spatiale pour les photons. L'état d'un photon unique peut être écrit de la façon suivante

$$|1\rangle = \sum_l c_l |0, \dots, 0, 1_l, 0, \dots\rangle \quad (1.94)$$

où les l sont les indices des différents modes du champ. La probabilité de photodétection est alors donnée par

$$w_I(\mathbf{r}, t) \propto |\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (1.95)$$

avec

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = i \sum_l \boldsymbol{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^{(1)} c_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} = \langle 0 | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) | \Psi(t) \rangle \quad (1.96)$$

Au vu de cette dernière équation, on peut espérer identifier une telle quantité à une fonction d'onde photonique. Il a, par ailleurs, été démontré qu'une mécanique ondulatoire équivalente à l'optique quantique et décrivant des états à plusieurs photons peut être construite [Smith and Raymer, 2007].

Il demeure néanmoins que l'opérateur \hat{r} ne peut être défini sur de telles fonctions d'ondes. Du fait de la transversalité du champ, des contraintes sont en effet imposées à sa décomposition, qui empêchent sa parfaite localisation (cf. démonstration de [Cohen-Tannoudji et al., 1987] page 190).

Il a cependant pu être démontré que l'énergie associée aux photons peut être localisée avec une loi de décroissance arbitrairement rapide autour du point de localisation [Adlard et al., 1997]. Partant de cette constatation, la définition d'un opérateur \hat{r} pour les photons a été proposée. Si il semble qu'une telle démarche ait formellement abouti [Hawton, 1999], la démonstration nécessite que les fonctions propres d'un tel opérateur \hat{r} soient décomposées sur une base comprenant des vecteurs d'ondes perpendiculaires mais aussi parallèles à la polarisation des photons. On peut dès lors questionner le fait qu'un tel opérateur soit une observable pour un photon. En effet, en supposant que la mesure associée à un tel opérateur donne un résultat r , alors l'état du photon se verrait projeté sur une fonction propre unique de \hat{r} . Or une telle fonction propre ne saurait décrire un photon qui doit vérifier la transversalité du champ. La mesure d'un état localisé au sens de [Adlard et al., 1997] doit alors sans doute être associée à un ensemble infiniment proche de résultats r de cet opérateur [Adlard et al., 1997], mais pas d'une unique valeur r .

Pour terminer, on pourra remarquer que d'après la formule (1.53) les opérateurs $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r})$ peuvent être localisés dans la limite de la fréquence maximale ω accessible pour sa décomposition [Grynberg et al., 2010] i.e. sur une dimension typique de l'ordre de $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Ainsi, l'expression (1.96) doit se comprendre comme la probabilité moyenne de détecter le photon dans un volume λ^3 autour de la position \mathbf{r} si bien que pour des volumes de localisations supérieures à λ^3 où λ est la longueur d'onde des photons mis en jeu, on pourra parler de localisation effective des photons. Puisque dans notre cas les tailles limites de localisation mises en jeu sont celles des pixels de surface $16\mu\text{m} \times 16\mu\text{m}$, et que les longueurs d'ondes optiques s'échelonnent de 400nm à 700nm , on pourra sans plus de précautions parler de position et d'impulsion des photons détectés.

1.5 Construction d'un état EPR. La fluorescence paramétrique.

Le phénomène de fluorescence paramétrique est un phénomène d'optique non linéaire. Il consiste en l'émission d'une fluorescence par un cristal soumis au champ optique intense d'une lumière appelée pompe. Par interaction avec le milieu cristallin, certains photons de la lumière pompe sont en quelque sorte scindés en deux, générant deux photons jumeaux de plus grande longueur d'onde. Si un signal optique autre que la pompe et de plus grande longueur d'onde est injecté à l'entrée du cristal, alors ce signal sera amplifié, celui-ci stimulant localement la génération de paires de photons à

partir de photons pompes. Ce phénomène est appelé amplification paramétrique. Mais en l'absence de signal d'entrée, la génération des paires de photons est commandée par le bruit quantique du vide. On parle alors de fluorescence paramétrique ou conversion basse spontanée (SPDC) lorsque le gain est faible de telle sorte qu'il n'existe aucune émission stimulée due aux paires générées. Le vide en mécanique quantique n'est pas une absence absolue. Concernant le champ électromagnétique, qui nous intéresse particulièrement, bien que sa moyenne soit nulle dans une situation de vide et donc qu'il ne soit pas décelable par une mesure d'intensité, le champ subit toujours des fluctuations. C'est en quelque sorte l'influence de ces fluctuations quantiques du vide se substituant à un signal qui fait naître la fluorescence paramétrique.

On le voit donc, l'origine même de cette fluorescence est essentiellement quantique, et celle-ci va en conséquence vérifier par certains aspects un comportement quantique. En particulier, les photons de la fluorescence qui ont pour origine le même photon pompe sont intriqués entre eux et, comme nous allons le voir, ils vont afficher des corrélations de type EPR.

1.5.1 Description classique de l'amplification paramétrique.

Lorsqu'une onde traverse un milieu diélectrique, une polarisation non linéaire s'ajoute à la polarisation linéaire du milieu induite par cette onde [Yariv, 1989], [Boyd, 2003]. Dans les milieux anisotropes ne possédant pas de centre de symétrie, la polarisation quadratique apporte la plus forte contribution aux phénomènes non linéaires. Aussi, l'écriture de la polarisation totale du milieu peut se limiter à :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \tilde{\mathbf{E}} + \chi^{(2)} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{E}} \right) \quad (1.97)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide, $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(2)}$ tenseurs d'ordre 2 et 3, sont respectivement les susceptibilités linéaire et quadratique du milieu et $\tilde{\mathbf{E}}$ est le champ électrique. Parmi les processus de mélange à trois ondes comme la génération de somme de fréquence, l'effet Pockels ou encore la rectification optique, seule l'amplification paramétrique nous intéresse. Aussi les résultats de cette partie se limiteront à ce seul phénomène.

Supposons que deux ondes planes cohérentes se propagent dans un milieu non linéaire quadratique (figure 1.1)

- Une onde de pompage, ou *onde pompe*, intense, de pulsation ω_p et de vecteur d'onde \mathbf{k}_p :

$$\tilde{\mathbf{E}}_p = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_p e^{-i(\omega_p t - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})} + c.c. \right) \quad (1.98)$$

- Une onde de signal, ou *onde signal*, de pulsation $\omega_s < \omega_p$ et de vecteur d'onde \mathbf{k}_s

$$\tilde{\mathbf{E}}_s = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_s e^{-i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r})} + c.c. \right) \quad (1.99)$$

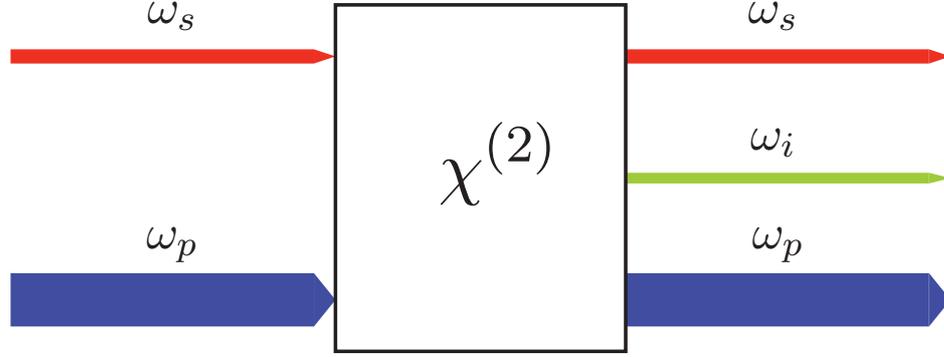


FIGURE 1.1 – Schéma de principe de l'amplification paramétrique.

La présence de ces deux ondes entraînent, entre autres, l'apparition d'une nouvelle onde de polarisation à la fréquence $\omega_p - \omega_s$:

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(\omega_p - \omega_s)} = \frac{\epsilon_0}{2} \chi^{(2)}(\omega_p - \omega_s; \omega_p, \omega_s) \left\{ \mathbf{A}_p \mathbf{A}_s^* e^{-i[(\omega_p - \omega_s)t - (\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}]} \right\} \quad (1.100)$$

qui peut donner lieu à la ré-émission d'une onde lumineuse, appelée onde *idler*, de même fréquence et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$.

On peut alors chercher à propager ces ondes dans le milieu non linéaire. Par résolution des équations de Maxwell dans un milieu sans pertes, pour une direction de propagation z commune aux trois ondes et dans l'approximation des enveloppes lentement variables, on obtient l'évolution des champs électriques suivante [Yariv, 1989], [Boyd, 2003] :

$$\frac{dA_s}{dz} = -i \frac{\omega_s^2 d_{eff}}{k_s c^2} A_p A_i^* e^{-i\Delta k z} \quad (1.101)$$

$$\frac{dA_i}{dz} = -i \frac{\omega_s^2 d_{eff}}{k_i c^2} A_p A_s^* e^{-i\Delta k z} \quad (1.102)$$

$$\frac{dA_p}{dz} = -i \frac{\omega_s^2 d_{eff}}{k_p c^2} A_s A_i e^{-i\Delta k z} \quad (1.103)$$

avec $k_j = \frac{n_j \omega_j}{c}$ où les n_j sont les indices de réfraction du milieu aux fréquences ω_j , avec $j \in \{s, i, p\}$. $\Delta k = k_p - k_s - k_i$ est le désaccord de phase. Enfin d_{eff} est la susceptibilité linéaire effective qui tient compte des états de polarisation des ondes considérés et des éléments du tenseur de susceptibilité non-linéaire.

Si les fréquences et les vecteurs d'onde de ces trois ondes vérifient les conditions suivantes, alors cette interaction conduit à l'amplification de l'onde signal, accompagnée de la naissance et de l'amplification de l'onde idler au détriment de l'onde pompe :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad (1.104)$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i \quad (1.105)$$

où ω_i et \mathbf{k}_i désignent la pulsation et le vecteur d'onde de l'idler. Ces conditions traduisent la conservation de l'énergie (1.104) et la condition d'accord de phase ou synchronisme de phase (1.105), qui impose qu'en chaque point du milieu l'onde idler émise par la polarisation non linéaire soit en phase avec l'idler qui préexiste due à son émission en amont. Cette dernière condition pourra toutefois n'être que partiellement respectée si le cristal n'est pas infiniment long.

La pompe étant d'intensité très grande devant l'intensité des autres ondes du mélange, sa variation d'intensité pourra être négligée. On pose donc :

$$\frac{dA_p}{dz} = 0 \quad (1.106)$$

d'où $A_p(z) = A_p(0)$ où la position $z = 0$ correspond à l'entrée du milieu non-linéaire. Le problème se simplifie donc, aussi :

$$A_s(z)e^{i\Delta kz/2} = A_s(0) \left\{ ch(gz) + \frac{i\Delta k}{2g} sh(gz) - \frac{\kappa_s}{g} A_i^* sh(gz) \right\} \quad (1.107)$$

$$A_i(z)e^{i\Delta kz/2} = A_i(0) \left\{ ch(gz) + \frac{i\Delta k}{2g} sh(gz) - \frac{\kappa_i}{g} A_s^* sh(gz) \right\} \quad (1.108)$$

avec $g = \sqrt{\kappa_s \kappa_i^* - (\Delta k/2)^2}$ et $\kappa_j = \frac{2i\omega_j^2 d_{eff}}{k_j c^2} A_p$. Si deux ondes signal et pompe seulement sont à l'entrée du cristal alors le phénomène peut être initié, le signal stimulant la production de l'onde idler. Toutefois, si seule la pompe est présente à l'entrée de l'amplificateur i.e. $A_s(0) = A_i(0) = 0$ alors $A_s(z) = A_i(z) = 0$, aucune émission ne semble possible et le formalisme classique utilisé ici ne prévoit rien de plus que la propagation de l'onde pompe. Pourtant expérimentalement, même si l'on assure l'absence de tout bruit mesurable en intensité aux pulsations ω_s et ω_i , alors la seule présence de la pompe conduit à l'apparition d'une fluorescence. Ce phénomène est appelé SPDC (Spontaneous Parametric Down Conversion) et s'explique par le fait que malgré l'absence de toute intensité, le champ électrique reste soumis au bruit fondamental que sont les fluctuations quantiques du vide. Sous l'influence de ces fluctuations, une émission spontanée va être amorcée avant de conduire éventuellement à une réémission explicable elle classiquement par amplification.

1.5.2 Description quantique de la SPDC.

La fluorescence paramétrique ou SPDC (Spontaneous Parametric Down Conversion) ne peut se décrire que quantiquement, nous allons donc chercher à appliquer les règles de quantifications exposées dans la section §1.2 pour obtenir un Hamiltonien quantifié, qui nous permettra d'obtenir une expression théorique de l'état de la fluorescence paramétrique.

Pour commencer, on décompose le champ en termes de fréquences positives et négatives :

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad \text{avec } j = \{s, i, p\} \quad (1.109)$$

Rappelons que $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^*$. L'Hamiltonien d'interaction classique entre le champ électro-magnétique et un milieu diélectrique non linéaire caractérisé par le tenseur de susceptibilités quadratique $\chi^{(2)}$ est donné par l'expression suivante [Kleinman, 1968], [Pershan, 1963] :

$$H_I = -2\epsilon_0\chi \int_W d\mathbf{r} \left[E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) + c.c. \right] \quad (1.110)$$

où W est le volume occupé par le cristal. Dans cette expression, les champs sont considérés comme des quantités scalaires, les directions de polarisation des champs sont prises en compte dans le coefficient effectif de non-linéarité χ . Partant de (1.110), la dynamique classique des ondes se retrouve en identifiant les variables canoniquement conjuguées et en dérivant l'Hamiltonien total $H = H_R + H_I$ où H_R correspond à l'Hamiltonien du champ électromagnétique libre. Typiquement les parties réelles et imaginaires de $E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ seront canoniquement conjuguées puisque ces quantités peuvent s'exprimer comme combinaison linéaires des variables normales, elles-mêmes canoniquement conjuguées entre elles, de sorte à satisfaire aux conditions sur les crochets de Poisson [Cohen-Tannoudji et al., 1987] cf. (1.43) et (1.45). Dès lors, on voit bien que au vu de la forme des équations de Hamilton (1.46), la contribution de H_I va correspondre à l'émission d'un champ qui va s'ajouter aux variables dynamiques et la contribution de H_R va elle avoir tendance à faire diminuer l'amplitude locale de ces champs en gouvernant la propagation des ondes. Ainsi, si on cherche, en partant des expressions déduites des équations de Hamilton, à suivre les ondes dans le sens z de la propagation plutôt que d'en observer l'évolution temporelle locale, on retrouvera les équations de propagation (1.101), (1.102) et (1.103).

Tout l'intérêt de la formulation Hamiltonienne est de permettre d'opérer de façon explicite à la quantification des champs. Pour cela introduisons les variables classiques $\tilde{E}_{l_s}^{(+)}$, $\tilde{E}_{l_i}^{(+)}$ et \tilde{E}_p :

$$\begin{aligned} E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l_s} \tilde{E}_{l_s}^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{l_s} \cdot \mathbf{r}} \\ E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l_i} \tilde{E}_{l_i}^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{l_i} \cdot \mathbf{r}} \\ E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{E}_p^{(+)} f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.111)$$

Ces nouvelles variables vont trouver leurs contreparties quantiques et l'on va maintenant procéder à la quantification des champs. Ici, la décomposition des ondes en pulsations s'effectue à travers l'indice l . On négligera tous termes qui ne sont pas lentement variables, ce qui impose que les ondes en considération vérifient $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, sans

quoi, sur un temps d'intégration assez long les contributions du mélange des trois ondes à l'Hamiltonien s'annuleraient. En fait des processus $\omega_p \neq \omega_s + \omega_i$ ne sont pas exclus mais ce désaccord en énergie trouve son pendant temporel, l'ensemble devant satisfaire le principe d'incertitude de Heisenberg (càd classiquement une loi de Fourier) de type temps-énergie. Aussi, en imposant $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ on perd une résolution temporelle des ondes qui ne nous intéresse pas.

L'Hamiltonien d'interaction (1.110) peut donc être réécrit après quantification, et puisque la mécanique quantique sous-jacente doit faire resurgir les résultats classiques :

$$\hat{H}_I = -2\epsilon_0\chi \sum_{l_s} \sum_{l_i} \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) \left[f(\mathbf{k}_{l_s} + \mathbf{k}_{l_i}) \hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_{l_s}^{(-)} \hat{E}_{l_i}^{(-)} + f^*(\mathbf{k}_{l_s} + \mathbf{k}_{l_i}) \hat{E}_p^{(-)} \hat{E}_{l_s}^{(+)} \hat{E}_{l_i}^{(+)} \right] \quad (1.112)$$

avec

$$f(\mathbf{k}) = \int_W d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.113)$$

Le premier terme de cet Hamiltonien peut être développé en $\hat{a}_p \hat{a}_{l_s}^\dagger \hat{a}_{l_i}^\dagger$ qui correspond au processus d'annihilation d'un photon pompe accompagné de la création d'un photon signal et d'un photon idler. Le second terme peut être développé en $\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{l_s} \hat{a}_{l_i}$ il correspond au processus inverse créant un photon pompe par annihilation d'un photon signal et d'un photon idler. On comprend bien alors pourquoi le fait d'avoir pu factoriser χ devant le terme $E_p(\mathbf{r})E_s^*(\mathbf{r})E_i^*(\mathbf{r})$ et son complexe conjugué correspond à l'hypothèse que le cristal est invariant par un retournement du temps.

On peut alors réécrire :

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{l_s} \sum_{l_i} g_{(l_s, l_i)} \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) \left(f(\mathbf{k}_{l_s} + \mathbf{k}_{l_i}) \hat{a}_p \hat{a}_{l_s}^\dagger \hat{a}_{l_i}^\dagger + c.h. \right) \quad (1.114)$$

avec

$$g_{(l_s, l_i)} = 2i \frac{\epsilon_0 \chi}{\hbar} \mathcal{E}_{l_s}^{(1)} \mathcal{E}_{l_i}^{(1)} \mathcal{E}_p^{(1)} \quad (1.115)$$

où les grandeurs $\mathcal{E}_{l_s}^{(1)}, \mathcal{E}_{l_i}^{(1)}$ et $\mathcal{E}_p^{(1)}$ fixent les définitions des variables normales choisies donc des opérateurs création et annihilation. Concrètement les valeurs seront prises pour rendre explicites les relations de commutations ainsi que l'expression de l'Hamiltonien du champ libre en fonction des opérateurs création et annihilation.

On peut alors déduire l'évolution du système lumineux dans le point de vue de Schrödinger en appliquant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.116)$$

où l'Hamiltonien total \hat{H} est donné par :

$$\hat{H} = \hat{H}_R + \hat{H}_I = \sum_{l_s} \hbar\omega_{l_s} \hat{a}_{l_s}^\dagger \hat{a}_{l_s} + \sum_{l_i} \hbar\omega_{l_i} \hat{a}_{l_i}^\dagger \hat{a}_{l_i} + \sum_{l_p} \hbar\omega_{l_p} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{H}_I \quad (1.117)$$

En supposant que l'état initial s'écrit :

$$|\psi_i\rangle = |\psi(0)\rangle = |0, 0, N_p\rangle \quad (1.118)$$

Dans l'approximation perturbative qui néglige l'action du second ordre généré par l'application de l'Hamiltonien sur les termes de l'état non présent à l'instant initial⁴, on obtient :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_p(N_p+\frac{1}{2})t} \left(|0, 0, N_p\rangle - i\sqrt{N_p}t \sum_{l_s} \sum_{l_i} \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) \right. \\ \left. \times g_{(l_s, l_i)} f(\mathbf{k}_{l_s} + \mathbf{k}_{l_i}) |1_{l_s}, 1_{l_i}, N_p - 1\rangle \right) \quad (1.119)$$

N.b. : le processus de génération des photons pompes $\hbar\omega_s + \hbar\omega_i \rightarrow \hbar\omega_p$ n'existe pas ici du fait de l'hypothèse du développement perturbatif limité au premier ordre. De fait, au vu du seul état sur lequel agit alors l'Hamiltonien d'interaction, i.e. $|0, 0, N_p\rangle$, on peut s'apercevoir que tous les termes résultant de l'action des opérateurs annihilation \hat{a}_{l_s} et \hat{a}_{l_i} sont nuls.

N.b. : on pourrait avoir l'impression en observant l'équation (1.119) que les contributions à $|1_{l_s}, 1_{l_i}, N_p - 1\rangle$ vont se sommer localement et s'accumuler de façon artificielle, en fait il faut avoir en tête que le développement opéré suppose qu'à l'instant $t = 0$ où débute l'interaction non-linéaire, le champ pompe à l'intérieur du cristal est déjà établi et d'amplitude quasi-continue (à l'annihilation des photons pompes près). Ici les caractéristiques d'évolution temporelle sont réduites à leur minimum. Ainsi, si au bout de dt l'interaction est interrompue, le terme $-i\sqrt{N_p}dt \sum_{l_s} \sum_{l_i} \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) g_{(l_s, l_i)} f(\mathbf{k}_{l_s} + \mathbf{k}_{l_i}) |1_{l_s}, 1_{l_i}, N_p - 1\rangle$ correspondant à l'instant initial d'émission sera seul subsistant et sa dynamique sera alors guidée par le terme $e^{-i\omega_p(N_p+\frac{1}{2})t}$ qui se charge de la propagation de la fonction d'onde et qui a pour origine l'Hamiltonien du champ libre H_R . Rappelons que $\omega_p = \omega_s + \omega_i$. La solution (1.119) peut donc être vue comme l'accumulation cohérente d'instantanés élémentaires d'émissions qui sont tous propagés au fur et à mesure par le terme en facteur $e^{-i\omega_p(N_p+\frac{1}{2})t}$.

On va maintenant s'intéresser uniquement à la partie du vecteur d'onde décrivant l'état des photons signaux et idlers. On peut alors, compte tenu de (1.119), écrire cet état :

$$|\psi(t)\rangle_{(i,s)} = \xi_{dis}(t) \sum_{l_s} \sum_{l_i} g_{(l_s, l_i)} \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) f(\mathbf{k}_{l_s} + \mathbf{k}_{l_i}) |1_{l_s}, 1_{l_i}\rangle \quad (1.120)$$

où $\xi_{dis}(t)$ est une fonction complexe du temps qui décrit la dynamique du système. En passant maintenant en notation continue et dans une forme plus conventionnelle

4. L'hypothèse suppose ici un gain faible.

[Saleh et al., 2000] :

$$|\psi(t)\rangle_{(i,s)} = \xi(t) \iint d\mathbf{k}_s d\mathbf{k}_i g_{(l_s, l_i)} \phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_s) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_i) |0, 0\rangle \quad (1.121)$$

où $\phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) f(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i)$ et $\xi(t) \propto \xi_{dis}(t)$ tient compte des facteurs de passage du cas discret au cas continu. On le voit donc, l'état de la fluorescence paramétrique est un état non-séparable 1.5 et présente des propriétés d'intrication des particules signal et idler.

On va maintenant chercher à analyser les caractéristiques des corrélations spatiales qui sont décrites par la fonction $\phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$ que l'on va transformer sous une forme plus explicite. Par définition (1.113) :

$$\phi(\mathbf{k}) = \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) \int_W d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.122)$$

$$= \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) \int \text{rect}_W(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (1.123)$$

On peut alors chercher à faire apparaître le spectre spatial de la pompe ainsi que de la fonction $\text{rect}_W(\mathbf{r})$:

$$\phi(\mathbf{k}) = \iiint d\mathbf{r} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}_p \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) h(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_p) f(\mathbf{k}_p) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \quad (1.124)$$

où l'on a utilisé les définitions :

$$h(\mathbf{k}) = \int \text{rect}_W(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (1.125)$$

$$f(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.126)$$

Enfin, on peut arriver à la forme simplifiée en faisant apparaître la fonction de Dirac $\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$:

$$\phi(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k}_p \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) h(\mathbf{k} - \mathbf{k}_p) f(\mathbf{k}_p) \quad (1.127)$$

La fonction guidant les corrélations des impulsions paraît donc comme étant la convolution du spectre de la pompe par une fonction h qui peut être interprétée comme la fonction échantillonnage des fréquences spatiales par le milieu non linéaire compte tenu de sa taille. Mais intéressons nous à cette fonction h :

$$h(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) = \int \text{rect}_W(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (1.128)$$

En supposant le milieu W de longueur L et d'extension transverse infinie, on trouve après intégration :

$$h(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) = \delta(\mathbf{k}_s^\perp + \mathbf{k}_i^\perp - \mathbf{k}_p^\perp) \frac{e^{i\Delta k_z L} - 1}{i\Delta k_z} \quad (1.129)$$

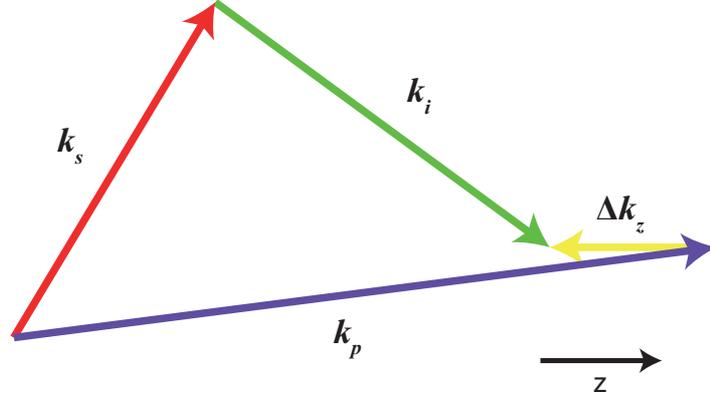


FIGURE 1.2 – Configurations de vecteurs d'ondes admises par la condition d'accord de phase (1.129).

où $\Delta k_z = k_s^z + k_i^z - k_p^z$ avec \mathbf{k}_p^z la composante du vecteur \mathbf{k}_p selon l'axe de propagation z et \mathbf{k}_j^\perp est sa composante dans le plan xy . On a donc des corrélations qui respectent des condition d'accord de phase d'autant plus strictes que le cristal est long. Sur la figure 1.2 est présentée une configuration permise par la condition 1.129.

Pour résumer, l'état de la SPDC prend la forme non séparable suivante :

$$|\psi\rangle = \xi \iint d\mathbf{k}_s d\mathbf{k}_i g_{(l_s, l_i)} \phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_s) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_i) |0, 0\rangle \quad (1.130)$$

avec :

$$\phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = \int d\mathbf{k}_p \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) f(\mathbf{k}_p) \delta(\mathbf{k}_s^\perp + \mathbf{k}_i^\perp - \mathbf{k}_p^\perp) \frac{e^{i\Delta k_z L} - 1}{i\Delta k_z} \quad (1.131)$$

On va chercher à identifier cet état avec un état EPR. Pour cela, on suppose que le cristal tend à être infiniment fin et que la pompe est une onde plane de vecteur d'onde parallèle à l'axe z de propagation $\mathbf{k}_0 = k_p \mathbf{e}_z$. On a donc les deux conditions :

$$L \rightarrow 0 \quad (1.132)$$

$$f(\mathbf{k}_p) = \delta(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_0) \quad (1.133)$$

avec $\mathbf{k}_0^\perp = 0$, alors :

$$\phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = \int d\mathbf{k}_p \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) \delta(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_0) \delta(\mathbf{k}_s^\perp + \mathbf{k}_i^\perp - \mathbf{k}_p^\perp) \quad (1.134)$$

$$= \delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p) \delta(\mathbf{k}_s^\perp + \mathbf{k}_i^\perp) \quad (1.135)$$

Ainsi, on retrouve bien des corrélations transverses parfaites entre signal et idler dans l'espace des impulsions. Toutefois, ces corrélations ne s'étendront à tout le plan transverse des impulsions que si $\omega_p \rightarrow \infty$ puisque la condition $\delta(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_p)$ contraint

la taille des vecteurs d'onde candidats à l'intégration donc par conséquent celles de \mathbf{p} . Sans cette condition, les corrélations en champ proche qui s'obtiennent en prenant la transformée de Fourier de (1.135) ne seront pas parfaites. On comprend donc bien que l'état EPR n'est pas physique, puisqu'il nécessite un cristal infiniment fin et une onde pompe plane et d'énergie infinie. L'état EPR apparait toutefois comme la limite d'un état physique qui est celui de la SPDC.

Pour terminer cette partie on peut décrire les corrélations transverses en position et en impulsion dans le cas non idéal, c.à.d. ne respectant ni (1.132), ni (1.133). Puisque seules les composantes transverses nous intéressent, les détections de positions et d'impulsions vont correspondre aux positions de détection des photons dans le plan image situé au milieu du cristal et dans le plan de Fourier associé pour les impulsions. On parlera alors respectivement de corrélations en champ proche et en champ lointain. De sorte à pouvoir passer de façon analytique du champ proche au champ lointain, il est possible d'utiliser une approximation gaussienne pour l'enveloppe pompe, mais aussi pour l'accord de phase (1.129). On obtient alors les fonctions d'ondes suivantes exprimées dans les plans transverses du champ proche et du champ lointain respectivement (voir [Tasca et al., 2009]) :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|^2}{4\sigma_p^2}\right) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{4\sigma_\phi^2}\right) \quad (1.136)$$

$$\Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{N\pi^2} \exp\left(-\sigma_p^2 \frac{|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|^2}{4\hbar^2}\right) \exp\left(-\sigma_\phi^2 \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2}{4\hbar^2}\right) \quad (1.137)$$

Où σ_P est l'écart type de la pompe gaussienne, et σ_ϕ l'écart type défini en champ proche de la condition d'accord de phase. Dans les conditions expérimentales qui seront rencontrées dans le cadre de ce manuscrit, $\sigma_P \gg \sigma_\phi$ de telle sorte qu'on aura des corrélations en champs proches dont la largeur sera imposée par l'accord de phase, et des anti-corrélations en champ lointain de largeur liée à la largeur de la pompe.

1.6 Démonstrations du paradoxe EPR dans le domaine spatial, état de l'art.

1.6.1 Démonstrations expérimentales du paradoxe EPR.

La première tentative de démonstration du paradoxe EPR sous sa forme introduite par Bohm, c'est à dire utilisant le degré de liberté de type spin, date de 1948 [Bleuler and Bradt, 1948]. L'expérience consistait alors à observer la polarisation de photons gamma issus de la désintégration de positrons. Toutefois, dans ce cas, la très faible

efficacité des détecteurs conduisant à la nécessité d'effectuer une post-sélection importante, fait que ces résultats précurseurs sont aujourd'hui discutés comme démonstration du paradoxe [Reid et al., 2009].

La première réalisation en variables continues date de 1992 [Ou et al., 1992]. Il a fallu attendre la formulation par Reid de son critère pratique (1.15) pour que soit rendue possible une telle démonstration. Dans cette expérience, plutôt que d'utiliser les positions et impulsions comme dans l'expérience de pensée originelle d'EPR, d'autres variables ont été utilisées, à savoir les quadratures amplitude et phase du champ optique. Suivant la proposition de Reid et Drummond [Reid and Drummond, 1988] les corrélations EPR ont été générées dans un oscillateur paramétrique (ou cavité OPO) fonctionnant en dessous du seuil et pour un accord de phase de type II. Les voies signal et idler étaient alors séparées en polarisation en sortie d'OPO et une détection homodyne leur était ensuite indépendamment appliquée. Le degré de paradoxe obtenu dans le cadre de cette première démonstration expérimentale est de $K = 1.43$, conduisant effectivement à la démonstration d'un paradoxe EPR.

Il est à noter que jusqu'à présent aucune expérience EPR n'a encore été réalisée avec une séparation causale des mesures, c'est à dire que les détecteurs peuvent toujours s'échanger de l'information sur leur base de mesure utilisée avant que les résultats de chaque côté soient obtenus. On parle de séparation suivant un intervalle de genre espace dans la cadre de la relativité restreinte. Toutefois, comme nous l'avons vu dans la partie §1.1, la mesure d'une violation des inégalités de Bell implique en particulier un comportement de type EPR et les expériences de Bell réalisées par le passé respectent elles cette séparation spatiale [Aspect et al., 1982a].

A ce jour, l'expérience ayant abouti au plus haut degré de paradoxe par l'utilisation des quadratures du champ à été réalisée par Steinlechner *et al.* [Steinlechner et al., 2013]. L'intrication est ici générée en utilisant deux faisceaux squeezés [Breitenbach et al., 1997] recombinaés à l'aide d'une lame semi-réfléchissante et l'expérience a conduit à la détection d'un degré de paradoxe d'une valeur de $K = 25$.

1.6.2 Démonstrations dans le domaine spatial.

D'autres réalisations expérimentales dans le domaine spatial, donc plus proches de la formulation originelle du paradoxe, ont été conduites. De telles démonstrations consistent en la détection de corrélations spatiales en position, donc en champ proche, et en impulsion, donc en champ lointain.

La détection de corrélations spatiales dans les faisceaux de fluorescence paramétrique a précédé de telles démonstrations, la plupart étant mesurées uniquement en champ lointain. La première démonstration de ce type de corrélations a été effectué en 1985 par Malygin *et al.* [Malygin et al., 1985]. En outre, de telles corrélations ont été mises à profit dans le cadre du Ghost Imaging [Strekalov et al., 1995, Pittman et al., 1995]. Ce phénomène consiste à retrouver grâce aux corrélations l'image d'un objet qui n'interagit

qu'avec l'une des voies sur laquelle est placé un détecteur de photons sans résolution spatiale. On retrouve alors l'image et sa résolution grâce à la résolution conservée sur la voie qui n'interagit pas avec l'objet et par la mesure des corrélations qui subsistent après l'objet. Il a toutefois par la suite été démontré qu'un tel phénomène n'avait pas de nature intrinsèquement quantique. Il a ainsi pu être démontré en utilisant une source classique [Bennink et al., 2002, Gatti et al., 2004] puis en s'affranchissant de la détection des corrélations optiques [Shapiro, 2008].

La première réalisation consistant à détecter des corrélations en champ proche et en champ lointain date de 2004 par Howell *et al.* [Howell et al., 2004]. Leur expérience consiste à utiliser des fentes placées devant des photodiodes capables de compter les photons pour détecter des coïncidences spatiales dans des faisceaux de SPDC présentant un accord de phase de type II. Leur schéma expérimental est reproduit sur la figure 1.3. Les fentes sont successivement placées en champ proche puis en champ lointain. Seule l'une des fentes est translatée de sorte à observer l'évolution spatiale des corrélations, c'est à dire que l'on opère une translation des fentes en champ lointain et en champ proche mais seulement pour l'une des parties. Il est ensuite montré par une modélisation gaussienne que le produit des largeurs des probabilités conditionnelles $P(x_B|x_A)$ et $P(p_B|p_A)$, où seuls x_B et p_B varient, est sub-Heisenberg avec un degré apparent de paradoxe de $K = 100$. Pour autant il apparaît discutable de qualifier cette réalisation de démonstration du paradoxe EPR. Comme nous le montrons dans la partie suivante, le fait que les fentes ne soient pas translatées pour l'une des deux parties fait que deux sous-systèmes distincts entre eux sont mis en jeu dans la démonstration. Ceci conduit à une inconsistance de la démonstration et nous montrons plus loin que l'on peut alors trouver un modèle de LHS qui reproduit les résultats expérimentaux ainsi obtenus. Pour une démonstration effective d'un steering de type EPR, il faudrait intégrer les variances mises en jeu dans le test du principe de Heisenberg sur l'ensemble du plan transverse des ondes tel que suggéré par les développements de Reid (cf. équation 1.15). Enfin une autre critique suggérée dans [Reid et al., 2009] peut être portée à cette réalisation : en effet les données utilisées pour démonter le paradoxe EPR sont post-sélectionnées et seuls les événements correspondant effectivement à des coïncidences ont été gardés. Une démonstration EPR sans a priori doit conserver toutes les données de détection et faire émerger les caractéristiques EPR de ces données.

Plus récemment, une autre réalisation expérimentale à été conduite [Leach et al., 2012]. L'intérêt de cette expérience est l'absence de tout déplacement malgré l'utilisation d'une seule photodiode à avalanche sur chaque voie. Ici les positions sont détectées par l'intermédiaire de différentes fibres alignées selon une dimension. Toutes ces fibres sont liées sur chaque voie au même détecteur mais sont de différentes longueurs de sorte que la position d'arrivée des photons est signalée par une détection temporelle plus ou moins retardée. Des corrélations en champ proche et en champ lointain ont ainsi pu être détectées et une violation du principe d'incertitude pour les corrélations mise en évidence. Toutefois, là encore, comme nous allons le montrer dans ce qui suit, une telle

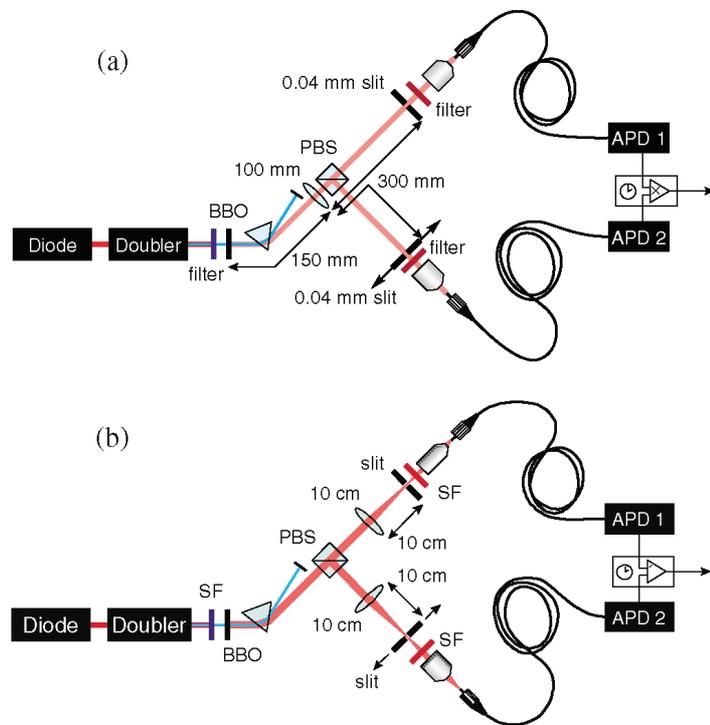


FIGURE 1.3 – Schémas expérimentaux de [Howell et al., 2004]. Schémas reproduits de cette même référence. (a) Champ proche. (b) Champ lointain.

violation du principe d'incertitude de Heisenberg n'a pas de sens lorsque qu'une détection monodimensionnelle est appliquée. De façon plus générale, une démonstration de type EPR ne sera pas consistante lorsque deux systèmes quantiques distincts seront mis en jeu dans les mesures effectuées en champ proche d'une part et en champ lointain d'autre part. Dans un tel cas, nous montrons dans ce qui suit qu'il sera possible de définir un modèle de LHS qui reproduira les résultats expérimentaux. Cette démonstration, comme la précédente, est donc discutable comme démonstration du paradoxe EPR, mais nous allons voir en détail pourquoi dans la section suivante.

Citons enfin deux autres réalisations hybrides [Wagner et al., 2008, Boyer et al., 2008] démontrant des corrélations de type EPR sur la position et l'impulsion moyenne de faisceaux en détectant leurs déplacements à l'aide d'une détection homodyne [Hsu et al., 2005].

1.6.3 Démonstration du principe d'incertitude de Heisenberg et contrainte sur la détection.

Nous montrons dans ce qui suit comment un faisceau classique peut paraître violer le principe d'incertitude de Heisenberg s'il est mesuré par une détection monodimensionnelle. Un tel état classique peut être construit en combinant deux faisceaux gaussiens cohérents. Tel qu'on peut le voir sur la figure 1.4, on somme deux faisceaux gaussiens de taille différente (a) et (b) pour construire l'état présenté en (c). Si une détection monodimensionnelle est alors effectuée sur ce dernier état c.à.d. en sélectionnant une ligne de pixels sur le profil d'intensité du faisceau à la fois en champ proche et en champ lointain, on obtient alors les distributions présentées sur la figure 1.5. Il est alors possible d'évaluer l'écart type de ces courbes de distribution d'intensité, de sorte à tester le principe d'incertitude de Heisenberg. Dans le cas qui nous intéresse, supposant une taille de pixel de $10 \mu m$ en champ proche, on obtient en champ proche $\sigma_x = 0.0733 mm$ et en champ lointain $\sigma_p = 5.51\hbar mm^{-1}$, ce qui donne un produit de

$$\sigma_x \sigma_p = 0.4039\hbar < \frac{\hbar}{2} \quad (1.138)$$

et donc en apparence une violation du principe d'incertitude de Heisenberg. Si les résultats présentés ici en (c) correspondent à une interférence des ondes (a) et (b), un résultat analogue a été obtenu sans interférence en sommant (a) et (b) en intensité. Bien sûr, la violation obtenue n'est qu'apparence, le principe d'Heisenberg est en fait vérifié par l'état classique que nous avons construit sur la figure fig. 1.4(c). Cet artefact est dû à un manque de consistance du test effectué du principe d'incertitude. L'inconsistance réside dans l'utilisation d'une mesure monodimensionnelle, alors que le principe d'incertitude appliqué aux dimensions transverses de l'espace s'identifie aux lois de la diffraction, phénomène essentiellement bidimensionnel. Concrètement, cela

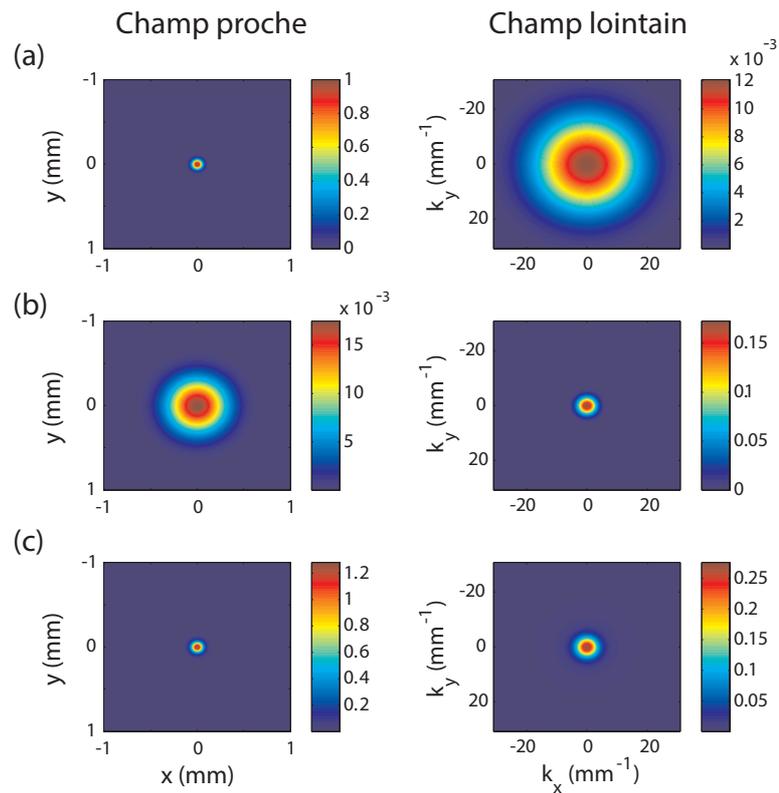


FIGURE 1.4 – Profil d'intensité des faisceaux en champ proche et en champ lointain. (a) Faisceau Gaussien avec un waist de $w_0 = 0.4525 \text{ mm}$. (b) Faisceau Gaussien avec un waist de $w_0 = 0.0847 \text{ mm}$. (c) Faisceau résultant de l'interférence des deux faisceaux précédents. Les 'colorbars' correspondent à des niveaux d'intensité exprimés dans une unité arbitraire.

signifie que σ_x et σ_p ont précédemment été évalués sur deux sous systèmes distincts. Par conséquent, le produit de ces écarts-types n'a pas de sens physique puisque composé par des propriétés de différents systèmes. Le principe d'incertitude de Heisenberg gouverne, lui, le comportement d'un système unique.

En fait, on peut se convaincre facilement que les deux systèmes précédemment impliqués en champ proche et en champ lointain ne sont pas les mêmes. Le système sélectionné par une détection 1-D en champ proche devrait diffracter dans l'ensemble du plan transverse en champ lointain, celui-ci se comportant comme si l'onde passait à travers une fente d'une largeur d'un pixel. Or, en champ lointain le système sélectionné n'existe que sur une ligne de pixels de l'espace de Fourier. En fait au centre du faisceau, la contribution de la plus petite gaussienne sera toujours favorisée à la fois en champ proche et en champ lointain. C'est cela qui conduit à l'apparente violation, puisque la gaussienne de plus grande taille est diluée dans les deux dimensions transverses de l'espace du fait de la bi-dimensionnalité intrinsèque du phénomène de diffraction. Pour les mêmes raisons, loin du centre, la contribution la plus importante est toujours celle de la gaussienne la plus large dans l'espace dans lequel les ondes sont observées. Ces contributions loin du centre doivent être prises en compte pour maintenir la consistance du test du principe d'incertitude de Heisenberg.

Par conséquent, de sorte à maintenir la consistance de la démonstration, l'évaluation de σ_x et σ_p doit être opérée sur le système lumineux complet en l'intégrant selon les deux dimensions spatiales transverses. En appliquant une telle intégration sur l'état présenté en figure 1.4(c), nous obtenons les écart-types $\sigma_x = 0.12 \text{ mm}$ et $\sigma_p = 8.54\hbar \text{ mm}^{-1}$ conduisant au produit suivant

$$\sigma_x \sigma_p = 1.029\hbar \tag{1.139}$$

qui satisfait donc le principe d'incertitude de Heisenberg tel que l'on pouvait s'y attendre.

Il est à noter que la démonstration du paradoxe EPR requiert la démonstration d'un comportement sub-Heisenberg pour les corrélations. Par conséquent, une telle démonstration doit être effectuée dans un contexte pour lequel Heisenberg peut être correctement testé et, en particulier, une démonstration EPR doit satisfaire le critère d'unicité du système sur lequel ce principe est testé. Par conséquent, le système de lumière complet doit être impliqué dans la démonstration à la fois en champ proche et en champ lointain. En particulier, seules les démonstrations impliquant une intégration bidimensionnelle seront consistantes.

Concernant plus directement la démonstration [Howell et al., 2004], puisque la détection pour l'une des parties est faite sans aucun déplacement on mesure pour cette partie une position x_A et une impulsion p_A . Ces deux mesures sont alors associées à deux distributions des résultats obtenus dans l'espace de l'autre partie $P(x_B|x_A)$ et

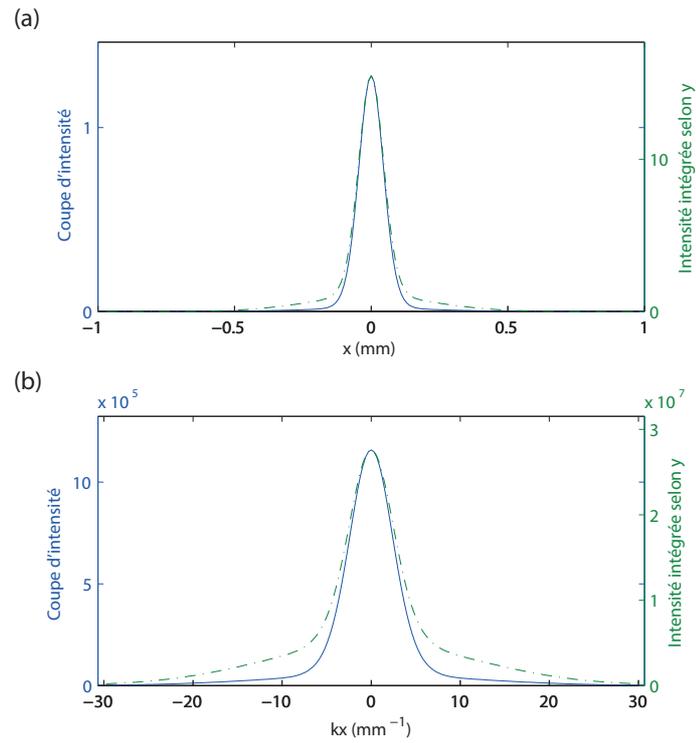


FIGURE 1.5 – En ligne bleu pleine : profils d'intensité monodimensionnels qui correspondent à la sélection d'une colonne de pixels $y = 0$ en champ proche (a) et en champ lointains (b). En lignes vertes pointillées : intensités correspondantes intégrées selon y . Les niveaux d'intensité sont exprimés en unité arbitraire.

$P(p_B|p_A)$. Il est alors montré que leurs variances sont sub-Heisenberg, c'est à dire que :

$$\Delta^2(x_B|x_A)\Delta^2(p_B|p_A) < \frac{\hbar^2}{4}$$

Mais puisque les autres coordonnées pour la partie A ne sont pas prospectées, on pourrait très bien imaginer établir un modèle de LHS à deux états distincts du type présenté par la formule (1.8) de telle sorte que $P(x_B|x_A)$ soit l'enveloppe champ proche du premier état noté ζ_{λ_1} et $P(p_B|p_A)$ soit l'enveloppe champ lointain du second noté ζ_{λ_2} . Les deux états étant distincts, les enveloppes $P(x_B|x_A)$ et $P(p_B|p_A)$ n'ont pas à respecter de loi de Fourier associée au principe d'incertitude. Un tel modèle est donc équivalent aux résultats expérimentaux de [Howell et al., 2004] si les variables cachées choisies vérifient $\lambda_1 = (x_A, p'_A)$ et $\lambda_2 = (x'_A, p_A)$ où les positions et impulsions x'_A et p'_A sont arbitraires mais différentes de x_A et p_A . En d'autres termes, les mesures x_A et p_A ne font pas partie de la même variable cachée. Puisque les seules mesures effectuées pour la partie A le sont en x_A et p_A , un tel modèle ne peut pas être exclu par les résultats de [Howell et al., 2004]. Pour corriger cela, il conviendrait de montrer qu'en moyenne, pour l'ensemble des couples (x_A, p_A) les enveloppes du type $P(x_B|x_A)$ et $P(p_B|p_A)$ violent le principe d'incertitude de Heisenberg, ainsi, on démontre l'échec d'un modèle à LHS. Le fait d'effectuer une telle observation moyenne revient à inclure dans la démonstration l'état de lumière complet, assurant là encore la consistance de la démonstration.

Paradoxe EPR dans les images.

Le but de ce chapitre est d'exposer comment il nous a été possible de démontrer un paradoxe EPR dans sa forme la plus proche de son esprit original en utilisant des images de photodétection délivrées par une caméra. Comme nous venons de le voir au chapitre précédent, ce mode d'acquisition a pour avantage de permettre une détection plein champ de la lumière observée, assurant la consistance de la démonstration sans avoir recours au déplacement de photo-détecteurs. Commençons par nous intéresser aux particularités de fonctionnement des caméras qui nous ont permis d'effectuer une telle démonstration.

2.1 Imager la position de photons grâce aux caméras CCD.

Depuis leur invention en 1965 par Willard Boyle and George E. Smith, les capteurs CCD ('Charge Couple Devices'), ou dispositifs à transfert de charges, ont été très diversement utilisés pour la capture des propriétés spatiales de la lumière. Du fait de leur haute efficacité quantique, de la linéarité de leur réponse et du faible courant d'obscurité qu'elles présentent lorsqu'elles sont refroidies, elles sont les dispositifs les plus adaptés pour de nombreuses applications d'imagerie. Elles ont ainsi pu servir à détecter des images à faible flux lumineux. Toutefois, les caméras CCD refroidies conventionnelles ne permettent pas d'atteindre un régime de comptage de photons, du fait du bruit qu'elles présentent.

2.1.1 Bruits dominants des caméras CCD et EMCCD.

Lorsque la quantité de lumière incidente sur un capteur CCD devient faible, le signal dû à la photodétection est dégradé par les divers bruits de la caméra. L'un des bruits qui apparaît dans de telles conditions est ce qu'on appelle le courant d'obscurité. Il correspond à la génération spontanée et thermique de paires électron-trou dans le matériau semi-conducteur structuré qui compose les capteurs CCD. L'électron généré peut alors être capturé dans le puits de potentiel électronique créé dans le matériau photosensible en vue de la collecte des photo-électrons. Un tel électron thermique passera alors pour un photo-électron. La première méthode utilisée pour réduire ce bruit est d'utiliser un potentiel d'inversion : on crée le puits de potentiel dans le matériau en imposant un potentiel négatif à l'électrode située en surface du matériau photo-sensible. On peut voir sur la figure 2.1 l'allure du potentiel créé en régime d'inversion, c'est à dire pour $V_g = -8V$. Ce mode d'utilisation limite en fait le courant d'obscurité généré à l'interface entre l'isolant SiO_2 et le semi-conducteur dopé. De fait pour une génération efficace de charges libres par effet thermique, les électrons qui doivent passer de la bande de valence à la bande de conduction du semi-conducteur ont besoin de la présence de niveaux d'énergie intermédiaires autres que ceux associés aux éléments dopant accepteurs ou donneurs. Ces niveaux existent grâce aux imperfections du semi-conducteur, qui agissent comme des pièges énergétiques et aident les charges à effectuer le passage vers la bande de conduction par effet de marche d'escalier, l'énergie nécessaire à ces transitions étant fournie aux charges thermiquement suivant une statistique de Boltzmann. L'interface $Si - SiO_2$ est, elle aussi, à même de fournir ces niveaux d'énergie supplémentaires. Or, en régime d'inversion, du fait de l'annulation du potentiel au niveau de l'interface et du caractère isolant du SiO_2 , des trous venus d'une partie du semi-conducteur appelé "channel stop" s'accumulent près de cette interface, cf. figure 2.1. La présence de ces trous a l'avantage de vider la bande de valence au niveau de l'interface, et d'imposer une recombinaison aux électrons libres qui pourraient y être générés. Nous le verrons plus loin, cette méthode a le désavantage de donner naissance à d'autres charges non issues de la photo-détection appelées CIC (Clock Induced Charges). Elle permet toutefois de limiter les courants d'obscurité de surface ; ne subsistent plus que les charges générées par courant d'obscurité dans le semi-conducteur.

Pour limiter la présence de ces charges d'obscurité générées en volume, il convient de refroidir le capteur CCD pour raréfier cette génération thermique de charges par abaissement de l'énergie thermique caractéristique $k_B T$. Toutefois, les caméras conventionnelles ainsi refroidies présentent toujours un bruit de lecture, c'est à dire un bruit dû à la phase de conversion des charges en tensions. Un tel bruit empêche la détection de photons uniques. De fait, ce bruit est de 1 à 2 électrons par lecture pour les caméras CCD les plus performantes [Jerram et al., 2001], [Barreto et al., 2012]. Les photo-électrons solitaires dans le cas de la détection d'un seul photon sont alors noyés

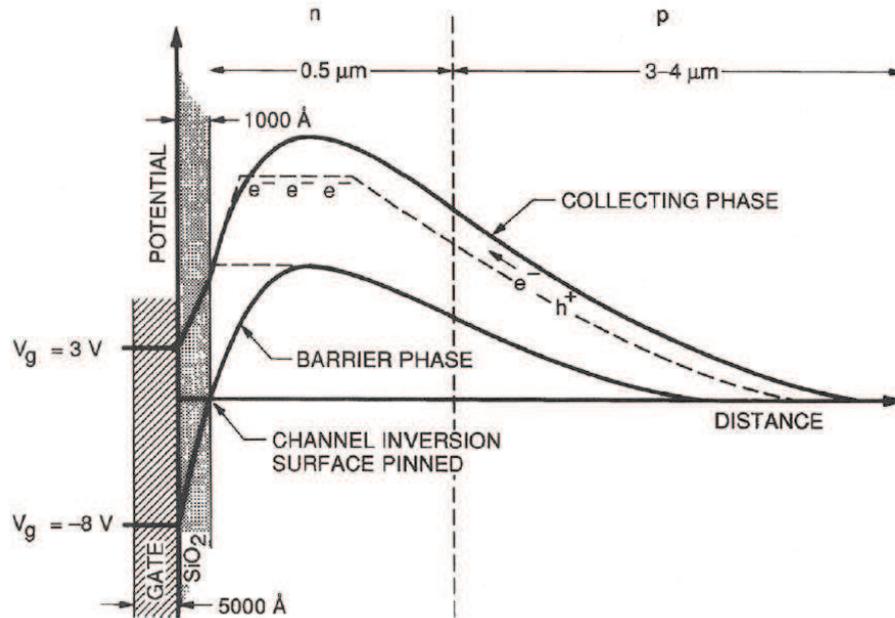


FIGURE 2.1 – Puits de potentiel pour la collecte des photo-électrons dans les caméras CCD. Source : [Janesick, 2001].

sous le bruit lors de la lecture.

Pour pallier cet effet, il a été proposé d'ajouter un registre d'amplification des charges avant lecture, donnant ainsi naissance à la technologie EMCCD ('Electron Multiplying Charge Couple Devices') cf. figure 2.2. Les électrons idéalement issus d'une photo-ionisation traversent alors un registre de gain étage par étage sous l'action d'une forte différence de potentiel telle qu'illustrée sur la figure 2.3. Cette accélération des électrons est alors à même de générer des ionisations par impact avec des charges non libres du semi-conducteur. L'énergie cinétique acquise par les porteurs libres au cours de cette forte accélération est alors transférée à ces électrons de la bande de valence. Ces électrons sont ainsi promus dans la bande de conduction du semi-conducteur, donnant naissance à un électron libre et à un trou. Les électrons ainsi générés suivent alors le reste des charges dans le puits de potentiel en mouvement qui crée leur transfert et leur amplification.

Le processus d'ionisation par impact est en fait le même que celui utilisé dans le processus d'amplification des photo-diodes à avalanche. Le gain par électro-multiplication pouvant atteindre une valeur moyenne de 1000, les photo-électrons solitaires ainsi amplifiés engendrent une quantité de charges parfaitement mesurable et qui s'extrait du

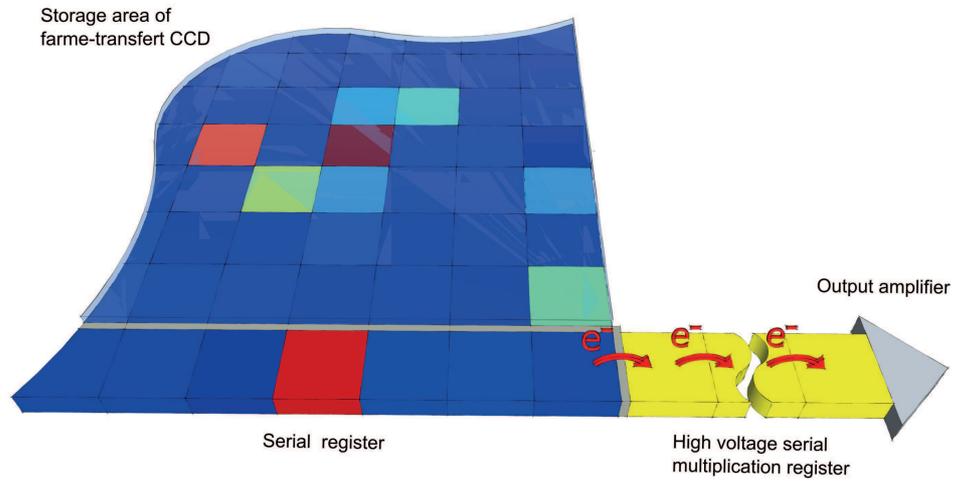


FIGURE 2.2 – Plan CCD avec registre de multiplication d'électrons.

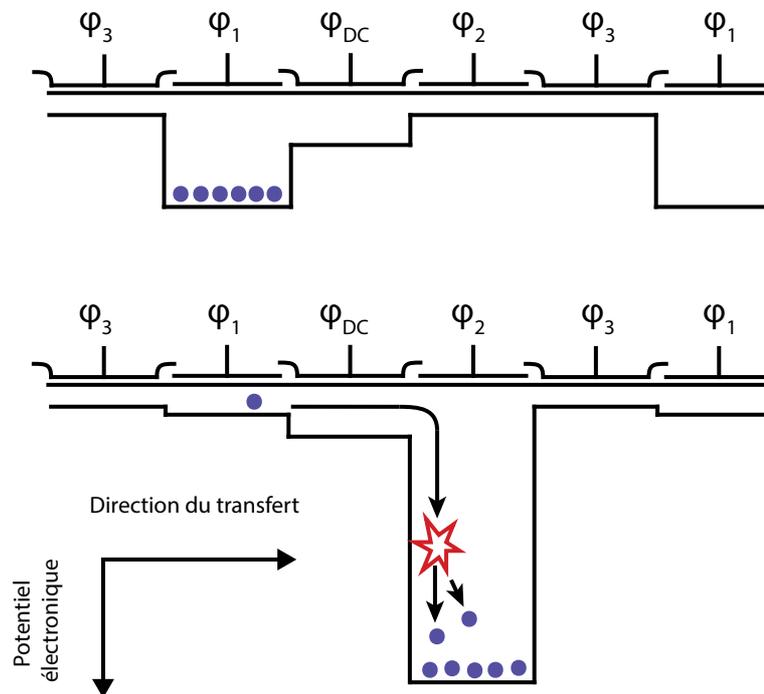


FIGURE 2.3 – Multiplication électronique au cours du transfert dans le registre de gain.

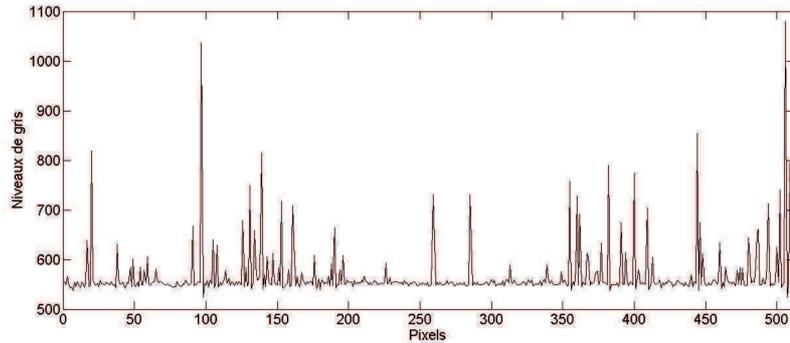


FIGURE 2.4 – Niveaux de gris d’une ligne de pixels d’une image en sortie de caméra.

bruit de lecture.

Une des caractéristiques importante du gain ainsi généré est qu’il est stochastique, comme on peut le voir sur les valeurs de sortie de caméra présentées pour une ligne de pixels en figure 2.4. Il peut alors être démontré [Hynecek and Nishiwaki, 2003] que, après division de la valeur du signal de sortie par le gain moyen, il résulte de l’opération d’amplification l’ajout d’un bruit appelé "excess noise" qui est Poissonien et de même amplitude que le bruit de photons (aussi appelé "shot noise"). Ces deux sources de bruit étant indépendantes, la variance alors obtenue dans les images de détection est deux fois supérieure à celle du seul bruit de photons.

Ainsi, Basden *et al.* [Basden et al., 2003] ont pu proposer une stratégie de comptage de photons permettant une correction partielle de cet "excess noise". Pour des images à bas niveau de lumière, très inférieur à un photon par pixel, les pixels sur lesquels ont été détectés zéro ou un photon peuvent être distingués en appliquant une méthode de seuillage. Une telle méthode peut alors être appliquée à une description réaliste des caméras EMCCD et de leurs bruits [Lantz et al., 2008]. La méthode consiste alors à prendre en compte les différents bruits et les différentes sources d’erreurs relatives au comptage de photon. Nous reviendrons dans la sous-partie §2.1.3 sur cette méthode et notamment la façon dont le niveau seuil est déterminé. Mais il convient d’abord de décrire un dernier bruit important des caméras EMCCD, à savoir le CIC (Clock Induced Charge). Ce bruit est dû à l’utilisation du régime d’inversion pour créer le puits de potentiel chargé de collecter et de participer au transfert des charges. Comme nous l’avons vu, ce régime d’inversion est nécessaire de sorte à limiter les courants d’obscurité d’interface.

Du fait de cette inversion de tension, une quantité importante de trous reste bloquée à l’interface $Si - SiO_2$, comme nous pouvons l’observer sur la représentation en coupe de la figure 2.5. La courbe de potentiel est ensuite sortie du régime d’inversion, pour entamer le transfert des charges collectées vers le puits de potentiel suivant lors de la phase de lecture. Cette sortie du régime d’inversion a un effet brutal pour les trous

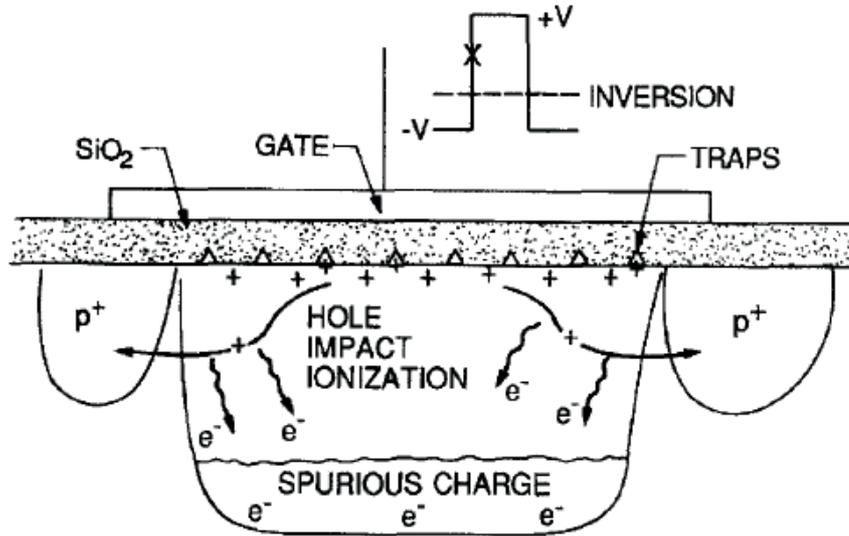


FIGURE 2.5 – Phénomène de création des électrons de CIC. Source : [Janesick, 2001].

stockés sur l'interface qui rejoignent alors le canal stop le plus proche accélérés sous l'effet d'une différence de potentiel. Cette accélération des trous est alors à même de produire des ionisations par impact avec des charges non libres du réseau de façon analogue au processus mis en jeu dans le registre d'amplification, à la différence du porteur qui donne lieu à l'impact, cf. figure 2.5. Les électrons ainsi générés sont alors stockés dans le puits de potentiel le plus proche avec les autres charges. L'électron ainsi créé a toutes les caractéristiques d'un photo-électron.

2.1.2 Niveau d'obscurité.

Nous cherchons maintenant à décrire quantitativement les principaux bruits qui se retrouvent dans les images fournies par les caméras EMCCD. Pour cela, nous allons chercher à estimer les différentes sources de bruits dans des images d'obscurité en cherchant à comparer le bruit présent dans les images aux modèles théoriques associés aux différentes sources. Nous verrons de plus, dans la sous-partie §2.1.3 qui suivra, que la caractérisation des bruits des images prises dans l'obscurité permettent de déterminer le niveau de seuil optimal en vue d'obtenir des images de photo-détection.

On va distinguer dans notre modèle trois sources de bruits, la première étant un bruit de lecture, les deux autres des bruit de CIC. On obtient alors par ordre d'importance :

- (1) Le bruit de lecture qui est un bruit gaussien d'écart type noté σ_{read} .
- (2) Le bruit associé au CIC généré lors des transferts intervenant au niveau du cap-

teur. De tels électrons subissent ensuite une amplification complète dans tout le registre d'amplification de la caméra. Définissant la probabilité p_{par} qu'un tel électron soit généré dans l'image avant amplification, les équations (2.4), que nous explicitons plus loin, relatives au processus d'amplification permettent de déduire la probabilité d'obtenir x_{par} électrons due à cet effet en sortie d'amplification :

$$p(x_{par}) = \begin{cases} p_{par}p(x_{par}|1) = \frac{p_{par} \exp(-x_{par}/g)}{g} & \text{si } x_{par} > 0 \\ 1 - p_{par} & \text{si } x_{par} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où g est le gain moyen du registre.

- (3) La dernière source non négligeable a en fait la même cause que la précédente, mais correspond à un autre modèle car n'intervient pas au même moment. Elle a pour cause la génération de CIC à l'intérieur même du registre de gain. Les électrons ne sont alors pas amplifiés par tous les étages du registre de gain, mais seulement par les étages restant. Il faut donc considérer dans l'expression (2.1) l'ensemble des étages où peuvent apparaître les charges et un gain qui dépend de cet étage. On définit pour cela la probabilité p_{ser} qu'un électron soit généré dans un étage donné du registre, p_c le gain moyen de chaque étage, et m le nombre d'étages de telle sorte que $g = p_c^m$. On a alors la probabilité d'obtenir x_{ser} électrons en sortie du registre d'amplification et pour l'ensemble des contributions :

$$p(x_{ser}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^m \frac{p_{ser} \exp(-x_{ser}/p_c^{m-l})}{p_c^{m-l}} & \text{si } x_{ser} > 0 \\ (1 - p_{ser})^m & \text{si } x_{ser} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

La probabilité $p(x|0)$ d'obtenir x électrons sans aucun photon détecté est obtenue en convoluant les probabilités associées aux trois causes précédentes. La figure 2.6 représente la distribution du nombre de pixels pour les différents niveaux de gris obtenus en sortie de caméra. La conversion du nombre d'électrons vers la valeur du niveau de gris est propre à la caméra utilisée et vaut ici $11,9e^-$ par niveau de gris. Les points verts correspondent aux données expérimentales et la courbe bleue à la modélisation opérée par le biais d'un algorithme de Gauss-Newton. Les données expérimentales sont obtenues à partir d'images prises dans l'obscurité.

La modélisation donne les valeurs suivantes qui quantifient les bruits prédominants :

$$\begin{aligned} p_{par} &= 3,9 \pm 0,3 \times 10^{-3} \\ p_{ser} &= 4,1 \pm 0,6 \times 10^{-5} \\ \sigma_{read} &= 46,2 \pm 0,1 \text{ électrons} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ces résultats vont maintenant permettre de déduire le niveau de seuil et le niveau d'illumination optimaux à utiliser en vue d'effectuer des photo-détections grâce aux images EMCCD.

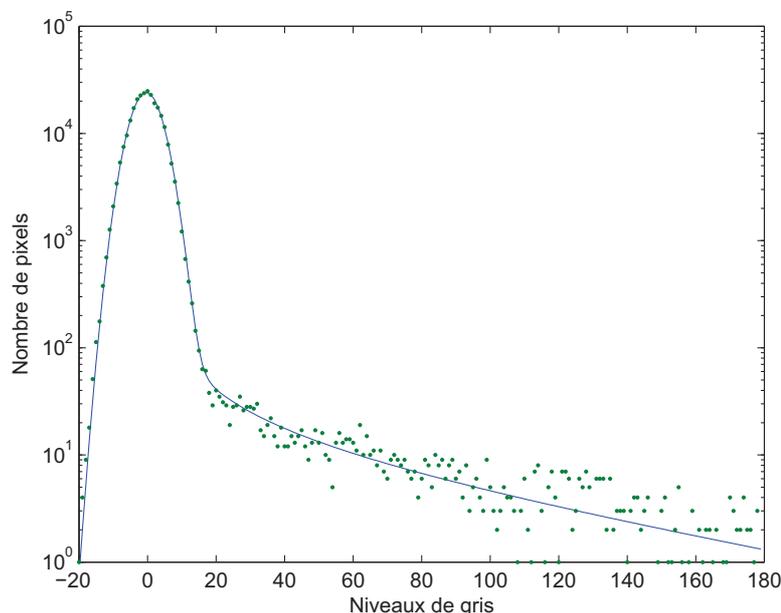


FIGURE 2.6 – Distribution du nombre de pixels selon leur niveau de gris en échelle semi-logarithmique, pour une acquisition dans l’obscurité.

2.1.3 Détermination du niveau du seuil.

Pour n photo-électrons à l’entrée, le registre de multiplication génère une sortie aléatoire contenant x électrons, avec une probabilité conditionnelle donnée par [Basden et al., 2003] :

$$p(x|n) = \frac{x^{n-1} \exp(-x/g)}{g^n (n-1)!} \quad (2.4)$$

où g est le gain moyen du registre de multiplication. Ces distributions de probabilité ont été représentées sur la figure 2.7. Il apparaît clairement sur cette figure que le problème inverse, donnant le nombre de photons détectés à partir du nombre d’électrons à la sortie de la caméra, n’a pas de solution unique. Ainsi l’on ne peut pas de façon générale, partant du niveau de gris donné par une caméra EMCCD, déduire le nombre de photons qui ont été détectés.

Il existe toutefois une exception à cette impossibilité d’identifier le nombre de photons détectés si l’on suppose l’absence de tout bruit de capture des images. En effet, suivant cette hypothèse, l’absence de photons à l’entrée du capteur conduit à un nombre d’électrons nul en sortie d’amplificateur. Ainsi, on peut distinguer l’absence ou la présence de photons détectés.

Cependant, comme nous l’avons vu précédemment, les caméras EMCCD présentent

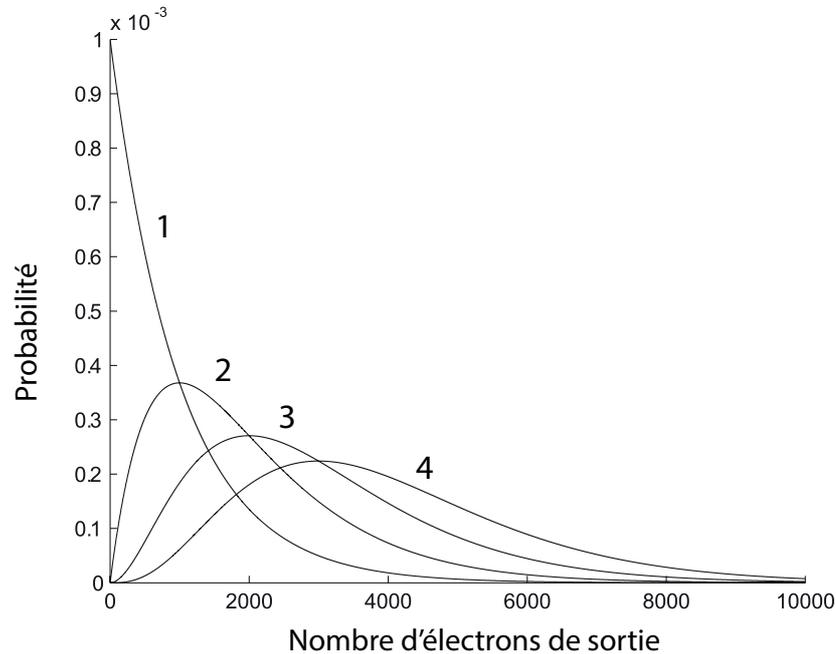


FIGURE 2.7 – Sortie EMCCD pour un nombre de photons d’entrée donné, pour des valeurs de 1, 2, 3 et 4 photons et un gain moyen de 1000.

des bruits de lecture et de CIC non négligeables. Il convient alors de construire un protocole prenant en compte ces imperfections et le fait qu’en l’absence de photons, un signal de sortie peut tout de même être détecté. Pour ce faire, une solution consiste à constater qu’en présence d’un photon, le signal de sortie est en moyenne plus important que sans, les sources de bruits contribuant toujours en cas de photodétection. L’obtention d’images binaires de photodétections va donc s’effectuer par le biais d’un seuillage. Il s’agira alors d’évaluer l’erreur d’une telle méthode. On appelle T le niveau électronique seuil. En dessous de ce niveau, une valeur de sortie sera considérée comme correspondant à l’absence de photo-électrons. A l’inverse, si le nombre d’électrons en sortie d’amplification est supérieur à T alors l’évènement sera considéré comme une photodétection. Compte tenu des différents bruits qui persistent pour des pixels non illuminés, le niveau de gris qui y sera mesuré ne sera pas exactement nul. Ainsi il faut chercher à fixer le niveau de seuillage de sorte à minimiser les erreurs de détections. Pour cela, on peut identifier les trois principales causes d’erreurs suivantes :

- (i) Il y a effectivement un photo-électron à l’entrée de l’amplificateur, mais du fait du caractère stochastique du gain, ce dernier s’avère trop faible pour cette occurrence et le niveau électronique est tel $x \leq T$. Nous appellerons p_{01} la probabilité correspondante.
- (ii) Du fait du bruit $x \geq T$ malgré l’absence de photo-détection. Cet évènement cor-

respond à la probabilité p_{10} .

(iii) Deux photons ont été détectés. Pour des niveaux seuils raisonnables, on peut supposer qu'alors $x \geq T$ est systématiquement obtenu, de telle sorte que $p_{12} \approx 1$. En supposant maintenant que le faible niveau d'intensité μ est associé à une statistique Poissonienne, on obtient alors l'expression suivante de l'erreur quadratique Q sur le nombre de photons par pixel :

$$\begin{aligned} Q &= p_{01}\mu + p_{10}(1 - \mu) + \frac{p_{12}\mu^2}{2} \\ &= \mu \left(1 - e^{-T/g}\right) + p_{10}(1 - \mu) + \frac{\mu^2}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où l'on peut identifier les trois sources d'erreurs précédemment énoncées. L'expression de p_{01} a été obtenue en intégrant l'équation (2.4) jusqu'au seuil T .

Il s'agit alors de trouver les niveaux T et μ qui permettent de minimiser le nombre d'erreurs Q par rapport au signal mesuré μ . On cherche donc à minimiser la quantité :

$$E = \frac{Q}{\mu} \quad (2.6)$$

selon le paramètre μ :

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{p_{10}}{\mu^2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \sqrt{2p_{10}} \quad (2.7)$$

et selon le paramètre T :

$$\frac{\partial E}{\partial T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(\left(1 - e^{-\frac{T}{g}}\right) + p_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2p_{10}}} - 1 \right) + \frac{\sqrt{p_{10}}}{\sqrt{2}} \right) = 0 \quad (2.8)$$

où p_{10} est une fonction de T . Ces résultats sont analogues à ceux établis dans [Lantz et al., 2008] dans un autre contexte pour lequel différentes images étaient considérées. Il s'agit alors de résoudre les équations (2.7) et (2.8). Cela est fait numériquement, p_{10} est en effet la probabilité qu'un photon soit détecté alors qu'aucune lumière n'est incidente sur le capteur. Cette probabilité peut être évaluée expérimentalement en prenant des images dans l'obscurité. En évaluant alors le nombre de pixels en fonction de leur niveau de gris comme cela est fait sur la figure 2.6, on peut alors évaluer la probabilité p_{10} en fonction de T et résoudre les équations (2.7) et (2.8).

Pour les caméras qui ont été utilisées au cours de cette thèse, nous avons déterminé les valeurs optimales $\mu = 0.15$ photon par pixel et $T = 11$ niveaux de gris. Ainsi la probabilité que survienne une erreur de photodétection sur un pixel et pour un temps d'exposition donné, peut être obtenue pour chacune des causes d'erreur :

- (i) $\mu p_{01} = 2, 2\%$
- (ii) $(1 - \mu)p_{10} = 0, 9\%$
- (iii) $\frac{\mu}{2} = 1, 1\%$

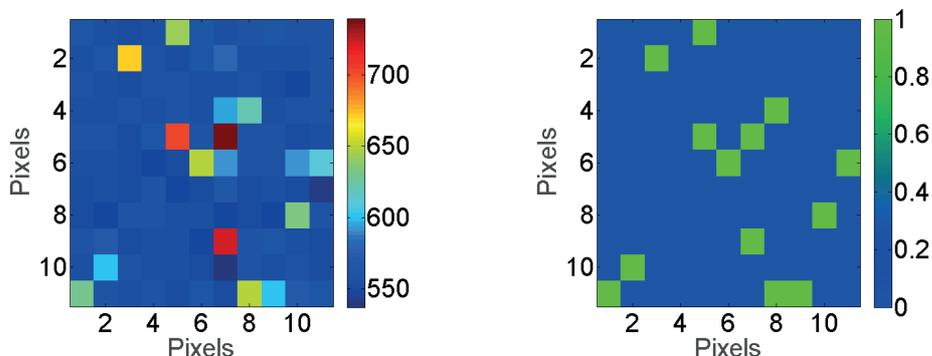


FIGURE 2.8 – Portion d’image avant et après seuillage. Sur l’image de droite, les pixels verts correspondent à des photodétections.

Mettons enfin en évidence la valeur des probabilités qu’un photon ne soit pas détecté p_{01} et celle d’un faux événement de détection p_{10} :

$$\begin{aligned} p_{01} &= 15\% \\ p_{10} &= 1,1\% \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pour illustration, on peut voir sur la figure 2.8 le résultat de l’application de la méthode de seuillage sur une portion d’image en niveau de gris obtenue grâce à une caméra EMCCD.

2.2 Corrélations quantiques dans les images.

Nous avons vu dans la partie précédente que les caméras EMCCD permettaient d’obtenir des images de photo-détection. Puisque la démonstration d’un paradoxe EPR nécessite la démonstration de propriétés de corrélations particulières, nous allons maintenant nous intéresser à la manière dont on peut détecter des corrélations spatiales à l’aide de caméras.

2.2.1 Détection de corrélations quantiques à l’aide de caméras.

La première expérience qui a démontré l’existence de corrélations entre photons en utilisant une caméra date de 1998 [Jost et al., 1998]. Dans cette réalisation les auteurs ont utilisé une caméra ICCD (Intensified CCD) placée en champ lointain d’un amplificateur paramétrique réglé pour un accord de phase de type I. Ils ont alors pu détecter les corrélations spatiales que présente une telle lumière. A contrario des EMCCD, l’amplification des caméras ICCD se déroule avant que la détection par le capteur CCD

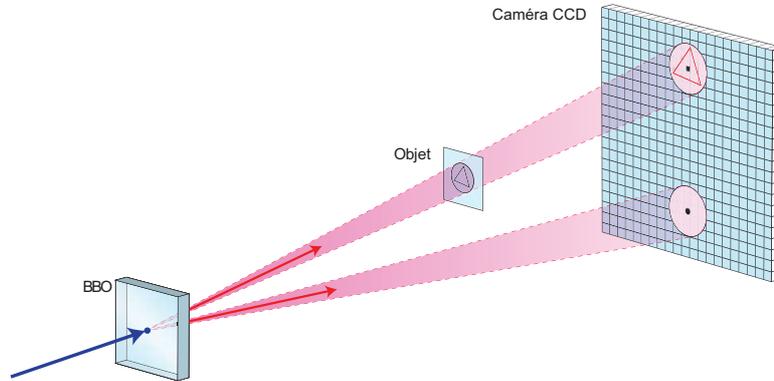


FIGURE 2.9 – Expérience d’imagerie quantique différentielle.

ne soit effectuée. Les photons incidents sur la caméra arrachent occasionnellement un électron à une photo-cathode, les photo électrons sont ensuite accélérés dans le vide par un champ électrique et envoyés sur un disque à micro-canaux (‘micro-channel plate’) qui multiplie les électrons incidents par effet d’arrachement en chaîne sur les parois des canaux dont il est composé. Des gains de 10,000 peuvent alors être obtenus. Les électrons sont ensuite projetés sur une couche de phosphore qui émet alors une lumière intense. La lumière résultante est enfin adressée par un réseau de fibres sur les différents pixels du capteur CCD. La possibilité de fenêtrer le signal électrique qui donne naissance aux champs d’accélération permet de très courts temps d’exposition et par conséquent de rendre négligeable le courant d’obscurité. Ainsi une détection positive correspondra quasi systématiquement à un réel photon incident. Le désavantage principal de ces capteurs est leur faible efficacité quantique.

Au sein de notre équipe, de précédents travaux ont permis de mettre en évidence des corrélations ‘sub-shot-noise’ dans un faisceau de fluorescence paramétrique de type I. Ceci a pu être fait en imageant l’ensemble des fréquences spatiales du cône de fluorescence [Blanchet et al., 2008], [Blanchet et al., 2010]. Ce sont ici des caméras EMCCD qui ont été utilisées pour effectuer une telle mesure de corrélation. Une démonstration similaire avait été effectuée en régime de haut gain par Jedrkiewicz *et al.* [Jedrkiewicz et al., 2004].

La détection de telles corrélations a enfin pu être mise à profit en utilisant un autre régime de plus forte intensité. Il s’est alors agi d’utiliser les corrélations quantiques de la fluorescence paramétrique pour améliorer le rapport signal sur bruit d’une image [Brambilla et al., 2008], [Brida et al., 2010]. Tel qu’on peut le voir sur la figure 2.9 l’un

des deux faisceaux résultant d'un accord de phase de type II est envoyé à travers un objet de faible absorbance avant d'être imagé. Le faisceau jumeau est, lui, imagé sans passer par l'objet. Les deux faisceaux subissant des fluctuations spatiales identiques, les corrélations peuvent être utilisées pour atténuer le bruit de photon. En soustrayant en effet les intensités mesurées des deux faisceaux supposés parfaitement corrélés, on supprime complètement les fluctuations d'intensité. En considérant qu'un des faisceaux traverse un objet absorbant et en limitant cette absorbance à de faibles valeurs, on conserve le bénéfice de la réduction des fluctuations d'intensités du point de vue des valeurs du rapport signal sur bruit.

Nous allons maintenant chercher à décrire la théorie qui sous-tend la mesure de telles corrélations.

2.2.2 Probabilité de détection conjointe de deux photons.

Opérateurs sur les pixels.

Les opérateurs d'annihilation tels que nous les avons vus jusqu'à présent ont une forme assez lointaine des préoccupations expérimentales. En partant de la forme des opérateurs définis en un point et à un instant donné, tels que $\hat{a}(\mathbf{r}, t)$, on pourrait bien sûr définir directement l'action des opérateurs associés aux pixels d'une caméra en intégrant correctement ces opérateurs dans l'espace et le temps selon les dimensions spatiales du capteur et sa fonction de transfert fréquentielle. Mais les opérateurs $\hat{a}(\mathbf{r}, t)$ en eux-mêmes ne sont pas physiques puisque, par exemple, ils mettent en jeu des opérateurs de pulsation ω infiniment grande pour accéder à une parfaite localisation temporelle. A l'inverse, des opérateurs monochromatiques seront totalement délocalisés selon la direction de propagation, ω fixant la valeur du vecteur d'onde dans un milieu donné.

Il est alors possible de se rapprocher des préoccupations expérimentales en définissant des opérateurs sur les pixels qui soient à la fois quasi-monochromatiques mais aussi localisés selon la direction de propagation [Treps, 2001]. De tels opérateurs peuvent être dérivés en privilégiant une direction de propagation z et en définissant des opérateurs transverses de pulsation ω , notés $\hat{a}_\omega(\boldsymbol{\rho})$ où $\boldsymbol{\rho}$ est la coordonnée transverse, moyennant l'hypothèse de paraxialité $\omega \approx ck_z$. Il s'agit alors de définir des opérateurs d'annihilation transverses dans une bande de fréquence $\pm\delta\omega$ autour de ω_0 . De tels opérateurs sont notés $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ et correspondent à l'annihilation d'un photon spatialement distribué autour de la position z à l'instant t . En voici l'expression [Treps, 2001] :

$$\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} \frac{d\Omega}{2\pi c} \sqrt{\frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0}} \hat{a}_\omega(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\Omega(t - \frac{z}{c})} \quad (2.10)$$

Ces opérateurs vérifient les relations de commutations suivantes :

$$[\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, t), \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', z, t')] = \frac{1}{c} \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \delta_1(t - t') \quad (2.11)$$

avec

$$\delta_1(t - t') = \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0} e^{-i\Omega(t-t')} \quad (2.12)$$

Cette relation de commutation exprime l'étendue temporelle des photons associés à ces opérateurs. Deux opérateurs séparés dans le temps ne commutent pas forcément car l'application d'un premier à un temps t modifie l'état du système présent en z à des temps ultérieurs t' par l'annihilation d'un photon. Le photon annihilé en t aurait dû se propager et continuer à avoir une influence en z à l'instant t' , ce n'est plus le cas, l'application de $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}', z, t')$ s'en trouve perturbée, et par conséquent les opérateurs ne commutent pas.

Si les opérateurs commutent bien pour différentes valeurs de $\boldsymbol{\rho}$ c'est parce qu'ils ont été intégrés selon l'ensemble des valeurs des fréquences spatiales (q) sans se soucier du fait que la valeur des fréquences ω permette l'accès à de telles fréquences spatiales. Pratiquement, cela veut dire que les valeurs $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'$ en considération sont très grandes devant les longueurs d'ondes optiques, ce qui est le cas lorsqu'on considère des distances de l'ordre de la taille des pixels.

Notons enfin que la relation de commutation serait beaucoup plus compliquée si l'on ne considérait pas des positions longitudinales identiques, puisque cela reviendrait à prendre en compte complètement la propagation. On peut toutefois noter que pour des temps t et t' identiques deux opérateurs pris en des positions z et z' différentes ne commutent pas, de façon générale du fait de l'extension spatiale longitudinale des photons associé à ces opérateurs.

Grâce à ces opérateurs qui, nous l'avons vu, correspondent à l'annihilation de photons aux profils réalistes, on peut alors définir les opérateurs de mesure de la présence de photons sur les pixels. Pour cela il nous faut intégrer les opérateurs nombres de photons sur toute la surface d'un pixel dénoté i :

$$\hat{N}_i(z, t) = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} d^2\rho \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', z, t') \hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, t) \quad (2.13)$$

Mesure des incertitudes du test EPR

Comme nous avons pu le voir dans la partie §1.1.3, les quantités qu'il nous faut mesurer expérimentalement en vue de tester l'existence d'une intrication de type EPR sont les variances inférées $\Delta^2(x_1 - x_2)$ et $\Delta^2(p_1 + p_2)$ telles qu'elles sont définies par

l'équation (1.16). Par définition, nous pouvons écrire :

$$\Delta^2(x_1 - x_2) = \int d^2\boldsymbol{\rho}_1 d^2\boldsymbol{\rho}_2 p_{\text{paires}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) [x_1 - x_2]^2 \quad (2.14)$$

$$= \int d^2\mathbf{R} \left(\int d\boldsymbol{\rho}_1 p_{\text{paires}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{R}) \right) X^2 \quad (2.15)$$

Où $p_{\text{paires}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ est la probabilité de détection conjointe d'un photon en $\boldsymbol{\rho}_1$ et d'un autre en $\boldsymbol{\rho}_2$ correspondant aux paires, c'est à dire que cette distribution de probabilité correspond au carré de la fonction d'onde qui décrit les bi-photons. L'apparition de X dans l'équation 2.15 est due au changement de variable $\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{R}$ avec $\mathbf{R} = (X, Y)$ qui a été effectué.

En admettant l'indépendance des paires, on peut en outre noter que la probabilité de mesurer un photon idler noté 2 en $\boldsymbol{\rho}_2$ conditionnée par la mesure d'un photon signal noté 1 en $\boldsymbol{\rho}_1$ est donnée par :

$$p(\boldsymbol{\rho}_2|\boldsymbol{\rho}_1) = p(\boldsymbol{\rho}_2) + p_{\text{paires}}(\boldsymbol{\rho}_1|\boldsymbol{\rho}_2) \quad (2.16)$$

Le premier terme décrit en effet les coïncidences accidentelles dues à des paires indépendantes, le deuxième aux corrélations d'origine quantique dues aux paires intriquées. Une fois prise en considération la discrétisation du plan transverse sous forme de pixels, et l'expression de la probabilité conjointe de détection des photons (donnée au chapitre 1, équation (1.92)) , on obtient la probabilité de coïncidence sur les pixels 1 et 2 :

$$\langle \hat{N}_1 \hat{N}_2 \rangle \propto \int_{S_1} d^2\boldsymbol{\rho}_1 \int_{S_2} d^2\boldsymbol{\rho}_2 p(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \quad (2.17)$$

$$\propto \int_{S_1} d^2\boldsymbol{\rho}_1 \int_{S_2} d^2\boldsymbol{\rho}_2 \{p(\boldsymbol{\rho}_1)p(\boldsymbol{\rho}_2) + p_{\text{paires}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)\} \quad (2.18)$$

Où \hat{N}_1 et \hat{N}_2 sont définis de façon analogue aux opérateurs de l'équation (2.13). On peut ainsi déduire l'expression de la probabilité de coïncidence entre deux pixels :

$$p_{\text{paires}}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_1, \bar{\boldsymbol{\rho}}_2) \propto \langle \hat{N}_1 \hat{N}_2 \rangle - \langle \hat{N}_1 \rangle \langle \hat{N}_2 \rangle \quad (2.19)$$

$$\propto \langle (\hat{N}_1 - \langle \hat{N}_1 \rangle) (\hat{N}_2 - \langle \hat{N}_2 \rangle) \rangle \quad (2.20)$$

Où $\bar{\boldsymbol{\rho}}_1$ et $\bar{\boldsymbol{\rho}}_2$ sont les coordonnées des centres de pixels considérés. On cherche alors à évaluer la contrepartie expérimentale de la partie entre parenthèses de l'expression (2.15), à savoir

$$f(\mathbf{R}) = \int d\boldsymbol{\rho}_1 p_{\text{paires}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{R}) \quad (2.21)$$

Il s'agit donc de discrétiser l'espace dans cette dernière équation. Pour ce faire on définit les ensembles $\{\boldsymbol{\rho}_1\}$ et $\{\boldsymbol{\rho}_2\}$ des valeurs $\boldsymbol{\rho}_1$ et $\boldsymbol{\rho}_2$ désignant des pixels donnés du plan de détection des particules 1 et 2 respectivement. Alors, pour des valeurs données de $\boldsymbol{\rho}_1$

et ρ_2 , nous notons l'écart entre les centres des pixels considérés par $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2$, ainsi que $\hat{\mathcal{N}}_j(\bar{\rho}) = \hat{N}_j(\bar{\rho}) - \langle \hat{N}_j(\bar{\rho}) \rangle$. Nous obtenons alors :

$$f(\bar{\mathbf{R}}_i) = \sum_{\{\bar{\rho}_1\}} p_{\text{paires}}(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_1 - \bar{\mathbf{R}}_i) = \alpha \sum_{\{\bar{\rho}_1\}} \langle \hat{\mathcal{N}}_1(\bar{\rho}_1) \hat{\mathcal{N}}_2(\bar{\rho}_1 - \bar{\mathbf{R}}_i) \rangle \quad (2.22)$$

α permet de normaliser la distribution de probabilité évaluée expérimentalement. On reconnaît bien dans le dernier membre la forme discrète d'une intercorrélacion. Au vu de l'expression donnée par l'équation (2.15), une fois $f(\bar{\mathbf{R}}_i)$ déterminé expérimentalement, il s'agira donc de calculer l'écart type de la variable spatiale x ou y de cette figure d'intercorrélacion pour obtenir les quantités mises en jeu dans le test du paradoxe EPR. En pratique, $f(\bar{\mathbf{R}}_i)$ sera obtenue en intercorrélant les régions d'intérêt comprenant le signal et l'idler des images de photo-détection auxquelles aura été soustraite l'intensité moyenne. On peut s'attendre en cas de corrélacions à obtenir un pic dans la fonction d'intercorrélacion évaluée. Ces pics seront la signature d'un comportement quantique de la lumière, les quantités évaluées étant celles donnés par l'expression (1.93) du chapitre 1 qui, rappelons-le, mesurent l'excédent quantique des corrélacions par rapport à leurs valeurs classiques. Notons que le processus d'évaluation en champ lointain est analogue, à ceci près que le signe plus présent dans $\Delta^2(p_1 + p_2)$ nous impose de retourner l'une des images pour que les aires conjuguées d'arrivée des photons des paires puissent être mises en regard.

Notons enfin qu'en normalisant la quantité obtenue en équation (2.19), par le nombre de photons dans les images, on obtient la fonction d'intercorrélacion normalisée :

$$f_{\text{norm}} = \frac{\langle \hat{N}_1 \hat{N}_2 \rangle - \langle \hat{N}_1 \rangle \langle \hat{N}_2 \rangle}{\langle \hat{N}_1 \rangle} = 2 \frac{\langle \hat{N}_1 \hat{N}_2 \rangle - \langle \hat{N}_1 \rangle \langle \hat{N}_2 \rangle}{\langle \hat{N}_1 \rangle + \langle \hat{N}_2 \rangle} \quad (2.23)$$

Une telle normalisation rend compte du fait que si tous les photons sont appariés dans les images, alors chacun des N_1 photons détectés participe en ajoutant 1 à la valeur de l'intercorrélacion. Pour chaque photon non apparié, sa participation à la valeur de l'intercorrélacion est en moyenne annulée par la correction des corrélacions accidentelles dues aux paires indépendantes. De cette façon, l'intégration d'une telle quantité normalisée sur l'ensemble du système donnera une valeur égale à la probabilité pour les photons d'être appariés.

De plus, on peut constater que par hypothèse d'indépendance des paires, c'est à dire en négligeant le phénomène de réémission des paires,

$$\langle \hat{N}_1 \rangle = \langle \hat{N}_2 \rangle = \langle \hat{N}_1^2 \rangle - \langle \hat{N}_1 \rangle^2$$

alors la quantité (2.23) peut être exprimée en fonction de la variance de la différence entre les intensités détectées sur les différents pixels :

$$f_{norm} = 1 - \frac{\langle (\hat{N}_1 - \hat{N}_2)^2 \rangle}{\langle \hat{N}_1 \rangle + \langle \hat{N}_2 \rangle} \quad (2.24)$$

Les corrélations qui seront ici mises en jeu présenteront donc un caractère sub-shot noise.

2.3 Valeurs théoriques des incertitudes conditionnelles.

Dans cette partie, nous allons chercher à déterminer la taille des aires de cohérence des biphotons en champ proche et champ lointain, et à déduire le degré de paradoxe accessible avec notre configuration expérimentale. Nous utiliserons pour cela, dans un premier temps, une approche théorique qui sera ensuite complétée par une approche numérique afin de tenir compte du fait que la dégénérescence parfaite en longueur d'onde ne pourra jamais être obtenue compte tenu de la largeur finie de tout filtrage fréquentiel des ondes. Cette approche a été publiée dans [Devaux et al., 2012].

2.3.1 Théorie de la SPDC

On s'intéresse donc, dans un premier temps, à la largeur attendue des pics de corrélation obtenus expérimentalement. Pour cela on va d'abord décrire la théorie associée à cette grandeur lors d'une détection en champ lointain. Nous traiterons ensuite le cas du champ proche.

Champ lointain.

On considère dans cette partie une expérience avec un filtre interférentiel passe-bande idéal qui sélectionnerait pour les deux voies de la SPDC la seule longueur d'onde de dégénérescence. Dans un tel cas $\nu_s = \nu_i = \nu_p/2$, où ν est la fréquence des ondes respectivement signal (ν_s), idler (ν_i) et pompe (ν_p). La fonction d'onde du bi-photon peut être écrite en généralisant les résultats de la partie 1.5.2 du chapitre 1 à une onde pompe d'enveloppe transverse $E_p(\mathbf{q})$, où \mathbf{q} est la composante transverse d'un vecteur d'onde. On obtient alors [Saleh et al., 2000] :

$$\psi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \chi E_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) h(q_s, q_i) \quad (2.25)$$

où \mathbf{q}_s et \mathbf{q}_i sont les composantes transverses des vecteurs d'ondes signal et idler et $h(q_s, q_i)$ est la fonction d'accord de phase dont l'expression est donnée par (1.129).

L'équation (2.25) signifie que l'amplitude de probabilité conditionnelle en champ lointain est proportionnelle au champ de la pompe dans ce plan et a, par conséquent, la même largeur dans la mesure où la largeur de la fonction d'accord de phase est beaucoup plus grande.

Formellement les écart-types de la distribution spatiale de la pompe en champ lointain σ_q et celui de l'amplitude de probabilité conditionnelle $\sigma_{q_i|q_s}$ vérifient :

$$\sigma_{q_i|q_s} = \sigma_q \quad (2.26)$$

Champ proche.

On suppose à nouveau une parfaite dégénérescence en longueur d'onde. Au niveau du plan de sortie du cristal, la fonction d'onde du bi-photon peut être écrite [Saleh et al., 2000] :

$$\psi(x_s, x_i) = \int \chi E_p(x) h(x_s + x, x_i + x) dx \quad (2.27)$$

On fait maintenant l'hypothèse que le champ pompe $E_p(x)$ est quasi constant sur la largeur caractéristique de $h(x_s + x, x_i + x)$ c'est à dire sur la largeur des aires de cohérence des photons jumeaux en champ proche. Expérimentalement pour les configurations de cristaux et de pompage utilisés, cette hypothèse sera vérifiée. Dans ce cas l'accord de phase dans l'espace direct dépend uniquement de la différence des coordonnées :

$$\int h(x_s + x, x_i + x) dx \equiv \gamma(x_s - x_i) \quad (2.28)$$

où $\gamma(x)$ est la transformée de Fourier de $h(q_s, -q_s)$.

Il nous faut maintenant trouver l'écart type de $|\gamma(x)|^2$, fonction proportionnelle à la distribution de probabilité conditionnelle $p_{\text{paires}}(x_s|x_i)$. Nous avons tout d'abord cf. (1.129) :

$$h(q_s, -q_s) = \frac{\exp(i\Delta k_z L) - 1}{i\Delta k_z} \quad (2.29)$$

où Δk_z est le désaccord des vecteurs d'ondes longitudinaux et L la longueur du cristal.

En négligeant la variation d'indice perçue par l'onde avec l'orientation de l'onde extraordinaire puis en effectuant un développement limité tenant compte de la paraxialité et pour un accord de phase colinéaire parfait¹, Δk_z s'écrit :

$$\Delta k_z \approx \frac{q_s^2 \lambda}{4\pi} \left(\frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_i} \right) \quad (2.30)$$

1. qui n'existe pas en pratique, mais est utilisé pour permettre l'évaluation de la largeur de l'accord de phase

avec $n_{s,i}$ les indices signaux et idler. Le premier zéro de $h(q_s, -q_s)$ est obtenu pour $q_{s0} = 2\pi \left(\lambda L \left(\frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_i} \right) \right)^{-1/2}$. On peut alors déterminer l'écart type correspondant à l'extension spatiale de l'accord de phase σ_{q_s} en champ lointain :

$$\sigma_{q_s} = \left(\int |h(q_s, -q_s)|^2 q_s^2 dq_s \right)^{1/2} = 0.69 q_{s0} \quad (2.31)$$

et enfin l'écart type $\sigma_{x_i|x_s}$ de la probabilité conditionnelle dans l'espace direct :

$$\sigma_{x_i|x_s} = \left(\int |\gamma(x)|^2 x^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.32)$$

On trouve alors $\sigma_{x_i|x_s} = 1.89 \sigma_{q_s}^{-1}$. Une valeur de 1.88 pour le facteur de la relation précédente a été reporté dans [Howell et al., 2004] sans que la méthode ayant conduit à une telle valeur ne soit précisée.

Degré de paradoxe.

A l'aide des résultats des précédentes sous parties, on peut évaluer le degré de paradoxe théoriquement accessible. Ainsi, en notant σ_x l'écart type de la pompe gaussienne en champ proche et σ_q la même quantité prise en champ lointain, ces deux quantités sont à la limite de Heisenberg $\sigma_x \sigma_q = \frac{1}{2}$. On peut alors écrire en utilisant (2.26) :

$$K = \frac{(\sigma_x \sigma_q)^2}{(\sigma_{x_i|x_s} \sigma_{q_i|q_s})^2} = \left(\frac{2\pi 0,69}{1,89} \right)^2 \frac{\sigma_x^2}{\lambda L \left(\frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_i} \right)} \quad (2.33)$$

2.3.2 Évaluation de l'élargissement due au filtre par simulations numériques.

Nous allons maintenant chercher à comprendre en quoi le fait de ne pas être exactement à la dégénérescence en longueur d'onde, mais autour de cette dégénérescence avec une largeur de bande finie, produit un élargissement artificiel des pics de corrélations qui sont attendus.

Pour cela, il faut se rappeler qu'au plan focal d'une lentille, ce ne sont pas les fréquences spatiales qui sont imagées, mais les orientations des vecteurs d'ondes, donc l'angle qu'ils forment avec l'axe optique. Deux photons signaux ayant des longueurs d'ondes différentes mais des directions de propagation identiques seront donc détectés sur le même pixel. Or, pour satisfaire à l'accord de phase pour un vecteur d'onde pompe donné, les composantes transverses des vecteurs d'ondes signal et idler doivent vérifier des valeurs opposées comme on peut le voir sur la figure 2.10 qui illustre le phénomène. Par conséquent, les deux vecteurs d'ondes idler conjugués aux deux vecteurs signaux

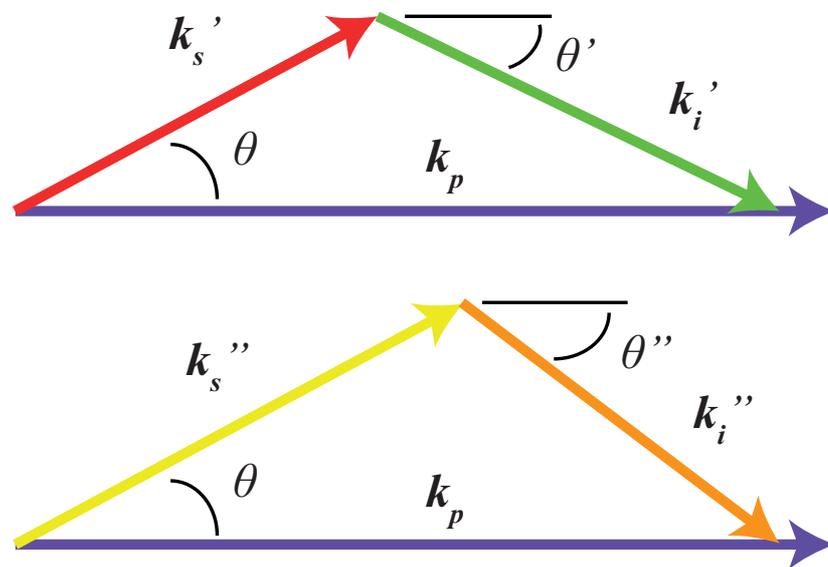


FIGURE 2.10 – Accord de phase pour deux vecteurs signal de même orientation mais de longueur d'onde différente. Sur cette figure, du fait que $|\mathbf{k}'_s| < |\mathbf{k}''_s|$ on a $\theta' < \theta''$ en valeur absolue. Et par conséquent, bien que les photons signaux de ces deux figures soient imagés sur un même pixel en champ lointain, ce n'est pas le cas pour les photons idler. On obtient donc un élargissement des aires de cohérences par rapport au cas dégénéré.

n'ont pas la même orientation et pourront être détectés sur des pixels différents. Nous avons donc deux vecteurs signaux détectés au même point mais qui sont corrélés avec des pixels idler différents. On s'attend donc bien à un élargissement dû à l'aspect fini de la bande passante du filtre interférentiel.

On va maintenant chercher à montrer que plus l'angle θ que fait le vecteur d'onde signal avec le vecteur d'onde pompe (cf. figure 2.10) est fort, plus l'élargissement sera important. Pour cela, on évalue en champ lointain la distance dans le plan de mesure entre les positions de mesure des vecteurs d'ondes \mathbf{k}_i' et \mathbf{k}_i'' mis en évidence sur la figure 2.10. On note d cette distance et on a alors dans le cadre de l'approximation paraxiale

$$d \approx f\theta'' - f\theta' = f(\theta'' - \theta') \quad (2.34)$$

puisque le plan de détection se situe dans le plan focal d'une lentille de distance focale f . Or, en observant la figure 2.10, on peut établir que

$$\theta'' - \theta' = \left(\frac{\lambda_i'}{\lambda_s'} - \frac{\lambda_i''}{\lambda_s''} \right) \theta \quad (2.35)$$

toujours dans l'approximation paraxiale. Ceci signifie que l'effet d'élargissement des coïncidences dû à la bande passante finie autour de la dégénérescence est d'autant plus grand que θ est grand. C'est à dire que l'élargissement est d'autant plus grand que l'angle que font les ondes signal et idler avec la pompe est grand. Or puisqu'il existe une direction particulière du plan transverse, selon laquelle les faisceaux de fluorescence se séparent, les angles θ mis en jeu sont plus importants selon cette direction. On s'attend donc à observer un élargissement plus important dans la direction de séparation des taches de fluorescence.

Nous avons alors procédé à des simulations numériques prenant en compte ce phénomène pour pouvoir accéder à des valeurs théoriques concernant la taille des pics de corrélations et donc *in fine* du produit d'incertitude qui permet de tester l'existence d'un paradoxe EPR. Il s'est agi, pour chaque pixel du plan CCD de trouver le pixel conjugué, satisfaisant à l'accord de phase transverse, et ce pour un ensemble échantillonné de longueur d'ondes transmises par le filtre. On a ensuite sommé les occurrences des écarts entre le pixel diamétralement opposé et le pixel trouvé par cette méthode, en prenant bien soin de pondérer cette occurrence par la fonction de transfert associé au filtre, par le profil de pompe, et par la fonction sinus cardinal au carré compte tenu du désaccord des vecteurs d'ondes longitudinaux obtenu. On reproduit ainsi la fonction d'intercorrélation accessible expérimentalement, les résultats issus de ces simulations seront présentés dans la partie suivante lorsque nous comparerons les résultats expérimentaux à la théorie.

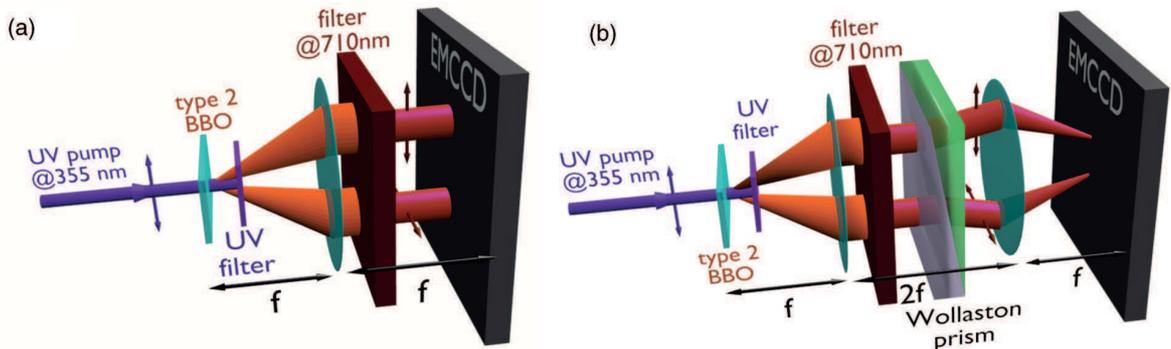


FIGURE 2.11 – Schémas expérimentaux. (a) Configuration champ lointain : un point sur la caméra correspond à une direction de propagation de la lumière à la sortie du cristal, c'est l'impulsion des photons qui est détectée. (b) Configuration champ proche. Un point sur la caméra correspond à un point du plan situé au milieu du cristal, c'est la position des photons qui est détectée. Les petites flèches traversant les faisceaux de lumière correspondent aux directions de la polarisation.

2.4 Le paradoxe EPR dans des images.

2.4.1 Expérience à une caméra.

Configuration expérimentale.

La première expérience conduite au cours de ces travaux a consisté à détecter sur le même capteur le signal et l'idler, comme on peut le voir sur le schéma expérimental fig. 2.11. Un faisceau pompe UV traverse un cristal de béta borate de baryum (BBO) au sein duquel est générée la fluorescence paramétrique. Les impulsions pompes à 355 nm sont délivrés par un Laser Nd :YAG à commutation-Q passive (Q-switch). La puissance moyenne de ces impulsions est de 27 mW pour une durée d'impulsion de 300 ps , avec une cadence de répétition de 1 kHz . La fluorescence paramétrique est générée à travers le cristal de BBO de 1 mm d'épaisseur configuré pour un accord de phase de type-II. Un filtre UV arrête le faisceau pompe en sortie de cristal ne laissant passer que la fluorescence.

Les deux configurations correspondent à la mesure des positions des particules d'une part et de leurs impulsions d'autre part. L'image de champ lointain de la SPDC est formée sur la caméra EMCCD située dans le plan focal d'une lentille de 37 mm fig. 2.11(a). Il est à noter que si les photons d'une paire sont séparés naturellement en champ lointain du fait de leur émission à l'intérieur de deux cônes de fluorescence différents suivant l'accord de phase de type-II, ce n'est pas le cas en champ proche où les deux cônes devraient se rejoindre. Toutefois, pour permettre une détection séparée des photons dans la configuration champ proche fig. 2.11(b), un prisme de Wollaston de

séparation angulaire de $1,5^\circ$ est placé autour du plan de Fourier. Ce prisme discrimine les polarisations des photons afin d'imposer leur séparation en champ proche. Le plan situé au milieu du cristal est alors imagé sur l'EMCCD à l'aide d'une seconde lentille de même focale. Le choix du plan imagé à l'intérieur du cristal permet de minimiser les effets de walk-off décrits par Brambilla *et al.* [Brambilla et al., 2004]. Le grandissement transversal dans cette configuration a été vérifié à l'aide d'une mire, sa valeur est de $\gamma = 1.003 \pm 0,005$.

La caméra utilisée est une caméra EMCCD à illumination arrière d'Andor (modèle iXon+ DU897-ECS-BV) présentant une efficacité quantique annoncée à plus de 90%. La surface du détecteur est formé de 512×512 pixels de surface $s_{pix} = 16 \times 16 \mu m^2$. Les pixels correspondent donc à $0.46 \times 0.46 mrad^2$ en champ lointain après division par la valeur de la focale. La cadence de lecture utilisé est de 10 *MHz* à 14*bits* pour une caméra refroidie à $-85^\circ C$.

Les mesures ont été effectuées avec une orientation de cristal correspondant à un accord de phase non-critique. Une telle configuration correspond à des ondes signal et idler dont les vecteurs de Poynting sont colinéaires à l'intérieur du cristal [Lantz and Devaux, 2000]. On parle d'accord de phase non-critique car dans une configuration d'accord de phase pour les vecteurs signaux et idler, le fait d'imposer une rotation à ces vecteurs n'impose pas au premier ordre la sortie de l'accord de phase. Cela se caractérise en champ lointain par la présence de taches de fluorescence plutôt que d'anneaux.

Dans notre schéma expérimental, les paires de photons émises autour de la dégénérescence en longueur d'onde sont sélectionnées à l'aide d'un filtre interférentiel à bande étroite centré sur 710 *nm* avec un écart type de 2.5 *nm*. Le régime de comptage de photons est assuré en ajustant le temps d'exposition de telle sorte que l'éclairement moyen du capteur soit entre 0.1 et 0.2 photon par pixel pour minimiser les erreurs de détection telle que nous l'avons vu précédemment. De plus, l'utilisation d'impulsions de 300 *ps* et d'un temps d'exposition de 10 *ms* (correspondant à 10 impulsions laser) permet d'obtenir un nombre important de modes temporels. Le nombre moyen de photons par mode spatio-temporel est inférieur à 10^{-3} , en bon accord avec l'hypothèse de pure SPDC sans émission stimulée.

Programme d'acquisition et de traitement des données.

Concernant le contrôle des caméras, le logiciel du constructeur Andor fourni avec celles-ci s'est avéré rapidement inadapté compte tenu des contraintes de nos acquisitions. En effet il nous a fallu avoir la possibilité d'acquérir un très grand nombre d'images (jusqu'à 500.000), et de calculer en direct lors des réglages des inter-corrélations sur des images elle même seuillées. Pour cette raison nous avons conçu un programme adapté aux besoins de nos expériences. Tirant profit des fonctions de la Graphical User Interface (GUI) de Matlab nous avons programmé un panneau de contrôle gérant à

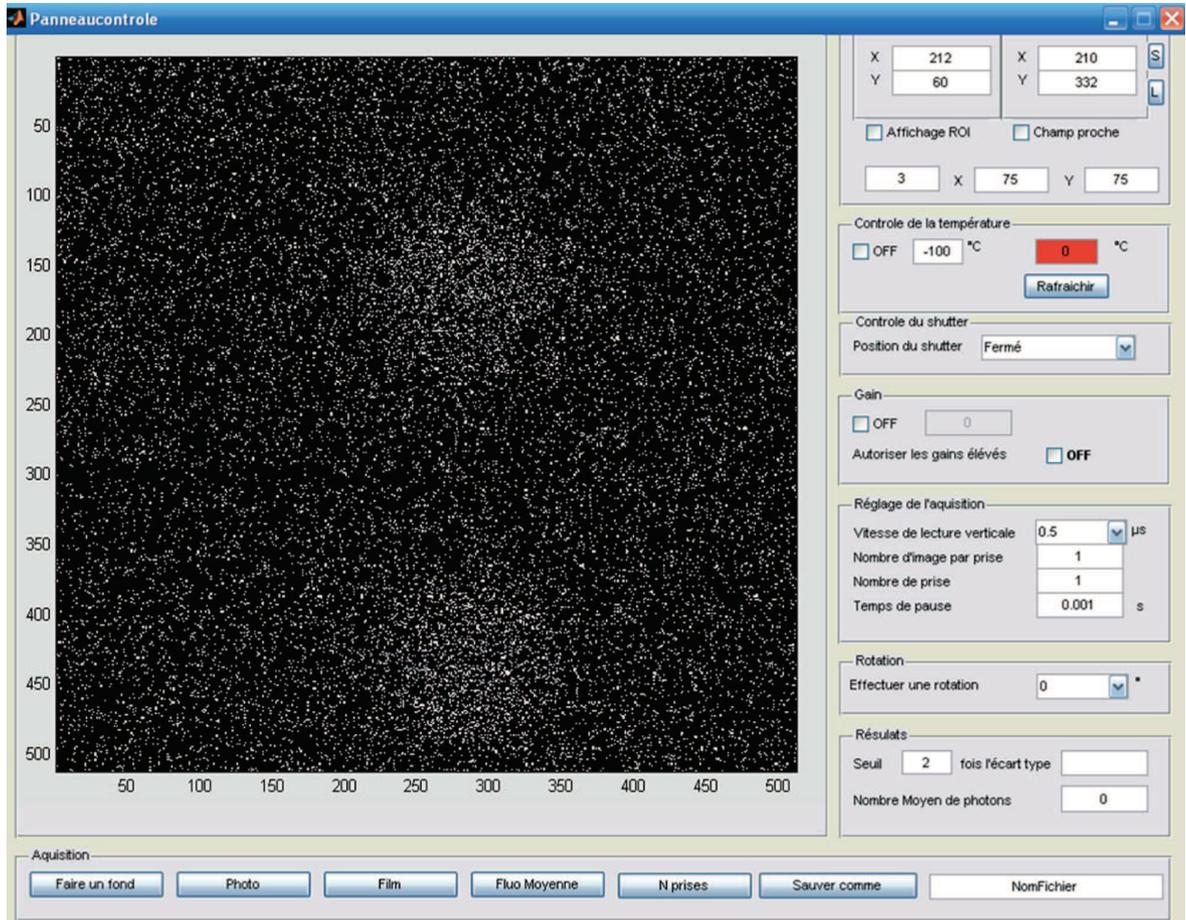


FIGURE 2.12 – Panneau de contrôle de la caméra.

la fois la communication avec la caméra par le biais d'un Software Development Kit (SDK) mais aussi le seuillage des images et le calcul d'inter-corrélations d'images binaires et d'autres grandeurs d'intérêt comme par exemple le nombre de photons moyen par pixel. Le panneau de contrôle ainsi créé est présenté en figure 2.12.

Le programme permet de contrôler les différents paramètres de la caméra comme le gain, la vitesse de lecture, le temps d'acquisition, la température de refroidissement, mais aussi de commander l'acquisition selon différents modes permettant d'opérer des réglages en direct sur le système optique, de contrôler le flux de photons moyen, de chercher la présence de corrélations ou encore de lancer une acquisition longue. Une part importante du travail sur cette expérience a été de mettre en oeuvre les moyens de calculs nécessaires au traitement des données, dont le volume a pu aller jusqu'à 10 Go et 500.000 images pour chacune des deux configurations. Il nous a donc

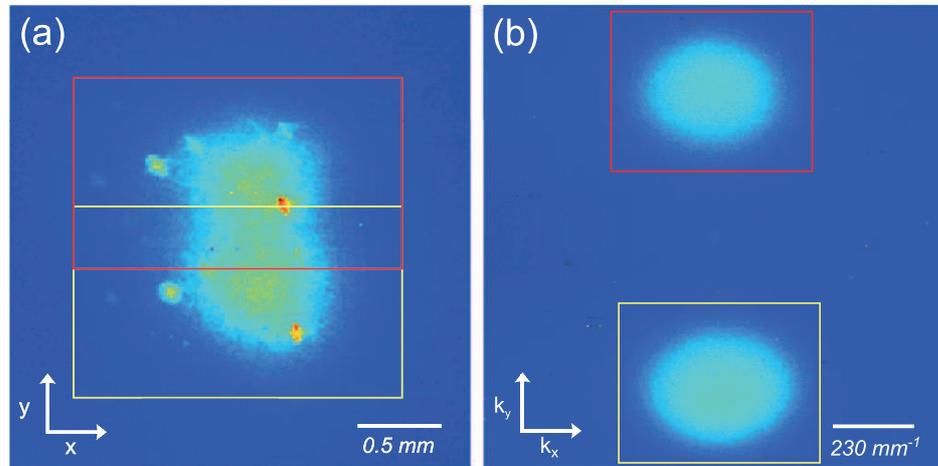


FIGURE 2.13 – Distributions d’intensité évaluées avec 10000 images. (a) Champ proche. (b) Champ lointain. Les rectangles jaune et rouge représentent les ROIs.

fallu optimiser les algorithmes de traitement des données. Nous avons d’autre part eu recours au mésocentre de calcul de l’Université de Franche-Comté ce qui nous a permis d’exécuter nos programmes en les parallélisant pour en rendre le temps d’exécution raisonnable (une dizaine d’heures sur mésocentre pour 500.000 images après parallélisation et optimisation).

2.4.2 Résultats.

Nous allons détailler les résultats obtenus dans les deux configurations champ proche et champ lointain pour cette expérience, avant de nous intéresser au test à proprement parler du paradoxe EPR.

Champ proche.

Le profil d’intensités 2.13(a) est obtenu en sommant 10000 images binaires de détection de photons. Les deux images correspondant aux deux faisceaux de SPDC apparaissent clairement même s’ils ne sont ici pas parfaitement séparés. Ces images présentent en outre des points chauds non prévus par la théorie et qui sont dues à des inhomogénéités du cristal. Les régions d’intérêt ou ROIs (Region of Interest) correspondant au signal ou à l’idler, suffisamment larges pour contenir toute la lumière des deux polarisations, se recouvrent. Pour cette raison, comme on peut le voir sur la figure 2.14, qui représente l’intercorrrelation complète des ROIs pris dans la même image puis statistiquement moyenné en utilisant les 10000 images, un fort pic d’autocorrrelation apparait dans la fonction d’intercorrrelation. Toutefois, du fait du décalage des

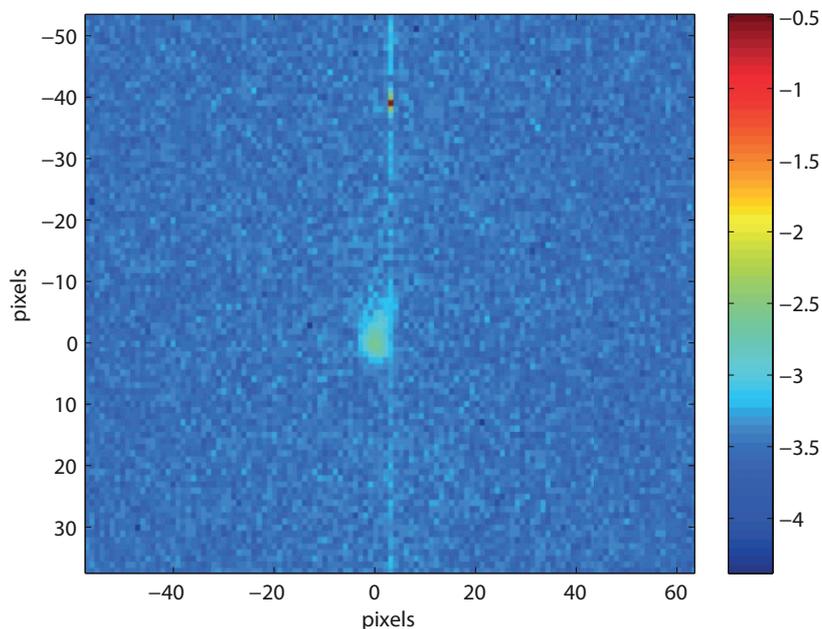


FIGURE 2.14 – Intercorrélation normalisée complète en champ proche représenté en échelle logarithmique.

images sous l'action du prisme de Wolaston, le pic d'intercorrélation moins intense et due aux corrélations quantiques, est clairement séparé de ce pic d'autocorrélation. Les intercorrélations sont calculés par un algorithme de Fourier qui est équivalent à une périodisation des images. La figure 2.15(a) présente le pic d'intercorrélation en champ proche obtenu à partir de ROIs pris dans la même image. L'intercorrélation témoin (b) de cette même figure est calculée à partir de ROIs pris dans deux images successives. L'absence de toute intercorrélation non négligeable dans cette dernière image montre que les homogénéités du cristal ne créent pas de fausse intercorrélation.

La première image présente une faible ligne verticale d'intercorrélation qui est due à l'étalement du pic d'autocorrélation qui est induit par la diffusion des charges (smearing [Janesick, 2001]) dans le registre de gain de la caméra. Cependant, cette ligne présente de faibles valeurs et est décalée par rapport au centre du pic d'intercorrélation quantique.

En modélisant le pic d'intercorrélation par une Gaussienne à deux dimensions par un algorithme de Gauss-Newton nous pouvons estimer les écarts types des probabilités inférés en champ proche. Nous appliquons pour cela la formule (2.15) qui peut être réécrite :

$$\Delta^2(x_1 - x_2) = \int d^2\mathbf{R} f(\mathbf{R}) X^2 \quad (2.36)$$

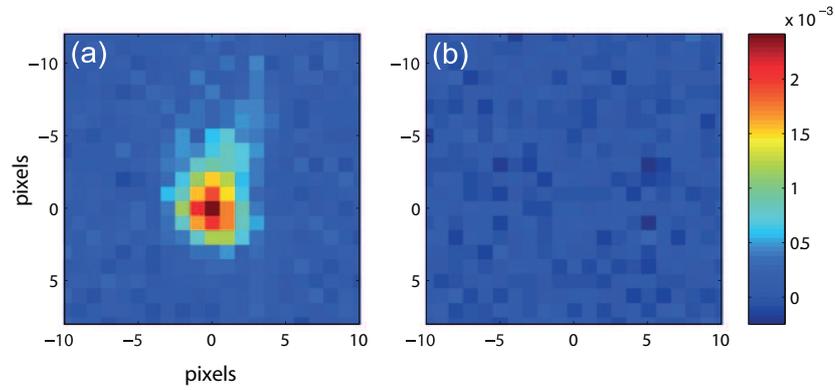


FIGURE 2.15 – (a) Fonction d’intercorrélation normalisée champ proche. (b) Intercorrelation témoin correspondante.

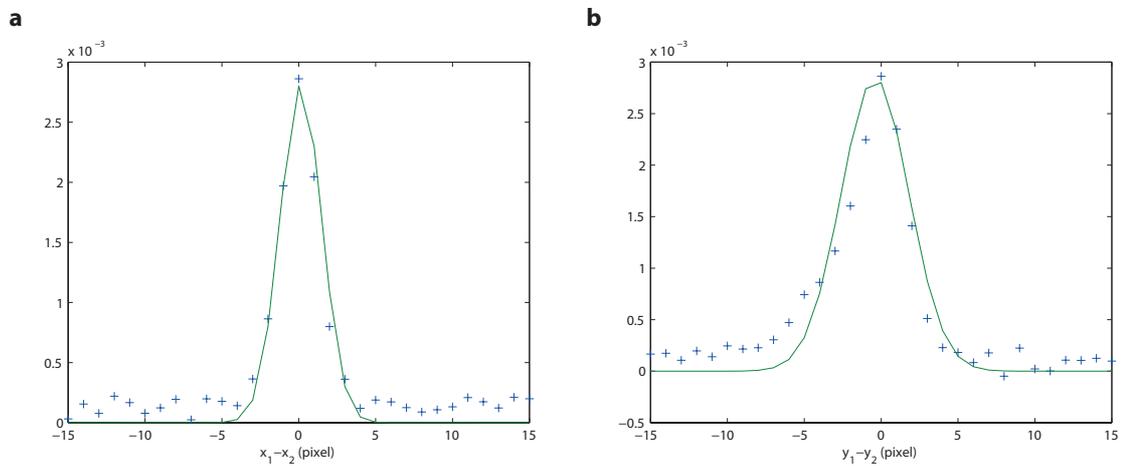


FIGURE 2.16 – Coupes de la figure 2.15 (a) en champ proche effectuées selon x en (a) et selon y en (b). Les croix bleues correspondent aux données expérimentales et les lignes vertes correspondent aux modélisations permettant l’évaluation des dimensions des pics.

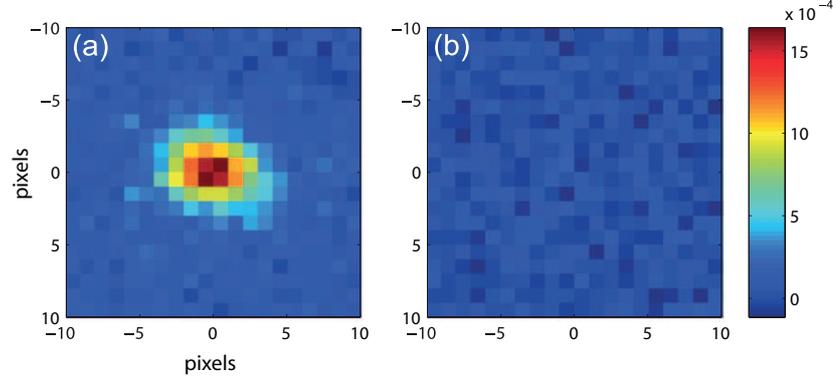


FIGURE 2.17 – (a) Fonction d’intercorrélation normalisée en champ lointain. (b) Intercorrélation témoin correspondante.

où $f(\mathbf{R})$ est l’intercorrélacion expérimentale cf. eq. (2.21) et (2.22). Il s’agit donc simplement d’évaluer l’écart type de l’extension spatiale du pic de corrélation dans les deux dimensions. Ceci est opéré par une intégration sur tout le plan, de sorte à prendre en compte tout le système de lumière pour rendre la démonstration consistante du point de vue du système mis en jeu². On obtient alors les valeurs suivantes pour les incertitudes inférées exprimés en nombre de pixels :

$$\Delta(x_1 - x_2) = 1.53 \pm 0.07 \quad (2.37)$$

$$\Delta(y_1 - y_2) = 2.2 \pm 0.1 \quad (2.38)$$

Il nous faut désormais considérer la configuration champ lointain de sorte à pouvoir tester la présence d’un paradoxe EPR.

Champ lointain.

Le profil d’intensité en champ lointain obtenu en sommant 10000 images binaires de détection de photons est présenté en figure 2.13(b). On observe la présence de deux taches de fluorescence due à l’accord de phase de type-II et donc aux deux ondes signal et idler. Les régions d’intérêt ou ROIs (Region of Interest) correspondent à ces deux polarisations. La fonction d’intercorrélacion normée est à nouveau calculée et statistiquement moyennée sur les 10000 images, mais cette fois-ci, puisque les corrélacions s’opèrent entre des pixels diamétralement opposés au sein des taches de fluorescence, l’une des images est retournée avant de pratiquer l’intercorrélacion numérique. Le résultat est présenté en figure 2.17. De nouveau, nous obtenons un pic de corrélation qui disparaît quand on considère des ROIs pris sur deux images différentes. Ici, le smearing

2. cf. remarques sur la nécessité de prendre en compte l’ensemble du système lumineux pour maintenir la consistance de la démonstration en partie 1.6.3 du chapitre 1.

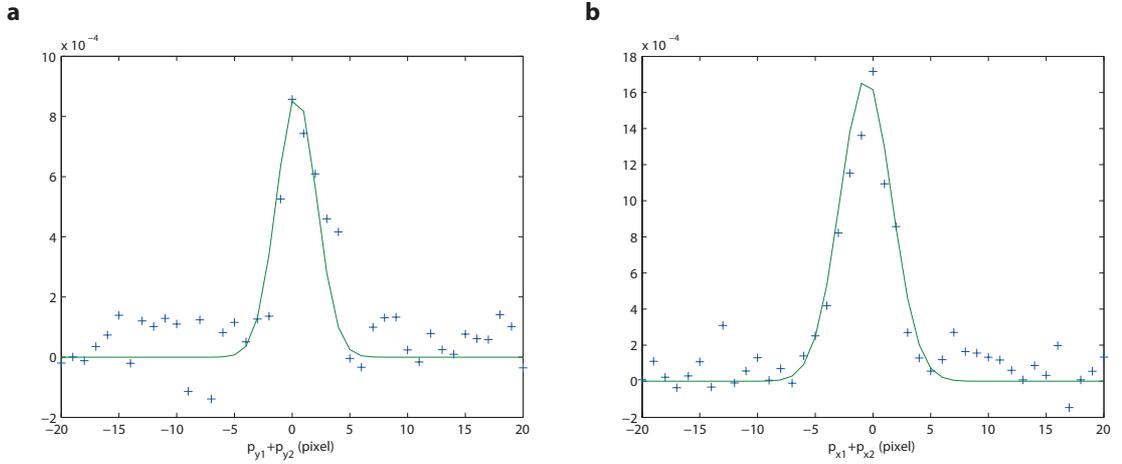


FIGURE 2.18 – Coupes de la figure 2.17 (a) en champ proche effectuées selon x en (a) et selon y en (b). Les croix bleues correspondent aux données expérimentales et les lignes vertes correspondent aux modélisations permettant l'évaluation des dimensions des pics.

de l'autocorrélation ne pose pas de problème du fait du retournement de l'une des images qui fait disparaître ce pic.

Par la même méthode que pour le champ proche, on obtient les valeurs suivantes pour les incertitudes inférées exprimées en nombre de pixels :

$$\Delta(p_{x1} + p_{x2}) = 2.35 \pm 0.08 \quad (2.39)$$

$$\Delta(p_{y1} + p_{y2}) = 1.85 \pm 0.07 \quad (2.40)$$

N.b. la dissymétrie théoriquement attendue n'apparaît pas ici dans le bon sens puisque l'effet d'un filtre de largeur de bande finie serait d'élargir le pic de corrélation selon la direction de séparation des taches, i.e. selon y , et pas selon x comme on peut le voir ici. La dissymétrie présente ici pourrait être due à des aberrations géométriques ou encore à une dissymétrie de la pompe.

On va maintenant montrer que les précédents résultats font preuve de la présence d'un paradoxe EPR dans les images capturées.

Démonstration du paradoxe EPR.

Comme cela est expliqué dans la partie §1.1.3 du chapitre 1, nous cherchons à démontrer des inégalités du type :

$$\Delta^2(x_1 - x_2)\Delta^2(p_{x1} + p_{x2}) < \frac{\hbar^2}{4} \quad (2.41)$$

qui caractérisent in fine un comportement non reproductible par un système à états locaux cachés (LHS) et donc la présence d'un paradoxe EPR. Nous allons donc utiliser les résultats expérimentaux pour évaluer ce produit, selon x d'abord :

$$\begin{aligned}\Delta^2(x_1 - x_2)\Delta^2(p_{x1} + p_{x2}) &= \left(1.53 \times 2.35 \frac{2\pi \cdot s_{pix}}{f \cdot \lambda} \hbar\right)^2 \\ &= (0.048 \pm 0.008)\hbar^2 < \frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}\quad (2.42)$$

ce qui met en évidence la présence d'un paradoxe EPR. Dans l'équation précédente le terme central est obtenu au vu du fait que $\frac{2\pi \cdot l_{pix}}{f \cdot \lambda} \hbar$ est la taille dans l'espace des impulsions d'un pixel du champ lointain et l_{pix} est la taille d'un pixel en champ proche dans l'espace de positions. On peut alors évaluer le degré de paradoxe, qui quantifie l'écart du comportement du système au comportement classique :

$$K_x = 5.2 \pm 0.8$$

D'autre part, selon la direction verticale, nous obtenons :

$$\Delta(y_1 - y_2)\Delta(p_{y1} + p_{y2}) = (0.06 \pm 0.01)\hbar^2 < \frac{\hbar^2}{4}\quad (2.43)$$

Conduisant à un degré de paradoxe de

$$K_y = 4 \pm 1$$

En conclusion, nous avons donc démontré un paradoxe EPR dans des images à plus de quatre écarts types et en effectuant une détection et une démonstration plein champ pour assurer la mise en jeu d'un système unique et consistant. Le paradoxe a pu être démontré selon les deux dimensions transverses des faisceaux à plus de 25 écarts types sous la limite classique.

Nous sommes donc parvenus à photographier en quelque sorte un état quantique de type EPR. On peut toutefois constater que le degré de paradoxe est limité pour cette configuration expérimentale. C'est une des raisons qui nous a poussé à conduire une seconde expérience utilisant deux caméras dans le but de pouvoir obtenir deux systèmes bien séparés et donc, dont l'imagerie est plus facilement optimisable de part et d'autre. Cette seconde expérience fera l'objet du chapitre suivant.

Notons pour finir la valeur de l'intégrale de la fonction de corrélation normalisée, qui, comme nous l'avons vu précédemment, correspond au taux de paires présentes après mesure par rapport à la quantité de lumière totale. Nous notons R ce coefficient

de corrélation totale. Ses valeurs mesurées respectivement en champ proche et en champ lointain sont :

$$\begin{aligned} R_{cp} &= 5 \times 10^{-2} \\ R_{cl} &= 4.4 \times 10^{-2} \end{aligned} \tag{2.44}$$

2.4.3 Comparaison théorie-expérience.

Produit d'incertitudes.

Comme indiqué au cours de la partie §2.3.1, il est possible de prévoir théoriquement et numériquement les valeurs des incertitudes inférées sur les positions et impulsions des particules jumelles. Nous avons donc utilisé les simulations pour prévoir l'élargissement des pics de coïncidence compte tenu de la largeur du filtre interférentiel utilisé pour sélectionner les photons autour de la dégénérescence. Tout d'abord, sans considérer un tel élargissement, et compte tenu de l'écart type associé aux enveloppes de fluorescence mesurées sur les images d'intensité en champ proche $\sigma_x = 0,4 \text{ mm}$, nous obtenons en utilisant l'équation (2.33) une valeur de degré de paradoxe théorique de

$$K = 950$$

On observe que cette valeur est assez lointaine des résultats expérimentaux de $K_y = 4$ et $K_x = 5$ selon y et x . En prenant en compte maintenant l'effet de l'élargissement par la non mono-chromaticité du filtre utilisé nous obtenons :

$$K_y = 36$$

$$K_x = 105$$

Les résultats théoriques sont assez loin des résultats expérimentaux mais il faut pour analyser ces différences prendre en compte le fait que le degré de paradoxe est une quantité qui dépend du carré des largeurs et qui est donc très sensible à de petits élargissements des pics de corrélation. En particulier, des aberrations géométriques pourraient permettre d'expliquer l'écart entre la théorie et l'expérience. Les faisceaux de SPDC se propagent en effet avec un certain angle d'environ 3° par rapport à l'axe optique compte tenu de leur divergence et puisqu'ils sont tous deux imagés avec le même système. D'autre part, la présence en champ proche du smearing de l'autocorrélation perturbe les mesures et est à même d'élargir les incertitudes conditionnelles détectées. Le passage à une expérience avec deux systèmes optiques indépendants et donc deux caméras permettra d'optimiser indépendamment l'imagerie des deux faisceaux et supprimera le problème de l'autocorrélation.

Intégrale du pic de corrélation.

Comme nous l'avons déjà précisé plus haut, la valeur de l'intégrale R des pics de corrélations est directement affectée par les pertes puisqu'il quantifie la part des photons d'une polarisation qui sont toujours appariés après détection. Nous allons donc dans cette partie nous attacher à dénombrer et quantifier les différentes sources de pertes ou de présence de lumière non corrélées dans les images. On écrira donc :

$$R = r_{bruit} \times r_{rendementQ} \times r_{seuillage} \times r_{optique} \times r_{filtre} = 0,14$$

Nous allons maintenant nous attacher à détailler ces différentes sources de disparation des corrélations.

- (i) $r_{bruit} = 0.5$ il correspond au bruit lumineux, c'est à dire au taux de lumière effectivement due à la SPDC par rapport à l'ensemble de la lumière capturée par l'EMCCD. Ce rapport a été évalué en modélisant l'intensité moyenne de l'une des taches de fluorescence. Cette modélisation fait apparaitre deux contributions, la figure en sinus cardinal associé au signal de fluorescence d'une part et un fond continu associé au bruit lumineux. On intègre alors indépendamment ces deux contributions sur la surface complète du ROI. r_{bruit} est ainsi évalué en divisant la quantité de SPCD intégrée par la quantité totale de lumière à l'intérieur du ROI.
- (ii) $r_{rendementQ} = 0.9$ il correspond au rendement quantique de la caméra EMCCD.
- (iii) $r_{seuillage} = 0.84$ il correspond aux erreurs introduites par le seuillage. C'est la probabilité que, pour un résultat de détection positif sur une voie, ce ne soit pas un faux positif et que dans le cas où celui-ci correspond effectivement à un photon, son photon jumeau éventuel subisse un gain qui lui permette de dépasser le seuil cf. équations 2.9.
- (iv) $r_{optique} = 0.64$ prend en compte toutes les pertes optiques hors filtre interférentiel. Il faut alors considérer les effets du miroir dichroïque 0.8, de la face de sortie du cristal 0.9, et de la lentille 0.95.
- (v) $r_{filtre} = 0.56$ correspond aux pertes dues au filtre interférentiel utilisé. En observant la courbe de caractérisation du filtre, on remarque qu'il peut être décrit par la fonction gaussienne suivante :

$$f(\lambda) = F e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} \quad (2.45)$$

La fonction est centrée sur 0 par commodité. Dans le cadre de notre filtre on a $F = 0.8$.

La probabilité pour un photon ayant traversé le filtre d'être dans l'intervalle de largeur $d\lambda$ autour de la longueur d'onde λ est donnée par :

$$p(\lambda)d\lambda = \frac{f(\lambda)d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda} = \frac{F e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} F e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} d\lambda} = \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} d\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (2.46)$$

La probabilité que son photon jumeau passe lui aussi dépend de λ et est donnée par la transmission en intensité du filtre soit $f(\lambda)$. Ainsi la probabilité qu'un photon de longueur d'onde dans l'intervalle $d\lambda$ autour de λ après le filtre soit jumelé est donnée par :

$$f(\lambda)p(\lambda)d\lambda \quad (2.47)$$

On suppose en effet la symétrie du filtre autour de la dégénérescence, par conservation de l'énergie dans le cristal, $f(\lambda_{\text{jumeau}}) = f(\lambda)$.

En intégrant sur λ l'expression (2.47) on trouve :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)p(\lambda)d\lambda = \frac{F}{\sqrt{2}} \quad (2.48)$$

pour $F = 0.8$, on a 56.57% des photons d'une voie qui sont appariés. Ce qui est équivalent à un filtre carré de hauteur 0.5657 en transmission.

La valeur théorique du coefficient de corrélation R est donc de 14×10^{-2} à comparer avec les valeurs expérimentales qui sont autour de 5×10^{-2} . Si l'on retrouve bien l'ordre de grandeur, il existe un facteur 3 entre la valeur théorique et la valeur expérimentale. Ceci pourrait par exemple s'expliquer par une sous évaluation des pertes de coïncidence dues au filtre. De fait l'angle de divergence des taches de fluorescence par rapport à l'axe optique est équivalente à une inclinaison du filtre qui a pour effet de décaler sa réponse spectrale, et donc de la disymétriser autour de la dégénérescence. Le filtre étant très étroit, un petit déplacement spectral peut avoir des effets importants.

Paradoxe EPR dans les images jumelles.

Nous proposons dans ce chapitre une expérience qui améliore celle présentée au chapitre précédent [Moreau et al., 2014]. Nous étudierons dans un second temps la possibilité de réaliser un paradoxe EPR à sens unique dans le cadre de cette expérience. Nous verrons enfin que les corrélations mesurées pourraient permettre la reconstitution d'un signal fantôme en utilisant le principe du *ghost imaging*.

3.1 Expérience EPR avec des images jumelles.

3.1.1 Limites des précédentes expériences.

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il nous a été possible de démontrer l'existence d'un paradoxe EPR dans le comportement d'une lumière générée par conversion paramétrique basse et spontanée (SPDC). Toutefois, comme nous l'avons discuté, cette réalisation présente un certain nombre de faiblesses : la faible valeur du degré de paradoxe observé, l'écart avec les prédictions théoriques, mais aussi le recouvrement partiel en champ proche des faisceaux de fluorescence. De fait, si la séparation des photons jumeaux est clairement assurée dans cette expérience à une caméra, les faisceaux de fluorescence ne sont, eux, pas correctement séparés. Les deux polarisations sont de plus détectées sur le même capteur, ce qui pose des problèmes en champ proche du fait de la présence d'un effet de smearing du pic d'auto-corrélation. Ces problèmes ont pour la plupart pu être corrigés dans l'expérience que nous présentons dans ce chapitre et qui consiste en la détection séparée des deux faisceaux de fluorescence sur deux caméras. Une telle indépendance des systèmes de détections correspond de plus à une nécessité

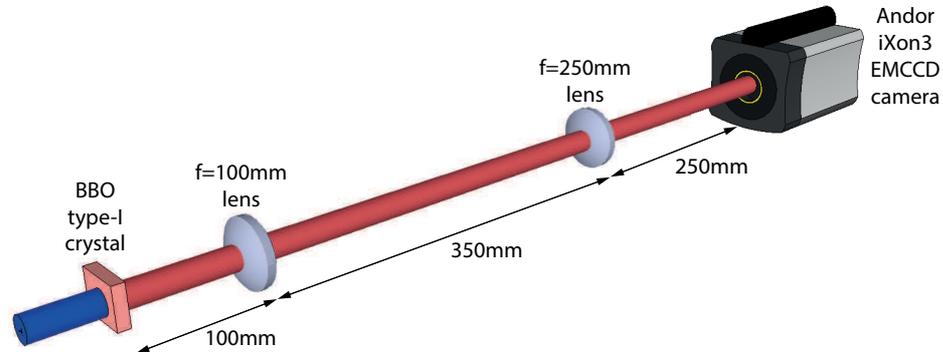


FIGURE 3.1 – Schéma expérimental utilisant un accord de phase de type I. Reproduit de [Edgar et al., 2012].

plus fondamentale. L'intrication EPR étant une forme de non localité comme nous l'avons vu au chapitre 1, elle requiert une telle séparation. En réalité, l'échec d'une théorie à états locaux cachés (LHS) ne peut être ultimement démontré que si les choix des bases de détections sont séparés causalement. À défaut de séparation causale, nous proposons dans ce chapitre l'indépendance d'un tel choix, ce qui ne pouvait pas être le cas dans le cadre de la précédente expérience.

Au moment où nous publions les résultats présentés au chapitre précédent [Moreau et al., 2012], une équipe de Glasgow a elle-même publié un article dont l'objectif était une réalisation similaire, à savoir détecter des corrélations de type EPR à deux dimensions en utilisant une caméra EMCCD [Edgar et al., 2012]. Leur configuration expérimentale ne comprenait là encore qu'un système de détection. D'autre part, contrairement à notre première expérience, la lumière utilisée est de la fluorescence paramétrique générée par un accord de phase de type I, comme on peut le voir sur la figure 3.1. Ce choix présente un défaut majeur. En utilisant un tel accord de phase, les photons signal et idler deviennent indistinguables et, si leurs aires de cohérence sont bien distinctes en champ lointain¹, il n'en est rien en champ proche où les zones d'arrivées possibles des photons d'une même paire se superposent. Cela pose un problème fondamental, de fait la démonstration d'un paradoxe EPR s'effectue par la démonstration du phénomène de steering qui nécessite une séparation bipartite claire du système étudié, l'une des parties semblant agir sur l'autre². Or, puisqu'en champ proche les sous parties de la fonction d'onde correspondant à chacun des photons sont confondues et indistinguables, ces sous systèmes ne sont pas distincts et pourraient agir localement l'un

1. excepté le centre des taches de fluorescence

2. *spooky action at a distance*

sur l'autre. Les auteurs sont de fait prudents à ce sujet, préférant parler d'*EPR like correlations* plutôt que d'*EPR steering* ou de paradoxe EPR. Enfin la non séparation des photons jumeaux en champ proche conduit aussi à un problème plus technique : le pic de corrélation quantique est alors confondu avec le pic d'autocorrélation des images, et y est donc noyé, d'autant que le smearing fait diffuser ce pic en dehors du pixel central. Malgré ces lacunes, il convient toutefois de noter que l'expérience [Edgar et al., 2012] présente des résultats proches des attentes théoriques ainsi qu'une dimensionnalité importante des corrélations mesurées. Ces résultats sont donc encourageants quant à la possibilité d'obtenir des résultats proches de la théorie dans des conditions dans lesquelles les faisceaux se propagent le long de l'axe optique.

3.1.2 Expérience EPR à deux caméras.

Protocole expérimental.

Les schémas expérimentaux de la seconde expérience réalisée se trouvent sur la figure 3.2. Par comparaison avec l'expérience présentée au chapitre précédent, la génération de la fluorescence paramétrique s'effectue dans les mêmes conditions à la largeur du faisceau pompe près. Le mode de détection est, lui, considérablement revu. On peut observer les faisceaux de fluorescence paramétrique de polarisation croisée qui émergent du cristal de BBO de 0.6 mm d'épaisseur en se propageant selon deux directions distinctes séparées par l'angle de double réfraction (Walk-off). Ces deux faisceaux sont séparés et envoyés vers deux systèmes optiques différents à l'aide de deux miroirs. Le rayonnement UV est d'abord affaibli par un miroir dichroïque, non indiqué sur le schéma et placé entre le cristal et les miroirs, de sorte à éviter la fluorescence de ces derniers. La lumière UV résiduelle passe ensuite entre les deux miroirs avant d'être bloquée. Les seules différences entre la configuration champ proche et champ lointain sont les conditions d'imagerie, c'est-à-dire le placement des lentilles et des caméras. Ainsi, au contraire du dispositif précédent, on évite, pour passer en champ proche, l'introduction d'une lentille supplémentaire et d'un prisme de Wollaston. Ceci permet d'assurer que le système de lumière mis en jeu dans la démonstration est bien le même en champ proche et en champ lointain, ce qui n'était pas exactement le cas précédemment compte tenu de l'imperfection des composants optiques. En outre la séparation des photons jumeaux et leur détection par des systèmes indépendants permettent de se rapprocher de leur indépendance au sens classique du terme, c'est-à-dire selon le principe de localité. Ceci rend la démonstration de leur interdépendance quantique d'autant plus probante.

Les deux systèmes imageurs sont identiquement composés de filtres interférentiel centrés sur la dégénérescence, d'une lentille de 120 mm de focale et de caméras EMCCD. En champ proche, le grandissement transversal obtenu est $\gamma = 2.47 \pm 0.01$.

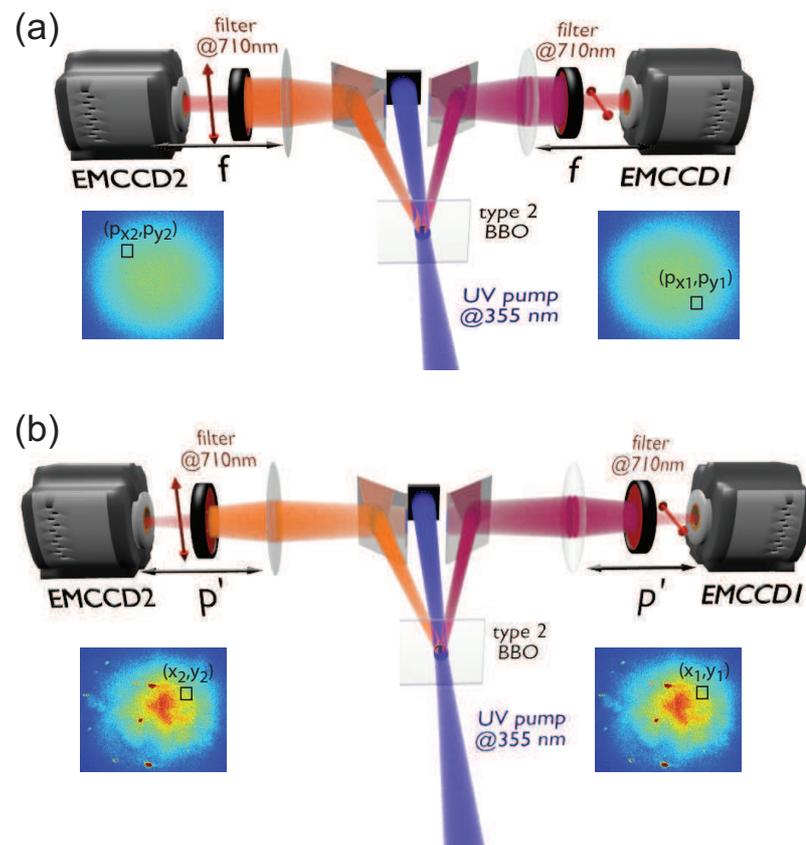


FIGURE 3.2 – Schémas expérimentaux. (a) Configuration champ lointain. (b) Configuration champ proche. Inserts : Sommes de 700 images binaires.

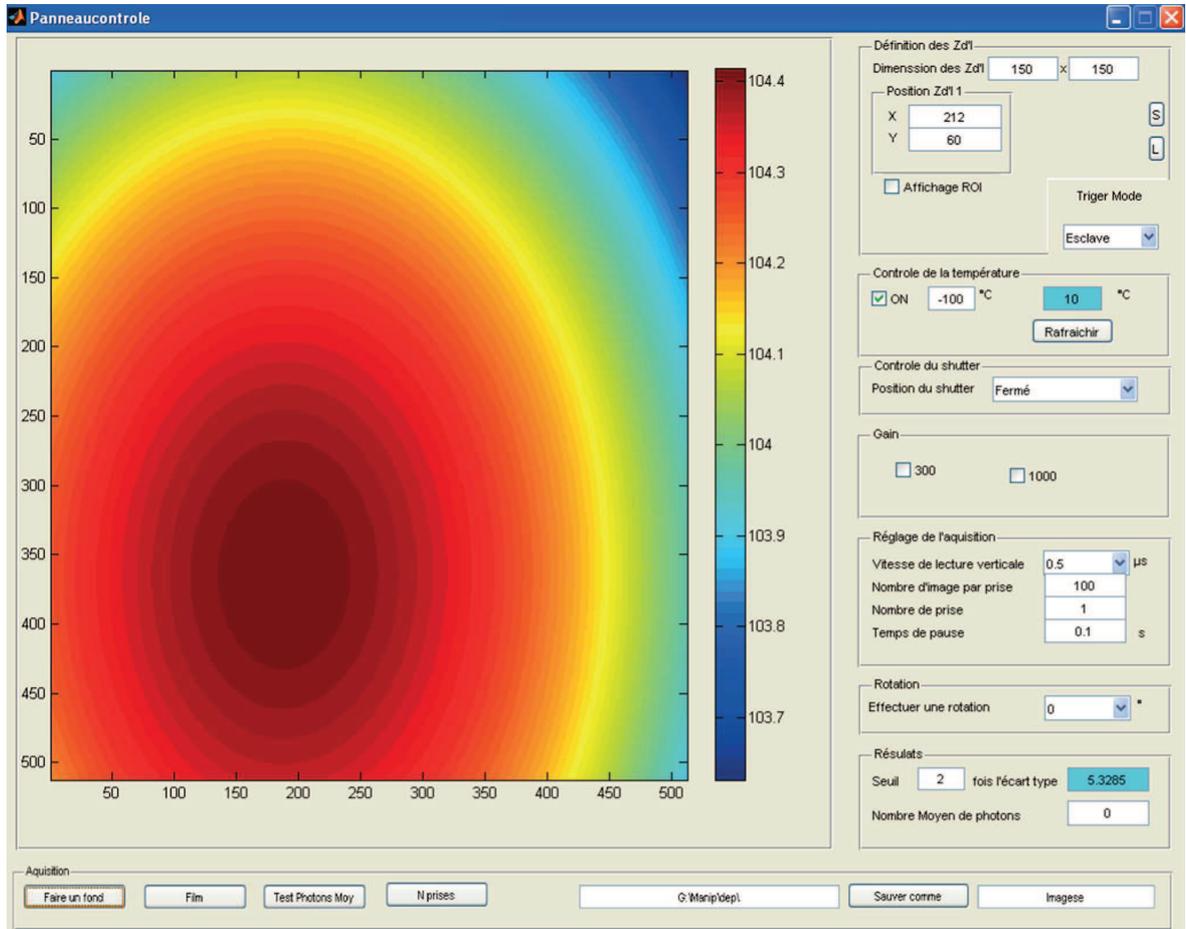


FIGURE 3.3 – Programmes de contrôle, d’acquisition et de synchronisation des caméras.

Synchronisation des caméras.

De manière à pouvoir détecter les corrélations quantiques, les couples d’images utilisés pour calculer l’intercorrélacion normalisée doivent partager des impulsions pompes, donc des paires intriquées. Il faut donc pour cela synchroniser les caméras de sorte que leurs temps d’exposition se confondent.

L’utilisation de deux caméras rend nécessaire l’acquisition sur deux ordinateurs différents, car les cartes d’acquisition des caméras utilisent les mêmes ports de communications. Pour la synchronisation, l’utilisation du mode de déclenchement externe d’une des caméras contrôlé par un signal envoyé par l’autre caméra ne s’est pas avéré une solution efficace, compte tenu du grand nombre d’images à acquérir. La synchronisation des ordinateurs entre eux était alors tout de même nécessaire, compte tenu de la gigue temporelle des opérations d’acquisition et de sauvegarde des images. Une telle solution nécessitait d’imposer des temps d’attente importants aux programmes pour

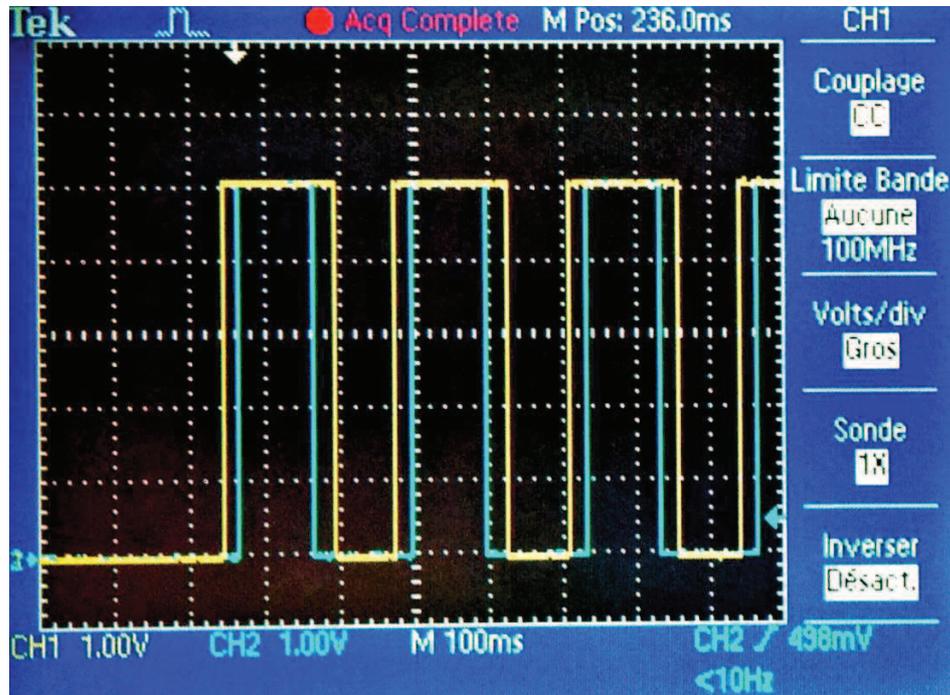


FIGURE 3.4 – Trace des signaux de sortie des caméras, correspondant aux durée expositions, observées sur un oscilloscope numérique. Les signaux correspondent au début d'une phase d'acquisition de 100 images. Le signal jaune correspond à la caméra maître tandis que le bleu correspond à la caméra esclave.

compenser cette gigue, rendant les temps d'acquisition considérables lors des réglages. Nous avons donc imposé la synchronisation au coeur même des programmes d'acquisition. Dans ce but, la seule synchronisation en amont des horloges des ordinateurs s'est avérée insuffisante compte tenu de leurs dérivés respectives sur les temps d'acquisition qui ont pu monter jusqu'à plusieurs heures.

La solution qui a été retenue est celle de la synchronisation des programmes par dialogue entre les ordinateurs. En reliant les ordinateurs par un câble série, nous avons pu imposer aux programmes de s'attendre à différentes étapes clés de leurs exécutions de sorte qu'ils envoient de façon simultanée les consignes de capture d'images aux caméras. Le programme de l'ordinateur esclave attend le signal de début d'acquisition du programme maître avant d'envoyer la consigne d'acquisition à la caméra. Le programme maître lance la même consigne immédiatement après l'envoi du signal à l'autre ordinateur, ce qui impose un retard sur le lancement de l'acquisition esclave sur l'acquisition maître. Pour éviter la détection de fluorescence paramétrique pendant le temps mort qui existe entre le début des deux acquisitions, le laser est déclenché par le signal de sortie de la caméra esclave. Par conséquent, quand seule la caméra maître est

en cours d'acquisition, aucune impulsion pompe n'est envoyée sur le cristal de BBO. Le bruit lumineux additionnel qui pourrait être capturé au cours de cet instant d'attente par la caméra maître est négligeable. Ceci est dû au fait que, compte tenu des conditions d'obscurité dans lesquelles se déroulent les acquisitions, la seule source de bruit lumineux non négligeable dans les images acquises est due à la fluorescence des différents éléments optiques induite par le rayonnement UV du laser. De même, pour que l'acquisition maître ne cesse pas avant l'acquisition esclave, le temps d'exposition de la première est choisi plus important que la seconde. De cette façon, nous assurons que l'ensemble des impulsions délivrées par le laser est détecté par les deux caméras. Si ce n'était pas le cas, cela se traduirait par la présence additionnelle d'une lumière non corrélée et par conséquent une diminution de l'amplitude des pics de corrélations quantiques normalisés.

Sur la figure 3.3 est présenté le panneau de contrôle associé au programme qui gère le contrôle, l'acquisition et la synchronisation des caméras. Il reprend la plupart des fonctionnalités du programme d'acquisition présenté au chapitre précédent (figure 2.12), et permet de plus de gérer les différents modes de synchronisation utilisés. Nous présentons sur la figure 3.4 les signaux de sortie délivrés par les deux caméras. Les durées d'expositions correspondent à la partie haute de ces signaux TTL (Transistor-Transistor logic). On peut constater que les événements d'exposition de la caméra esclave sont bien inclus dans ceux de la caméra maître, donc que la synchronisation fonctionne correctement.

Résultats

Nous avons ainsi pu acquérir des couples d'images jumelles présentant des propriétés de corrélations quantiques dues aux paires. Ces images nous ont permis dans un premier temps de tracer les probabilités conditionnelles de détection que l'on peut trouver sur la figure 3.5. Cette figure représente la distribution de probabilité des paires exprimée en nombre de coïncidences. Ces distributions sont exprimées en fonction des couples de variables transverses prises dans la même direction et pour les deux parties, elles sont intégrées selon la direction orthogonale, c'est à dire que pour la représentation de la probabilité en fonction des variables x_1 et x_2 , celle-ci a été sommée sur toutes les valeurs de y_1 et y_2 .

Les résultats expérimentaux confirment les attentes théoriques décrites par les équations (1.136) et (1.137) du chapitre 1 : une corrélation des positions et une anticorrélation des impulsions. Sur la figure 3.5(e) est mis en évidence l'élargissement de la probabilité conditionnelle du graphique (c) de cette même figure. Cet élargissement pour les grandes valeurs de p_{x1} et les valeurs fortement négatives de p_{x2} n'est pas prévu par la théorie de la SPDC des équations (1.136) et (1.137). En fait de telles valeurs de p_{x1} et p_{x2} correspondent à des vecteurs d'onde signal et idler très écartés du vecteur d'onde pompe. Cet élargissement est cohérent avec celui dû à l'aspect fini de la bande passante des filtres interférentiels, tel que nous l'avons décrit au paragraphe 2.3.2 du

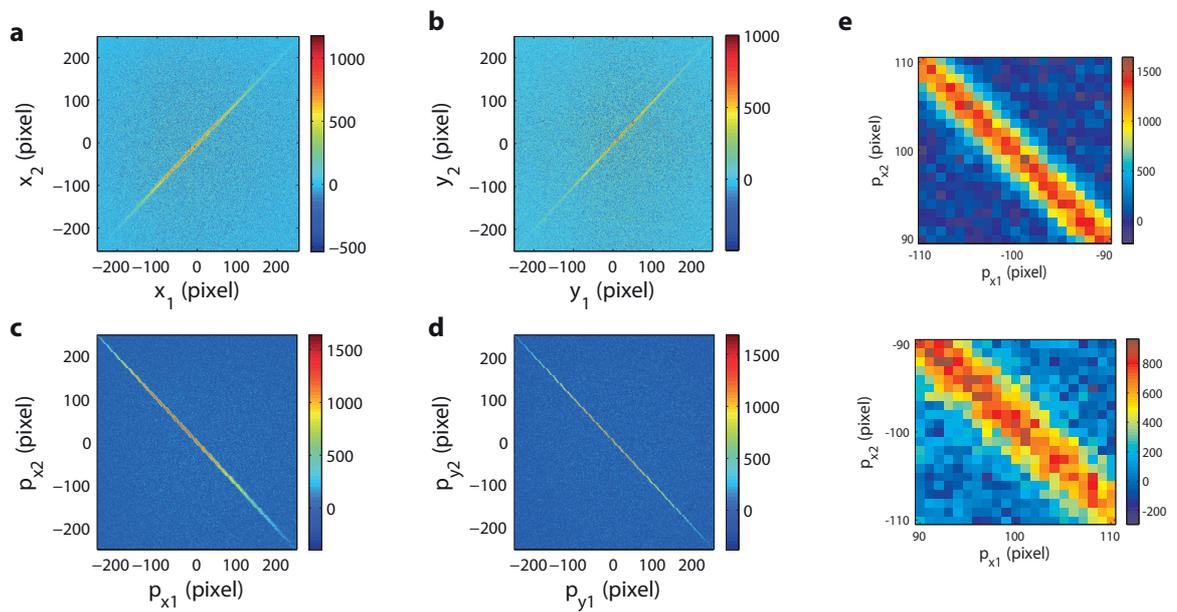


FIGURE 3.5 – Probabilités conditionnelles associées aux paires p_{paires} en fonction des coordonnées transverses. (a,b) : Champ proche. (c,d) : Champ lointain. (e) : Agrandissement de deux parties de la représentation (c). L'élargissement de la probabilité est due à la bande passante finie des filtres d'interférences. Les échelles de couleurs sont exprimés en nombre de coïncidences. Les probabilités sont évaluées grâce à 35000 paires d'images.

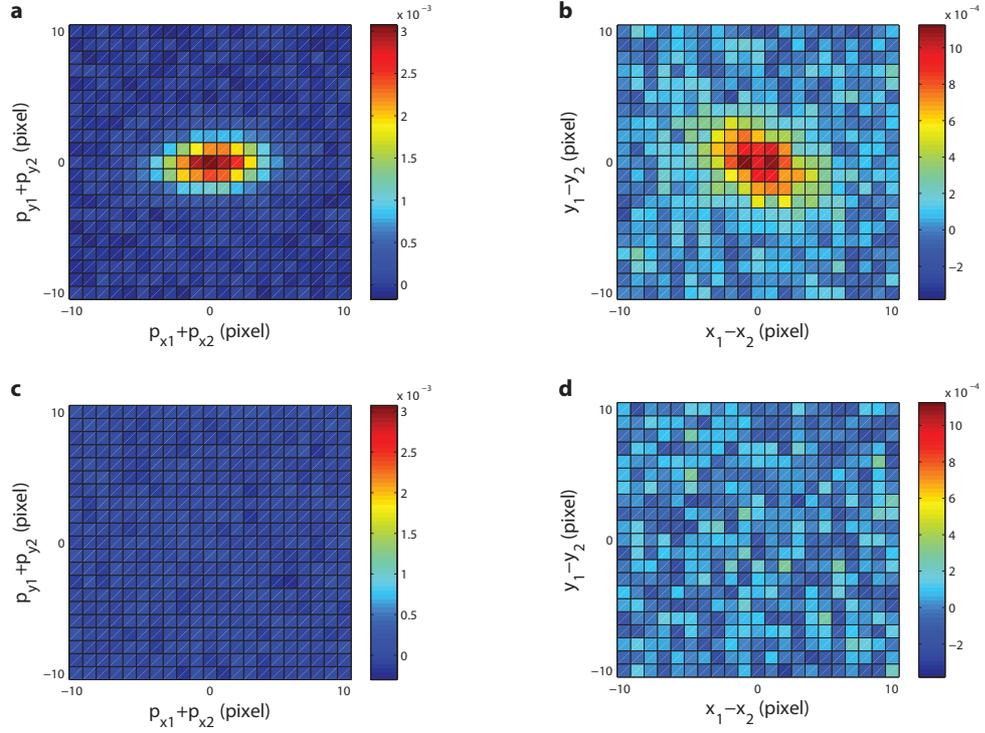


FIGURE 3.6 – Inter corrélations normalisées, calculées à l’aide de 700 images en champ lointain (a,c) et en champ proche (b,d). En (c) et (d) sont présentées des inter-corrélations d’images qui ne partagent pas d’impulsions pompes.

chapitre précédent. De fait, pour les vecteurs d’ondes présentant un fort angle avec le vecteur pompe dans la direction de séparation des taches de fluorescences, on s’attend à ce que les aires de cohérences soient plus élargies que pour des angles de plus faibles valeurs. Dans le cas présent, la séparation des taches s’effectue selon la direction x . L’élargissement observé en (e) est donc conforme aux attentes.

Nous avons ensuite pu évaluer comme au chapitre précédent les inter-corrélations normalisées en champ proche et champ lointain. Les résultats sont présentés sur la figure 3.6. On observe la présence de pics de corrélations, qui ne sont pas parfaitement symétriques. En champ lointain, cette asymétrie peut s’expliquer par l’effet du filtrage chromatique partiel décrit au chapitre précédent, l’effet attendu devant être plus important dans la direction de séparation des faisceaux de fluorescence. L’asymétrie observée est donc bien en accord avec un tel effet.

L’asymétrie en champ proche pourrait être due à des aberrations géométriques que nous avons en effet observées lors des réglages et cherché à minimiser. Ce sont principalement les aberrations de coma et d’astigmatisme qui étaient présentes.

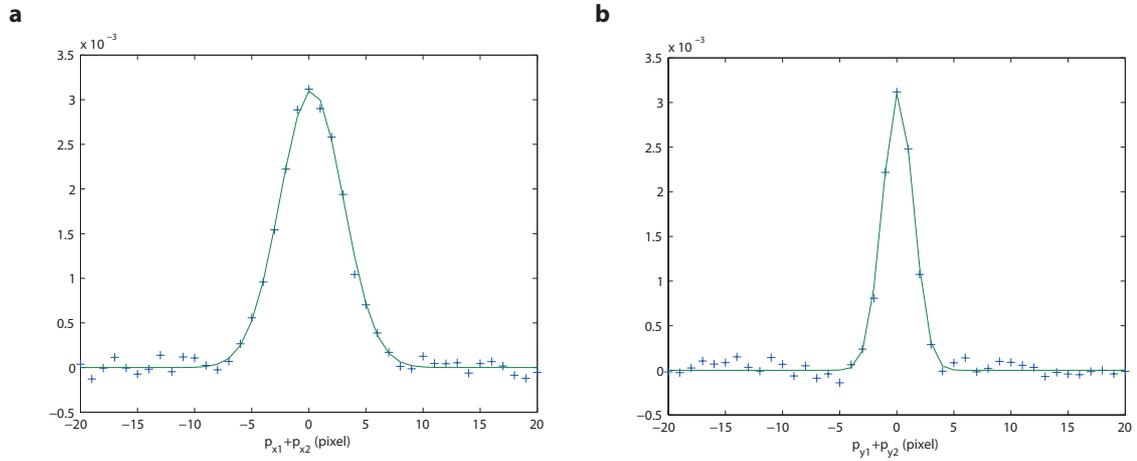


FIGURE 3.7 – Coupes de la figure 3.6 (a) en champ lointain effectuées selon x en (a) et selon y en (b). Les croix bleues correspondent aux données expérimentales et les lignes vertes correspondent aux modélisations permettant l'évaluation des dimensions des pics.

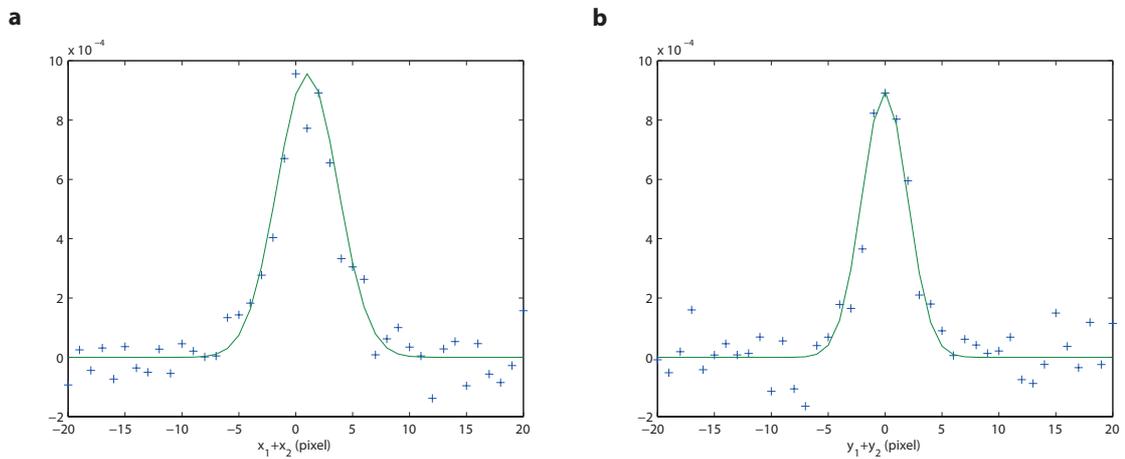


FIGURE 3.8 – Coupes de la figure 3.6 (b) en champ proche effectuées selon x en (a) et selon y en (b). Les croix bleues correspondent aux données expérimentales et les lignes vertes correspondent aux modélisations permettant l'évaluation des dimensions des pics.

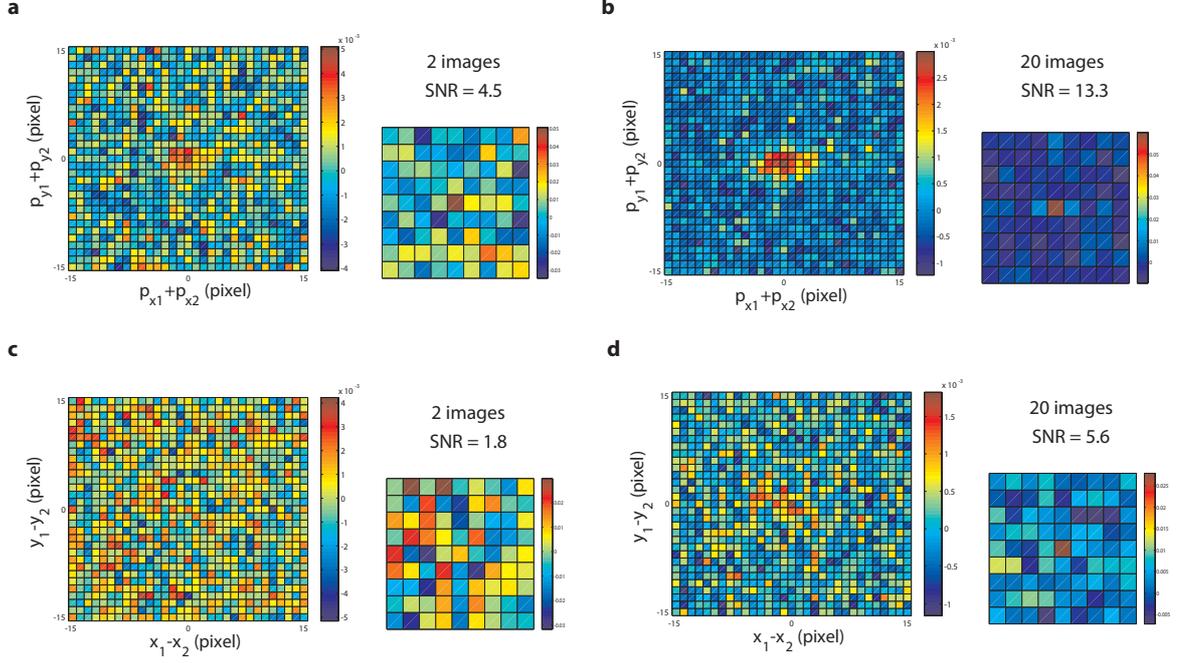


FIGURE 3.9 – Intercorrélations normalisées en fonction du nombre d'images. A gauche : corrélation sur les pixels physiques. Petites images à droite : corrélations calculées après regroupement des pixels par 8×8 . (a,b), Champ lointain. (c,d), Champ proche.

En procédant par la même méthode qu'au chapitre précédent, c'est à dire en modélisant les pics d'intercorrélation par des Gaussiennes à deux dimensions sur lesquelles sont ensuite estimées les variances associées aux probabilités conditionnelles impliquées dans le test du paradoxe EPR. Nous obtenons alors les valeurs suivantes :

$$\Delta^2(x_1 - x_2) = (299 \pm 14) \mu m^2 \quad (3.1)$$

$$\Delta^2(y_1 - y_2) = (168 \pm 7) \mu m^2 \quad (3.2)$$

$$\Delta^2(p_{x1} + p_{x2}) = (9.70 \pm 0.1) \cdot 10^{-6} \hbar^2 \mu m^{-2} \quad (3.3)$$

$$\Delta^2(p_{y1} + p_{y2}) = (2.53 \pm 0.04) \cdot 10^{-6} \hbar^2 \mu m^{-2} \quad (3.4)$$

On obtient alors à partir de ces variances :

$$\Delta^2(x_1 - x_2) \Delta^2(p_{x1} + p_{x2}) = (2.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \hbar^2 \quad (3.5)$$

$$\Delta^2(y_1 - y_2) \Delta^2(p_{y1} + p_{y2}) = (4.2 \pm 0.2) \cdot 10^{-4} \hbar^2 \quad (3.6)$$

Ces résultats violent clairement l'inégalité (1.15) démontrant un paradoxe EPR à deux dimensions. Les produits des variances sont plus de 12000 écarts types en dessous de la limite de Heisenberg selon la direction y et à plus de 1200 écarts types sous cette

limite selon la direction x . Les prédictions théoriques de la valeur de ces produits d'incertitudes, obtenues selon la méthode présentée au chapitre 2, à savoir $8.6 \cdot 10^{-4} \hbar^2$ selon x et $2.6 \cdot 10^{-4} \hbar^2$ selon y sont assez proches des valeurs expérimentales compte tenu du fait que ces produits de variances varient comme le carré de chacune des largeurs expérimentales des pics de corrélations. De petits biais expérimentaux sont à même de générer de grands écarts avec les valeurs théoriques des produits de variances.

En utilisant la définition (1.18) du degré de paradoxe, nous obtenons respectivement selon x et y

$$K_x = 86 \pm 5 \quad (3.7)$$

$$K_y = 595 \pm 40 \quad (3.8)$$

Ces résultats apportent la preuve de la forte dimensionnalité de l'intrication mise ici en évidence dans le comportement de la fluorescence paramétrique. La valeur de 595 correspond, à notre connaissance, au plus haut degré de paradoxe jamais reporté [Reid et al., 2009]. Notons toutefois que les démonstrations utilisant les quadratures du champ, telles que [Steinlechner et al., 2013], sont réalisées avec des rendements quantiques associés à l'ensemble de la détection qui sont très hauts comparés aux nôtres, ce qui rend de telles démonstrations plus représentatives de l'ensemble du système. Ici les coefficients de corrélations intégrés ont pour valeur en champ proche et champ lointain :

$$R_{cp} = 4 \times 10^{-2} \quad (3.9)$$

$$R_{cl} = 7 \times 10^{-2}$$

Ce qui reste en dessous de la valeur attendue qui est de 0.14.

Enfin, pour terminer cette partie, nous avons cherché à réduire le nombre d'images utilisées pour effectuer la démonstration. Les figures d'inter-corrélations obtenues pour différents nombres d'images peuvent être vues sur la figure 3.9. Du fait de la plus faible valeur du coefficient de corrélation en champ proche R_{cp} qu'en champ lointain R_{cl} un nombre plus important d'images est nécessaire pour obtenir un pic permettant d'effectuer la démonstration du paradoxe EPR. Nous prenons ici comme définition du rapport signal sur bruit (SNR) le rapport de la valeur du pic de corrélation sur l'écart-type de la corrélation expérimentale en dehors de ce pic. Nous avons pu vérifier que les algorithmes de modélisations convergeaient et que leurs résultats permettaient une démonstration du paradoxe EPR à partir de 20 images en champ proche, alors que les résultats en champ lointain permettent une exploitation à partir de 2 images.

Compte tenu du temps (d'environ 4 secondes) nécessaire à l'acquisition de 20 images dans nos conditions expérimentales, notre méthode permet de capturer en image de façon rapide l'essence quantique du comportement de la lumière. Ce temps d'acquisition peut être comparé aux jours nécessaires dans le cadre du balayage d'un plan avec un

détecteur ponctuel ou encore à quelques heures en utilisant des miroirs digitaux (DMD : Digital Micromirror device) et la méthode d'acquisition comprimée (ou *compressive sensing*) [Howland and Howell, 2013].

Notons qu'une étude théorique détaillée de la valeur du SNR peut être trouvée dans [Lantz et al., 2014]. On y trouve notamment une justification du choix d'une fluence moyenne de 0.15 photons par pixels, dans le cadre de détecteurs binaires bruités. Cette valeur optimise, de fait, le SNR du pic de corrélation détecté.

3.2 Steering EPR à sens unique dans le domaine spatial.

L'existence du steering à sens unique a d'abord été mis en évidence théoriquement et dans le cadre d'opérateurs de mesure Gaussiens [Midgley et al., 2010]. Un tel paradoxe à sens unique a alors pu être réalisé expérimentalement dans le domaine des quadratures du champ [Händchen et al., 2012]. De plus, le concept de steering EPR à sens unique a été récemment généralisé [Bowles et al., 2014]. Il a ainsi pu être démontré que certains états quantiques peuvent présenter une dissymétrie fondamentale dans leur non localité puisque, pour ces états, cette dissymétrie peut être obtenue quelles que soient les observables utilisées pour les mesurer. Nous allons ici étudier la possibilité de réaliser une telle démonstration asymétrique dans le contexte qui nous a préoccupés dans le cadre de cette thèse, c'est à dire dans le domaine spatial et partant de l'état intriqué de la SPDC.

3.2.1 Principe de démonstration du steering EPR à sens unique.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, le paradoxe EPR repose sur l'échec d'un modèle à états locaux cachés (LHS) à décrire des résultats expérimentaux. Nous l'avons vu dans la partie §1.1.3, les LHS sont par nature des objets asymétriques. Il en découle que le paradoxe EPR peut ne pas être symétrique pour les deux parties impliquées. On peut dès lors démontrer l'existence d'un paradoxe à sens unique. Cela signifie que dans un sens, un modèle à LHS pourra expliquer les résultats expérimentaux alors que dans l'autre sens une telle tentative sera infructueuse. De façon pratique, cela implique qu'à supposer que les parties ne se font pas confiance, l'une des parties notée 2 pourra tout de même fournir une preuve à l'autre notée 1 qu'elles partagent un état EPR en prédisant ses résultats de mesure. La partie 1, elle, ne pourra pas convaincre la partie 2 d'un tel fait.

Jusqu'à présent dans ce texte, les tests considérés donnaient des rôles exactement symétriques aux variables des parties 1 et 2. Dans le cadre d'une démonstration d'un steering à sens unique, il convient d'abandonner la dernière étape du développement présenté en partie §1.1.3 et de retourner à la condition (1.13). Cette condition sera

respectée par tout modèle à états locaux cachés, nous la réécrivons :

$$\Delta_{inf}^2 x_1 \Delta_{inf}^2 p_1 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (3.10)$$

où

$$\Delta_{inf}^2 x_1 = \int dx_1 dx_2 p_{paire}(x_1, x_2) [x_1 - x_{est}(x_2)]^2 \quad (3.11)$$

Ici, on remarque que si on choisit un estimateur pour la valeur attendue de x_1 qui vaut $x_1^{est}(x_2) = x_2$, tel que nous avons pu le faire au cours de la partie §1.1.3, le rôle des variables x_1 et x_2 devient symétrique et l'on aura $\Delta_{inf}^2 x_1 = \Delta_{inf}^2 x_2$. Ainsi, un tel choix rendra forcément l'inférence de x_1 à partir des résultats sur la particule 2 identique à l'inférence de x_2 à partir des résultats sur la particule 1. Pour obtenir une démonstration asymétrique, il faut donc disposer d'un état qui minimise l'inférence $\Delta_{inf}^2 x$ pour l'une des parties avec une estimation qui vérifie $x_{est}(x) \neq x$. Par conséquent, une fois un tel état généré, il convient d'évaluer $\Delta_{inf}^2 x_1$ ou $\Delta_{inf}^2 x_2$ en cherchant la stratégie d'estimation optimale. Il est à noter qu'on minimisera l'erreur sur l'inférence si l'on choisit pour valeur de $x_1^{est}(x_2)$ le barycentre de la distribution $P(x_1|x_2)$ pour tout x_2 . Nous allons maintenant voir comment nous pouvons générer un tel état permettant une asymétrie dans la détection d'un paradoxe EPR, avant de s'intéresser à effectuer une telle démonstration sur cet état.

3.2.2 État EPR à sens unique dans le domaine spatial.

On se propose ici de décrire la façon dont on peut construire un état présentant un steering à sens unique. Nous partons de l'état quantique de la SPDC qui nous a permis de démontrer une intrication EPR dans la partie §3.1. Puisqu'un tel état présente des produits d'incertitude conditionnelle de type $\Delta^2(x_1 - x_2)\Delta^2(p_{x1} + p_{x2})$ qui sont très en dessous de la limite de Heisenberg, il convient de chercher un mécanisme qui permettrait de le rapprocher de cette limite.

Supposons que l'on dispose d'un moyen d'ajouter un bruit sur la valeur des impulsions des photons détectés. C'est à dire que la valeur des impulsions serait dispersée par une cause supplémentaire, par exemple le passage à travers un milieu diffusant. Un tel phénomène aurait pour conséquence un élargissement des probabilités conditionnelles en champ lointain et donc un élargissement des fonctions présenté en figure 3.5. Un tel élargissement correspond en fait à la convolution de ces distributions de probabilité par une fonction qui caractérise la dispersion spatiale imposée sur les impulsions. On va supposer que le phénomène de dispersion est gaussien et qu'il ne s'applique que sur le système de la particule notée 2. La particule 1 ne subit pas ces déviations spatiales. Ainsi la probabilité $p_{paire}(p_{x1}, p_{x2})$ de détecter la particule 1 avec l'impulsion transverse p_{x1} conjointement à une mesure p_{x2} pour l'impulsion transverse de sa particule jumelle

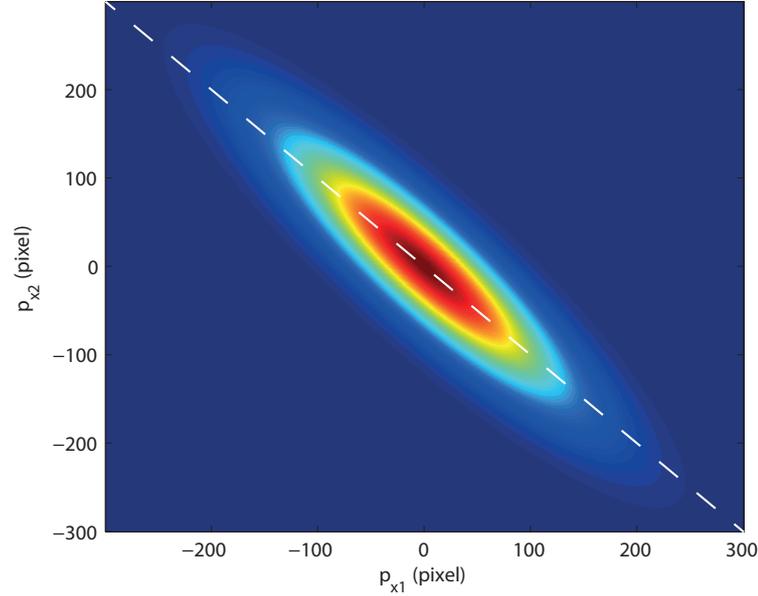


FIGURE 3.10 – Distribution de probabilité associée aux paires après élargissement selon la direction p_{x2} .

2, est le résultat de la convolution de la probabilité $p_{paire}(p_{x1}, p_{x2})$ associé à la fonction d'onde de la SPDC³ par une fonction d'allure gaussienne selon l'axe p_{x2} et ponctuelle selon l'axe p_{x1} . Nous avons évalué numériquement l'allure d'une telle fonction, avec des écarts types caractéristiques valant en champ lointain, 120 pix pour la largeur des taches de fluorescence, 1.5 pix pour la largeur propre aux corrélations c'est à dire à l'accord de phase, et 30 pix pour la fonction gaussienne caractérisant la dispersion imposée selon l'axe p_{x2} . Le résultat d'une telle convolution est montré en figure 3.10. La première chose à remarquer sur cette figure est que contrairement à la probabilité $p_{paire}(p_{x1}, p_{x2})$ avant dispersion, la ligne blanche en pointillé qui correspond à une équation $p_{x1} = -p_{x2}$ n'est plus une ligne de symétrie de la distribution de probabilité obtenue. La figure 3.10 semble tournée par rapport à cet axe. Cet effet peut se comprendre par le fait que l'élargissement correspond à un élargissement le long de l'axe p_{x2} . L'élargissement dans la direction p_{x2} n'a donc comme limite que celle fixée par l'effet de dispersion des impulsions le long de cet axe. Un élargissement se produit bien aussi par conséquence le long de l'axe p_{x1} mais qui est limité par la largeur des taches de fluorescence. On voit ici apparaître une asymétrie. Cette asymétrie peut être vue plus clairement sur la figure 3.11. En (a) de cette figure, sont représentées des coupes verticales pratiquées sur la figure 3.10 en fonction de p_{x1} et recentrées indépendamment pour tout p_{x1} de sorte à

3. c'est à dire déduite de l'équation (1.137)

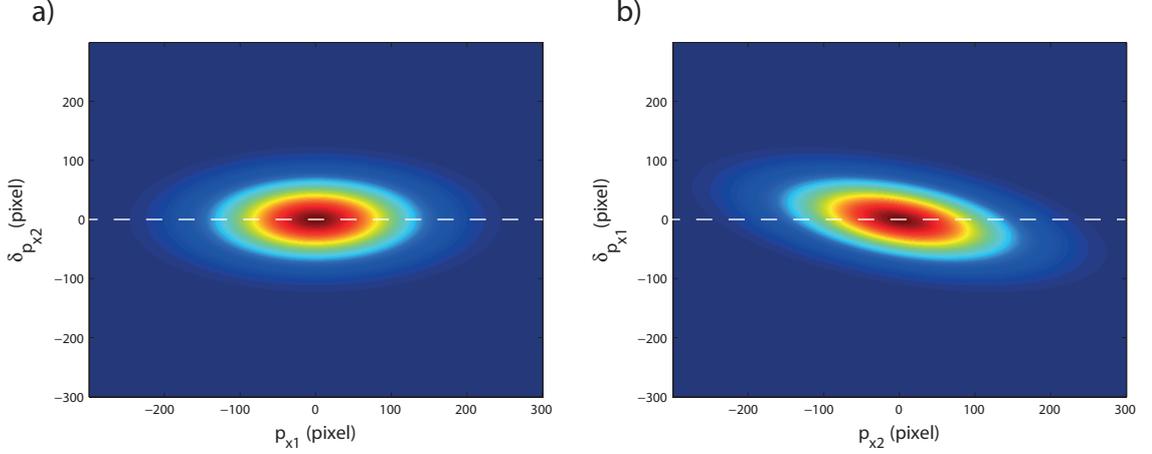


FIGURE 3.11 – Ensemble des coupes verticales (a) et horizontales (b) de la figure 3.10.

ce que la ligne $p_{x1} = -p_{x2}$ de 3.10 correspond à l'ordonnée 0. $\delta_{p_{x2}}$ étant l'écart à cette ligne pointillée blanche pris le long de la coupe, c'est à dire dans la direction p_{x2} . On observe que de telles coupes sont bien alignées selon la ligne d'équation $p_{x1} = -p_{x2}$. Ce n'est pas le cas de la figure 3.11(b) qui représente cette fois des coupes horizontales recentrées de la même façon. En ce sens les deux voies signal et idler sont devenues asymétriques.

Or les quantités $\Delta_{inf}^2 p_{x1}$ et $\Delta_{inf}^2 p_{x2}$ s'évaluent à partir des distributions de probabilités présentées dans ces figures. $\Delta_{inf}^2 p_{x2}$ est l'écart type selon l'axe $\delta_{p_{x2}}$ de la distribution de probabilité présentée en figure 3.11(a). Cette valeur correspond à la stratégie $p_{x2}^{est} = -p_{x1}$ qui est bien la stratégie d'estimation optimale puisque l'estimation correspond toujours à la valeur moyenne de la distribution $p_{paires}(p_{x2}|p_{x1})$. On sait par ailleurs que si on choisit la même stratégie pour évaluer $\Delta_{inf}^2 p_{x1}$, alors

$$\Delta_{inf}^2 p_{x1} = \Delta_{inf}^2 p_{x2} = \Delta(p_{x1} + p_{x2})$$

Or on observe sur la figure 3.11(b) qu'une telle stratégie n'est pas optimale. Par conséquent la dissymétrie qui est mise ici en évidence est à même de générer une dissymétrie dans les incertitudes conditionnelles mises en jeu dans le test du paradoxe EPR. C'est en quelque sorte la perte d'information sur la position due au phénomène de dispersion qui empêche les parties d'évaluer pleinement la qualité de l'intrication qu'elles partagent.

Il se peut alors que l'un des produits d'incertitude reste sous la limite de Heisenberg alors que l'autre la dépasse. Dans une situation de non confiance, la partie 2 dont les particules ont subi la dispersion pourra toujours convaincre la partie 1 qu'ils partagent un état EPR, mais l'inverse n'est plus vrai.

Par ailleurs, une telle dissymétrie ne peut être obtenue que pour des états non-pur

c'est à dire présentant un mélange statistique. En effet, si les états en considération sont des états quantiques purs, il est toujours possible, à partir des résultats de mesure échangés par les deux parties, d'effectuer une décomposition en modes de Schmidt et donc d'avoir accès à la pleine dimensionnalité de l'intrication. Une telle décomposition pourrait permettre de reconstruire un état EPR et donc montrer que l'état partagé est bien à même de générer un paradoxe depuis chacune des parties.

Ainsi, on peut imaginer que les photons de la partie 2 passent avant leur détection par une plaque de diffusion tournante placée en champ proche. De ce fait, le champ proche pourrait être correctement imagé mais l'impulsion des photons 2 serait, elle, dispersée. L'utilisation d'un milieu diffusant en mouvement est alors nécessaire pour éviter que l'effet de diffusion puisse être statistiquement caractérisé, et donc compensé, par l'observation de la distribution des impulsions p_{x2} pour chaque valeur de p_{x1} . En imposant que le motif de diffusion change à chaque nouveau passage d'un photon, seul l'effet moyen d'élargissement peut être caractérisé et pas l'effet de diffusion instantané qui pourrait alors être corrigé de façon cohérente sur chaque photon en compensant la déformation de front d'onde qui, lui, est imposé en champ proche. De façon absolue, si on peut assurer que seul un photon passe par le diffuseur avant que ses propriétés de diffusion aient orthogonalement changé, alors l'effet de diffusion ne peut pas être lu, l'état exact du photon et donc l'information sur la distorsion subie n'étant pas clonable. Autrement dit, il faut bien perdre l'information sur le phénomène de diffusion pour que l'état quantique soit traité comme un mélange statistique et non pas comme un état pur. Sans cette condition, la dissymétrie apparente pourrait être corrigée.

On peut aussi imaginer créer une dissymétrie à un niveau plus fondamental. Supposons que la déviation des particules 2 soit associée à un phénomène de corrélations quantiques, c'est à dire que la valeur de la déviation du faisceau 2 est elle même liée à un état quantique (un ancilla) et a donc une valeur a priori incertaine. Concrètement on peut imaginer un miroir qui serait préparé dans un état pur pour lequel son orientation serait incertaine. Il serait donc associé à une fonction d'onde délocalisée prévoyant l'ensemble des orientations possibles. La réflexion de la partie de la fonction d'onde du rayonnement associé à la particule 2 corrèle l'orientation du miroir et l'impulsion transverse mesurée de la particule 2. De cette façon, à moins de disposer d'un accès au système du miroir les résultats ne peuvent être correctement prédits. L'interaction de l'onde lumineuse avec le miroir corrèle les deux systèmes, et plonge l'onde lumineuse dans un mélange statistique pour les parties qui n'ont pas accès au système du miroir, puisqu'il convient alors de tracer l'état global sur l'ensemble des états possibles du miroir. Comme précédemment, la perte d'information imposée au sous-système 2 est plus drastique. Cette méthode peut être utilisée par la partie 2 pour se protéger d'un steering par la partie 1.

Pour finir, notons que si la partie 1 a accès au sous système du miroir, alors elle récupère en quelque sorte la cohérence de l'état global et peut à nouveau inférer avec une

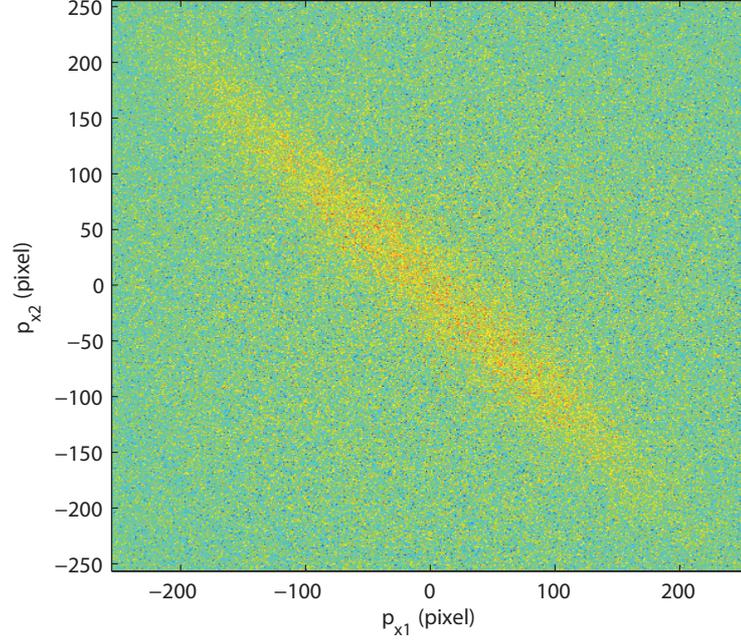


FIGURE 3.12 – Distribution de probabilité des paires après élargissement par dispersion des pixels de la partie selon p_{x2} .

précision sub-Heisenberg les résultats de la partie 2.

3.2.3 Simulation sur des images expérimentales.

Nous avons cherché à simuler l'effet d'un élargissement à même de générer une dissymétrie dans la détection de l'intrication, sur les images expérimentales recueillies au cours de l'expérience présentée en partie §3.1. Pour cela, nous avons imposé dans les images seuillées en champ lointain une dispersion aléatoire et Gaussienne des pixels. Pratiquement, les pixels des images champ lointain de la partie 2 sont déplacés d'une quantité aléatoire dans la direction des p_x de sorte à produire un élargissement qui rapproche le produit d'incertitude de la limite de Heisenberg. On espère alors démontrer qu'un tel élargissement va produire une dissymétrie entre les parties. La figure 3.12 représente la distribution de probabilité des paires obtenue après élargissement selon p_{x2} . On peut constater sur cette figure qu'il n'est pas envisageable de trouver le barycentre de $p_{paire}(p_{x1}|p_{x2})$ pour tout p_{x2} en l'évaluant directement sur les données qui y sont présentées, compte tenu de l'importance du bruit. Aussi avons nous dû utiliser le modèle présenté en figure 3.10. Une fois le barycentre évalué, nous pouvons déduire la variance $\Delta_{inf}^2 p_{x1}|p_{x2}$ associée à la figure 3.12. La variance $\Delta_{inf}^2 p_{x2}|p_{x1}$ est quant à elle

évaluée en utilisant l'estimateur $p_x^{est} = -p_{x1}$ qui en minimise la valeur. Nous obtenons alors les produits d'incertitudes suivants :

$$\Delta_{inf,x1}^2 |x_2 \Delta_{inf,p_{x1}}^2 |p_{x2} = 0.2450 \pm 0.0040 \hbar \quad (3.12)$$

$$\Delta_{inf,x2}^2 |x_1 \Delta_{inf,p_{x2}}^2 |p_{x1} = 0.2547 \pm 0.0040 \hbar \quad (3.13)$$

Ces résultats montrent qu'un steering EPR peut être effectué par la partie 2 sur la partie 1, à l'inverse la partie 1 ne peut effectuer un steering sur 2, démontrant le principe du steering EPR à sens unique dans le domaine spatial.

3.3 Signal fantôme.

3.3.1 *Ghost imaging.*

Une des choses que l'on peut espérer faire, lorsqu'on dispose d'une source présentant des corrélations spatiales, est de démontrer que ces corrélations permettent de réaliser un protocole de *ghost imaging* ou imagerie fantôme. Un tel phénomène a été mis en évidence pour la première fois dans le contexte de corrélations de nature quantiques [Pittman et al., 1995], [Strekalov et al., 1995] mais il a pu être démontré par la suite qu'une telle démonstration pouvait être effectuée en utilisant des corrélations classiques [Bennink et al., 2002], [Shapiro, 2008]. La méthode consiste à mettre à profit des corrélations spatiales dont on connaît les propriétés pour reconstruire la transparence d'un objet alors que le faisceau optique qui le traverse est détecté sans aucune résolution spatiale par une simple photodiode. L'effet utilise le supplément d'information sur la position des photons disponible grâce aux corrélations. De fait, si deux faisceaux sont parfaitement corrélés, alors, en mesurant la position des photons d'un des faisceaux dans le plan équivalent au plan objet, on connaîtra la distribution transverse des photons au moment de leur traversée de l'objet. Ainsi sachant qu'un photon est arrivé en un point précis de l'objet, en mesurant par une photo-diode sa présence ou son absence après l'objet, on peut déduire statistiquement les propriétés d'absorbance locale de l'objet. Le ghost imaging correspond à l'utilisation de cette information par un traitement statistique sur les corrélations.

Dans notre contexte, il s'agirait de mettre à profit les corrélations quantiques détectées pour retrouver l'apparence d'un objet traversé par un faisceau et pour lequel on ne conserverait aucune résolution spatiale à la détection en sommant le nombre de photons détectés sur l'ensemble de l'image. Mais, du fait du nombre important de pixels (environ 260,000), une telle reconstruction nécessiterait un nombre très important d'images. En revanche il est envisageable de mettre à profit ce nombre important

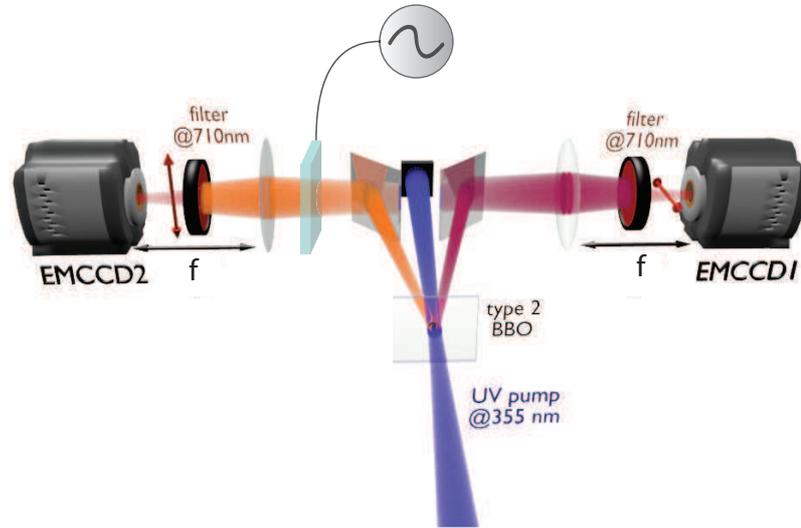


FIGURE 3.13 – Schéma expérimental pour la détection d'un signal fantôme.

d'échantillons en retournant le principe du ghost imaging. Il procède en effet par l'utilisation d'un nombre important d'échantillons temporels pour retrouver des propriétés spatiales via des corrélations qui lient les évènements de détection dans l'espace et le temps. On pourrait alors chercher à retrouver des propriétés temporelles cachées en utilisant une moyenne spatiale, c'est à dire pratiquée sur l'ensemble des pixels en émettant l'hypothèse qu'ils sont tous soumis au même signal temporel⁴.

3.3.2 Détection d'un signal fantôme.

Pour valider ce principe nous avons, comme dans la partie précédente, procédé à des simulations partant des images acquises en vue d'effectuer la démonstration du paradoxe EPR dans des images jumelles. Pour ce faire, nous allons chercher à simuler les résultats obtenus dans le cadre de l'expérience décrite par le schéma expérimental présenté en figure 3.13. La configuration expérimentale consiste à placer un dispositif de transparence contrôlable sur le trajet du faisceau 2. Un signal est envoyé pour faire varier la transmission du dispositif, les images des faisceaux 1 et 2 sont ensuite capturées de part et d'autre. Du côté 2 on utilise un temps d'exposition long et du côté 1 on utilise une résolution temporelle adaptée au signal temporel appliqué sur l'absorbeur. Notons qu'il faut alors régler correctement l'intensité de la fluorescence utilisée de sorte à ce que, pour l'image 2 intégrée temporellement, la probabilité de détection de deux photons sur un même pixel reste faible.

4. De même que le ghost imaging suppose la stationnarité de l'image.

On espère ensuite utiliser la détection des corrélations entre les n images 1 et l'image 2 pour récupérer le signal fantôme d'absorption. De façon pratique on s'attend à ce que la valeur de l'intégrale des pics de corrélation entre l'image 2 et l'image 1 prise au temps t soit directement proportionnelle à l'absorbance $A(t)$ du dispositif. Nous avons en effet vu au chapitre 2 que l'amplitude du pic de corrélation était proportionnelle à une perte imposée sur un des bras. Une telle perte génère en effet une quantité proportionnelle de photons solitaires.

Pour simuler une telle réalisation expérimentale, nous avons procédé comme suit. Partant des images seillées capturées au cours de l'expérience EPR à deux caméras, nous avons formé des images de grandes dimensions en sélectionnant les parties au centre des images expérimentales pour maximiser le rapport signal sur bruit. Les nouvelles images jumelles sont ainsi créées en associant pour chaque partie un ensemble équivalent à 22 des images de départ, c'est à dire que l'équivalent de 22 couples d'images de photo-détections 512×512 sont utilisés pour créer deux images jumelles correspondant à un nombre de pixels proche de 2400×2400 . Nous obtenons alors 10 couples de ces images de grandes tailles. Les 10 images 1 correspondant aux 10 temps de détection sont conservées telles quelles, tandis que les images 2 vont être utilisées pour n'en former qu'une seule qui doit représenter ce qui serait capturé par la caméra 2. On va donc, dans un premier temps, simuler l'effet d'une perte optique pour chacune des 10 images 2. Pour cela, on utilise un tirage aléatoire suivant une distribution uniforme sur chaque pixel où un photon a été détecté. Si le résultat du tirage pour un pixel donné est au dessus de la valeur d'absorbance $A(t)$ appliquée au faisceau 2, la détection est conservée, sinon le pixel se voit assigner la valeur 0. On reproduit l'opération pour chaque image associée à une valeur particulière de $A(t)$. On somme enfin les dix images 2 de sorte à n'en conserver qu'une. On prend en outre soin de seiller l'image somme obtenue pour éviter qu'un pixel ne corresponde à une détection de 2 photons, ce qui ne pourrait être le cas dans les conditions expérimentales puisqu'on acquiert une seule image avec un long temps d'exposition. On ramène à 1 toute éventuelle valeur supérieure à 1. Notons que pour cette raison nous avons dû utiliser des images acquises à très basse intensité ($\ll 0.15$ photons par pixels).

Nous disposons donc alors d'une image 2 et de dix images 1 qui, elles, ne contiennent aucune information sur le signal $A(t)$, par contre elles contiennent les informations sur les corrélations quantiques mesurées. Nous sommes donc dans une situation simulée équivalente à la situation expérimentale (figure 3.13). Il ne nous reste plus qu'à procéder au traitement de ces images pour retrouver, par le biais des corrélations, le signal fantôme $A(t)$. Pour cela, comme nous l'avons indiqué, nous évaluons l'intégrale du pic de corrélation quantique obtenu par intercorrélations de chaque image 1 avec l'image 2. Les résultats ainsi obtenus sont présentés sur la figure 3.14 où le signal en rouge est reproduit par les ronds bleus qui correspondent à l'amplitude des pics de corrélations. Les barres d'erreurs sont évaluées en prenant l'écart type des valeurs de l'inter corré-

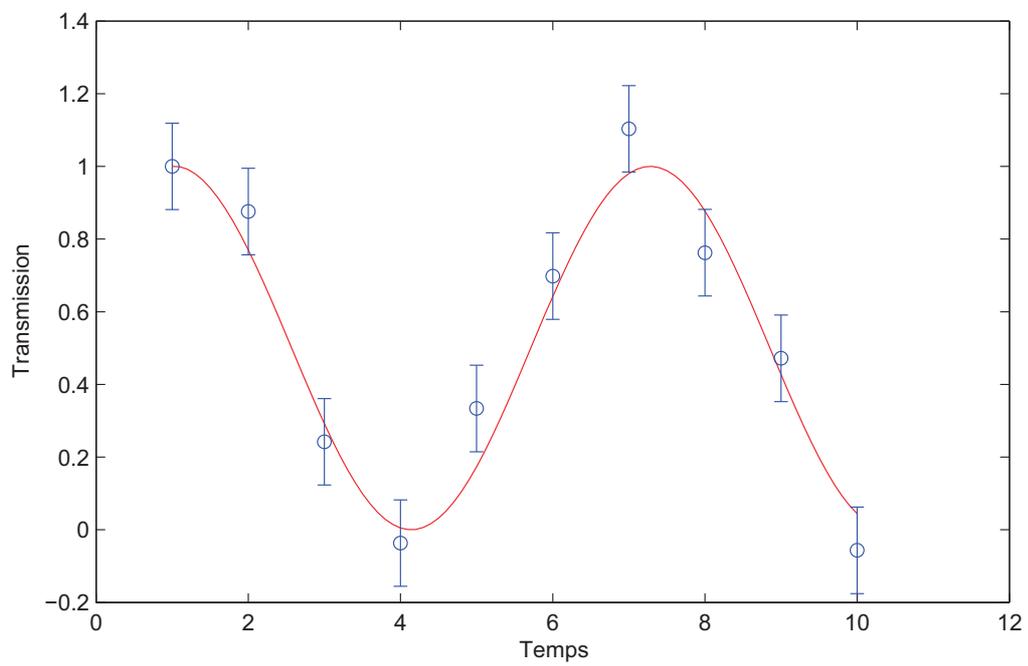


FIGURE 3.14 – Reconstruction du signal de transmission. En rouge, l’allure théorique du signal de transmission imposé au faisceau 2. Les ronds bleus assortis de barres d’incertitudes correspondent à la simulation de la reconstitution du signal fantôme.

lation en dehors du pic de corrélation.

Dans les conditions expérimentales, le nombre de pixels nécessaires pour moyenner et avoir accès au signal fantôme tel que démontré précédemment est ici équivalent à 22 images de 512×512 pixels, une telle démonstration expérimentale n'est donc pas réalisable en l'état. Toutefois, cette limitation n'a rien d'absolu, la quantité qui limite la reconstitution est le rapport signal sur bruit (SNR) du pic de corrélation mesuré et cette quantité peut être améliorée. Il a été montré, [Lantz et al., 2014], que le rapport signal sur bruit du pic de corrélation évolue comme suit :

$$SNR \propto \eta \sqrt{DK} \quad (3.14)$$

où η est le rendement du système complet (optique et détection), D est le nombre de pixels par images et K le nombre d'images. Pour maintenir constant le SNR donc obtenir une reconstitution de qualité équivalente, avec $D = 512 \times 512$ et $K = 1$, il faut donc un rendement η' pour la production et la détection des corrélations de $\eta' = \sqrt{22}\eta \approx 4.7\eta$, donc 4.7 fois plus grand que pour les images capturées, soit une valeur d'environ 0.25 plutôt que 0.05. Un tel rendement n'est pas extravagant, sachant que le bruit lumineux et les pertes dues aux filtres sont des sources importantes de réduction de ce rendement, et que ces deux sources de bruit peuvent être réduites. Principalement, hors du contexte de la démonstration EPR, un filtrage chromatique aussi drastique n'est plus nécessaire, les corrélations existant aussi hors de la dégénérescence en longueur d'onde. Ajoutons que des caméras EMCCD présentant un nombre plus important de pixels existent (1024×1024), en disposant de telles caméras, un rendement proche de 0.12 serait suffisant.

On a donc pu montrer que les rôles symétriques de l'espace et du temps dans les corrélations permettent de renverser le principe du ghost imaging et de retrouver trace d'un signal fantôme malgré la détection de ce signal sans résolution temporelle à son échelle. Il s'agit là d'un nouveau paradigme pour un sujet qui a fait preuve au cours de la précédente décennie de son intérêt pour discuter la limite entre lumière classique et quantique.

Non localité dans les expériences de Hong-Ou-Mandel.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au phénomène d'interférence à deux particules dans le cadre des schémas expérimentaux de type Hong-Ou-Mandel. Notre but sera d'abord d'utiliser des simulations dont nous exposerons le principe pour tester dans un cadre réaliste la possibilité d'obtenir un effet de coalescence due aux interférences à deux photons sur le système complet de la lumière SPDC. Ces simulations ont été mises à profit pour préciser le protocole expérimental qui sera réalisé dans le cadre d'une future thèse. Ces expériences chercheront à démontrer la coalescence d'un système de lumière complet et fortement multi-mode dans le domaine spatial. Les simulations présentées ici montrent que la SPDC peut être utilisée pour conduire à un tel résultat.

Cette approche nous permettra de plus de mettre en lumière la non-localité du phénomène Hong-Ou-Mandel. Nous verrons qu'une telle non-localité permet le développement d'une inégalité de Bell définie pour la mesure de quantités interférométriques complémentaires. De même que dans les tests habituels des inégalités de Bell on est conduit à choisir des bases de mesures entre variables complémentaires, position et impulsions par exemple. Dans le cadre de la formulation qui sera présentée, c'est le choix d'observer l'aspect ondulatoire ou corpusculaire des photons qui fera office de base de mesure.

L'inégalité de Bell ainsi établie nous permettra enfin d'imaginer un protocole expérimental de test basé sur des technologies existantes et pour lequel le choix de la base de mesure sera effectué via un contrôle quantique. Nous discuterons dans cette dernière partie des implications théoriques d'une telle expérience de test d'une inégalité de Bell

à décision quantique.

4.1 Simulations par la méthode des fonctions de Green.

Dans cette partie, on s'efforce principalement d'adapter en type II la méthode de simulation du phénomène d'amplification paramétrique utilisant les fonctions de Green et développée dans le cadre de l'accord de phase de Type I dans l'article [Lantz et al., 2004]. C'est dans un premier temps la génération de la SPDC et son comportement quantique qui seront simulés.

4.1.1 Equations de propagation.

Nous allons chercher à établir les équations décrivant la propagation de la SPDC. Les simulations consisteront à intégrer ces équations pour obtenir la propagation. Nous avons écrit au chapitre 1 des équations classiques décrivant la SPDC, équations (1.101), (1.102) et (1.103). Ces équations négligent les aspects spatiaux de la propagation et de la génération de la SPDC. Ce sont ces aspects spatiaux qui nous intéressent ici. Il nous faut donc dans un premier temps écrire les équations classiques qui les généralisent. Dans l'approximation paraxiale, les équations de propagations classiques s'écrivent pour un accord de phase de type II :

$$i\frac{d}{dz}\mathcal{A}(\mathbf{r}, z) - \frac{1}{2k}\nabla_T^2\mathcal{A}(\mathbf{r}, z) = \frac{\omega^2}{kc^2}d_{eff}A_p(\mathbf{r}, z)\mathcal{B}^*(\mathbf{r}, z)e^{-i\Delta kz} \quad (4.1)$$

$$i\frac{d}{dz}\mathcal{B}(\mathbf{r}, z) - \frac{1}{2k}\nabla_T^2\mathcal{B}(\mathbf{r}, z) = \frac{\omega^2}{kc^2}d_{eff}A_p(\mathbf{r}, z)\mathcal{A}^*(\mathbf{r}, z)e^{-i\Delta kz} \quad (4.2)$$

où \mathcal{A} est le champ signal, \mathcal{B} le champ idler, A_p le champ pompe de fréquence 2ω , Δk est le désaccord de phase colinéaire, d_{eff} est le coefficient non-linéaire effectif, \mathbf{r} la position transverse et ∇_T^2 est le Laplacien transverse.

Il nous faut maintenant quantifier ces équations. Dans le cadre de l'approximation de non déplétion de la pompe, A_p n'est pas affectée par l'interaction et peut être traitée comme une variable classique. Dans ces conditions, on obtient les équations quantiques en remplaçant dans les équations classiques les champs \mathcal{A} et \mathcal{B} par leurs contreparties quantiques puis en réexprimant ces équations en terme d'opérateurs annihilation \hat{a} et \hat{b} associés respectivement au signal et à l'idler :

$$i\frac{d}{dz}\hat{a}(\mathbf{r}, z) - \frac{1}{2k}\nabla_T^2\hat{a}(\mathbf{r}, z) = \frac{\omega^2}{kc^2}d_{eff}A_p(\mathbf{r}, z)\hat{b}^\dagger(\mathbf{r}, z)e^{-i\Delta kz} \quad (4.3)$$

$$i\frac{d}{dz}\hat{b}(\mathbf{r}, z) - \frac{1}{2k}\nabla_T^2\hat{b}(\mathbf{r}, z) = \frac{\omega^2}{kc^2}d_{eff}A_p(\mathbf{r}, z)\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}, z)e^{-i\Delta kz} \quad (4.4)$$

On peut alors écrire les relations de commutation entre les différents opérateurs de création et d'annihilation au même point le long de l'axe de propagation de la façon suivante [Lantz et al., 2004] :

$$[\hat{a}(\mathbf{r}, z), \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}', z)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad [\hat{a}(\mathbf{r}, z), \hat{a}(\mathbf{r}', z)] = 0, \quad (4.5)$$

$$[\hat{b}(\mathbf{r}, z), \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}', z)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad [\hat{b}(\mathbf{r}, z), \hat{b}(\mathbf{r}', z)] = 0, \quad (4.6)$$

$$[\hat{a}(\mathbf{r}, z), \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}', z)] = 0, \quad [\hat{a}(\mathbf{r}, z), \hat{b}(\mathbf{r}', z)] = 0. \quad (4.7)$$

La méthode de résolution que l'on se propose d'utiliser ici est basée sur le point de vue de Heisenberg. Ce sont en effet les opérateurs, puis les observables qui vont de proche en proche être exprimés en fonction des opérateurs initiaux suivant un mode de calcul décrit par les équations de propagation.

4.1.2 Solutions, méthode des fonctions de Green.

Comme nous l'avons vu, l'approximation de non déplétion de la pompe permet d'obtenir des équations de propagation (4.3) et (4.4) qui sont linéaires par rapport aux opérateurs de création et d'annihilation signal et idler. Cette propriété de linéarité des équations permet d'exprimer leurs solutions en termes de fonctions de Green. On peut écrire les solutions sous la forme :

$$\hat{a}_{out}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}_1 [G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{a}_{in}(\mathbf{r}_1) + H_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_1)] \quad (4.8)$$

$$\hat{b}_{out}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}_1 [G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{b}_{in}(\mathbf{r}_1) + H_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_1)] \quad (4.9)$$

Et par conjugaison Hermitienne :

$$\hat{a}_{out}^\dagger(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}_1 [G_s^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_1) + H_s^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{b}_{in}(\mathbf{r}_1)] \quad (4.10)$$

$$\hat{b}_{out}^\dagger(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}_1 [G_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_1) + H_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\hat{a}_{in}(\mathbf{r}_1)] \quad (4.11)$$

G_s , H_s , G_i et H_i s'identifient à des fonctions de Green. La coordonnée z n'apparaît pas ici explicitement mais les indices *in* et *out* correspondent respectivement au plan d'entrée et au plan de sortie de l'amplificateur paramétrique. Contrairement au développement opéré dans [Lantz et al., 2004], on ne dénombre plus 2 mais 4 fonctions de Green puisque la dégénérescence signal-idler résultant de l'accord de phase de type I est levée dans le cadre présent qui correspond à un accord de phase de type II. Il est à noter que les simulations qui vont suivre se limiteront à générer et décrire le comportement d'états purs. D'autres approches permettent de décrire des états présentant des mélanges statistiques [Tualle-Brouri et al., 2009].

4.1.3 Propagation numérique.

Nous avons vu que les équations de propagations classiques et quantiques ont des formes similaires. Ceci implique que les fonctions de Green associées aux solutions classiques et quantiques sont les mêmes. Le caractère classique ou quantique de la lumière, décrite après propagation, reste contenu dans l'essence des objets qui décrivent le champ. On peut donc écrire :

$$\mathcal{A}_{out}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}_1 [G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\mathcal{A}_{in}(\mathbf{r}_1) + H_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\mathcal{B}_{in}^*(\mathbf{r}_1)] \quad (4.12)$$

$$\mathcal{B}_{out}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}_1 [G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\mathcal{B}_{in}(\mathbf{r}_1) + H_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\mathcal{A}_{in}^*(\mathbf{r}_1)] \quad (4.13)$$

Ainsi il est possible de calculer numériquement les fonctions de Green en utilisant des fonctions delta comme conditions initiales successivement pour les ondes signal et idler et en effectuant une propagation classique des ondes [Treppe and Fabre, 2000]. Si on remplace dans (4.12) et (4.13) successivement les ondes \mathcal{A}_{in} et \mathcal{B}_{in} par des deltas de Dirac, on peut constater que l'on aura accès aux fonctions de Green en évaluant \mathcal{A}_{out} et \mathcal{B}_{out} . Il s'agit alors de propager ces deltas présent en entrée par un algorithme classique, de déduire G_s , H_s , G_i et H_i , et de reproduire l'opération pour l'ensemble des positions du plan d'entrée du cristal.

Les simulations numériques imposent la discrétisation des plans transverses. Il convient alors de définir des opérateurs d'annihilation \hat{a}_i (\hat{b}_i) qui agissent sur toute la surface d'un pixel [Treppe, 2001] :

$$\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{S_{pix}}} \int_{S_{pix}} \hat{a}(\mathbf{r}, z) d^2\mathbf{r} \quad (4.14)$$

on en déduit les mêmes relations de commutation que celles des opérateurs création et annihilation en position i.e. :

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (4.15)$$

Comme pour la propagation, les problèmes d'échantillonnages sont renvoyés à des considérations classiques.

Il peut sembler de prime abord exister une incohérence entre l'équation (4.14) et le fait qu'un pixel photosensible intègre l'intensité et non le champ reçu en chaque point de sa surface¹. On somme ici en effet des opérateurs annihilation et non des intensités pour constituer des opérateurs pixels.

Toutefois, comme dans toute simulation, on fait dès le départ la supposition que les détails des ondes sont correctement échantillonnés, c'est à dire que les amplitudes et

1. En supposant que les photoélectrons d'un pixel sont localisés et indépendants.

phases des ondes varient peu sur des distances de l'ordre du pixel². Dans de telles conditions, moyenner les champs ou les intensités sur la surface du capteur devient équivalent, et il n'y a pas de problème à définir le nombre de photons sur les pixels à partir des opérateurs création et annihilation sur les pixels.

$$\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$$

Dans de telles conditions les termes d'interférences entre les différentes positions qui pourraient apparaître en introduisant (4.14) dans l'expression de \hat{N}_i sont nuls. \hat{N}_i s'identifie donc à un nombre de photons intégré sur la surface du pixel.

D'autre part, il est à noter qu'on peut étendre la propagation après la sortie du cristal. Les relations (4.8), (4.9), (4.10) et (4.11) qui introduisent les fonctions de Green restent en effet valables pour une propagation dans l'espace libre, elles se simplifient même. Il est donc possible de prolonger la propagation à un plan arbitraire et en particulier d'observer les ondes en champ lointain.

Nous verrons de même plus loin que nous conserverons le formalisme des fonctions de Green pour décrire la traversée d'un mélangeur de modes et les effets d'interférences à deux photons.

4.1.4 Observables.

Une fois la propagation réalisée, il s'agit d'évaluer les observables qui présentent un intérêt expérimental.

Quelques quantités utiles.

Avant de nous intéresser aux observables importantes, nous allons calculer quelques quantités qui nous seront utiles par la suite. Les calculs sont effectués en réexprimant les quantités dont la moyenne doit être calculée en fonction des opérateurs création et annihilation à l'entrée du cristal. L'état à appliquer sur les opérateurs dont on cherche la moyenne est l'état initial puisque la présente approche correspond au point de vue de Heisenberg : ce sont les opérateurs qui subissent l'évolution et non l'état. Puisqu'on s'intéresse à décrire l'état de la SPDC et que la pompe est décrite comme une variable classique, l'état en entrée d'amplificateur est le vide $|vac\rangle$.

Commençons par évaluer la valeur moyenne de $\hat{a}(\mathbf{r}_s)\hat{b}(\mathbf{r}_i)$. Les opérateurs peuvent être pris à n'importe quelle coordonnée z de la propagation, il faut seulement utiliser les fonctions de Green correspondant exactement à une propagation jusqu'à ce point. Leur

2. Dans le cas présent, le bruit quantique du vide existe bien sur l'ensemble des fréquences spatiales, mais l'accord de phase va agir comme un filtre passe bas, il sera donc suffisant de s'assurer que la figure d'accord de phase est correctement échantillonnée dans les conditions de simulation utilisés.

dépendance en z n'est pas explicitée pour alléger les notations, ces opérateurs \hat{a} et \hat{b} remplacent \hat{a}_{out} et \hat{b}_{out} dans les expressions (4.8) et (4.9). On a, en utilisant (4.8) et (4.9) et les relations de commutations :

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle &= \langle vac | \int d\mathbf{r} \left[G_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}(\mathbf{r}) + H_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) \right] \\ &\quad \times \left[G_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}(\mathbf{r}) + H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) \right] | vac \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} G_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

De même, pour la quantité $\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i)$.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle &= \langle vac | \int d\mathbf{r} \left[G_s^*(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) + H_s^*(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}(\mathbf{r}) \right] \\ &\quad \times \left[G_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}(\mathbf{r}) + H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) \right] | vac \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sur une seule voie, $\hat{a}(\mathbf{r}_s) \hat{a}(\mathbf{r}'_s)$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}(\mathbf{r}_s) \hat{a}(\mathbf{r}'_s) \rangle &= \langle vac | \int d\mathbf{r} \left[G_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}(\mathbf{r}) + H_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) \right] \\ &\quad \times \left[G_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}(\mathbf{r}) + H_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) \right] | vac \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

On peut chercher enfin à évaluer la valeur moyenne de $\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{a}(\mathbf{r}'_s)$.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{a}(\mathbf{r}'_s) \rangle &= \langle vac | \int d\mathbf{r} \left[G_s^*(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) + H_s^*(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}(\mathbf{r}) \right] \\ &\quad \times \left[G_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) \hat{a}_{in}(\mathbf{r}) + H_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}) \right] | vac \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} H_s^*(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) H_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Grâce à ces quantités, nous allons pouvoir évaluer certaines observables qui nous seront utiles par la suite.

Nombres de photons.

Les premières observables importantes sont naturellement les nombres moyens de photons détectés dans l'espace et sur chaque voie. Voici leurs expressions en termes de fonction de Green obtenues en utilisant l'équation (4.19) et son analogue pour l'idler :

$$\langle \hat{N}_s(\mathbf{r}) \rangle = \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{a}(\mathbf{r}) \rangle = \int d\mathbf{r}' H_s^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') H_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.20)$$

$$\langle \hat{N}_i(\mathbf{r}) \rangle = \langle \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{b}(\mathbf{r}) \rangle = \int d\mathbf{r}' H_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') H_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.21)$$

où \hat{N}_s est le nombre de photons signaux et \hat{N}_i est le nombre de photons idlers. On voit ainsi qu'il est possible de calculer ces observables à partir des fonctions de Green.

Covariances et probabilités conditionnelles.

Dans un second temps on peut espérer avoir accès aux covariances des nombres de photons détectés en différentes positions. La covariance à ordre normal est notée $\tilde{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, elle vaut :

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle : \delta \hat{N}(\mathbf{r}) \delta \hat{N}(\mathbf{r}') : \rangle \\ &= \langle : \hat{N}(\mathbf{r}) \hat{N}(\mathbf{r}') : \rangle - \langle \hat{N}(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{N}(\mathbf{r}') \rangle\end{aligned}\quad (4.22)$$

où $:$ dénote la disposition normale des opérateurs création et annihilation.

On peut évaluer cette covariance entre les positions des deux voies signal et idler :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{s-i}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) &= \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{a}(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle - \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{a}(\mathbf{r}_s) \rangle \langle \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle \\ &= \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}_i) \rangle \langle \hat{a}(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle + \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{a}(\mathbf{r}_s) \rangle \langle \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle \\ &\quad + \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle \langle \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{a}(\mathbf{r}_s) \rangle - \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{a}(\mathbf{r}_s) \rangle \langle \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle \\ &= \left| \langle \hat{a}(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle \right|^2 + \left| \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_s) \hat{b}(\mathbf{r}_i) \rangle \right|^2\end{aligned}\quad (4.23)$$

où l'on a utilisé le théorème de Wick qui s'applique pour tous opérateurs création et annihilation relatifs à des bosons et pour un système présentant un Hamiltonien quadratique³ [Louisell, 1990]. Le théorème stipule que, étant donné un opérateur $Q = A_1 A_2 A_3 A_4$, où A_1, A_2, A_3 et A_4 sont des opérateurs création ou annihilation bosonique, on peut décomposer la moyenne de Q de la sorte :

$$\langle Q \rangle = \langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 A_4 \rangle + \langle A_1 A_3 \rangle \langle A_2 A_4 \rangle + \langle A_1 A_4 \rangle \langle A_2 A_3 \rangle \quad (4.24)$$

Ainsi, en utilisant (4.16) et (4.17), on obtient :

$$\tilde{C}_{s-i}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \left| \int d\mathbf{r} G_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) \right|^2 \quad (4.25)$$

Notons que

$$\tilde{C}_{i-s}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s) = \left| \int d\mathbf{r} G_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) H_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \right|^2 = \tilde{C}_{s-i}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \quad (4.26)$$

Et d'autre part au sein d'une même voie, ici la voie du signal, en utilisant (4.17) et (4.19), la covariance s'exprime :

$$\tilde{C}_{s-s}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}'_s) = \left| \int d\mathbf{r} H_s^*(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) H_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) \right|^2 \quad (4.27)$$

Ces covariances s'identifieront aux probabilités de détection conditionnelle des photons jumeaux d'une même paire, le nombre de photons mis en jeu étant faible. Ce sont ces probabilités qui nous seront utiles par la suite.

3. Ici puisqu'on a fait l'hypothèse de non déplétion de la pompe et que cette dernière est traitée classiquement, elle apparait comme une variable complexe dans l'expression de l'Hamiltonien d'interaction qui a donc une forme quadratique en terme d'opérateurs création et annihilation.

4.2 Coalescence des faisceaux de fluorescence paramétrique.

4.2.1 Fonctions de Green et expérience de Hong-Ou-Mandel.

Nous allons maintenant étendre l'approche précédente au cas où les ondes signal et idler sont mélangées par l'action d'un composant mélangeur de mode, une lame semi-réfléchissante (ou Beam-Splitter (BS)) par exemple. Un tel composant mélange deux modes d'entrée $\hat{a}(\mathbf{r})$ et $\hat{b}(\mathbf{r})$ au sein de deux modes de sortie $\hat{c}(\mathbf{r})$ et $\hat{d}(\mathbf{r})$. Cette opération s'effectue selon les équations suivantes :

$$\hat{c}(\mathbf{r}) = t'\hat{a}(\mathbf{r}) + r\hat{b}(\mathbf{r}) \quad (4.28)$$

$$\hat{d}(\mathbf{r}) = r'\hat{a}(\mathbf{r}) + t\hat{b}(\mathbf{r}) \quad (4.29)$$

où t et t' sont des coefficients de transmissions, r et r' sont des coefficients de réflexions, \mathbf{r} est la coordonnée transverse associée aux modes considérés. Dans le cadre d'une lame semi-réfléchissante (BS) symétrique (50/50), on aura par exemple les valeurs suivantes pour les coefficients de réflexion :

$$t' = t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad r' = r = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Ici on considère que les ondes seront mélangées de façon cohérente, or dans la réalité le signal et l'idler ont des polarisations orthogonales ce qui exclut tout phénomène d'interférence. On prendra donc comme hypothèse dans tout ce qui suit qu'une lame demi-onde a été ajoutée sur l'une des deux voies (signal ou idler) après leur séparation afin de tourner la polarisation de 90° et de rendre ces deux polarisations identiques. Après cette opération, les deux voies atteignent le mélangeur de mode.

En injectant les équations (4.8) et (4.9) dans les expressions (4.28) et (4.29), on obtient :

$$\hat{c}(\mathbf{r}) = \int \left(A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{a}_{in}(\mathbf{r}_0) + B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_0) + C(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{b}_{in}(\mathbf{r}_0) + D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_0) \right) d^2\mathbf{r}_0 \quad (4.30)$$

$$\hat{d}(\mathbf{r}) = \int \left(E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{a}_{in}(\mathbf{r}_0) + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_0) + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{b}_{in}(\mathbf{r}_0) + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{r}_0) \right) d^2\mathbf{r}_0 \quad (4.31)$$

où $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ sont 8 nouvelles fonctions de Green définies par la table 4.1. On a noté *diffra.* en haut des flèches de cette table pour rappeler que l'ensemble des fonctions de Green peuvent être diffractées jusqu'à un plan arbitraire.

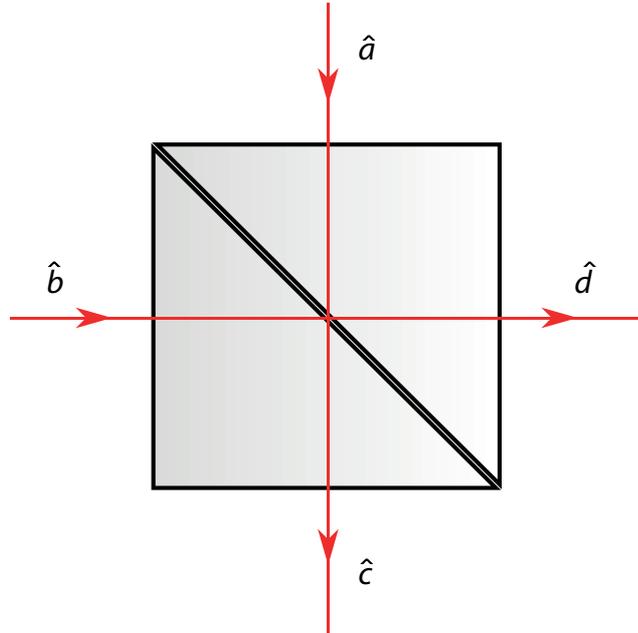


FIGURE 4.1 – Beam Splitter : entrées et sorties.

$t' G_s$	$\xrightarrow{\text{diffrac.}}$	A	$r' G_s$	$\xrightarrow{\text{diffrac.}}$	E
$r H_i$	\longrightarrow	B	$t H_i$	\longrightarrow	F
$r G_i$	\longrightarrow	C	$t G_i$	\longrightarrow	G
$t' H_s$	\longrightarrow	D	$r' H_s$	\longrightarrow	H

TABLE 4.1 – Correspondance des fonctions de Green.

4.2.2 Observables et interférences.

On peut maintenant chercher la valeur des opérateurs nombre de photons sur chacune des voies de sortie du BS :

$$\langle \hat{N}_c \rangle(\mathbf{r}) = \int (B^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + D^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) d^2\mathbf{r}_0 \quad (4.32)$$

$$\langle \hat{N}_d \rangle(\mathbf{r}) = \int (F^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + H^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) d^2\mathbf{r}_0 \quad (4.33)$$

En observant la table 4.1 et les expressions 4.20 et 4.21 on remarque que les quantités \hat{N}_c et \hat{N}_d s'expriment comme la somme incohérente des ondes provenant des deux voies d'entrée (signal et idler). Ce résultat qui apparait naturellement par le calcul, s'explique physiquement par le fait que les ondes signal et idler ont un déphasage relatif totalement arbitraire en sortie d'OPA, elles ne peuvent ainsi pas interférer au niveau de l'intensité qui en résulte. Nous allons voir que les corrélations sont, elles, soumises au phénomène d'interférence.

Pour cela on évalue une fonction de corrélation intra-voie ; prenons la voie \hat{c} :

$$\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{c}^\dagger(\mathbf{r})\hat{c}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{c}(\mathbf{r})\hat{c}(\mathbf{r}') \rangle - \langle \hat{c}^\dagger(\mathbf{r})\hat{c}(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{c}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{c}(\mathbf{r}') \rangle \quad (4.34)$$

Comme dans la partie précédente, on applique le théorème de Wick :

$$\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\langle \hat{c}(\mathbf{r})\hat{c}(\mathbf{r}') \rangle|^2 + |\langle \hat{c}^\dagger(\mathbf{r})\hat{c}(\mathbf{r}') \rangle|^2 \quad (4.35)$$

puis on évalue les quantités obtenues en termes de fonctions de Green :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & \left| \int (A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)B(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) + C(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)D(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)) d^2\mathbf{r}_0 \right|^2 \\ & + \left| \int (B^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)B(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) + D^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)D(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)) d^2\mathbf{r}_0 \right|^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

On va maintenant chercher à comprendre l'origine des différents termes qui apparaissent dans cette expression :

- *Concernant le premier module carré* : Le premier terme, AB , correspond au produit de fonctions de Green $G_s H_i$ comme on peut le constater grâce à la table 4.1. Ce produit est associé à la fonction de corrélation entre les voies signal et idler \tilde{C}_{s-i} (cf. equation (4.25)). Le second, CD , correspond, lui, à $G_i H_s$, c'est à dire à la fonction de corrélation \tilde{C}_{i-s} qui correspond aussi à une corrélation entre signal et idler, mais pour laquelle les rôles des variables donc des particules sont inversés. On observe, au niveau de la fonction de corrélation sur une voie en sortie du BS, une interférence des deux fonctions de corrélations entre signal et idler, l'une pour laquelle le signal est détecté en \mathbf{r} et l'idler en \mathbf{r}' , l'autre

pour laquelle l'idler est détecté en \mathbf{r} et le signal en \mathbf{r}' . Ce phénomène mis en évidence à travers les fonctions de Green correspond au phénomène d'interférence Hong-Ou-Mandel (HOM) [Hong et al., 1987]. Il s'agit d'une interférence entre les amplitudes de probabilités des évènements de détections envisageables qui mettent en jeu deux photons. A ces amplitudes de probabilité conditionnelles, correspondent directement les fonctions de corrélations qui semblent interférer ici à travers les fonctions de Green. Et ce sont bien ici l'équivalent de ces amplitudes de probabilités conjointes, exprimées par les fonctions de Green, que l'on voit apparaître et interférer dans le terme $AB + CD$.

- *Concernant le second module carré* : Les deux autres termes D^*D et B^*B correspondent respectivement à \tilde{C}_{s-s} et \tilde{C}_{i-i} c'est à dire aux fonctions de corrélations intra voies (cf. 4.27). En SPDC ces fonctions de corrélations auront toujours une valeur négligeable car elles sont associées à un phénomène stimulé. On constate toutefois bien un effet d'interférence, qui sera toujours constructif puisque les deux quantités sommées B^*B et D^*D sont réelles. Ceci peut s'expliquer physiquement par le fait que la réémission stimulée génère des paires identiques, donc indiscernables et sujettes à un effet HOM. Toutefois un tel phénomène d'interférence met en jeu 4 photons et doit donc être étudié en ayant recours à des corrélations à quatre variables. Nous ne nous intéresserons plus à ces termes par la suite puisqu'ils sont négligeables.

Sur la figure 4.2 on a représenté de façon schématique les différents termes qui apparaissent dans l'équation (4.36) en champ lointain (les impulsions \mathbf{p} se substituent donc aux positions \mathbf{r}).

4.2.3 Conditions d'interférences.

On a donc vu que la méthode des fonctions de Green permet de décrire les interférences à deux photons. Nous allons maintenant chercher à étudier dans quelles conditions de telles interférences peuvent apparaître. Pour cela, on va s'intéresser dans un premier temps au cas du champ lointain présenté sur la figure 4.2. Dans ce cas on va supposer que les taches ou anneaux de fluorescences sont bien séparés spatialement. Dans de telles conditions, l'une des contributions AB ou CD sera toujours négligeable devant l'autre. De fait, les corrélations sont partout négligeables sauf pour des positions diamétralement opposées sur les anneaux de fluorescences. Sur la figure 4.2 on voit que si les coordonnées \mathbf{p} et \mathbf{p}' correspondent à des points diamétralement opposés sur les anneaux pour l'une des contributions (AB dans le cas de la figure) alors, du fait de la séparation des anneaux de fluorescence, ces points ne sont pas sur les anneaux pour l'autre contribution (ici CD). Puisque les deux termes AB et CD ne coexistent pas au même endroit, ils n'interfèrent pas. Ainsi dans une telle situation, compte tenu de la

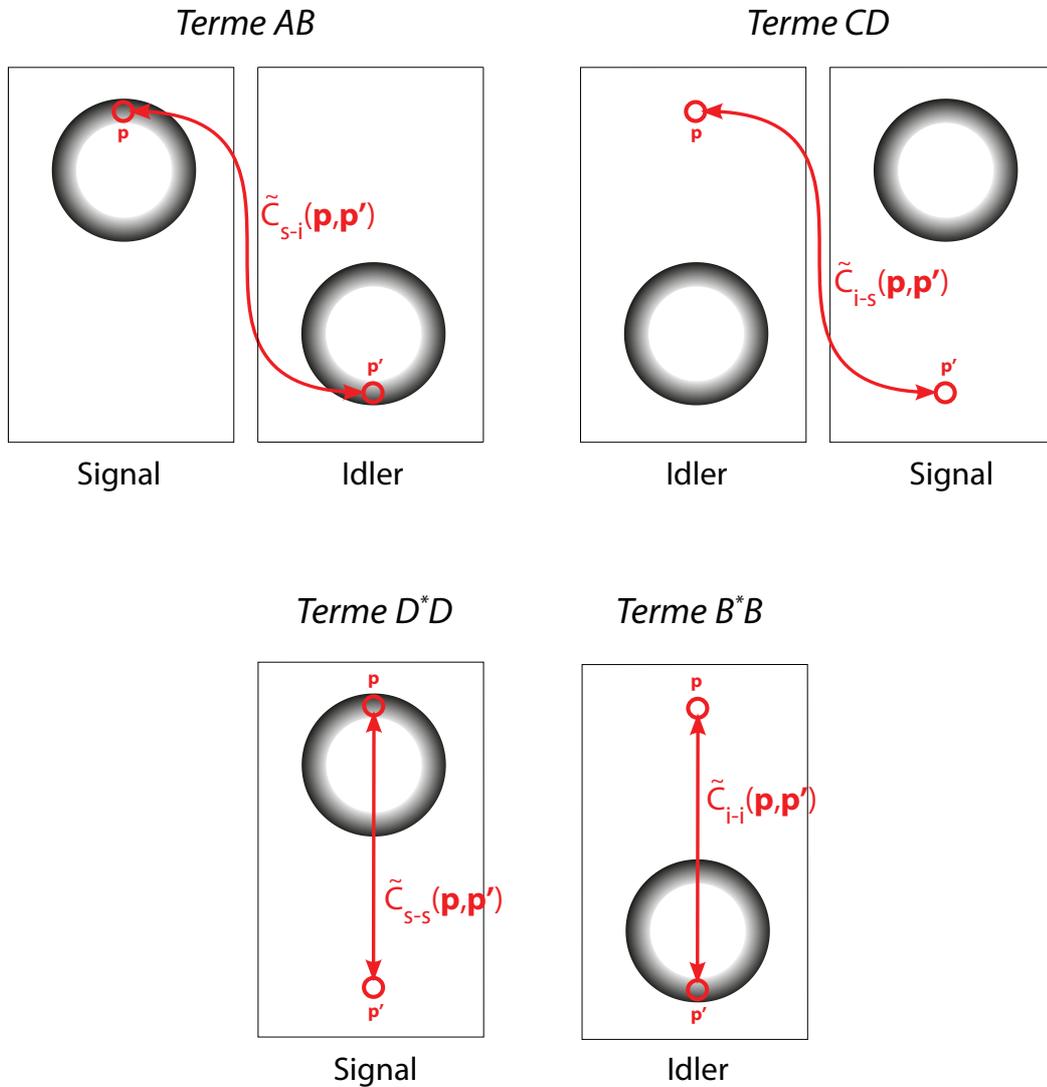


FIGURE 4.2 – Représentation des différents termes apparaissant dans la fonction de corrélation intra voie en champ lointain, et de leurs sources en terme de corrélations signal idler. Les anneaux noirs correspondent aux anneaux de fluorescence obtenus en champ lointain, on peut voir que les anneaux signal et idler sont séparés spatialement en champ lointain. En rouge sont indiquées les fonctions de corrélations qui correspondent à chaque terme.

table 4.1 et pour un BS symétrique :

$$\tilde{C}_{\hat{c}} \approx \frac{1}{4} \left(\tilde{C}_{s-i}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \tilde{C}_{i-s}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \right) \quad (4.37)$$

où lorsque $\tilde{C}_{i-s}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ est non nul, $\tilde{C}_{s-i}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ l'est et inversement. Pour interpréter ce résultat et la présence du facteur $\frac{1}{4}$, il nous faut rappeler que $\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ correspond à une probabilité conditionnelle :

$$\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = p(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = p(\mathbf{p})p(\mathbf{p}'|\mathbf{p}) \quad (4.38)$$

où p désigne des probabilités.

Dans le cas présent, la probabilité $p(\mathbf{p})$ intégrée sur \mathbf{p} de détecter un photon au sein de la voie \hat{c} est du même ordre que celle de détecter les photons sur l'une des deux voies signal ou idler à l'entrée du BS. Les faisceaux sont divisés en deux, et donc l'intensité de chaque tache est divisée par 2 après le BS, on retrouve toutefois 2 taches par voie, l'intensité globale par voie est donc conservée. La corrélation globale, elle, ne l'est pas. En effet dans la formule (4.37), si on somme bien les deux contributions *signal – idler* et *idler – signal*, le facteur devant la somme n'est pas $\frac{1}{2}$ comme pour l'intensité, mais $\frac{1}{4}$. Puisque les contributions *signal – idler* et *idler – signal* sont du même ordre de grandeur une fois intégrées dans l'espace, on trouve un niveau de corrélation au sein d'une voie de sortie qui vaut la moitié de la corrélation *signal – idler*. Ceci signifie que si avant le BS, on était certain de trouver le jumeau d'un photon sur l'autre voie, après le BS, on trouvera le photon jumeau au sein d'une même voie seulement une fois sur deux. On obtient donc dans cette configuration champ lointain un tri régi par un hasard classique et local. Il n'y a pas dans ce cas d'effet de coalescence HOM observable du fait de la séparation des taches.

A l'opposé, au vu de l'équation (4.36), une interférence constructive entre les termes AB et CD serait à même de conduire à une valeur de $\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ qui serait équivalente à

$$\frac{1}{2} \left(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s} \right)$$

ceci correspondrait à un maintien parfait de la corrélation au sein des voies de sortie du BS, du fait de l'existence du phénomène de coalescence HOM.

Pour obtenir une telle interférence il est nécessaire que $|AB| = |CD|$ ce qui correspond au cas où les probabilités de détecter les photons issus du signal et de l'idler en un point de la voie de sortie du BS sont égales. En champ proche, les intensités des figures de fluorescences signal-idler sont confondues comme on peut le voir sur la figure 4.3 qui représente les termes AB et CD dans ce contexte. De ce fait, les termes AB et CD d'amplitude égale sont susceptibles d'interférer en champ proche. Et nous

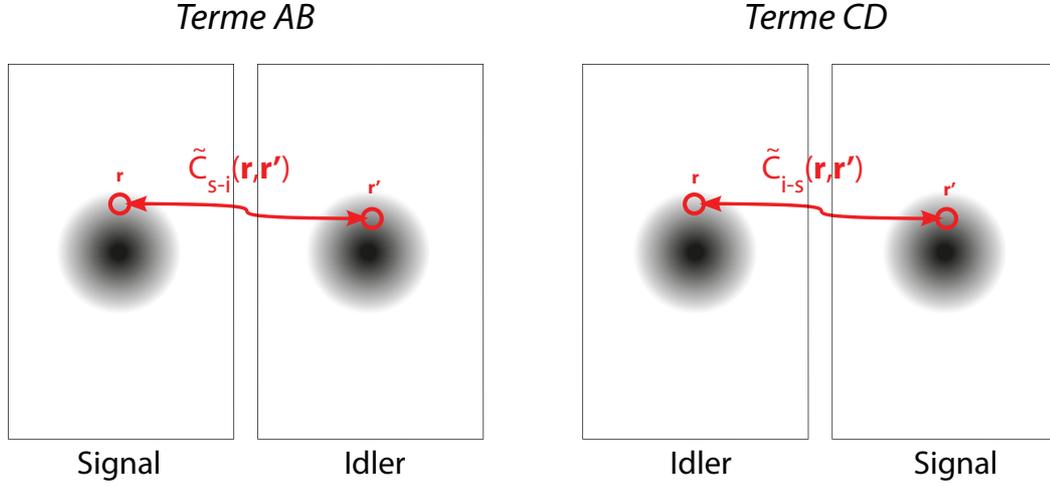


FIGURE 4.3 – Représentation des termes non négligeables apparaissant dans la fonction de corrélation intra voie en champ proche. Les zones grisées correspondent aux taches de fluorescence, on peut voir que les taches signal et idler sont confondues spatialement. En rouge sont indiquées les fonctions de corrélations qui correspondent à chaque terme.

verrons dans la partie suivante qu'on observe effectivement un effet d'interférence à deux photons en champ proche.

Une caractéristique importante qu'on peut attendre des interférences obtenues est qu'elles doivent respecter la conservation du taux global de coïncidence au sein d'une même voie sur la statistique complète de la lumière, c'est à dire que malgré les effets d'interférence sur les fonctions de corrélation qui conduisent à une coalescence HOM, on devra toujours détecter en champ proche une paire sur deux sur des voies différentes en sortie de BS compte tenu des résultats attendus en champ lointain. Ceci assure une cohérence champ proche-champ lointain de la statistique mais aussi et surtout une cohérence de l'observation mixte champ proche sur une voie, champ lointain sur l'autre. Les photons qui n'ont pas leur jumeau sur la même voie, doivent le retrouver sur l'autre quelle que soit la base d'observation.

4.2.4 Simulations.

Nous allons nous intéresser maintenant aux résultats des simulations. Nous étudierons pour cela deux cas. Le premier consiste à envoyer les faisceaux de fluorescence tels quels à l'entrée du BS, le second consiste à réaligner ces faisceaux de sorte qu'ils soient confondus à la fois en champ proche et en champ lointain.

Les fonctions qui vont nous intéresser sont les fonctions de corrélation $\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. On introduit par ailleurs la quantité p_{intra} évaluée à partir de ces fonctions de corrélations et qui correspond à la probabilité que le second photon d'une paire soit détecté au sein de la même voie que le premier. Cette probabilité sera calculée comme suit :

$$p_{intra} = \frac{\int p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}'|\mathbf{r})d^2\mathbf{r}'d^2\mathbf{r}}{\int p(\mathbf{r})d^2\mathbf{r}} = \frac{\int \tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d^2\mathbf{r}'d^2\mathbf{r}}{\int \langle \hat{N}_{\hat{c}} \rangle(\mathbf{r})d^2\mathbf{r}} \quad (4.39)$$

On divise ici par $\int p(\mathbf{r})d^2\mathbf{r}$ c'est à dire par la probabilité de détecter un photon dans toute l'image pour un temps d'exposition correspondant à une impulsion pompe. Cette division permet de normer p_{intra} qui vaudra 1 si les paires émergent toujours ensemble. Nous ne présentons ici que les résultats obtenus sur la voie \hat{c} les résultats sont symétriques sur les voies de sortie \hat{c} et \hat{d} .

Voici les différentes caractéristiques utilisées pour simuler la phase de propagation et d'émission de la SPDC au sein de l'OPA :

- Waist de la pompe : $w_0 = 0.1 \text{ mm}$
- Longueur du cristal : $L = 0.4 \text{ mm}$
- $\lambda_s = \lambda_i = 2\lambda_p = 710 \text{ nm}$
- Conditions d'accord de phase non-critique.
- L'énergie de la pompe est ajustée de sorte à rendre l'émission stimulée négligeable.

N.b. Dans ce qui suit, sur les figures 4.5, 4.6, 4.7, 4.9 et 4.10 nous présentons systématiquement les fonctions de corrélations $\tilde{C}_{\hat{c}}$ accompagnées de la corrélation $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$. En effet, la comparaison entre ces deux fonctions de corrélation nous renseigne sur le passage ou non des photons jumeaux sur la même voie. De fait, comme nous l'avons vu plus haut, si les photons jumeaux prennent systématiquement le même chemin, alors $\tilde{C}_{\hat{c}}$ doit avoir la même valeur que $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$

Résultats pour des faisceaux séparés en champ lointain.

Sur la figure 4.4 sont présentées les distributions d'intensités obtenues sur la voie \hat{c} en champ proche et en champ lointain. On peut observer que si les taches de fluorescence paraissent être confondues en champ proche, elles sont bien distinctes en champ lointain.

On peut alors s'intéresser à la corrélation qui existe entre les différents points de la voie \hat{c} . Les résultats en champ proche sont présentés sur la figure 4.5. On peut remarquer sur cette figure, que la fonction de corrélation $\tilde{C}_{\hat{c}}$ présente un motif d'interférence périodique. En outre les maxima des figures (a) et (b) sont identiques. Le long de la

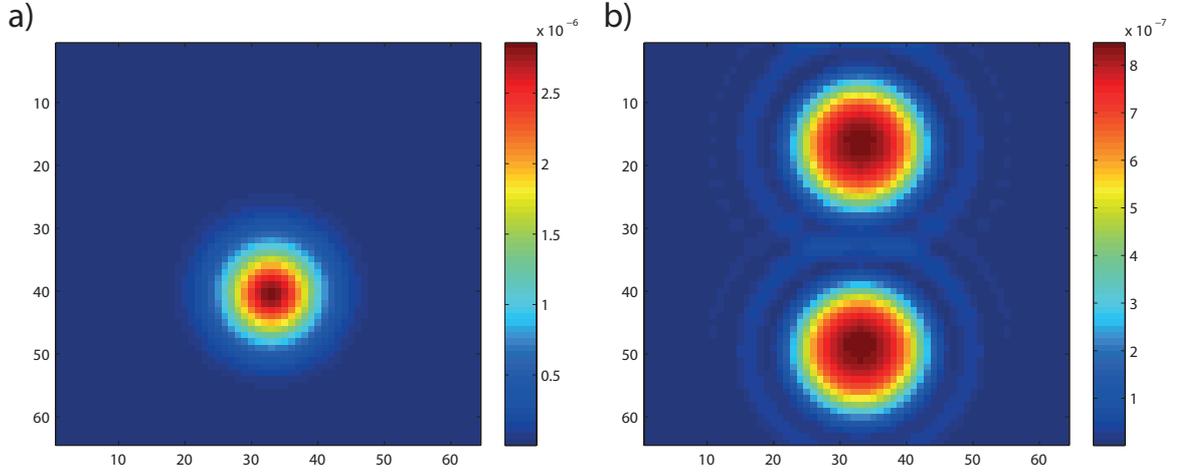


FIGURE 4.4 – Distribution d'intensité en champ proche (a) et champ lointain (b). Les faisceaux signal et idler sont confondus en champ proche et séparés en champ lointain.

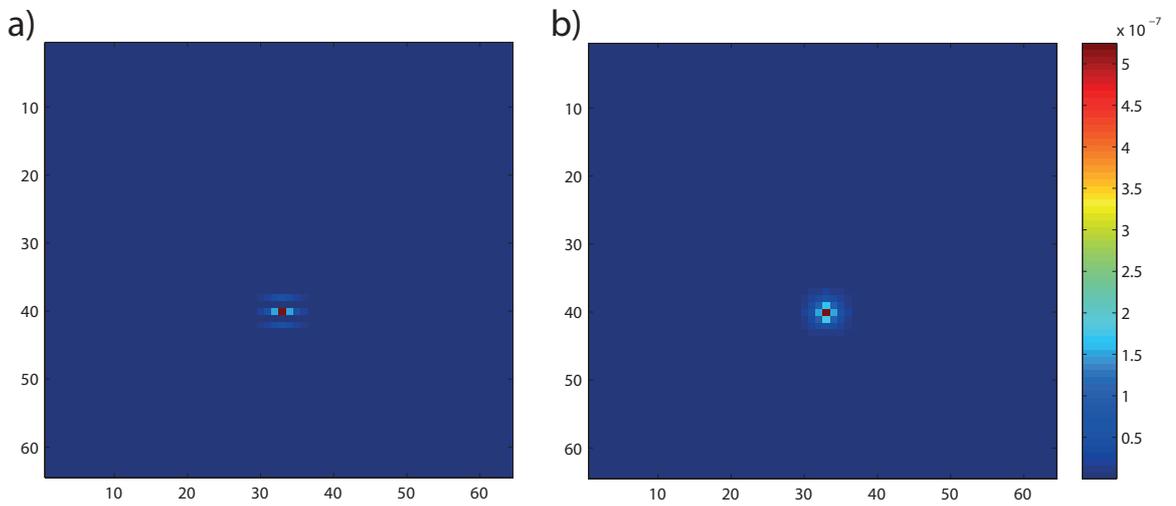


FIGURE 4.5 – Comparaison des fonctions de corrélations avec et sans BS en champ proche, pour $\mathbf{r} = (33, 40)$ fixé et \mathbf{r}' pris sur l'ensemble du plan de restitution. (a) $\tilde{C}_{\hat{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. (b) $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$ pris aux mêmes coordonnées.

ligne $y = 40$ qui correspond au maximum du motif d'interférence, les photons qui sont détectés sont donc systématiquement accompagnés de leur jumeau au sein de la voie \hat{c} . Les phénomènes de battements dans les fonctions de corrélation obtenus ici ont été observés pour la première fois par Ou et Mandel [Ou and Mandel, 1989], il s'agissait alors de faire interférer des paires de photons de fréquences spatiales bien définies.

Nos résultats peuvent s'interpréter de la façon suivante. La fonction de corrélation en un point \mathbf{r} fixé est composé de deux termes AB et CD qui sont composés de fonctions de Green. Le terme AB correspond à la détection d'un photon signal en \mathbf{r} qui est fixé, et idler en \mathbf{r}' qui varie. Le terme CD correspond à la détection d'un photon idler en \mathbf{r} qui est fixé, et signal en \mathbf{r}' qui varie. \mathbf{r} étant déterminé suite à la mesure du premier photon, l'état va vérifier une réduction du paquet d'ondes. Dans l'éventualité où le premier photon détecté est un photon signal, le photon idler associé sera localisé autour de ce premier, mais en champ lointain, celui-ci serait complètement délocalisé sur la tache de fluorescences associé à l'idler. Ce potentiel photon idler arrive donc avec un plan de phase déterminé par la position moyenne de l'intensité idler en champ lointain. Mais cette partie de la fonction d'onde va alors interférer avec une autre partie réduite de la fonction d'onde totale. En effet le premier photon peut aussi être un photon idler et par conséquent le second être un photon signal, localisé autour du premier en champ proche et qui est distribué sur toute la figure d'intensité signal en champ lointain. Donc si les intensités signal et idler sont correctement séparées en champ lointain, les deux parties de la fonction d'onde qui interfèrent vérifieront des plans de phases inclinés l'un par rapport à l'autre, et génèreront un battement de fréquence lié à la séparation des taches de fluorescences en champ lointain. On verra plus loin que de ce fait, la superposition des intensités en champ lointain permettra de supprimer ces battements champ proche et donc l'obtenir une coalescence quasi parfaite sur toute la statistique de la SPDC.

On observe donc une résurgence des caractéristiques du champ lointain dans la fonction de corrélation champ proche. La présence des battements dans la fonction de corrélation a une incidence sur p_{intra} :

$$p_{intra} = 0.5521$$

Les battements permettent donc de rejoindre un niveau global de coïncidences proche des attentes classiques. Cela peut se comprendre par le fait que les deux photons qui semblent interférer arrivent avec des plans de phases différents, alors ils sont séparables et donc distinguables si on les observe en champ lointain. Nous allons le voir, l'écart de p_{intra} à la valeur classique de $\frac{1}{2}$ s'explique par le recouvrement partiel des taches de fluorescence en champ lointain.

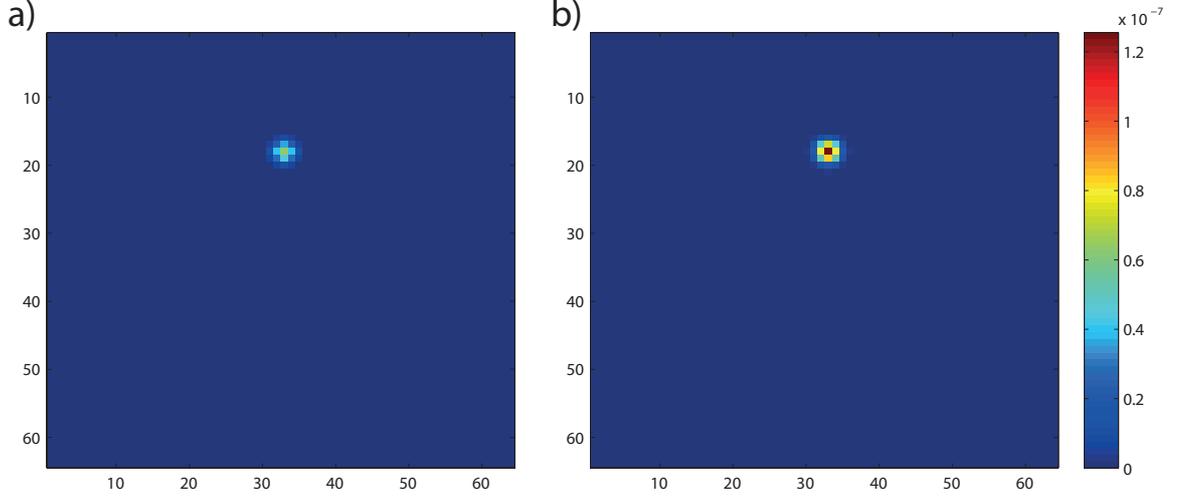


FIGURE 4.6 – Comparaison des fonctions de corrélations en champ lointain, pour $\mathbf{p} = (33, 48)$ fixé et \mathbf{p}' pris sur l'ensemble du plan de restitution. (a) $\tilde{C}_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. (b) $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$ pris aux mêmes coordonnées.

Si le niveau de coïncidence globale due au BS s'approche d'un niveau classique, la réalité des résultats ne peut être décrite qu'en prenant en compte l'existence de l'effet de coalescence HOM. Le comportement des photons ne sera donc correctement décrit que dans le cadre d'un modèle ondulatoire.

On peut enfin noter que la figure d'interférence observée présentera toujours un maximum confondu avec le maximum du pic de corrélation. Ceci s'explique par le fait que l'on utilise une pompe symétrique et par le caractère bosonique des photons [Walborn et al., 2003]. Cette caractéristique s'avèrera bien utile dans le contexte expérimental. En effet, si le motif est reproduit sur chaque pic de corrélations obtenues pour l'ensemble des valeurs \mathbf{r} du plan de détection, alors le motif d'interférence doit apparaître dans les autocorrélations expérimentales obtenues par la même méthode qu'au chapitre précédent. Si, plutôt que de disposer les deux caméras sur le trajet des faisceaux signal et idler, on les place sur les deux voies de sortie d'un BS en champ proche, les pics de corrélation obtenus au chapitre 3 seront modulés par un battement opposé à celui de la figure 4.5.

Intéressons-nous maintenant aux corrélations obtenues en champ lointain. La figure 4.6 présente la fonction de corrélation \tilde{C}_c en champ lointain et sa comparaison à la fonction $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$. On peut observer sur cette figure que la première corrélation présentée en (a) affiche des valeurs deux fois plus faibles que la seconde présentée en

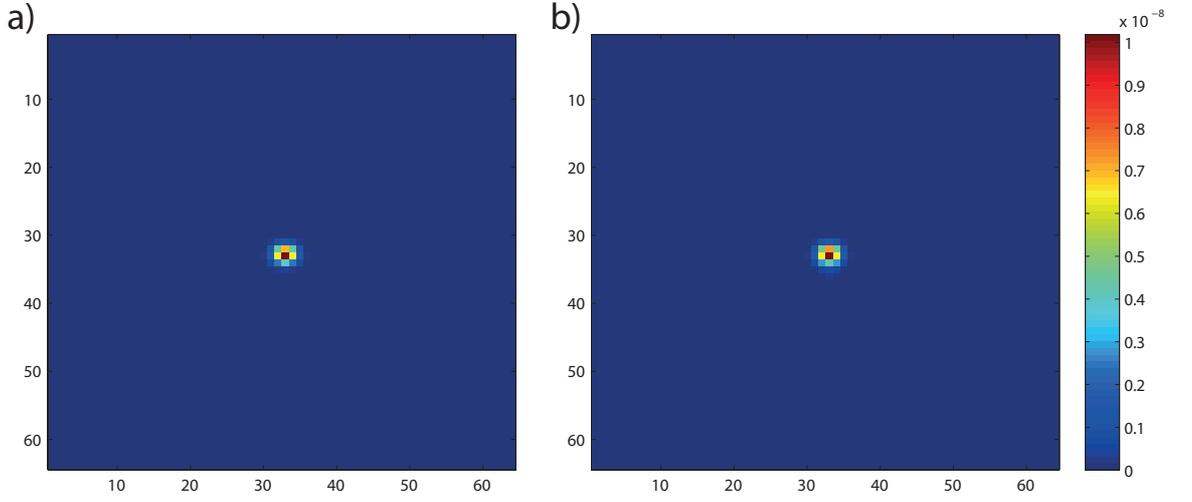


FIGURE 4.7 – Comparaison des fonctions de corrélations en champ lointain, pour $\mathbf{p} = (33, 33)$ fixé et \mathbf{p}' pris sur l'ensemble du plan de restitution. (a) $\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. (b) $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$ pris aux mêmes coordonnées.

(b). Ceci confirme nos attentes : en champ lointain, puisque les faisceaux signaux et idler sont séparés, il n'y a pas de phénomènes HOM apparent. Une fois sur deux, les photons jumeaux sont déviés différemment.

Toutefois, comme on peut le constater sur la figure d'intensité 4.4, il existe certains points pour lesquels les taches signal et idler se recouvrent, c'est le cas par exemple du pixel de coordonnées $\mathbf{p} = (33, 33)$. L'origine (signal ou idler) des photons détectés en ces points est impossible à déterminer, si bien que l'effet d'interférence HOM pourra avoir lieu. Sur la figure 4.7 nous avons représenté les fonctions de corrélations prises avec $\mathbf{p} = (33, 33)$. On peut constater que pour ce point précis la fonction de corrélation (a) présente les mêmes valeurs que la fonction (b). Ceci signifie que les photons jumeaux émergent sur la même voie de sortie. Toutefois, on peut évaluer p_{intra} pour constater qu'en moyenne, le comportement des photons au niveau du BS est proche d'un comportement classique.

$$p_{intra} = 0.5521$$

Nous obtenons donc la même valeur qu'en champ proche et la conservation du nombre global de coïncidences au sein d'une même voie est assurée.

Intéressons-nous maintenant au cas où les faisceaux ne sont plus séparés en champ lointain.

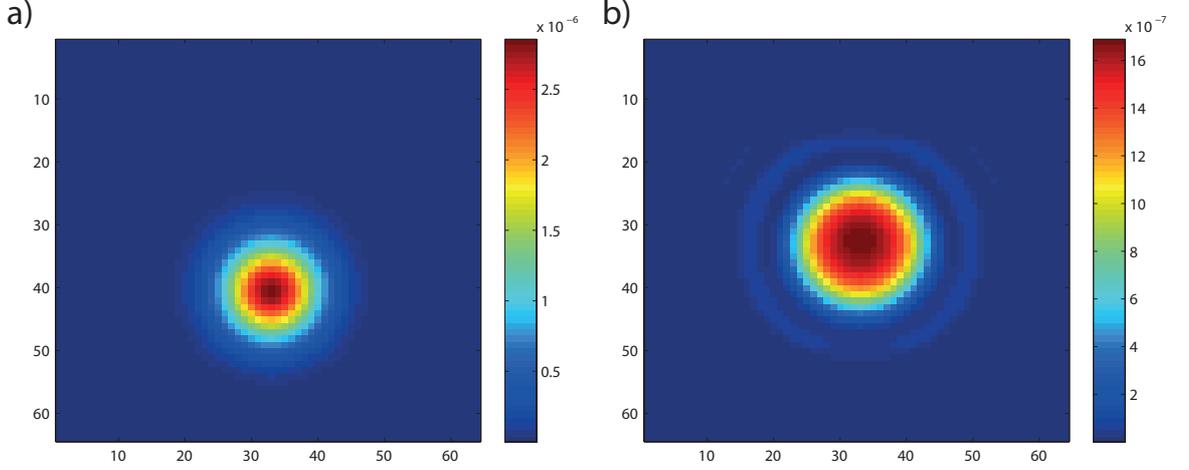


FIGURE 4.8 – Distribution d'intensité en champ proche (a) et champ lointain (b). Les faisceaux signal et idler sont confondus en champ proche et champ lointain.

Résultats pour des faisceaux confondus en champ lointain.

Dans ce cas, après la phase de génération de la SPDC, nous avons simulé un réalignement des deux faisceaux signal et idler en corrigeant leurs plans de phase respectifs avant de les faire interférer sur le Beam-Splitter. Le réalignement permet d'obtenir des faisceaux qui sont confondus sur chaque voie après le BS. Un tel réalignement pourra être opéré en inclinant les miroirs qui permettront de faire se rejoindre les faisceaux sur le BS. Sur la figure 4.8 sont présentées les distributions d'intensités obtenues sur la voie \hat{c} en champ proche et en champ lointain.

Comme précédemment nous avons évalué les fonctions de corrélations $\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$ qui sont présentées en champ proche sur la figure 4.9 et en champ lointain sur la figure 4.10. On observe dans les deux cas que les figures (a) et (b) sont très proches. Cette proximité est synonyme d'une coalescence des paires de photons. Les photons jumeaux sont déviés sur une même voie.

On a de même évalué p_{intra} dans de telles conditions, nous obtenons :

$$p_{intra} = 0.9587$$

Ce qui signifie que pour l'ensemble de la lumière SPDC, dans près de 96% des cas, le photon jumeau se retrouve sur une même voie.

L'écart de cette valeur à un, c'est à dire à une coalescence parfaite, est probablement dû à un effet de déformation des deux taches de fluorescence au cours de la propagation. On utilise ici un accord de phase non-critique, de sorte que les vecteurs de

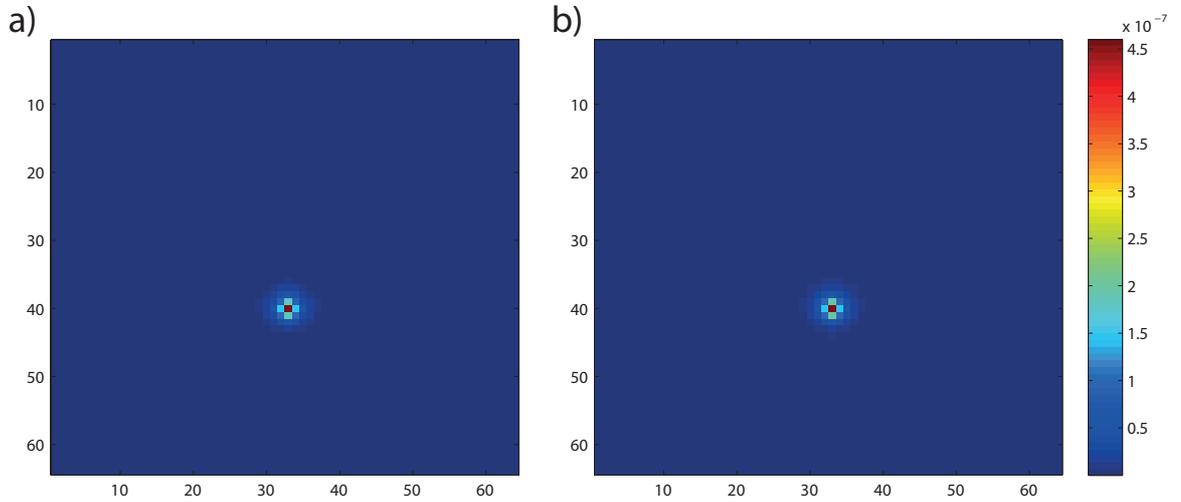


FIGURE 4.9 – Comparaison des fonctions de corrélations en champ proche, pour $\mathbf{r} = (33, 40)$ fixé et \mathbf{r}' pris sur l'ensemble du plan de restitution. (a) $\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. (b) $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$ pris aux mêmes coordonnées.

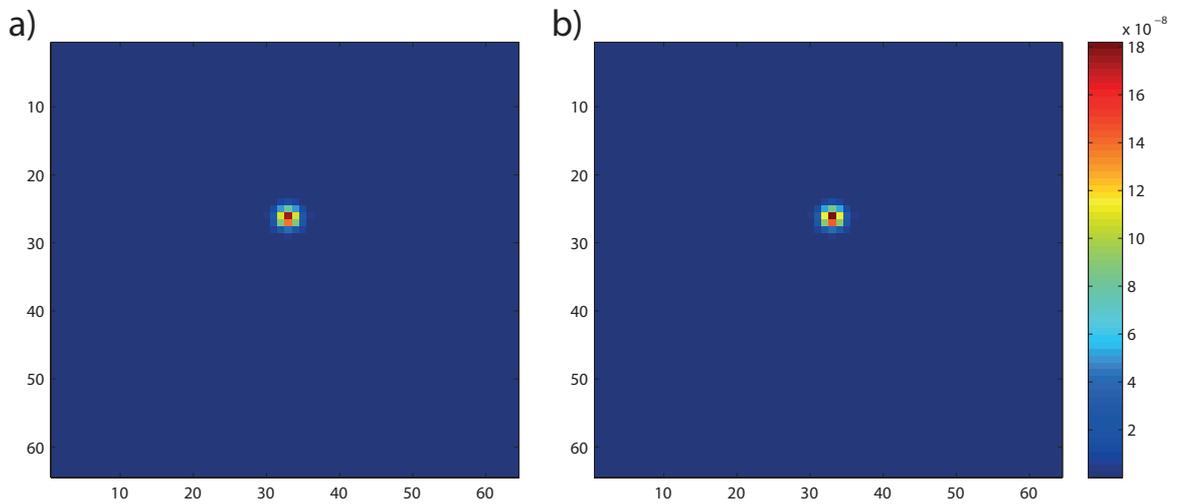


FIGURE 4.10 – Comparaison des fonctions de corrélations en champ lointain, pour $\mathbf{p} = (33, 40)$ fixé et \mathbf{p}' pris sur l'ensemble du plan de restitution. (a) $\tilde{C}_{\hat{c}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. (b) $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{s-i} + \tilde{C}_{i-s})$ pris aux mêmes coordonnées.

Poynting associés aux vecteurs d'ondes moyens des deux taches soient confondus. Toutefois, compte tenu de l'extension du spectre spatial des faisceaux signal et idler, la condition d'accord de phase non critique n'est pas assurée pour l'ensemble des vecteurs d'ondes. Ainsi, les ondes ne se propagent pas exactement dans les mêmes conditions et leur énergie est redistribuée différemment au cours de la propagation car les vecteurs de Poynting associés à des vecteurs d'ondes identiques ne sont pas eux-mêmes forcément identiques. Il s'ensuit une déformation relative des enveloppes et des phases des deux faisceaux. Cette déformation empêche leur parfaite superposition et rend dans une faible mesure identifiable l'origine (signal ou idler) des photons détectés après le BS, et diminue donc d'autant l'effet d'interférence.

Conclusion.

Pour conclure, nous avons obtenu une coalescence quasi complète de toute la statistique fortement multimode de la lumière SPDC. Ce résultat est encourageant pour la réalisation expérimentale qui sera entreprise. De plus notre méthode de simulation nous a permis d'identifier un certain nombre d'effets qu'il sera intéressant de constater expérimentalement.

Nous avons choisi volontairement de ne pas discuter au cours de cette partie de l'orientation des images avant leur recouvrement sur le BS, ni même de leur retournement par effet de réflexion sur le BS. En fait, si on peut penser de prime abord que pour que le phénomène d'interférence à deux photons puisse avoir lieu, il faut que les photons se rencontrent, il n'en est rien. Le fait de retourner ou non les images pour que les aires de cohérences conjuguées soient en regard ou non à l'arrivée sur le BS ne change rien à l'effet de coalescence qui a été constaté. Expérimentalement il ne sera donc pas nécessaire de se soucier des effets de retournement des images dûs aux réflexions, le seul point important est l'alignement des faisceaux pour qu'ils se recouvrent au mieux. Nous allons maintenant voir qu'une telle constatation correspond en fait à une propriété essentielle de l'effet HOM : sa non localité.

4.3 Non localité du comportement dual onde corpuscule.

Nous allons nous intéresser dans cette partie aux propriétés de non-localité du phénomène d'interférence à plusieurs particules. Nous verrons dans un premier temps en quoi on peut parler de non localité du phénomène HOM. Puis nous verrons que les propriétés de non localité d'un tel phénomène peuvent permettre d'établir des inégalités de Bell sur le comportement dual onde-corpuscule des photons. Un tel test consistera en l'utilisation de bases de mesure des photons qui en font apparaître tantôt l'aspect

ondulatoire, tantôt l'aspect corpusculaire, ou encore un mélange des deux. Cette dualité correspondra à l'observation d'interférences d'une part, et à la connaissance du chemin suivi par les photons d'autre part. Ces bases de projection interférométriques complémentaires sont utilisées à la place des bases de projection habituellement utilisées dans les tests de non localité comme les positions et impulsions dans le cadre du paradoxe EPR ou bien les bases de polarisations complémentaires dans le cadre du test le plus courant des inégalités de Bell.

4.3.1 Non localité du phénomène Hong-Ou-Mandel.

On va donc s'intéresser d'abord à la non localité que recèle le phénomène d'interférence à deux particules. Si nous retournons à la figure 4.10 on pourra constater que, alors que l'on observe sur cette figure la corrélation pour la position $\mathbf{p} = (33, 40)$, le pic de corrélation obtenu est, lui, centré sur la position $\mathbf{p}' = (33, 26)$. La détection des photons corrélés s'effectue en des positions bien distinctes du plan transverse. Sur la figure 4.11 nous montrons les positions des photons de paires susceptibles d'être détectées. Comme on peut le voir, les photons jumeaux sont diamétralement opposés; ceci est dû au fait que nous n'avons pas pris en compte le phénomène de retournement des images dû à la réflexion. Toutefois expérimentalement la situation simulée pourra être obtenue en imposant par exemple au signal une réflexion miroir supplémentaire par rapport à l'idler avant que les faisceaux ne soient recombinaés sur le BS.

Cette séparation des photons, telle que nous l'avons vue dans la partie précédente, n'empêche pas le phénomène de coalescence d'exister. Or si les faisceaux sont recombinaés en champ lointain et détectés directement après le BS, les photons détectés, n'ont dans une vision classique pas pu se rencontrer ni pendant, ni après le passage du BS. Ce qui veut dire que les photons semblent avoir interféré sans jamais s'être croisés après leur émission. On doit conclure que l'effet d'interférence observé ne peut correspondre à l'interférence des deux particules. En fait ce ne sont pas réellement deux particules physiques qui interfèrent mais deux parties de la fonction d'onde totale, qui correspondent à deux réalités différentes, d'une part celle pour laquelle le signal est détecté en \mathbf{p} et l'idler en \mathbf{p}' et d'autre part celle pour laquelle le signal est détecté en \mathbf{p}' et l'idler en \mathbf{p} . Les deux situations étant indiscernables par une mesure après le BS, les deux parties de la fonction d'onde totale interfèrent donnant lieu à l'effet HOM. Cette interprétation du phénomène HOM a pour la première fois été donnée par Pittman *et al.* en 1996 [Pittman et al., 1996] et dont le titre résume bien la problématique : "Can Two-Photon Interference be Considered the Interference of Two Photons?". Dans cet article, plutôt qu'une séparation spatiale des photons qui semblent interférer, c'est une séparation temporelle qui est assurée.

Si c'est la première fois que cette interprétation est faite du phénomène HOM, son essence non-locale a été constatée dès 1989 par Horne *et al.* [Horne et al., 1989], et une proposition d'utiliser cette non localité pour violer une inégalité de Bell a été suggérée.

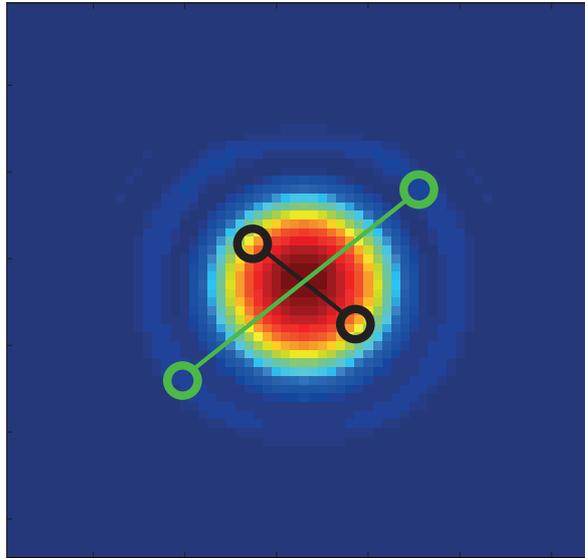


FIGURE 4.11 – Exemple de position de deux paires de photons sur la distribution d'intensité 4.8(b). Les cercles indiquent la position des photons, une couleur correspond à une paire. Pour chaque paire les photons sont clairement séparés à leur arrivée sur le BS, ce qui n'empêche pas l'observation d'un effet d'interférence.

Cette proposition a été suggérée et réalisée indépendamment par Rarity et Tapster sans toutefois assurer la séparation causale du choix des mesures [Rarity and Tapster, 1990].

Nous allons voir qu'il est possible d'exploiter cette non-localité du phénomène d'interférence à deux photons dans un contexte où la dualité onde-corpuscule est mise en jeu. On sera amené à introduire une nouvelle inégalité de Bell, différente de celles introduites dans [Horne et al., 1989] et [Rarity and Tapster, 1990].

4.3.2 Non-localité de la dualité onde-corpuscule dans le contexte de l'interférence à deux photons.

Partant de la constatation de non-localité présentée dans la partie précédente, on peut se demander comment démontrer cette non localité. Nous allons voir, que partant strictement de l'état (1.3) décrit par EPR dans leurs contributions de 1935 [Einstein et al., 1935] nous arriverons à une violation d'une inégalité de Bell établie sur des mesures interférométriques complémentaires. Nous allons pour cela procéder étape par étape, partant du comportement intriqué le plus élémentaire, pour aller jusqu'aux inégalités de Bell.

Comportement intriqué.

Sur la figure 4.12 est représenté le schéma expérimental que nous allons discuter ici dans différents contextes. Une source S génère un état EPR. On sélectionne à l'aide de 4 fibres optiques monomode des impulsions particulières p et p' sur cet état. Les impulsions sont choisies de sorte que si un photon est détecté en \hat{a}_1 , son jumeau sera en \hat{a}_2 et si un photon est détecté en \hat{b}_2 , son jumeau sera en \hat{b}_1 . Les couples signal-idler sont ensuite mélangés à l'aide de deux BS séparés spatialement, de la même façon, à la partie §4.2.4 où de tels couples étaient mélangés en différents points du même BS. Un photon part donc vers le haut, un autre part vers le bas.

Formellement, nous partons de (1.3) :

$$|EPR\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |p, -p\rangle dp \quad (4.40)$$

On applique ensuite un filtrage en sélectionnant des impulsions particulières à l'aide des fibres optiques :

$$|\Psi\rangle = |EPR_{filtré}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p, -p\rangle + |p', -p'\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1^\dagger) |0, 0\rangle \quad (4.41)$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ permet de normer l'état. On peut écrire l'action des BS, supposant qu'on contrôle les phases des différentes voies d'entrée et de sortie de la façon suivante [Campos et al., 1989] :

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

où $i = \{1, 2\}$ désigne l'un des deux BS de la figure 4.12. Ainsi, dans le cas présent, pour des BS 50/50 i.e. $\theta = \frac{\pi}{4}$, on aura :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1^\dagger) |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger + \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_2^\dagger) |0, 0\rangle \quad (4.43)$$

Les photons sortent donc toujours ensemble sur la même voie de sortie de chacun des BS.

De la même façon que dans le cadre des mesures EPR, on peut imaginer que le passage des photons sur une voie et leur détection s'effectuent sur un temps assez court pour qu'aucun signal d'information limité par la vitesse de la lumière c ne puisse joindre les deux BS. Ainsi, un photon qui passe sur la voie \hat{c} plutôt que sur la \hat{d} ne peut avoir prévenu son jumeau de ce choix. Pourtant, le second photon empruntera systématiquement la même voie ; cette propriété de non localité est analogue à celle vérifiée par les mesures corrélées sur les états intriqués présentés au chapitre 1. On peut alors se demander s'il est possible de prolonger le développement et de chercher l'analogie du paradoxe EPR dans ce contexte d'interférence à deux photons.

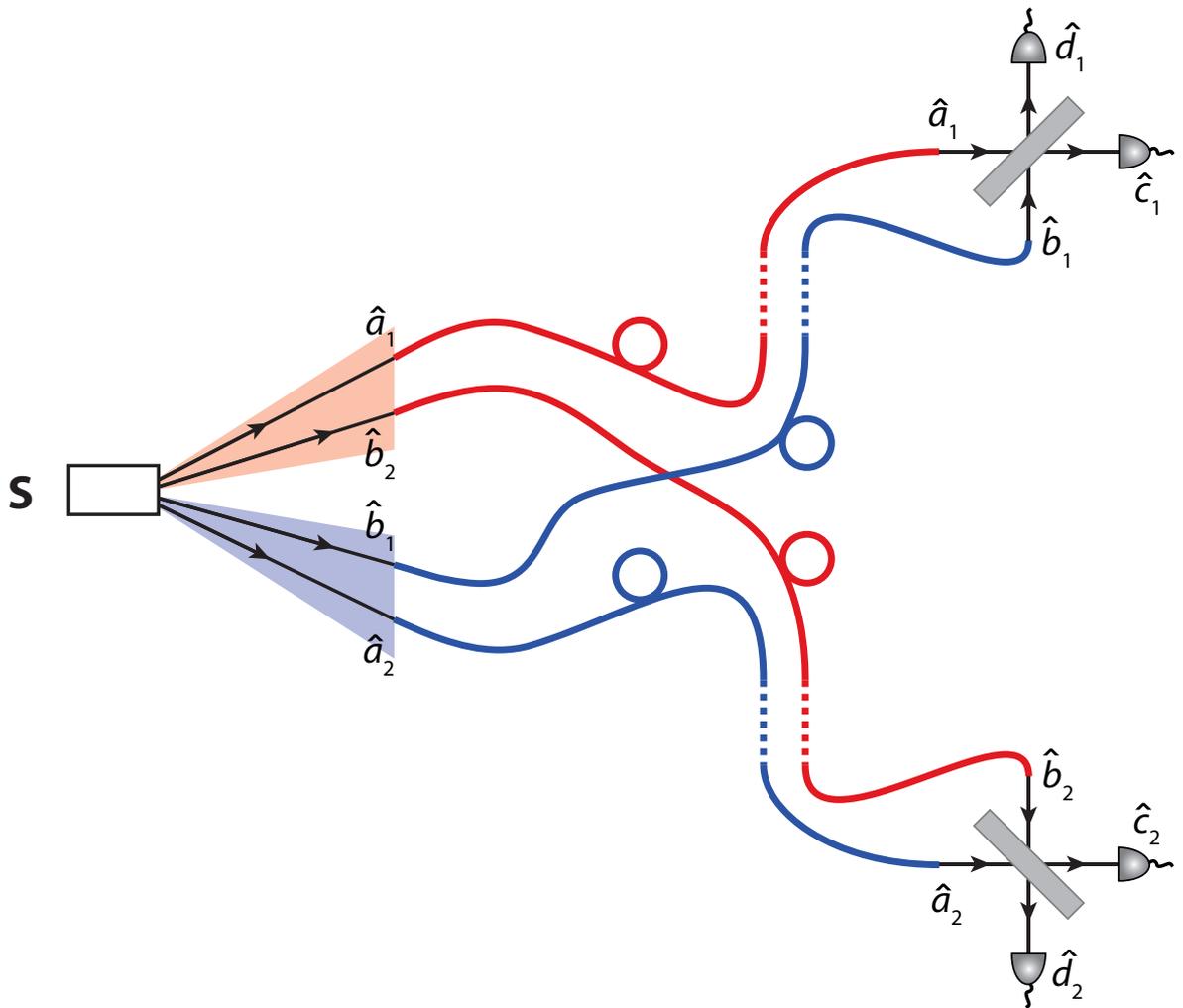


FIGURE 4.12 – Schéma expérimental visant à démontrer la non-localité du phénomène d'interférence à deux photons.

Bases interférométriques complémentaires, comportement de type EPR.

Puisque notre but est de reproduire l'équivalent du paradoxe EPR dans ce contexte d'interférométrie à deux photons, il nous faut trouver une façon de mélanger les photons qui soit complémentaire du cas précédent, de même que les mesures de x et p sont complémentaires. Puisque précédemment nous utilisons un BS 50/50 pour faire interférer les photons signal et idler, un choix naturel est de ne plus les faire interférer du tout. Ainsi, si nous mesurons précédemment et de chaque côté le comportement ondulatoire de la lumière, c'est à dire sa capacité à produire des interférences, sans BS, nous mesurons l'origine des photons signal ou idler, et donc le comportement corpusculaire de ces photons. De même dans le cadre d'une expérience de Wheeler à choix retardé [Jacques et al., 2007] l'absence de BS signifie la possibilité de détecter l'origine du photon c'est à dire le bras de l'interféromètre qu'il a pris, donc la détection de son comportement corpusculaire. A l'inverse, une mesure en présence d'un BS génère une interférence entre les deux bras, l'origine du photon devient indiscernable et une figure d'interférence apparaît. La différence est que, puisqu'on s'intéresse ici à un phénomène d'interférence à deux photons, l'interférence apparaîtra dans la fonction de corrélation entre les voies de sortie distantes et non directement dans la probabilité de détecter les photons sur chaque voie.

Pour faire apparaître la figure d'interférence, il s'agirait comme dans [Horne et al., 1989] d'imposer un déphasage sur l'une des voies, \hat{a}_1 ou \hat{a}_2 . On déphase alors l'un des termes de l'état (4.41) :

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_1^\dagger)|0,0\rangle \quad (4.44)$$

L'interférence se retrouverait alors dans les moments d'ordre quatre, par exemple sur les voies \hat{c} :

$$\langle\Psi'|\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_1\hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2|\Psi'\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(\phi) \quad (4.45)$$

alors que

$$\langle\Psi'|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2|\Psi'\rangle = \frac{1}{2} \quad (4.46)$$

On a donc bien dans un cas un comportement corpusculaire et dans l'autre un comportement ondulatoire. De même si un BS est présent sur une seule voie, aucune interférence n'apparaît

$$\langle\Psi'|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2|\Psi'\rangle = \frac{1}{4} \quad (4.47)$$

Ceci peut s'expliquer par le fait que la mesure en 1 nous permet de déterminer l'origine des deux photons, donc d'imposer leur comportement corpusculaire, de même que dans le cas d'une intrication en polarisation, si la mesure est effectuée d'un côté dans la base de polarisation propre à l'état, on connaît la polarisation horizontale ou verticale de

l'autre photon sans l'avoir détecté, peu importe comment il est ensuite détecté. De façon similaire, le comportement corpusculaire ou ondulatoire de la paire de photons est une propriété qui leur est commune et qui requerrait dans une vision réaliste de la nature que les deux photons puissent connaître la mesure qui est effectuée de part et d'autre pour pouvoir déduire le comportement à adopter (corpusculaire ou ondulatoire).

On peut alors espérer séparer causalement les choix de bases de projection onde-particules de sorte que, quand l'un des photons est détecté, il ne peut être tenu au courant par un signal physique si c'est l'aspect ondulatoire ou l'aspect corpusculaire qui a été détecté sur son jumeau. Pourtant pour $\phi = 0$, on aura toujours corrélation entre les voies si un BS est présent simultanément en 1 et en 2 mais aussi si les BS sont absents. On a donc une sorte de paradoxe EPR sur la dualité onde-corpuscule plutôt que sur les positions et impulsions.

De nouveau, on peut imaginer l'introduction de variables cachées qui correspondraient à des consignes données aux particules ce qui permettrait d'expliquer les résultats précédents, analogues du paradoxe EPR. Pour démontrer la non-localité du phénomène Hong-Ou-Mandel, associé aux comportements interférométriques complémentaires, il nous faut établir une inégalité de Bell dans ce contexte et démontrer que les prédictions quantiques violent cette inégalité. C'est ce que nous nous proposons maintenant de faire.

Inégalité de Bell et dualité onde-corpuscule.

On va donc chercher à faire émerger une inégalité de Bell dans ce contexte. Il est à noter, que si une telle inégalité a déjà été développée en lien avec le phénomène d'interférence à deux photons [Rarity and Tapster, 1990], celle-ci mettait en jeu le choix de déphasages imposés aux ondes et non la présence ou l'absence des BS. Nous proposons ici le développement d'une inégalité de Bell qui met en jeu un choix de mesure qui concerne l'observation des aspects ondulatoires ou corpusculaires des photons.

Dans ce but, pour passer de la démonstration analogue au paradoxe EPR précédemment présenté à une non localité de Bell, il faut introduire des bases intermédiaires, entre présence et absence complète du BS et donc entre observation de l'aspect corpusculaire et ondulatoire des photons. En fait de telles bases sont fournies par des BS asymétriques. Connaissant les propriétés de réflexion et de transmission du BS asymétrique, contrairement au cas où un BS 50/50 est présent, on peut connaître dans une certaine mesure l'origine signal ou idler des photons puisque l'asymétrie conduit à une certaine distinguabilité [Li et al., 2012].

Si on écrit maintenant complètement les équations liant les entrées et les sorties des

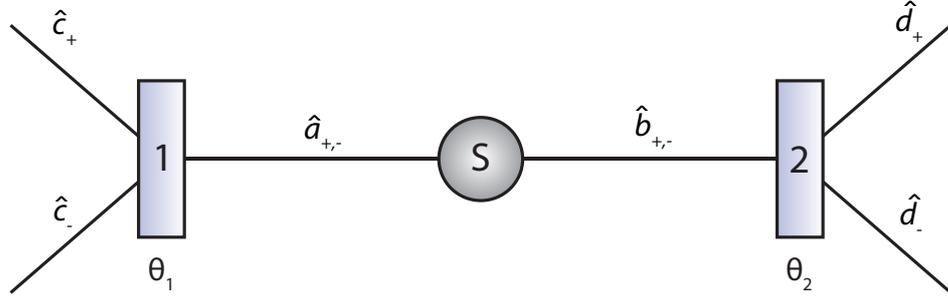


FIGURE 4.13 – Représentation schématique des expériences de test des inégalités de Bell en polarisation.

deux BS (4.42) :

$$\hat{c}_1 = \hat{a}_1 \cos(\theta_1) + \hat{b}_1 \sin(\theta_1) \quad (4.48)$$

$$\hat{d}_1 = -\hat{a}_1 \sin(\theta_1) + \hat{b}_1 \cos(\theta_1) \quad (4.49)$$

$$\hat{c}_2 = \hat{a}_2 \cos(\theta_2) + \hat{b}_2 \sin(\theta_2) \quad (4.50)$$

$$\hat{d}_2 = -\hat{a}_2 \sin(\theta_2) + \hat{b}_2 \cos(\theta_2) \quad (4.51)$$

Or ces équations sont équivalentes à celles liant les bases de mesures dans le cas d'une détection de la polarisation de deux particules 1 et 2. Nous utilisons les notations utilisées dans la partie 13.2 [Walls and Milburn, 2007], concernant les inégalités de Bell, nous avons représenté la situation qui y est étudiée sur la figure 4.13. Pour obtenir la correspondance, il s'agit de remplacer \hat{a}_1 et \hat{b}_1 par les deux polarisations d'entrée de l'analyseur de polarisation 1 notées \hat{a}_+ et \hat{a}_- , θ_1 devient l'angle d'orientation de cet analyseur, \hat{c}_1 et \hat{d}_1 deviennent les voies de sorties \hat{c}_+ et \hat{c}_- de cet analyseur 1. D'autre part pour la particule 2 on a les mêmes correspondances : \hat{a}_2 et \hat{b}_2 deviennent les deux polarisations d'entrée de l'analyseur 2 notées \hat{b}_+ et \hat{b}_- , θ_2 devient l'angle d'orientation de cet analyseur, \hat{c}_2 et \hat{d}_2 deviennent les voies de sorties \hat{d}_+ et \hat{d}_- de cet analyseur 2. Les équations liant les voies d'entrées et de sorties sont alors les mêmes que celles que nous avons obtenues (4.51) dans le cas qui nous préoccupe [Walls and Milburn, 2007] :

$$\hat{c}_+ = \hat{a}_+ \cos(\theta_1) + \hat{a}_- \sin(\theta_1) \quad (4.52)$$

$$\hat{c}_- = -\hat{a}_+ \sin(\theta_1) + \hat{a}_- \cos(\theta_1) \quad (4.53)$$

$$\hat{d}_+ = \hat{b}_+ \cos(\theta_2) + \hat{b}_- \sin(\theta_2) \quad (4.54)$$

$$\hat{d}_- = -\hat{b}_+ \sin(\theta_2) + \hat{b}_- \cos(\theta_2) \quad (4.55)$$

La table 4.2 résume ces correspondances.

Dès lors, puisqu'on a établi la correspondance des différentes quantités mises en jeu

Interférométrie	\longleftrightarrow	Polarisation	Interférométrie	\longleftrightarrow	Polarisation
\hat{a}_1	\longleftrightarrow	\hat{a}_+	\hat{a}_2	\longleftrightarrow	\hat{b}_+
\hat{b}_1	\longleftrightarrow	\hat{a}_-	\hat{b}_2	\longleftrightarrow	\hat{b}_-
\hat{c}_1	\longleftrightarrow	\hat{c}_+	\hat{c}_2	\longleftrightarrow	\hat{d}_+
\hat{d}_1	\longleftrightarrow	\hat{c}_-	\hat{d}_2	\longleftrightarrow	\hat{d}_-

TABLE 4.2 – Correspondance entre les opérateurs mis en jeu dans le contexte de l’interférométrie à deux photons et dans le contexte des expériences de Bell en polarisation.

dans le cas de mesures en polarisation, et dans le cas de mesure des propriétés ondulatoires et corpusculaires des photons, on peut reconduire le raisonnement visant à établir un modèle à variables locales cachées dans le cadre des polarisations, en adaptant les quantités mises en jeu. Nous suivons le traitement en polarisation présenté dans [Walls and Milburn, 2007] au chapitre 13, partie 13.2, pour l’adapter au contexte qui nous préoccupe.

Les détecteurs placés après les BS (voir figure 4.12) mesurent les intensités $\langle I_1^{c/d} \rangle$ et $\langle I_2^{c/d} \rangle$, les corrélateurs mesurent $\langle I_1^c I_2^c \rangle$ etc. Ces moments vont dépendre de θ_1 et θ_2 . On suppose qu’une théorie complète dépend aussi de la variable cachée λ , pour laquelle une description statistique est disponible. Cette variable est distribuée selon une densité notée $\rho(\lambda)$. On pourra alors écrire de façon générale :

$$\langle I_1^{c/d} I_2^{c/d} \rangle_{\theta_1 \theta_2} = \int \rho(\lambda) I_1^{c/d}(\lambda, \theta_1, \theta_2) I_2^{c/d}(\lambda, \theta_1, \theta_2) d\lambda \quad (4.56)$$

où I_1^c dénote l’intensité attendue sur le détecteur associé à la voie \hat{c}_1 pour une valeur donnée de λ . Puisqu’on ne veut pas imposer à la théorie d’être déterministe :

$$I_1^c(\lambda, \theta_1, \theta_2) = \int I_1^c \rho(I_1^c | \lambda, \theta_1, \theta_2) dI_1^c \quad (4.57)$$

On introduit de plus la grandeur :

$$E(\theta_1, \theta_2) = \frac{\langle (I_1^c - I_1^d) (I_2^c - I_2^d) \rangle}{\langle (I_1^c + I_1^d) (I_2^c + I_2^d) \rangle} \quad (4.58)$$

qui se réécrit en terme d’opérateurs de modes :

$$E(\theta_1, \theta_2) = \frac{\langle : (\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 - \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1) (\hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 - \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2) : \rangle}{\langle : (\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1) (\hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 + \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2) : \rangle} \quad (4.59)$$

On peut alors démontrer (cf [Walls and Milburn, 2007]) qu’en faisant l’hypothèse de localité

$$I_1^{c/d}(\lambda, \theta_1, \theta_2) = I_1^{c/d}(\lambda, \theta_1) \quad (4.60)$$

$$I_2^{c/d}(\lambda, \theta_1, \theta_2) = I_2^{c/d}(\lambda, \theta_2) \quad (4.61)$$

l'inégalité suivante doit être respectée par le modèle à variable cachée :

$$|B| \leq 2 \quad (4.62)$$

où

$$B = E(\theta_1, \theta_2) - E(\theta_1, \theta'_2) + E(\theta'_1, \theta'_2) + E(\theta'_1, \theta_2)$$

et ce quel que soit le choix de θ_1 , θ_2 , θ'_1 et θ'_2 . Une telle inégalité est une inégalité de Bell de type CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt) [Clauser et al., 1969].

On revient alors à l'expression de l'état quantique $|EPR_{filtré}\rangle$ présenté à l'équation (4.41) qui correspond à l'état décrit par EPR filtré par la sélection spatiale imposée par les fibres optiques tel que présenté sur la figure 4.12 :

$$|EPR_{filtré}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger) |0, 0\rangle \quad (4.63)$$

On peut alors montrer qu'avec un tel état, on obtient :

$$E(\theta_1, \theta_2) = \cos(2(\theta_1 - \theta_2)) \quad (4.64)$$

aussi, si on prend $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$, $\theta'_1 = \frac{\pi}{4}$ et $\theta'_2 = \frac{3\pi}{8}$, on obtient

$$B = 2\sqrt{2} \quad (4.65)$$

ce qui correspond à une violation maximale de l'inégalité CHSH⁴. On a donc montré qu'il est possible d'établir un comportement quantique non-local au sens de Bell en utilisant la mesure des aspects interférométriques complémentaires que sont les comportements ondulatoire et corpusculaire. Cela tend à démontrer que, comme toute propriété quantique, le comportement d'apparence ondulatoire ou corpusculaire d'un photon est une propriété susceptible d'être partagée par deux particules sans transmission d'information, par le fait que ces particules composent un état intriqué complet. La dualité mise en jeu correspond en fait à l'observation d'interférences d'une part, et à la connaissance du chemin suivi par les photons d'autre part.

Un fait important de cette démonstration est qu'on a pu aboutir à la démonstration d'un comportement non local au sens de Bell en partant de l'état original décrit par EPR en 1935, ce qui constitue une nouvelle preuve directe de la non-localité d'un tel état.

Expérimentalement, la séparation causale du choix de la base de détection pourra être assurée par l'utilisation de BS accordables tels qu'utilisés dans [Ma et al., 2011]. La

4. La valeur $\theta'_2 = \frac{3\pi}{8} > \frac{\pi}{4}$ impose l'inversion du signe de certains coefficients et donc de devoir contrôler les déphasages dues aux BS et pas seulement leur pure réflectivité. On pourra donc prendre les valeurs $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{12}$, $\theta'_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\theta'_2 = \frac{\pi}{4}$ ce qui donne $B = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 2$

source EPR pourra être, comme nous l'avons vu au long des trois chapitres précédents, générée par une lumière SPDC.

4.4 Théories non-locales à variables cachées : quel type de non-localité? Proposition expérimentale.

4.4.1 Les théories non-locales à variables cachées.

Les inégalités de Bell et leurs tests expérimentaux ont montré l'incompatibilité qui existe entre le comportement de la nature et une théorie à la fois réaliste et locale. Il convient donc d'abandonner l'une ou l'autre de ces notions pour pouvoir en faire une description correcte. Une des possibilités est de maintenir le réalisme en continuant à supposer l'existence de variables cachées, mais d'accepter le comportement non-local de la nature, définissant ainsi des théories non locales à variables cachées. Une telle tentative a par exemple été menée par Leggett [Leggett, 2003].

Nous allons nous efforcer ici, en proposant une expérience légèrement modifiée de test des inégalités de Bell, de discuter le choix de la non-localité qui est fait dans de tels modèles. Le point essentiel de notre raisonnement sera de chercher à savoir si la non-localité qui est généralement décrite dans les modèles non locaux à variables cachées est effectivement une forme de non-localité satisfaisante du point de vue des résultats expérimentaux.

Pour pouvoir conduire cette discussion, nous récrivons tout d'abord les différentes propriétés associées aux théories à variables cachées données dans [Leggett, 2003] (p. 1473-1474). Tout d'abord, trois propriétés caractérisent une théorie à variable cachée générale :

- (1) Chaque paire de photons émise dans la cascade d'un atome donné est caractérisé par la valeur unique d'un jeu de variables cachées noté λ .
- (2) Pour un type donné de processus de cascade atomique ayant lieu selon des conditions physiques données au niveau de la source, l'ensemble des paires de photons émis est déterminé par une distribution statistique unique et reproductible de valeurs de λ que nous décrivons par une fonction de distribution normalisée $\rho(\lambda)$. La forme de la fonction $\rho(\lambda)$ dépend seulement des conditions au voisinage de la source, et en particulier est indépendante des réglages a et b des polariseurs et des sorties des détecteurs D_1 et D_2 .
- (3) Pour une paire donnée, la valeur de la quantité A (1 si le détecteur D_1 détecte

la particule après le polariseur a ; -1 si il ne le détecte pas) est déterminée par les valeurs de a, b, λ , et éventuellement par la valeur de B ; de façon similaire, B est déterminée par les valeurs de a, b, λ , et éventuellement par la valeur de A . Les conditions (1)-(3) impliquent pour la corrélation mesurée $P(a \cdot b)$ le résultat suivant :

$$P(a \cdot b) = F \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, b, \lambda : B) B(a, b, \lambda : A)$$

Pour les théories locales à variables cachées, s'ajoutent deux propriétés :

(4) Indépendance des sorties :

$$A(a, b, \lambda : B) = A(a, b, \lambda), \quad B(a, b, \lambda : A) = B(a, b, \lambda).$$

(5) Les sorties sont indépendantes des réglages distants :

$$A(a, b, \lambda) = A(a, \lambda), \quad B(a, b, \lambda) = B(b, \lambda).$$

Ledgett définit alors une théorie non locale à variable cachée comme une théorie qui vérifie les propriétés (1) à (4). On voit donc que toute forme de non-localité n'est pas ici permise. Il reste en effet un certain degré de liberté supplémentaire à donner à ces théories en matière de non-localité. Le cas extrême serait d'exclure (4) et (5) des théories non locales à variables cachées. Et comme le dit Leggett plus loin dans [Leggett, 2003] (p. 1475) :

At this point I shall rather arbitrarily assert assumption (4) (outcome independence). The reason for doing it is not so much that it is particularly "natural" (after all, the outcome at the distant station is just one more variable characterizing the overall "environment"!) but is a purely practical one; if one relaxes (4) it appears unlikely (though I have no rigorous proof) that one can prove anything useful at all, and in particular it appears very likely that one can reproduce the quantum-mechanical results for an arbitrary experiment.

En fait, si on ne considère que deux particules qui comme précédemment ont interagi et partagé leurs variables cachées λ , alors permettre à la particule 1 de connaître toutes les propriétés des systèmes qui agissent sur la particule 2, ne lui permet pas de façon générale de connaître le résultat de mesure sur cette particule 2. Pour qu'elle puisse connaître un tel résultat, il faudrait qu'elle puisse le calculer à partir de λ , ce qui impose que le résultat soit déterministe. Connaissant λ et θ_2 on ne peut en effet calculer le résultat de mesure que si celui-ci est obtenu de façon déterministe. Or une théorie à variables cachées n'est pas forcément déterministe.

Si on arrive à démontrer qu'un résultat de mesure doit être connu pour expliquer un comportement quantique, on doit donc conclure :

- Soit que le résultat de mesure peut être connu directement, malgré une séparation de type espace. Ceci revient à relaxer la propriété (4) de [Leggett, 2003]
- Soit qu'une telle mesure pouvait être prévisible et que les éléments physiques permettant cette prévision sont potentiellement disponibles de façon non locale.

Dans ce contexte, nous proposons un protocole expérimental qui suggère que l'on doit imposer une non-localité plus libre que celle qui consiste seulement à relâcher la contrainte (5) pour pouvoir expliquer les résultats de la mécanique quantique.

NB : dans ce qui précède, on pourrait imaginer un modèle non local pour lequel la distribution de probabilité $\rho(\lambda)$ elle même pourrait être dépendante des grandeurs distantes dans l'espace et dans le temps (rétrocausalité), c'est à dire $\rho(a, b, \lambda : A, B)$. Il s'agirait donc que la statistique suivie par les variables cachées change selon les configurations expérimentales et les résultats de mesures qui seront obtenus sur les particules. De tels modèles seraient susceptibles d'expliquer les corrélations locales de type Bell, même en supposant (4) et (5). Toutefois, on pourrait de nouveau définir deux nouvelles classes de non localités selon que ρ dépende ou non des résultats de mesures A et B , le modèle n'étant pas nécessairement déterministe.

4.4.2 Test des inégalités de Bell avec "décisions quantiques".

Une idée pour tester le degré de non-localité du comportement de la nature serait de rendre le choix de la base de mesure d'une des particules dépendant d'une "décision quantique". Si on fait en sorte que l'appareil $|\Psi_{a2}\rangle$ permettant le choix de la base de mesure θ_2 de la particule 2 soit dans un état de superposition quantique, alors la connaissance de la base de mesure θ_2 est sujette à la connaissance du résultat de mesure appliqué sur l'appareil $|\Psi_{a2}\rangle$. Réciproquement on introduit un appareil de contrôle quantique $|\Psi_{a1}\rangle$ qui décide du choix de la base de mesure pour la particule 1. Si, dans ces conditions, on détecte la violation d'une inégalité de Bell, cela signifie que dans le cadre d'une théorie à variables cachées, sans la connaissance de θ_2 par la particule 1 et de θ_1 par la particule 2, les particules ne pourraient pas décider du comportement expérimental qu'elles adoptent. Sans cette connaissance, les mesures effectuées conjointement sur 1 et 2 doivent vérifier l'inégalité de Bell. Or pour connaître θ_2 la particule 1 doit disposer du résultat de la mesure appliqué sur $|\Psi_{a2}\rangle$, et inversement la particule 2 doit disposer du résultat de la mesure appliqué sur $|\Psi_{a1}\rangle$. On est donc conduit à dire que les particules 1 et 2 doivent avoir accès aux résultats de mesures, de façon directe ou calculée.

Dans un tel cas :

- soit la propriété (4) de Leggett ne peut plus être vérifiée par le modèle à variables cachées, c'est à dire qu'il faut pousser la non localité jusqu'à la connaissance des

résultats de mesure et pas seulement des configurations expérimentales distantes.

- soit, si on suppose que les résultats pouvaient être prévus a priori, malgré le fait que les $|\Psi_a\rangle$ soient dans des états de superposition quantiques, on doit conclure que les particules disposaient des moyens pour calculer θ_1 et θ_2 . Dans un tel cas, il faut d'une part que la particule 1 connaisse la variable cachée λ_2 associée au comportement de $|\Psi_{a2}\rangle$ mais aussi que la mesure sur $|\Psi_{a2}\rangle$ soit déterministe (et inversement en remplaçant les rôles de 1 et 2). Or il se peut que la particule 1 n'ait jamais interagi localement avec l'état $|\Psi_{a2}\rangle$, donc les éléments de réalité λ_2 qui dans un modèle déterministe fixe les résultats de mesure de l'état $|\Psi_{a2}\rangle$ doivent être connus non-localement par la particule 1. Là encore la non-localité décrite par Leggett s'avère insuffisante.

Un tel protocole expérimental est en fait envisageable compte tenu de l'état de l'art des technologies de contrôle quantiques. En effet, il a été démontré expérimentalement que l'on peut créer des BS contrôlables par un ancilla dans un état de superposition quantique [Kaiser et al., 2012] et [Peruzzo et al., 2012]. Un tel dispositif peut donc se prêter directement à un test des inégalités de Bell formulées sur des mesures interférométriques complémentaires telles que nous l'avons présenté dans la partie §4.3.2. De fait, dans cette version des inégalités de Bell les bases de mesures, donc θ_1 et θ_2 sont déterminées par les caractéristiques du BS qui est placé sur le trajet des particules. C'est directement ce choix de caractéristique qui peut être réalisé quantiquement dans les configurations expérimentales présentées dans [Kaiser et al., 2012] et [Peruzzo et al., 2012].

Nous présentons sur les figures 4.14 et 4.15 le schéma de remplacement des BS de la figure 4.12 par des BS contrôlés quantiquement par les ancilla $|\Psi_{a1}\rangle$ et $|\Psi_{a2}\rangle$.

Le principe de fonctionnement du BS à contrôle quantique est celui d'une porte de Hadamard. Le contrôle de cette porte est assuré par un ancilla $|\Psi_a\rangle = \cos(\alpha)|0\rangle + \sin(\alpha)|1\rangle$ dans un état de superposition. Les états de contrôles $|0\rangle$ et $|1\rangle$ correspondent respectivement à la présence du photon ancilla dans la partie supérieure ou inférieure du tracé rouge de la figure 4.14.

Si le photon ancilla est détecté dans l'état $|0\rangle$ alors le BS était absent c.a.d. $\theta_2 = 0$, et s'il est détecté dans l'état $|1\rangle$ alors un BS 50/50 était présent c.a.d. $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. Nous avons vu dans la partie précédente que de telles valeurs permettent d'envisager une violation maximale de l'inégalité CHSH, puisque si l'on choisit des bases telles que $\theta_1 = 0$, $\theta'_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ et $\theta'_2 = \frac{3\pi}{8}$ on peut espérer arriver à $B = 2\sqrt{2}$ avec l'état $|EPR_{filtré}\rangle$ de l'équation (4.41).

De façon pratique, l'expérience consisterait dans un premier temps à reproduire les résultats de [Peruzzo et al., 2012] pour montrer que les contrôles des BS ont une nature quantique et non locale, et que les ancillas se trouvent bien dans des états de superpo-

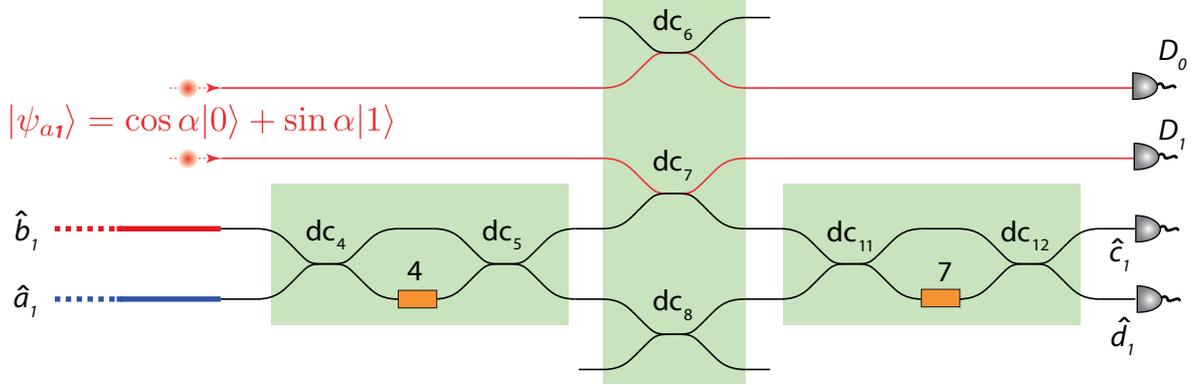


FIGURE 4.14 – Modification du schéma expérimental de la figure 4.12 utilisant le BS à contrôle quantique de [Peruzzo et al., 2012]. On retrouve les entrées et sorties du BS : \hat{a}_1 , \hat{b}_1 , \hat{c}_1 et \hat{d}_1 . La commande est créée par interaction avec un ancilla $|\Psi_{a1}\rangle$ dans un état de superposition. Les détecteurs D_0 et D_1 permettent de détecter, et donc de projeter l'état de l'ancilla, alors que l'interaction a déjà eu lieu. Ce sont ces détecteurs qui déterminent si le BS était présent ou non. La porte de Hadamard est composée de coupleurs directionnels (dc) et de déphaseurs représentés par des rectangles orange. Le détail des réglages est donné dans [Peruzzo et al., 2012].

sition et non dans des mélanges statistiques de type $\hat{\rho}_a = \cos(\alpha) |0\rangle\langle 0| + \sin(\alpha) |1\rangle\langle 1|$. Suite à cela, on pourra s'efforcer de démontrer la violation de l'inégalité de Bell (4.62) pour le comportement dual onde-corpuscule des photons 1 et 2, tout en séparant causalement la mesure sur les ancillas $|\Psi_a\rangle$ et la mesure effectuée sur le photon de la partie opposée. De cette façon, le photon 1 ne peut être renseigné par un signal du résultat de mesure sur l'ancilla 2, et donc de l'état du BS 2 avant sa détection (et inversement).

Ainsi, si le comportement des photons 1 et 2 conduit à violer l'inégalité de Bell (4.62), et si on suppose que leur comportement est guidé par un modèle non local à variable cachée, alors ils doivent avoir eu accès directement ou indirectement aux résultats de la mesure sur l'ancilla de la partie opposée, c'est à dire avoir connu l'état du BS opposé.

La mécanique quantique prévoit qu'une violation des inégalités de Bell doit subsister par rapport au cas où le choix des bases de mesure est décidé classiquement par l'expérimentateur. De fait, une fois que les mesures sur les ancillas ont été effectuées, la mécanique quantique prévoit que le paquet d'ondes du système total sera instantanément réduit, et, si les photons 1 et 2 ne sont alors pas encore détectés, le système total sera équivalent à celui utilisant les BS classiques puisque les BS quantiques sont alors dans une configuration bien déterminée. Le reste des mesures suit donc les mêmes

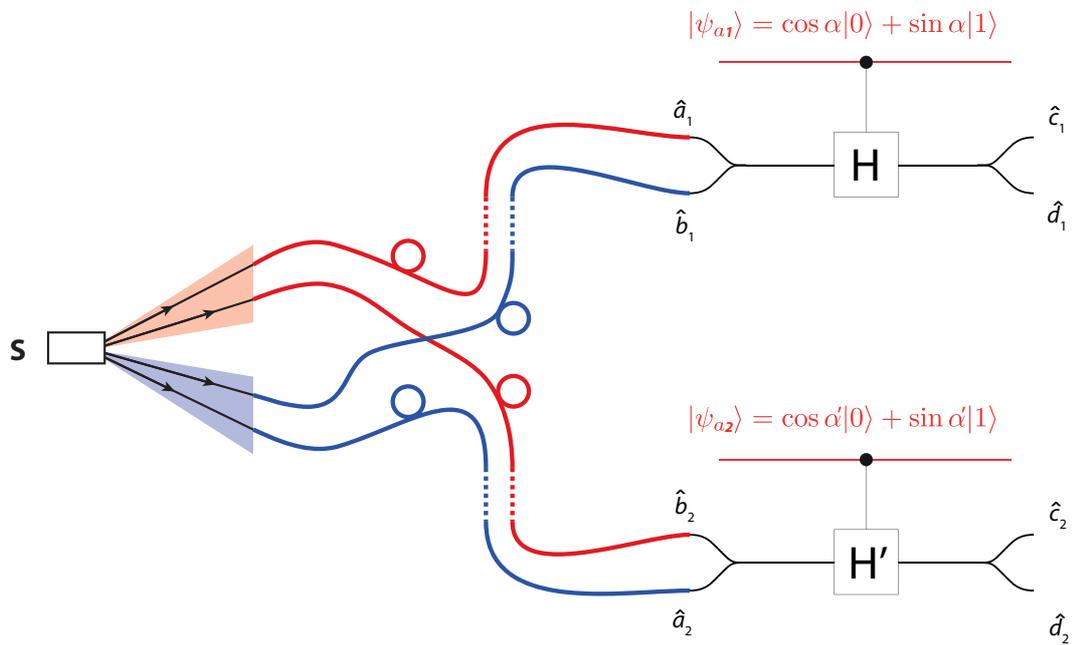


FIGURE 4.15 – Modification du schéma expérimental de la figure 4.12. Schéma symbolique, les carrés inscrits H et H' correspondent à des portes de Hadamard contrôlées par les ancillas dans des états de superposition quantiques. Ce sont ces portes qui correspondent aux BS contrôlables quantiquement.

lois que celles établies dans la partie §4.3.2 et on peut donc s'attendre à vérifier une violation des inégalités de Bell dans ces conditions, si les attentes de la mécanique quantique sont vérifiées expérimentalement.

4.4.3 Conclusion

Un tel résultat réduirait donc la classe des théories réalistes candidates à décrire correctement la nature. Si ces théories sont bien réalistes, au sens qu'un modèle à variable cachée les représente, elles doivent en effet alors :

- soit autoriser une non localité telle que les résultats de mesures vérifiant une séparation de type espace peuvent être connus, c'est à dire qu'il faut pousser la non localité jusqu'à la connaissance des résultats de mesure et pas seulement des configurations expérimentales distantes.
- soit être d'une part déterministe, autoriser d'autre part la connaissance non-locale des éléments physiques cachés associés aux résultats de mesure, mais encore permettre aux particules de "calculer" les résultats de mesure distants.

Conclusion Générale

Nous avons étudié dans ce mémoire les aspects spatiaux de l'intrication au sein d'une lumière générée par un amplificateur paramétrique optique mais aussi dans le cadre de l'effet Hong-Ou-Mandel (HOM). Nous avons vu d'abord d'un point de vue théorique que sous certaines conditions, un amplificateur paramétrique optique permet de fournir une lumière dont l'état est proche de l'état décrit par Einstein, Podolsky et Rosen (EPR). Nous avons montré que les démonstrations réalisées jusqu'alors dans le domaine spatial présentaient des lacunes permettant d'imaginer un modèle à états locaux cachés qui reproduit les résultats expérimentaux. Nous avons ensuite présenté des résultats expérimentaux comblant ces lacunes en détectant le système complet de lumière à la fois en champ proche et en champ lointain.

Les résultats expérimentaux présentés correspondent à la détection d'un paradoxe EPR dans le domaine spatial. Ce paradoxe a été démontré en utilisant des caméras EMCCD comme moyen de détection et la fluorescence paramétrique générée dans un cristal de BBO comme source d'états intriqués. La méthode utilise ces caméras dans un régime de comptage de photons permettant de recueillir des images de photodétection. Deux étapes ont permis d'arriver aux résultats finaux. Dans la première étape, avec une seule caméra, les faisceaux de fluorescence étaient imagés sur le même capteur. L'inter-corrélation des images a permis d'extraire la signature du comportement intriqué des photons. Cette première méthode n'a toutefois pas permis d'assurer la séparation complète des taches de fluorescences, générant non seulement des problèmes fondamentaux, mais aussi des difficultés d'optimisation du système d'imagerie pour les deux faisceaux. Cela a donc entraîné une mauvaise résolution du phénomène observé et un faible degré de paradoxe.

C'est dans le but de corriger ce défaut qu'un deuxième schéma expérimental a été proposé qui utilise des faisceaux bien séparés puis imagés sur deux caméras distinctes. Cette seconde étape nous a permis de mettre à jour une intrication de grande dimen-

sionnalité en démontrant un paradoxe EPR de haut degré. On a pu démontrer que 20 couples images étaient suffisants pour effectuer une telle démonstration, ce qui correspond à un temps d'acquisition d'environ 4 secondes, soit un temps relativement faible pour une telle caractérisation.

Nous avons d'autre part, par le biais de simulations, mis en évidence la possibilité de démontrer un paradoxe EPR à sens unique dans le cadre de cette expérience. Et nous avons enfin proposé un protocole expérimental permettant la reconstitution d'un signal fantôme temporel en utilisant le principe du *ghost imaging*.

Dans un second temps, par des simulations utilisant la méthode des fonctions de Green, nous avons vu qu'il est envisageable d'utiliser la lumière fortement multimode et intriquée de la fluorescence paramétrique pour démontrer, dans un contexte réaliste, une coalescence de l'ensemble des paires de photons, sur toute l'extension spatiale des faisceaux. Ces résultats trouveront leur pendant expérimental dans une future thèse. Enfin, ces simulations ont pu mettre en lumière la non-localité du phénomène HOM et cette non-localité a été mise à profit en établissant une inégalité de Bell dans ce contexte d'interférence HOM. Cette inégalité de Bell prend réellement corps sur la dualité onde-corpuscule, puisque les bases de projections utilisées correspondent à l'observation de l'aspect corpusculaire ou ondulatoire des particules intriquées. L'inégalité de Bell ainsi établie nous a enfin permis d'imaginer un protocole expérimental de test pour lequel le choix de la base de mesure sera effectué via un contrôle quantique.

Publications

Realization of the purely spatial Einstein-Podolsky-Rosen paradox in full-field images of spontaneous parametric down-conversion

Paul-Antoine Moreau, Jo e Mougin-Sisini, Fabrice Devaux, and Eric Lantz

*Institut FEMTO-ST, Département d'Optique PM Duffieux and UMR CNRS-Université de Franche-Comté 6174,
Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France*

(Received 5 April 2012; published 3 July 2012)

We demonstrate Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) entanglement by detecting purely spatial quantum correlations in the near and far fields of spontaneous parametric down-conversion generated in a type-2 beta barium borate crystal. Full-field imaging is performed in the photon-counting regime with an electron-multiplying CCD camera. The data are used without any postselection, and we obtain a violation of Heisenberg inequalities with inferred quantities taking into account all the biphoton pairs in both the near and far fields by integration on the entire two-dimensional transverse planes. This ensures a rigorous demonstration of the EPR paradox in its original position-momentum form.

DOI: [10.1103/PhysRevA.86.010101](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.010101)

PACS number(s): 03.65.Ud, 42.50.Ar, 42.50.Dv, 42.50.Lc

I. INTRODUCTION

In 1935, Einstein, Podolsky, and Rosen (EPR) proposed a *Gedankenexperiment* [1] involving two spatially separated but entangled particles. They showed that quantum mechanics predicts that these particles could have both perfectly correlated positions and momenta, in contradiction to the so-called *local realism* where two distant particles should be treated as two different systems. Though the original intention of EPR was to show that quantum mechanics is not complete, the standard present view is that entangled particles do experience nonlocal correlations [2,3].

Recently, the realization and detection of entangled EPR states aroused much interest of the scientific community following a testable formulation of the EPR paradox introduced by Reid [4], involving correlations of quadratures of twin beams. A recent review on the subject has been given in Ref. [5]. Furthermore, position and momentum entanglement of beams have been demonstrated at the EPR level by combining squeezed light from two spatial modes, with measurements by homodyne detection in the temporal domain [6,7].

Spontaneous parametric down-conversion (SPDC) provides independent pairs of entangled photons that makes the system very close to that considered in the original EPR paper: the positions of photons 1 and 2 are detected in the near field, and their momenta correspond to the far field. Howell *et al.* [8] have measured in both planes the probability distribution of the position of photon 2, conditioned by the detection of photon 1. The product of the conditional variances was found to be 25 times smaller than the limit for the product of variances for a single photon given by Heisenberg's uncertainty relation. This impressive result was obtained by measuring temporal coincidences between cross-polarized photons in type-2 SPDC. These photons were separated by a polarizing beam splitter: for a fixed position of a narrow slit transmitting photon 1 to an avalanche photodiode, the level of coincidences was measured for each position of a similar slit transmitting photon 2 to a separate similar detector. Hence, in the words of Reid *et al.* [5], "detection events are only considered if two emitted photons are simultaneously detected." In this sense, they did not prospect the full EPR characteristic of SPDC but a monodimensional and point EPR paradox using

postselected data. The same comment could be made on the recent realization by Leach *et al.* [9], where point detection was used in one of the transverse dimensions of the field.

We present here a full spatial demonstration of EPR steering by imaging highly spatially multimode type-2 SPDC with an electron-multiplying CCD (EMCCD) camera. This ensures taking into account each detection event that occurs in a relatively long exposure time compared to the laser pulse duration and, more importantly, compared to the coincidence time detection used in the experiments that use correlation data detection. Hence, even if there are losses and false-positive and -negative events, these spurious events are random, which is fundamentally different from considering *a priori* that pairs are correlated and detecting only in the temporal and spatial gate where the twin photon arrives. Second, Heisenberg inequalities concern a sole system, hence it is meaningless to test these inequalities if the near field and the far field do not correspond to this unique system. By treating full-field bidimensional images of photodetection and measuring variances in two orthogonal directions, we assure a perfect correspondence between the subsystems involved in the near field and in the far field [5], in contrast to point or one-dimensional (1D) detection. Moreover we demonstrate not only an EPR paradox in two spatial transverse dimensions but also one using an isotropic criterion involving the whole system. Note that the use of type-2 phase matching allows us to spatially separate the idler and signal photons to be close to the real conditions of an EPR test of local realism. Detection is performed with an EMCCD camera. The ability of EMCCD cameras to reach the photon-counting regime with a very high quantum efficiency [10,11] makes them useful in quantum optics, and they have already been used by our group to characterize quantum correlations in the far field of type-1 [12,13] and type-2 [14] SPDC. Note that previous work has been done by other groups to detect the quantum correlation in the far field [15,16] using intensified CCD (ICCD) cameras that have a lower quantum efficiency.

II. THEORY

SPDC induced by a wide monomode Gaussian pump is a strongly multimode beam: the extension of the

down-converted beam in the near field (image plane) is identical to that of the pump in the limit of low gain and for a sufficiently wide and thin crystal, while the far-field (Fourier plane) extension is limited by phase matching. The etendue of the beam, i.e., the product of its transverse surface by the solid angle it subtends or the number of transverse modes in appropriate units, corresponds to the two-photon Schmidt number [17].

The spatial extension of a mode in either the near or the far field is proportional to the inverse of the full beam extension in the other plane. For single-photon imaging, the laws of diffraction are equivalent to Heisenberg's uncertainty relation: a photon that can be localized in one mode of the near field, for example, by traversing an aperture of the size corresponding to the mode, will be detected at a random position in the entire far-field diffraction pattern. However, the laws of quantum mechanics state that a pair of signal-idler photons will be detected either in the same mode in the near field or in opposite modes in the far field if no detection occurs in the other plane. Because the detection plane can be chosen at a time when causal interaction between photons is no longer possible, these correlations are not compatible with local realism, as demonstrated first in the EPR paper [1], though compatible with Heisenberg's uncertainty relation since correlations cannot be measured in both planes for the same photon pair.

We can describe the SPDC behavior as follows: for the detection of photon 1 at \mathbf{r}_1 , the probability density of detection of photon 2 at \mathbf{r}_2 can be written as

$$p(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1) = p(\mathbf{r}_2) + f(\Delta\mathbf{r}), \quad (1)$$

where $p(\mathbf{r}_2)$ is the probability density of detecting a photon of another pair (accidental coincidences) and $f(\Delta\mathbf{r})$ is the probability density of detecting the twin photon, with $\Delta\mathbf{r} = \|\mathbf{r}_2 \pm \mathbf{r}_1\|$, plus sign indicating the far field (correlation of momenta on opposite modes) and the minus sign the near field. Translational invariance, circular symmetry, and independence of the pairs (pure SPDC without further amplification) are assumed. Hence, if N_1 is the number of photons 1 detected on a surface S_1 and N_2 is the corresponding quantity for photons 2, we have

$$\begin{aligned} \langle N_1 N_2 \rangle &= \int_{S_1} d^2\mathbf{r}_1 \int_{S_2} d^2\mathbf{r}_2 p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &= \int_{S_1} d^2\mathbf{r}_1 \int_{S_2} d^2\mathbf{r}_2 \{p(\mathbf{r}_1)p(\mathbf{r}_2) + p(\mathbf{r}_1)f(\Delta\mathbf{r})\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Therefore, the probability of detection on S_2 of photon 2, the twin of photon 1 detected on S_1 , is simply given by

$$F(S_2) = \int_{S_2} d^2\mathbf{r}_2 f(\Delta\mathbf{r}) = \frac{\langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle}. \quad (3)$$

If S_1 and S_2 are the same size, this expression can be symmetrized and becomes the normalized intercorrelation function:

$$F(S_2) = F(S_1) = \frac{\langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle}{\frac{1}{2}(\langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle)}. \quad (4)$$

The mean in this equation can be estimated by spatial averages on the different pixels of the image for a fixed $\Delta\mathbf{r}$, given

by the intercorrelation of two ‘‘regions of interest’’ (ROIs) of an image, each one corresponding to one polarization of the SPDC. We will therefore obtain a nonlocal estimation involving all the light. Note that deterministic spatial variations of the mean intensity do not preclude the validity of these spatial averages, inasmuch as the width of the intercorrelation function is smaller than the scale of this deterministic variation. Indeed, the covariance signal-idler for a region formed by independent area is the sum of the covariances of each area, just as the mean for the region is the sum of the means for each area. Hence, if the ratio between the covariance and the mean intensity does not depend of this mean, it will be retrieved by spatial averaging even if the mean varies spatially. Because of the weak signal-to-noise ratio, we proceed to an additional statistical average on different images taken at different times for the same system configuration.

For independent pairs, the quantity in Eq. (4) can be expressed as a function of the variance of the difference between N_1 and N_2 :

$$\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2 \Rightarrow F(S_2) = 1 - \frac{\langle (N_1 - N_2)^2 \rangle}{\langle N_1 + N_2 \rangle}. \quad (5)$$

The physical quantities used to test the EPR violation of Heisenberg inequalities are the spatial variances in each dimension Δ^2x and Δ^2y . To define a unique global criterion, we use the mean value of the two variances (i.e., half of the mean of the squared distance):

$$\Delta^2r, p = \frac{\Delta^2x, p_x + \Delta^2y, p_y}{2}. \quad (6)$$

Thus, by introducing the Heisenberg inequalities in the product of near-field and far-field variances, one gets

$$\Delta^2r \Delta^2p = \frac{1}{4}(\Delta^2x + \Delta^2y)(\Delta^2p_x + \Delta^2p_y) \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (7)$$

We have used the fact that $\Delta^2x \Delta^2p_y + \Delta^2y \Delta^2p_x \geq 2\frac{\hbar^2}{4}$. Note that this two-dimensional (2D) diffraction limit will only be reached by isotropic 2D Gaussians.

III. EXPERIMENT

The experimental setup is represented in Fig. 1. The pump pulse at 355 nm provided by a passively-Q-switched Nd:YAG laser (mean power of 27 mW, pulse duration of 300 ps, and repetition rate of 1 kHz) illuminates a 1-mm-long type-2 beta barium borate (BBO) nonlinear crystal. The far-field image of the SPDC is formed on the EMCCD in the focal plane of a 37-mm focal aspheric lens [Fig. 1(a)]. In the near-field configuration [Fig. 1(b)] the signal and idler photons are separated by a Wollaston prism of 1.5° of angular separation positioned around the Fourier plane. The plane in the middle of the BBO crystal is imaged on the EMCCD plane by a second identical aspheric lens in order to minimize the walk-off effects [18]. The transversal magnification has been checked: $\gamma = 1.003 \pm 0.005$. The back-illuminated EMCCD camera from Andor Technology (model iXon+ DU897-ECS-BV) has a quantum efficiency greater than 90% in the visible range. The detector area is formed by 512×512 pixels, with a

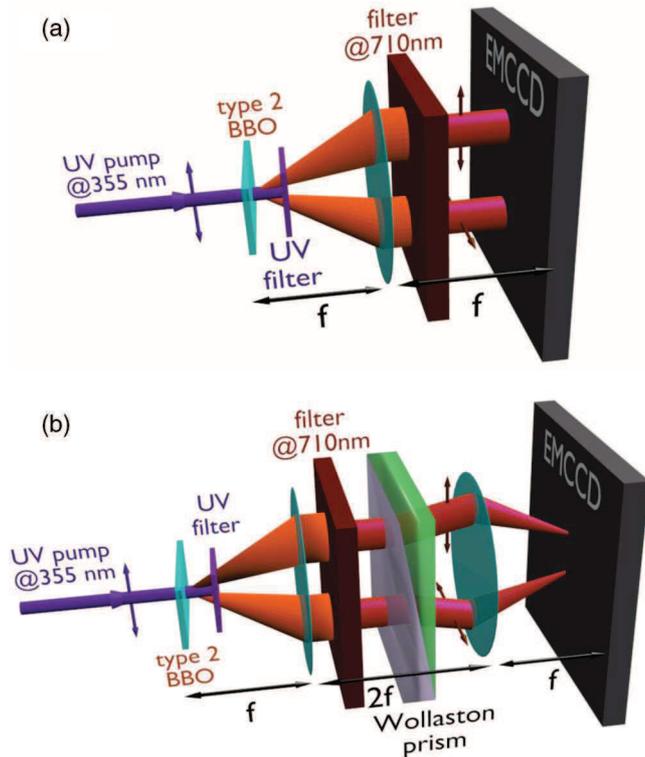


FIG. 1. (Color online) Experimental setups. (a) Far field. (b) Near field. Short arrows through light beams give the polarization directions.

pixel size of $s_{\text{pix}} = 16 \times 16 \mu\text{m}^2$ (i.e., $0.46 \times 0.46 \text{ mrad}^2$ in the far field after division by the focal length). We used a readout rate of 10 MHz at 14 bits, and the camera was cooled to -85°C . Measurements were performed for a crystal orientation corresponding to noncritical phase matching at degeneracy, i.e., collinear orientation of the signal and idler Poynting vectors in the crystal [19]. Photon pairs emitted around the degeneracy are selected by means of a narrow-band interferential filter centered at 710 nm ($\Delta\lambda = 4 \text{ nm}$). As in Refs. [13,14], the photon-counting regime is ensured by adjusting the exposure time in such a way that the mean fluence of SPDC was between 0.1 and 0.2 photon per pixel in order to minimize the false detections [10]. Moreover, the use of pump pulses with 300-ps duration (much longer than the coherence time of SPDC) and an exposure time of the EMCCD of 10 ms (i.e., 10 laser shots) allow the excess noise to be limited by increasing the number of temporal modes [20]: the mean number of photons for one spatiotemporal mode is less than 10^{-3} , in good agreement with the hypothesis of pure spontaneous parametric down-conversion, without any stimulated amplification.

A. Near field

We show in Fig. 2(a) the sum of the 10 000 near-field images. The two SPDC patterns are clearly visible, with inhomogeneities and hot spots due to defaults on the crystal. The ROIs corresponding to either the signal or the idler, large enough to encompass all the light for each polarization, have a common area. As a consequence, the intercorrelation function exhibits

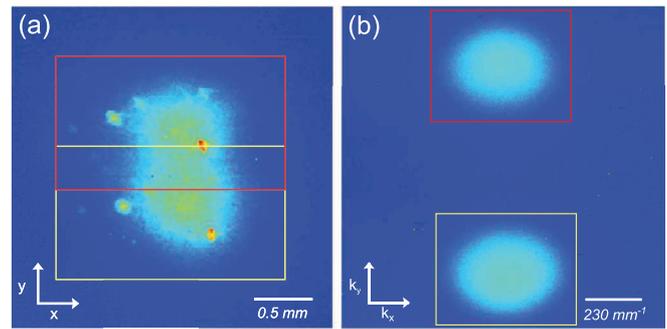


FIG. 2. (Color online) Intensity distributions. (a) Near field. (b) Far field. In both plots rectangles denote the ROIs used for calculation.

a strong autocorrelation peak, as can be seen in Fig. 3, but the intercorrelation peak due to quantum correlations and the autocorrelation peak are clearly distinguishable. We use a Fourier algorithm without any zero padding to compute the intercorrelation, which is equivalent to a periodization of the images.

Figure 4 presents the near-field intercorrelation peak obtained from ROIs taken in the same image and a witness intercorrelation obtained from ROIs taken in two successive images. The absence of any non-negligible intercorrelation value in the second image shows that the inhomogeneities in the crystal do not create any deterministic intercorrelation pattern. The first image exhibits a weak intercorrelation vertical line (more visible in Fig. 3 because of the log scale), which is due to the spreading of the autocorrelation peak induced by smearing in the gain register of the EMCCD camera. The existence of such an artifact again shows the importance of sufficiently separating the signal and idler photons on the camera to avoid any superposition of the autocorrelation and intercorrelation peaks. By fitting the intercorrelation peak with a two-dimensional Gaussian function, we estimate the inferred near-field standard deviations in pixels:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1.53 \pm 0.07, & \Delta y &= 2.2 \pm 0.1, \\ \Delta r &= 1.89 \pm 0.09. \end{aligned} \quad (8)$$

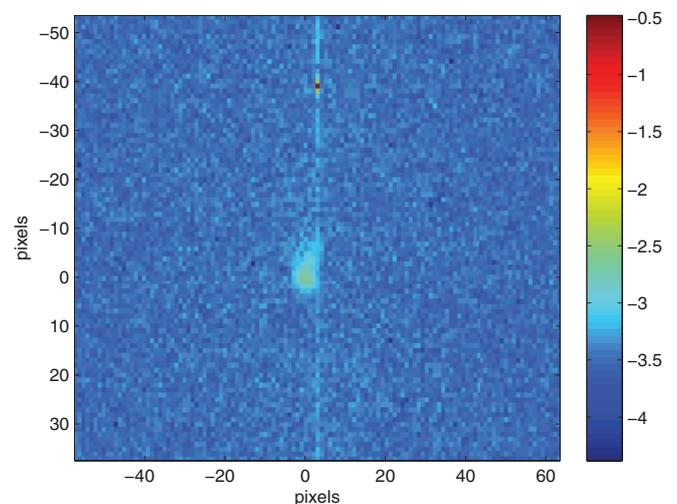


FIG. 3. (Color online) Near-field complete intercorrelation in log scale.

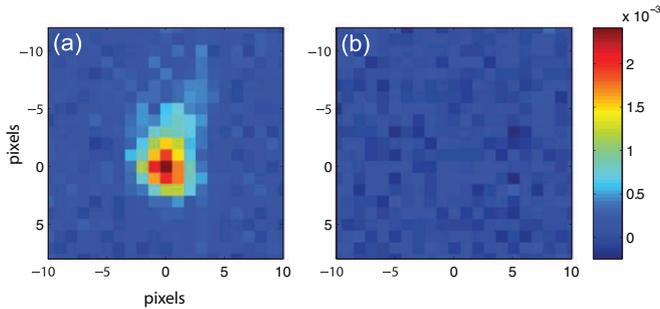


FIG. 4. (Color online) (a) Near-field intercorrelation function. (b) Corresponding witness intercorrelation.

By integrating the fitted curve, we also obtain the total quantum correlation coefficient in the near field, $R_n = 5 \times 10^{-2}$. This coefficient corresponds to the intercorrelation of pixels much larger than the coherence area [14].

B. Far field

Figure 2(b) shows the sum of 10 000 images in the far-field configuration. The intercorrelation function obtained in the far field is presented in Fig. 5. Note that the anisotropy of the peak is mainly due to the anisotropy of the shape of the pump. However, as predicted by simulations, an enlargement exists due to the imperfect degeneracy of the photons wavelength. This enlargement is itself anisotropic and, as predicted by the theory, is greater in the walk-off direction which separates the two fluorescence spots in the far field (vertical direction on each image presented here). The experimental results are in agreement with this phenomenon since the enlargement of the intercorrelation peak is greater in the vertical dimension than in the horizontal one [14]. We finally find the inferred standard deviations in far-field pixel units:

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= 2.35 \pm 0.08, & \Delta p_y &= 1.85 \pm 0.07, \\ \Delta p &= 2.11 \pm 0.07. \end{aligned} \quad (9)$$

The total quantum correlation coefficient in the far field is $R_p = 4.4 \times 10^{-2}$. In agreement with Eq. (5), we have experimentally shown in Ref. [14] that $(1 - R_p)$ is equal to the variance of the difference between areas greater than the coherence cell, expressed in shot-noise units.

IV. EPR VIOLATION OF THE HEISENBERG INEQUALITIES

We are now able to test the violation of the Heisenberg inequalities by using the inferred quantities we have measured.

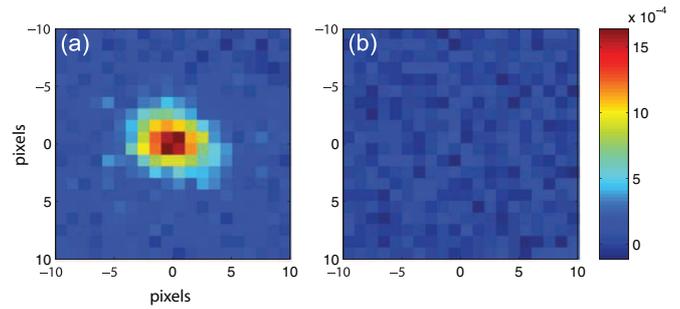


FIG. 5. (Color online) (a) Far-field intercorrelation function. (b) Corresponding witness intercorrelation.

In the horizontal direction, we have

$$\begin{aligned} \Delta^2 x \Delta^2 p_x &= \left(1.53 \times 2.35 \frac{2\pi s_{\text{pix}} \hbar}{f\lambda} \right)^2 \\ &= (0.048 \pm 0.008) \hbar^2 < \frac{\hbar^2}{4}, \end{aligned} \quad (10)$$

giving a violation factor of 5.2 ± 0.8 .

In the vertical direction, we find

$$\Delta^2 y \Delta^2 p_y = (0.06 \pm 0.01) \hbar^2 < \frac{\hbar^2}{4}, \quad (11)$$

giving a violation factor of 4 ± 1 . Finally, by using the complete statistic of the fluorescence, from Eqs. (6) and (7) we obtain

$$\Delta^2 r \Delta^2 p = (0.06 \pm 0.01) \hbar^2 < \frac{\hbar^2}{4}, \quad (12)$$

which gives a violation factor of 4 ± 1 .

V. CONCLUSION

We have demonstrated a purely spatial EPR paradox by using a full-field and direct detection method. The violation of the Heisenberg inequalities for the inferred quantities has been demonstrated for the whole system involving the two spatial transverse dimensions. By recording all the photon pairs generated by spontaneous parametric down-conversion in the near field and the far field of the same system, we make fewer supplementary assumptions than previous papers that involve postselection or homodyne detection. Hence, this demonstration of one of the most fascinating phenomena of quantum mechanics is made in the form closest to its original formulation.

ACKNOWLEDGMENTS

Some of the computations have been performed on the supercomputer facilities of the Mésocentre de calcul de Franche-Comté.

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
 [2] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
 [3] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).

- [4] M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **40**, 913 (1989).
 [5] M. D. Reid, P. D. Drummond, W. P. Bowen, E. G. Cavalcanti, P. K. Lam, H. A. Bachor, U. L. Andersen, and G. Leuchs, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1727 (2009).

- [6] K. Wagner, J. Janousek, V. Delaubert, H. Zou, C. Harb, N. Treps, J. F. Morizur, P. K. Lam, and H. A. Bachor, *Science* **321**, 541 (2008).
- [7] V. Boyer, A. M. Marino, R. C. Pooser, and P. D. Lett, *Science* **321**, 544 (2008).
- [8] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley, and R. W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 210403 (2004).
- [9] J. Leach, R. E. Warburton, D. G. Ireland, F. Izdebski, S. M. Barnett, A. M. Yao, G. S. Buller, and M. J. Padgett, *Phys. Rev. A* **85**, 013827 (2012).
- [10] E. Lantz, J.-L. Blanchet, L. Furfaro, and F. Devaux, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **386**, 2262 (2008).
- [11] O. Jedrkiewicz, J.-L. Blanchet, E. Lantz, and P. D. Trapani, *Opt. Commun.* **285**, 218 (2012).
- [12] J.-L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, and E. Lantz, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 233604 (2008).
- [13] J.-L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, and E. Lantz, *Phys. Rev. A* **81**, 043825 (2010).
- [14] F. Devaux, J. Mougins-Sisini, P.-A. Moreau, and E. Lantz (to appear in EPJD).
- [15] B. Jost, A. Sergienko, A. Abouraddy, B. Saleh, and M. Teich, *Opt. Express* **3**, 81 (1998).
- [16] S. S. R. Oemrawsingh, W. J. van Drunen, E. R. Eliel, and J. P. Woerdman, *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 2391 (2002).
- [17] M. P. van Exter, A. Aiello, S. S. R. Oemrawsingh, G. Nienhuis, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **74**, 012309 (2006).
- [18] E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **69**, 023802 (2004).
- [19] E. Lantz and F. Devaux, *J. Opt. A* **2**, 362 (2000).
- [20] E. Brambilla, L. Caspani, O. Jedrkiewicz, L. A. Lugiato, and A. Gatti, *Phys. Rev. A* **77**, 053807 (2008).

Towards the evidence of a purely spatial Einstein-Podolsky-Rosen paradox in images: measurement scheme and first experimental results

F. Devaux, J. Mougin-Sisini, P.A. Moreau, and E. Lantz^a

Département d'Optique P.M. Duffieux, Institut FEMTO-ST, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France

Received 30 November 2011 / Received in final form 9 March 2012

Published online 20 July 2012 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2012

Abstract. We propose a scheme to evidence the Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) paradox for photons produced by spontaneous down conversion, from measurement of purely spatial correlations of photon positions both in the near- and in the far-field. Experimentally, quantum correlations have been measured in the far-field of parametric fluorescence created in a type II BBO crystal. Imaging is performed in the photon counting regime with an electron-multiplying CCD (EMCCD) camera.

1 Introduction

Spontaneous parametric down conversion (SPDC) of a wide monomode gaussian pump results in a strongly multimode beam: the extension of the down converted beam in the near-field (image plane) is identical to that of the pump, in the limit of low gain and for a sufficiently wide crystal, while the far-field (Fourier plane) extension is limited by phase-matching. The etendue of the beam, i.e. the product of its transverse surface by the solid angle it subtends or the number of transverse modes in appropriate units (resolution cells in Ref. [1]), has been recognized [2,3] as corresponding to the two-photon Schmidt number. Note that the spatial extension of a mode in either the near- or the far-field is proportional to the inverse of the full beam extension in the other plane. For single photon imaging, the laws of diffraction are equivalent to the Heisenberg's uncertainty relation: a photon that can be localized in one mode of the near-field, for example by traversing an aperture of the size corresponding to the mode, will be detected at a random position in the entire far-field diffraction pattern. However, the laws of quantum mechanics state that a pair of signal-idler photons will be detected either in the same mode in the near-field or in opposite modes in the far-field, if no detection occurs in the other plane. Because the detection plane can be chosen at a time where causal interaction between photons is no more possible, these correlations are not compatible with local realism, as demonstrated first in the famous EPR paper [4], though compatible with the Heisenberg's uncertainty relation since correlations cannot be measured in both planes for the same photon pair.

For a sufficiently low SPDC rate, it can be assumed that a pair does not interact with another, which makes the system very close of that considered in the original EPR paper: the positions of photons 1 and 2 are detected in the near-field and their momenta correspond to the far-field. Howell et al. [5] have measured in both planes the probability distribution of the position of photon 2, conditioned by the detection of photon 1. The product of the conditional variances is 25 times smaller than the limit for the product of variances for a single photon given by the Heisenberg's uncertainty relation. This impressive result has been obtained by measuring temporal coincidences between cross-polarized photons in type 2 SPDC. These photons were separated by a polarizing beam-splitter: for a fixed position of a narrow slit transmitting the photon 1 to an avalanche photodiode, the level of coincidences was measured for each position of a similar slit transmitting the photon 1 to a separate similar detector.

Three directions can be considered in order to add to the results of reference [5]. First, for a detection in this experiment of a photon 1, the photon 2 is not detected but at a precise position, resulting in a vast majority of single detections without coincidences. In the words of Reid et al. [6] about the Aspect et al. [7] experiments: "however, it is debatable whether this can be regarded as a rigorous EPR experiment because for the full ensemble, most counts at one detector correspond to no detection at the other". The situation is comparable in the Howell et al. experiment, though with other conjugate variables (position-momentum instead of polarizations). Note that the light in several transverse modes has been simultaneously recorded in a recent experiment [8].

Second, the asymmetry between photons 1 and 2 could be relaxed [6], even if this asymmetry is present in the

^a e-mail: elantz@univ-fcomte.fr

original EPR paper. Third, the assumption of a pure biphoton state [9] does not correspond to a general model of parametric amplification of quantum noise: beyond the limit of a very low gain, stimulated pairs remain perfectly correlated [10]. We propose in this paper a purely spatial detection scheme that has some advantages as regards the two first points, while assuming strictly spontaneous conversion without further amplification like in reference [5]. The discussion of this third point is left for the conclusion section.

In recent papers, we have experimentally demonstrated, using an EMCCD camera in the photon-counting regime, that far-field opposite spatial fluctuations of type 1 SPDC are correlated in the quantum regime, with a variance of the photon number difference between opposite areas below the shot-noise level. This conclusion holds close to degeneracy for opposite pixels [11], as well as for broad-band SPDC for opposite angular sectors [12]. To demonstrate EPR correlations, we must also show quantum correlations of signal-idler spatial fluctuations in the near-field. Since an EMCCD cannot distinguish a pair from a single photon, a type 2 interaction in a BBO crystal is used, where the signal and idler photons can be separated because of their orthogonal polarizations. Hence, our experimental set-up is similar to that of Howell et al. until the polarization beam splitter, with a completely different detection scheme: images are formed by all detected photons for each polarization, without any temporal resolution, as in experiments of Jedrkiewicz et al. [13] and Brida et al. [14] but in the photon-counting regime.

The paper is organized as follows. We propose in Section 2 a measurement procedure to evidence purely spatial EPR correlations. Section 3 is devoted to experimental results, in the far-field because presently the results in the near-field are not still convincing. We quantify in Section 4 the degree of apparent violation of the Heisenberg uncertainties that could be reached. Last, we discuss in the conclusion ways of improvement and extension to the stimulated regime.

2 Purely spatial EPR correlations

2.1 Spatial measurements of EPR correlations

For a detection of a photon 1 at \vec{r}_1 , the probability density of detection of a photon 2 at \vec{r}_2 can be written as:

$$p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) = p(\vec{r}_2) + f(\Delta r) \quad (1)$$

where $p(\vec{r}_2)$ is the probability density of detection of a photon of another pair (accidental coincidences) and $f(\Delta r)$ is the probability density of detection of the twin photon, with $\Delta r = \|\vec{r}_2 \pm \vec{r}_1\|$, + holding for the far-field (correlation of momenta on opposite modes) and – for the near-field. It is assumed translational invariance (this hypothesis will be further discussed in the next subsection), circular symmetry and independence of the pairs (pure SPDC without further amplification). Hence, if N_1 is the

number of photons 1 detected on a surface S_1 and N_2 the corresponding quantity for photons 2, we have:

$$\begin{aligned} \langle N_1 N_2 \rangle &= \int_{S_1} dr_1^2 \int_{S_2} dr_2^2 p(\vec{r}_1 \text{ and } \vec{r}_2) \\ &= \int_{S_1} dr_1^2 \int_{S_2} dr_2^2 \{p(\vec{r}_1)p(\vec{r}_2) + p(\vec{r}_1)f(\Delta r)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Therefore, the probability of detection in S_2 of the twin photon 2 of the photon 1 detected on S_1 is simply given by:

$$F(S_2) = \int_{S_2} dr_2^2 f(\Delta r) = \frac{\langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle}. \quad (3)$$

If S_1 and S_2 have the same size, this expression can be symmetrized and becomes the normalized intercorrelation function:

$$F(S_2) = F(S_1) = \frac{\langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle}{(\langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle)/2}. \quad (4)$$

For independent pairs, this quantity can also be expressed as a function of the variance of the difference between N_1 and N_2 :

$$\begin{aligned} \langle N_1 \rangle &= \langle N_2 \rangle = \langle (N_1)^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2 \Rightarrow \\ F(S_2) &= 1 - \frac{\langle (N_1 - N_2)^2 \rangle}{\langle (N_1 + N_2) \rangle}. \end{aligned} \quad (5)$$

Because of the translational invariance, the means in equations (4) and (5) can be estimated by spatial averages on the different pixels in one image.

To summarize, we have linked the intercorrelation function with the conditional probabilities of detecting the twin SPDC photons. The width of the experimental intercorrelation will then be used to demonstrate an EPR violation of the Heisenberg inequalities. More details on the violation we expect to obtain are given in Section 4.

3 Measurements of far-field spatial quantum correlations

The experimental setup is sketched in Figure 1a. The pump pulse at 355 nm provided by a passively Q-switch Nd:YAG laser (mean power: 27 mW, pulse duration: 300 ps, repetition rate: 1 kHz), illuminates a 1 mm long type 2 BBO nonlinear crystal. The far-field image of the parametric fluorescence is formed in the focal plane of a lens by a back-illuminated EMCCD camera from Andor Technology (Model iXon + DU897-ECS-BV) with a quantum efficiency greater than 90% in the visible range. The detector area is formed by 512×512 pixels, with a pixel size of $16 \times 16 \mu\text{m}^2$, or $0.46 \times 0.46 \text{ mrad}^2$ after division by the focal length. We used a readout rate of 10 MHz at 14 bits and the camera was cooled to $-85 \text{ }^\circ\text{C}$. Measurements at degeneracy were performed for a crystal orientation corresponding to non critical phase matching by using a narrow-band interferential filter centered at 710 nm

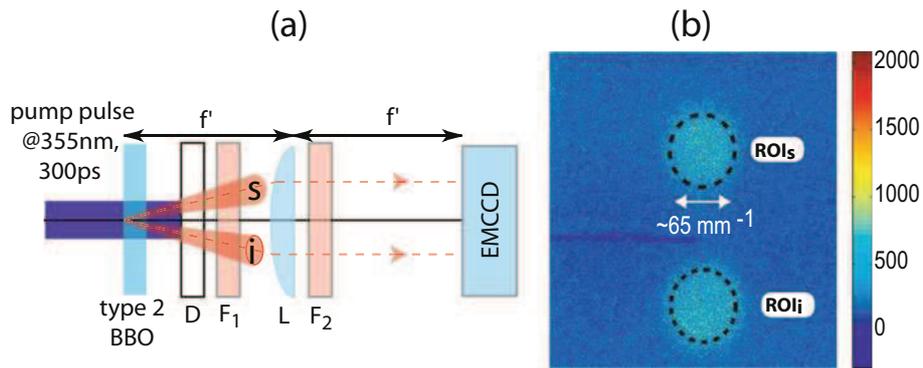


Fig. 1. (Color online) (a) Far field experimental set-up. D: dichroic mirror, L: lens with focal length $f' = 35$ mm, F_1 : broad-band red filter, F_2 : narrow-band interferential filter. (b) Sum of 50 far-field images of SPDC. The dotted circles denote signal and idler regions of interest (ROI) where statistics are performed.

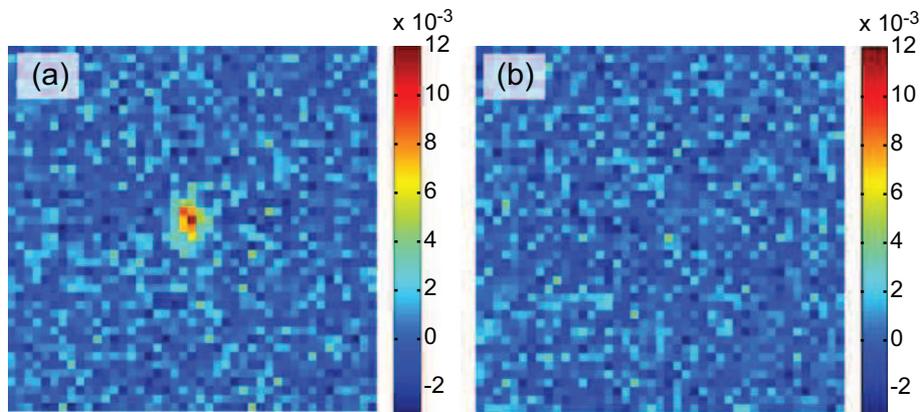


Fig. 2. (Color online) (a) Average intercorrelation between signal and idler patterns. (b) Average intercorrelation between signal and idler patterns that come from different images.

($\Delta\lambda = 4$ nm). Photon counting regime was ensured by adjusting the exposure time such that the mean fluence of SPDC was between 0.1 and 0.2 photon per pixel [15].

With a pump beam diameter ~ 2 mm, the coherence area in the far-field is smaller than the area of a pixel. Moreover, the use of pump pulses with 300 ps duration (much longer than the coherence time of SPDC) and an exposure time of the EMCCD of 5 ms (i.e. 5 laser shots) allow the excess noise to be limited by increasing the number of temporal modes [16]: the mean number of photons for one spatiotemporal mode is less than 10^{-3} , in good agreement with the hypothesis of pure spontaneous down conversion, without any stimulated amplification. Figure 1b shows a sum of 50 images recorded with the EMCCD in the SPDC far-field. A type 2 far-field pattern is observed and the phase matching angular range (~ 65 mm $^{-1}$ FWHM) corresponds to 100 pixels. Figure 2a shows the average of the intercorrelation between the signal and idler patterns (equivalent to Eq. (4)), where the surfaces S_1 and S_2 correspond to the physical pixels of the EMCCD. We have verified that no correlation exists between the signal and idler patterns for different images (Fig. 2b). The total correlation can be estimated either by summing the correlation values between several phys-

ical pixels around those corresponding to the peak or by binning (grouping) the pixels before the calculation of the intercorrelation coefficients. A third solution consists in calculating the variance of the difference of the binned pixels (Eq. (5)). Figure 3 shows a comparison between these three methods. In all methods, a correction has been applied to take into account the small probability of multiple photons impinging on the same pixel: see below. The agreement is good and the total intercorrelation coefficient of 0.1 is significant: all single detected photons contribute to a deterioration of this coefficient, in contrast with experiments where only coincidences are considered. These single photons are due either to loss of the twin photon or to false positives caused by Clock Induced Noise [15]. We have also verified that the variance of the difference between opposite pixels is smaller than the shot noise level, as in our preceding papers in type 1 and in references [13] and [14] for type 2 in the high flux regime. Statistics are performed, for each individual image, on binned pixels inside the regions of interest (ROI) by measuring the difference between individual pixels in ROI_s and the symmetric pixels in ROI_i (Fig. 1b). The variance of the difference can be expressed in shot noise units as: $r = c \frac{\sigma_{s-i}^2}{(m_s + m_i)} \cdot \sigma_{s-i}^2$ is the variance of the difference between symmetric pixels

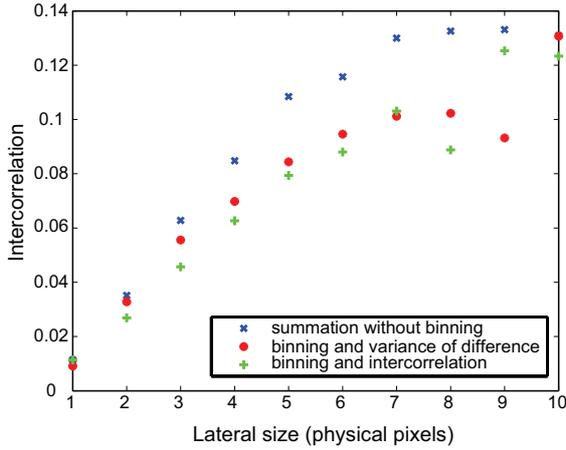


Fig. 3. (Color online) Intercorrelation with respect to the pixel size (square pixels).

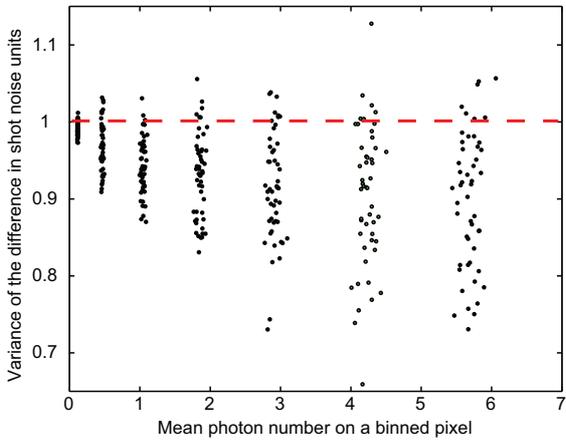


Fig. 4. (Color online) Far-field variance of difference for individual images with respect to the mean number of photons in binned pixels, for binnings from 1×1 to 7×7 .

of ROI_s and ROI_i , and $m_{s,i}$ is the mean, calculated respectively in ROI_s and ROI_i . The correction coefficient $c = 1/(1 - n_{\text{moy}})$, where n_{moy} is the measured mean on a physical pixel without binning, takes into account the fact that two photons or more can be detected on the same physical pixel [11]. After this correction, the experimental spatial fluctuations on one signal or idler image obey a Poisson statistics: $c \frac{\sigma_s^2}{m_s}$ and $c \frac{\sigma_i^2}{m_i}$ are close to 1. It can be easily shown that the same correction must be applied to the correlation coefficient (Eq. (4)).

r is calculated for each image and for different binnings. Figure 4 shows the values of r measured on 50 images: most of the measurements for individual images are below the shot noise level and the average of r lies clearly in the quantum regime. For example, for a 5×5 binning, $\langle r \rangle = 0.916 \pm 0.020$, at 95% of confidence. Note that r decreases and spreads out when increasing binning. The second feature comes from the smaller number of available pixels for the statistics.

Our experimental results in the near-field are not still convincing and are therefore not reported here. The most

evident supplementary difficulty is the adding of a polarizer beam-splitter that induces losses and distortions. Note that these distortions must be eliminated over all the image field, unlike in the experiment of Howell et al. where only a small part of the image plane is used [5]. Moreover, it has been shown [17] that the walk-off should be taken into account and depends on the crystal thickness. We plan to use a thinner crystal and to correct some geometrical aberrations in order to obtain convincing results in the near-field, that would allow the demonstration of a purely spatial EPR effect.

4 Expected widths of EPR correlations

In an ideal experiment, F tends to 1 if S_1 (and S_2) is greater than the coherence cell, in agreement with results of reference [10]. We determine in this section the expected size of this coherence cell, in the far-field as well as in the near-field, and deduce the degree of violation of the Heisenberg criterion that can be attained by using conditional means. We compare also the experimental results in the far-field with this expected size.

4.1 Far-field

We first consider an experiment where an ideal narrow band interferential filter ensures a perfect frequency degeneracy: $\nu_s = \nu_i = \nu_p/2$, where ν is the frequency of respectively the signal (ν_s), the idler (ν_i) and the pump (ν_p). The biphoton function reads in the far-field [18]:

$$\tilde{\psi}(q_s, q_i) = \chi \tilde{E}_p(q_s + q_i) \tilde{\zeta}(q_s, q_i) \quad (6)$$

where χ is the coefficient of nonlinear interaction, q_s and q_i are the transverse spatial frequencies for the signal and the idler respectively, \tilde{E}_p is the pump field in the far-field and $\tilde{\zeta}$ is the phase matching function. Equation (6) states that the conditional probability function in the far-field is proportional to the pump amplitude in this plane, and therefore has the same width inasmuch as this width is much smaller than the width of the phase matching function. This condition is fully fulfilled in our experimental conditions: the phase matching function width is around 65 mm^{-1} (see Fig. 1b), while the width of the pump field in the Fourier plane is around 0.5 mm^{-1} (see below), i.e. of the order of one pixel.

The situation is more complex if we take into account the non negligible width of the chromatic filter. Equation (6) is still valid but the coordinates $f' \sin \theta$ in the far-field detection plane are no more proportional to the transverse spatial frequencies. We have now $\sin \theta_s = \frac{q_s c / \nu_s}{2\pi}$, $\sin \theta_i = \frac{q_i c / \nu_i}{2\pi}$. This effect can be roughly quantified as follows. For a plane wave pump ensuring $q_s + q_i = 0$, the shift $\Delta \theta$ of the idler photon position with respect to the position symmetrical of the signal photon is given by:

$$\Delta \theta = \theta_s + \theta_i = \frac{q_s c}{2\pi} (1/\nu_s - 1/\nu_i). \quad (7)$$

In a type 2 crystal, the centers of the SPDC patterns of the idler and the signal are separated in a noncritical configuration by the walk-off angle [19], i.e. 120 mrad at 710 nm: see Figure 1b. The transmission of the interferential filter is gaussian with a standard deviation of 4 nm. To obtain a rough estimate of the maximum value of $\Delta\theta$, we consider an equivalent rectangular filter with unity transmission, with the same total transmission after integration. The total width of this rectangular filter is $4\sqrt{2\pi} = 10$ nm, giving for a couple of signal-idler photons at the edges of this filter $\Delta\theta = 120 \times \frac{10}{710} = 1.70$ mrad, i.e. 4 pixels. Because of the absence of walk-off, the effect is much weaker in the horizontal direction (angle φ), explaining the asymmetry in Figure 2a.

To take into account more realistically the gaussian character of the filter and the phase matching function, the intercorrelation function in the far-field can be written as:

$$\langle N_s N_i \rangle = \chi^2 \int T(\nu_s) T(\nu_p - \nu_s) d\nu_s \int d\varphi_p \quad (8)$$

$$\times \int I_p(\varphi_p, \theta_p) d\theta_p \int d\varphi_s \int d\theta_s |\tilde{\zeta}(\theta_p, \nu_s, \varphi_s - \varphi_p, \theta_s)|^2$$

where T is the transmission coefficient of the filter and I_p is the pump intensity in the far-field. We have numerically calculated this intercorrelation function and determined its width by fitting it with a two-dimensional gaussian function. As expected, its shape is asymmetrical, with a standard deviation of 0.57 pixel in the horizontal direction and of 0.91 pixel in the vertical direction, for a theoretical value of 0.13 pixel at perfect degeneracy. In our experimental conditions, one pixel corresponds to $4.04 \hbar/\text{mm}$ in momentum units. The same procedure applied to the experimental intercorrelation of Figure 2 gives an horizontal standard deviation of 1.12 pixel and a vertical one of 1.74 pixel. It seems that some geometric aberrations in the optical system enlarge the correlation peak. Nevertheless, the asymmetry due to the non perfect degeneracy in temporal frequencies is visible with similar characteristics in simulation and experiment. Moreover, it can be shown that the mean probability of transmission by the filter of the twin photon is 0.56. This relatively low number is one of the effect leading to an experimental total intercorrelation coefficient of 0.1. The other important causes of reduction of this coefficient are the global quantum efficiency of the optical system, including all optics and the camera, the false positive or negative detections due to the camera [15], and probably also some residual fluorescence of the optical components.

4.2 Near-field

We suppose first a perfect degeneracy of temporal frequencies. In the output plane of the crystal (we discuss at the end of this subsection how to take into account the imaging system), the biphoton function reads:

$$\psi(x_s, x_i) = \int \chi E_p(x) \zeta(x_s + x, x_i + x) dx. \quad (9)$$

Let us first assume that the pump beam has a constant amplitude. In this case, the phase matching function in the direct space depends only of the difference of the coordinates [18]:

$$\int \zeta(x_s + x, x_i + x) dx \equiv \gamma(x_s - x_i) \quad (10)$$

where $\gamma(x)$ is the inverse Fourier transform of $\tilde{\zeta}(q_s, -q_s)$. We now justify our hypothesis: the width of $\tilde{\zeta}$ is 65 mm^{-1} , leading to a non negligible signal-idler correlation only for distances not much greater than $1/65$ mm. On this scale, we can safely assume that the 2 mm wide pump beam has a constant amplitude.

We have to find the standard deviation of $|\gamma(x)|^2$, proportional to the conditional probability $P(x_s|x_i)$. We have first:

$$\tilde{\zeta}(q_s, -q_s) = \frac{\exp(i\Delta k_z L) - 1}{i\Delta k_z} \quad (11)$$

where Δk_z is the longitudinal wave vector mismatch and L the crystal length. By neglecting the index variation of the extraordinary wave versus the internal angle, Δk_z becomes a purely geometrical term that reads, for perfect collinear phase matching:

$$\Delta k_z = \frac{q_s^2 \lambda}{4\pi} \left(\frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_i} \right) \quad (12)$$

with $n_{s,i}$ the indices of the signal and the idler. The first zero of $\tilde{\zeta}(q_s, -q_s)$ is obtained for $q_{s0} = 2\pi(\lambda L(\frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_i}))^{-1/2}$. We can now determine numerically the standard deviation σ_{q_s} of the SPDC in the far-field:

$$\sigma_{q_s} = \left(\int |\tilde{\zeta}(q_s, -q_s)|^2 q_s^2 dq_s \right)^{1/2} = 0.69 q_{s0} \quad (13)$$

and the standard deviation $\sigma_{x_i|x_s}$ of the conditional probability in the direct space:

$$\sigma_{x_i|x_s} = \left(\int |\gamma(x)|^2 x^2 dx \right)^{1/2}. \quad (14)$$

We find $\sigma_{x_i|x_s} = 1.89 \sigma_{q_s}^{-1}$. Note that the same relation (with 1.88 instead of 1.89) has been given in [5], with no detail on the exact computation process.

Unlike in the far-field, a non perfect degeneracy does not modify these results: even if not of the same color, the twin photons are created at the same place, with an uncertainty proportional to the inverse of their spatial frequency bandwidth.

The effect of the imaging system is much more subtle. It has been analyzed in detail in [17]. A brief summary is as follows. Because the signal and idler wave vectors have directions shifted from the walk-off, the twin photons travel in the same direction in the crystal (the Poynting vectors are identical, see also [19]). However, a direction shift does exist in the imaging system and the images are laterally shifted. Moreover, to conserve a minimum $\sigma_{x_i|x_s}$,

the transverse plane at the middle of the crystal (at equal distance between the input and the output face) must be imaged on the camera. With these precautions, the resolution found in equation (14) is unaffected.

4.3 Heisenberg violation using conditional probabilities

The standard deviations in intensity of gaussian beams in the direct space σ_x and in the Fourier space σ_q obey the Heisenberg relation $\sigma_x\sigma_q = 1/2$. In other words, if we admit that the intensity in a gaussian beam is proportional to the probability of presence of a photon, the Heisenberg uncertainty relation becomes equivalent to the standard diffraction theory. With the results of the preceding subsections, the ratio R of the Heisenberg variance product to the EPR variance product can be expressed as:

$$R = \frac{(\sigma_x\sigma_q)^2}{(\sigma_{x_i|x_s}\sigma_{q_i|q_s})^2} = \left(\frac{2\pi \cdot 0.69}{1.89}\right)^2 \frac{\sigma_x^2}{\lambda L \left(\frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_i}\right)}. \quad (15)$$

In our experimental conditions: $\sigma_x = 1$ mm, $L = 1$ mm and $\lambda = 710$ nm give $\sigma_{x_i|x_s} = 0.013$ mm, $\sigma_{q_i|q_s} = 0.52$ mm⁻¹ and $R = 5940$. If we admit that the interferential filter enlarges the correlation function in the far-field by a factor of 5 (see above), $R \approx 200$. Of course, other factors will probably diminish the experimental value by enlarging the correlation in the near-field, like distortions due to the polarizing beam-splitter, other geometrical distortions, not perfect imaging of the middle plane of the crystal, etc. Nevertheless, equation (15) gives the conditions that allow a large violation of the Heisenberg limit, a thin crystal allowing a large phase-matching range and a wide pump beam. Once more, we stress that $R^{1/2}$ can also be interpreted, at perfect degeneracy, as the number of resolution cells in one transverse direction [1], or as the number of Schmidt modes [3].

5 Conclusion

We have proposed a scheme to demonstrate experimentally a purely spatial EPR paradox. Experimental results in the far-field are compatible with this objective and we have good hope to obtain soon the lacking results in the near-field. However, these results cannot easily be extended to higher fluxes because they are established with the assumption of independent pairs, or in more technical terms of a pure biphoton state. This limitation seems curious since even at high flux the signal-idler spatial fluctuations remain perfectly correlated, as demonstrated in numerous papers (see for example [17,20]). On the other hand, the demonstration of the EPR paradox for spatial properties of beams is based on a criterion implying the amplitude and phase quadratures [21,22]. While these quadrature operators are conjugate, with a $i\hbar$

commutator, the field operators respectively in the image plane and in the Fourier plane are Fourier transform each from the other and an EPR criterion in the continuous variable regime seems more difficult to establish. Of course, this curious asymmetry between the spatial and the temporal variables does not preclude the demonstration of purely spatial EPR, because experimentally the recorded intensities do correspond to purely spontaneous down conversion with totally negligible stimulated conversion.

References

1. F. Devaux, E. Lantz, Opt. Commun. **114**, 114 (1995)
2. C. Law, J. Eberly, Phys. Rev. Lett. **12**, 127903 (2004)
3. M. Van Exter, A. Aiello, S. Oemrawsingh, G. Nienhuis, J.P. Woerdman, Phys. Rev. A **74**, 012309 (2006)
4. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935)
5. J.C. Howell, R.S. Bennink, S.J. Bentley, R.W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **92**, 210403 (2004)
6. M. Reid, P. Drummond, W. Bowen, E. Cavalcanti, P. Lam, H. Bachor, U. Andersen, G. Leuchs, Rev. Mod. Phys. **81**, 1727 (2009)
7. A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982)
8. J. Leach, R.E. Warburton, D.G. Ireland, F. Izdebski, S.M. Barnett, A.M. Yao, G.S. Buller, M.J. Padgett, Phys. Rev. A **85**, 013827 (2012)
9. C. Monken, P.S. Ribeiro, S. Padua, Phys. Rev. A **57**, 3123 (1998)
10. A. Gatti, E. Brambilla, L.A. Lugiato, Phys. Rev. Lett. **90**, 133603 (2003)
11. J.L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, E. Lantz, Phys. Rev. A **81**, 043825 (2010)
12. J.L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, E. Lantz, Phys. Rev. Lett. **101**, 233604 (2008)
13. O. Jedrkiewicz, Y.K. Jiang, E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L.A. Lugiato, P. Di Trapani, Phys. Rev. Lett. **93**, 243601 (2004)
14. G. Brida, M. Genovese, I.R. Berchera, Nat. Photon. **4**, 227 (2010)
15. E. Lantz, J.L. Blanchet, L. Furfaro, F. Devaux, MNRAS **386**, 2262 (2008)
16. E. Brambilla, L. Caspani, O. Jedrkiewicz, L.A. Lugiato, A. Gatti, Phys. Rev. A **77**, 053807 (2008)
17. E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L.A. Lugiato, Phys. Rev. A **69**, 023802 (2004)
18. B.E.A. Saleh, A.F. Abouraddy, A.V. Sergienko, M.C. Teich, Phys. Rev. A **62**, 043816 (2000)
19. E. Lantz, F. Devaux, J. Opt. A **2**, 362 (2000)
20. E. Lantz, N. Treps, C. Fabre, E. Brambilla, Eur. Phys. J. D **29**, 437 (2004)
21. K. Wagner, J. Janousek, V. Delaubert, H. Zou, C. Harb, N. Treps, J.F. Morizur, P.K. Lam, H.A. Bachor, Science **321**, 541 (2008)
22. V. Boyer, A.M. Marino, R.C. Pooser, P.D. Lett, Science **321**, 544 (2008)

Einstein-Podolsky-Rosen Paradox in Twin Images

Paul-Antoine Moreau, Fabrice Devaux, and Eric Lantz

Département d'Optique, Institut FEMTO-ST, Université de Franche-Comté, CNRS, 25000 Besançon, France

(Received 9 May 2014; published 14 October 2014)

Spatially entangled twin photons provide both promising resources for modern quantum information protocols, because of the high dimensionality of transverse entanglement, and a test of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox in its original form of position versus impulsion. Usually, photons in temporal coincidence are selected and their positions recorded, resulting in *a priori* assumptions on their spatiotemporal behavior. In this Letter, we record, on two separate electron-multiplying charge coupled devices cameras, twin images of the entire flux of spontaneous down-conversion. This ensures a strict equivalence between the subsystems corresponding to the detection of either position (image or near-field plane) or momentum (Fourier or far-field plane). We report the highest degree of paradox ever reported and show that this degree corresponds to the number of independent degrees of freedom, or resolution cells, of the images.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.160401

PACS numbers: 03.65.Ud, 42.50.Ar, 42.50.Dv, 42.50.Xa

In 1935, Einstein, Podolsky and Rosen (EPR) showed [1] that quantum mechanics predicts that entangled particles could have both perfectly correlated positions and momenta, in contradiction with the so-called local realism where two distant particles should be treated as two different systems. Though the original intention of EPR was to show that quantum mechanics is not complete, the standard present view is that entangled particles do experience nonlocal correlations [2–4]. It can be shown that the spatial extent of these correlations corresponds to the size of a spatial unit of information, or mode, offering the possibility of detecting high dimensional entanglement in an image with a sufficient number of resolution cells [5,6]. However, in most experiments the use of single photon detectors and coincidence counting leads to the detection of a very few parts of the selected photons, generating a sampling loophole. High sensitivity array detectors have been used outside the single photon-counting regime in order to witness quantum features of light [7,8]. However, the EPR paradox is intimately connected to the particle character of light and its detection should involve single photon imaging, possible either with intensified charge coupled devices able to isolate pairs of entangled photons [9,10] or, more recently, electron-multiplying charge coupled devices (EMCCDs) [11].

Because of their high quantum efficiency EMCCDs allowed the demonstration of sub-shot-noise correlations in far-field images of spontaneous parametric down-conversion (SPDC) [12,13]. More recently, two experiments intended to achieve the demonstration of an EPR paradox or EPR correlations in couples of near-field and far-field images recorded with in an EMCCD. The first experiment in our group involved the detection of twin images on a single camera, by separating in the near field the cross-polarized photons with a polarizing beam splitter, inducing some overlap of the near-field images and a rather small

resolution in the far field because of walk-off. The results exhibited a low degree of paradox, far from the theoretical values, though highly significant and in accordance with the full-field requirements [14]. The second experiment [15] exhibited also both near-field and far-field correlations, with a much lower product of the spatial extents. However, because of type-I phase matching, photons of a pair were detected on the same coherence area in the near field. As a consequence, pairs that were incident on the same pixel did not participate to the experimental correlation, because of the on-off character of the detection, and results were obtained for only one dimension because of the smearing effects between adjacent pixels. More fundamentally, the absence of spatial separation makes that the two parts of the wave function corresponding to the two photons are spatially superposed in the near field, while a demonstration of an EPR paradox implies detection of remote correlations. Hence, the authors claimed observation of EPR-type correlations rather than an EPR paradox.

In the present experiment, the use of two cameras allows a separation of the twin images without any further optical component, thanks to walk-off, and a perfect identity of the subsystems corresponding to far-field and near-field detection, except the position of the imaging systems composed on each arm of a lens and a camera. Before describing our experimental results, let us recall that an EPR paradox arises when correlations violate an inequality corresponding to the Heisenberg uncertainty principle if applied to a single particle 1 or 2, but expressed in terms of conditional variances [16,17]:

$$\langle \Delta^2(\rho_1 - \rho_2) \rangle \langle \Delta^2(p_1 + p_2) \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (1)$$

where ρ_i is the transverse position of photon i ($i = 1, 2$) in the middle plane of the crystal and p_i its transverse

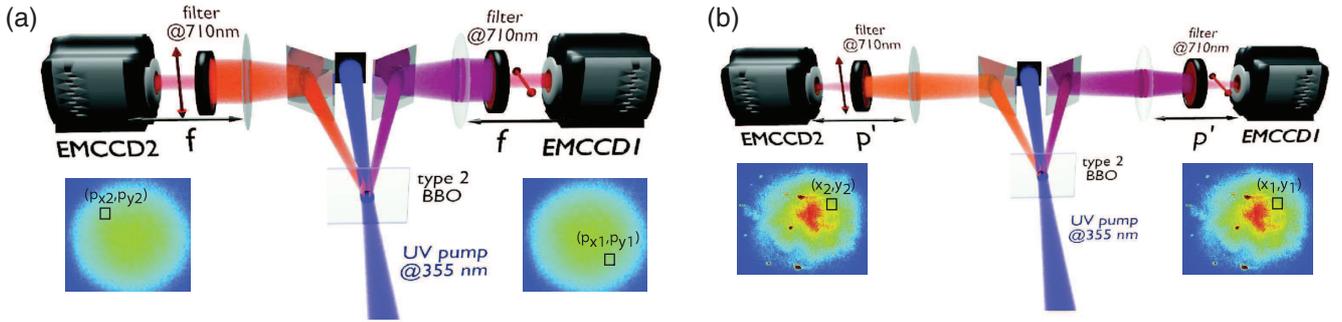


FIG. 1 (color online). Experimental setups used to image correlations. (a) Measurement of momentum correlations with the cameras in the focal plane. Inserts: sums of 700 far-field images; $px_1 = -px_2$, $py_1 = -py_2$ are the coordinates of twin pixels. (b) Cameras in the crystal image plane and sums of 700 near-field images with twin pixels in $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

momentum. In order to make the demonstration consistent, the statistical evaluation of the variances should be made on the same system in the near and the far field. By using two EMCCD cameras that detect photons in the whole SPDC field, we ensured this consistency. By approximating the phase matching function of SPDC to a Gaussian, the wave function of the biphoton can be written [18]

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = N \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2|^2}{4\sigma_p^2}\right) \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|^2}{4\sigma_\phi^2}\right), \quad (2)$$

$$\Psi(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{N\pi^2} \exp\left(-\sigma_p^2 \frac{|\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2|^2}{4\hbar^2}\right) \exp\left(-\sigma_\phi^2 \frac{|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2|^2}{4\hbar^2}\right), \quad (3)$$

where N is a normalization constant, $\boldsymbol{\rho}_i = (x_i, y_i)$, $\boldsymbol{p}_i = (p_{xi}, p_{yi})$, σ_p the standard deviation of the Gaussian pump beam, and σ_ϕ the standard deviation, defined in the near field, of the Fourier transform of the phase matching function defined in the far field. In our experimental conditions where $\sigma_p \gg \sigma_\phi$, these equations show that the product of conditional variances is equal to

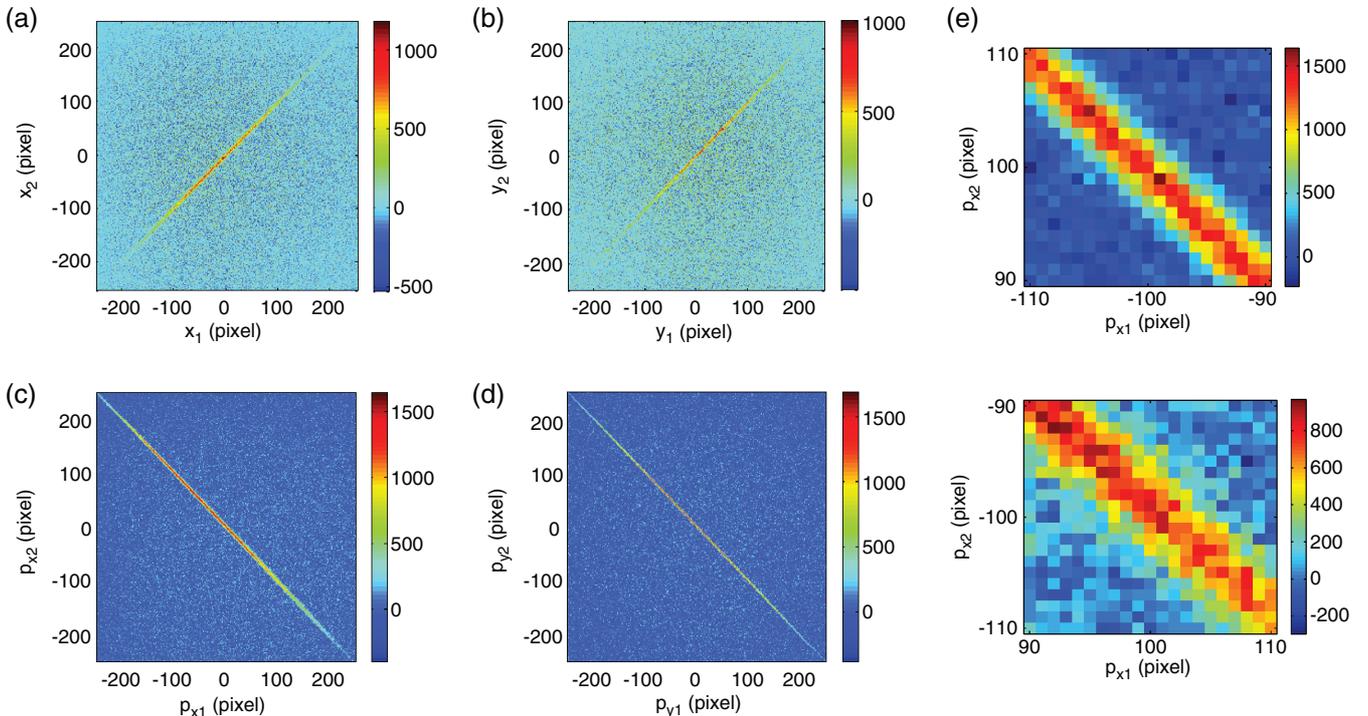


FIG. 2 (color online). Joint probabilities versus the transverse spatial coordinates. Color scales are expressed in coincidence counts over 35 000 pairs of images, corrected from the mean corresponding to accidental coincidences: (a),(b) near field; (c),(d) far field. (e) In the far field, the correlations arise in a coherence area that is larger for momenta the most distant from the pump direction, in the direction x along which the two fluorescence beams are separated from the walk-off.

$$\langle \Delta^2(\rho_1 - \rho_2) \rangle \langle \Delta^2(p_1 + p_2) \rangle = \hbar^2 \frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_p^2} = \frac{\hbar^2}{4V}, \quad (4)$$

where V is defined by this equation as the degree of paradox. Using the results of Law and Eberly [19], it can be shown that V is also the Schmidt number of the entanglement [20], i.e., the whole dimensionality of the biphoton in the two-dimensional transverse space. For a one-dimensional system of length corresponding to the lateral size of the bidimensional one, the Schmidt number becomes equal to the square root of that of the bidimensional system. Hence, V becomes the square of this Schmidt number [21].

The experimental setup is shown in Fig. 1. Pump pulses at 355 nm provided by a 27 mW laser illuminated a 0.6-mm long β barium borate (BBO) nonlinear crystal cut for type-II phase matching. The signal and idler photons were separated by means of two mirrors and sent to two independent imaging systems. The far-field image of the SPDC was formed on the EMCCDs placed in the focal plane of two 120-mm lenses, Fig. 1(a). In the near-field configuration, Fig. 1(b), the plane of the BBO crystal was imaged on the EMCCDs with a transversal magnification $M = 2.47 \pm 0.01$. Note that only the positions of the lenses and cameras are different in the two configurations. The

back-illuminated EMCCD cameras (Andor iXon3) have a quantum efficiency greater than 90% in the visible range. The detector area is formed by 512×512 pixels, with a pixel size of $s_{\text{pix}} = 16 \times 16 \mu\text{m}^2$. We used a readout rate of 10 MHz at 14 bits, and the cameras were cooled to -100°C . An image corresponds to the summation of 100 laser shots, i.e., an exposure time of 0.1 s and a dead time between two successive images of about the same value, in order to allow a perfect synchronization between both cameras. Measurements were performed for a crystal orientation corresponding to noncritical phase matching at degeneracy, i.e., collinear orientation of the signal and idler Poynting vectors in the crystal [22]. Photon pairs emitted around the degeneracy were selected by narrow-band interference filters centered at 710 nm ($\Delta\lambda = 4$ nm). The photon-counting regime was ensured by adjusting the exposure time in such a way that the mean fluency of SPDC was between 0.1 and 0.2 photon per pixel in order to minimize the whole number of false detections [11]. The mean number of photons per spatiotemporal mode was less than 10^{-3} , in good agreement with the hypothesis of pure spontaneous parametric down-conversion, without any stimulated amplification. We applied a thresholding procedure [11] to convert the gray scales into binary values that

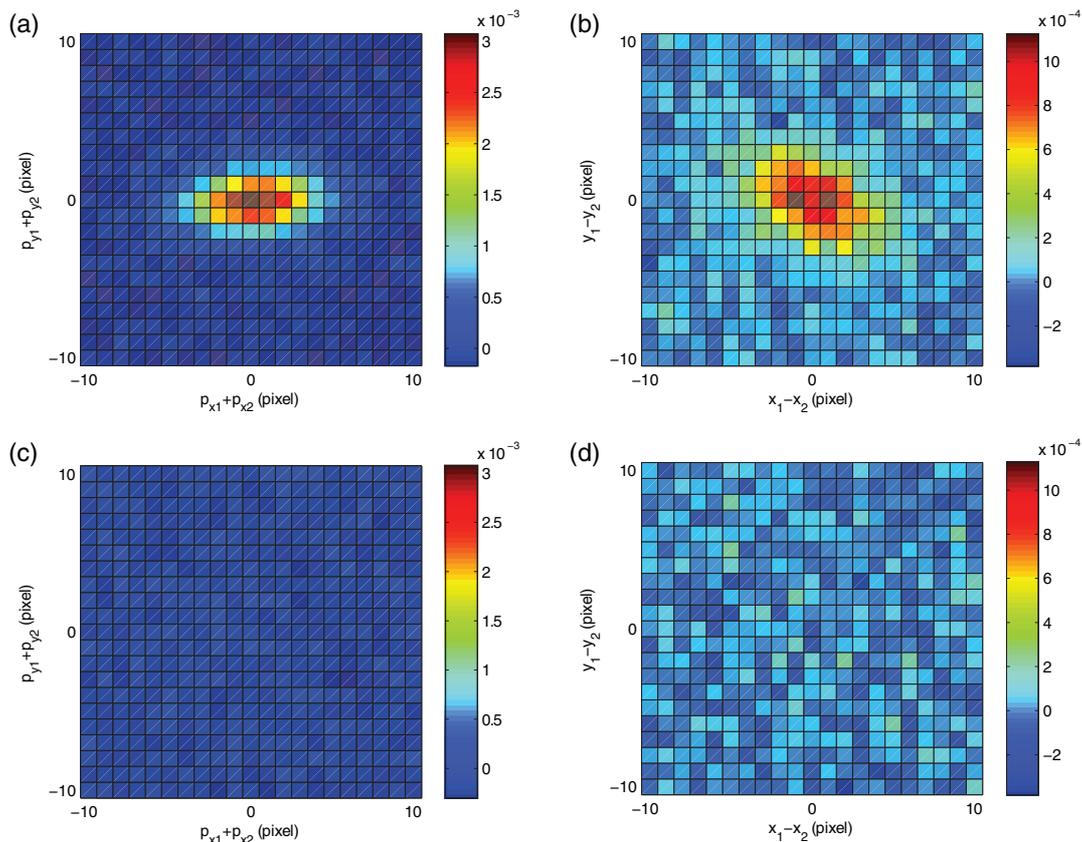


FIG. 3 (color online). Normalized cross-correlation functions in position and momentum: The cross-correlation is calculated over 700 images in the far field (a),(c) and image plane (b),(d). In (c) and (d) are presented cross-correlation of images that do not share any pump pulses.

TABLE I. Inferred variances.

Variances	Measured values
$\Delta^2(x_1 - x_2)$	$299 \pm 14 \mu\text{m}^2$
$\Delta^2(y_1 - y_2)$	$168 \pm 7 \mu\text{m}^2$
$\Delta^2(p_{x1} - p_{x2})$	$(9.70 \pm 0.1) \times 10^{-6} \hbar^2 \mu\text{m}^{-2}$
$\Delta^2(p_{y1} - p_{y2})$	$(2.53 \pm 0.04) \times 10^{-6} \hbar^2 \mu\text{m}^{-2}$

correspond to 0 or 1 photon. The conditional probability distributions calculated using 35 000 images are shown in Fig. 2. The correlation profiles agree with the theoretical expectations (2) and (3) with $\sigma_p \gg \sigma_\phi$.

We have shown [23] that the conditional variances $\langle \Delta^2(\rho_1 - \rho_2) \rangle$ and $\langle \Delta^2(p_1 + p_2) \rangle$ correspond to the widths of the normalized cross-correlation of photodetection images, after subtraction from these images of their deterministic part, i.e., the mean of the images shown in the insets of Fig. 1. Because of this subtraction, the spots observed in the near-field insets, due to tiny defaults on the BBO crystal, do not lead to deterministic correlations; see Fig. 3(d). The experimental values obtained by fitting the normalized cross-correlations presented in Fig. 3 are reported in Table I, for the two orthogonal directions of the transverse plane x and y .

Using the measured values given in Table I, we find the following product of conditional variances:

$$\Delta^2(x_1 - x_2)\Delta^2(p_{x1} + p_{x2}) = (2.9 \pm 0.2) \times 10^{-3} \hbar^2, \quad (5)$$

$$\Delta^2(y_1 - y_2)\Delta^2(p_{y1} + p_{y2}) = (4.2 \pm 0.2) \times 10^{-4} \hbar^2. \quad (6)$$

These results clearly violate inequality (1), thus exhibiting an EPR paradox in the two transverse dimensions. Moreover, the results are in rather good agreement with the theoretical expectations $8.6 \times 10^{-4} \hbar^2$ on x and $2.6 \times 10^{-4} \hbar^2$ on y obtained by a numerical computation that takes into account the effect of the width of the interference filter. This effect explains the anisotropy shown in Fig. 2(e), i.e., an enlargement in the x direction for the large values of x_1 : for non perfect frequency-degenerate photons, the shift from perfect symmetry is proportional to the walk-off, as detailed in [23]. This effect should not be confounded with the anisotropy described in [24], that is due to an extraordinary strongly focused pump in a long uniaxial crystal. Note also that our numerical computation uses the exact sinc-like phase matching function and not its Gaussian approximation. By using Eq. (4), we find along x a degree of paradox of 86 ± 5 and along y of 595 ± 40 . To the best of our knowledge, this degree of 595 is the highest ever reported for an EPR paradox, whatever the considered domain. The former best values were 25 for quadrature experiments [25], 380 for the EPR correlations of Ref. [15], 128 in Ref. [5], and 100 by encoding with a spatial light modulator [26].

We show in Fig. 4 that the minimum number of images that allows a safe assessment of the correlation peaks in both spaces is of the order of 20. Indeed a quantum correlation peak is evidenced if it cannot be confounded,

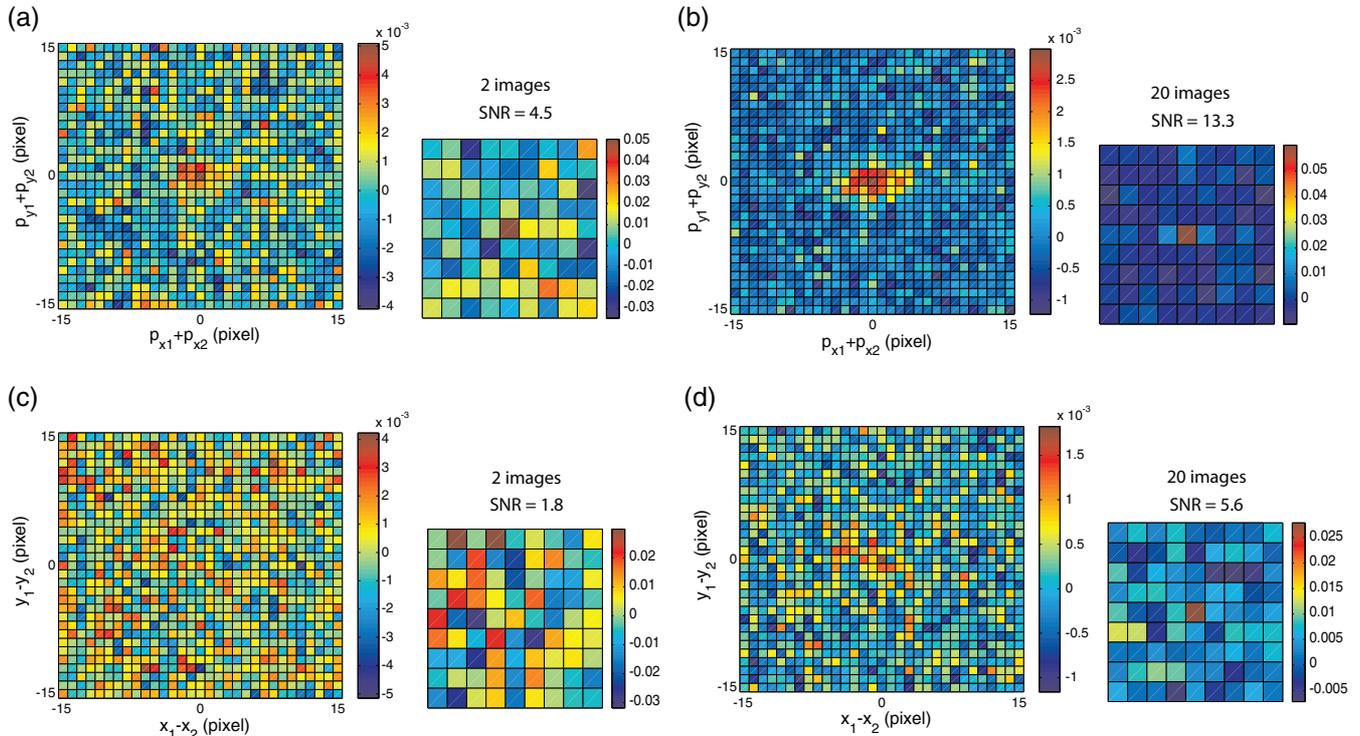


FIG. 4 (color online). Normalized cross-correlation function versus the number of images: left images show correlation computed on the physical pixels (only the central part is presented). Smaller right images show correlation computed after grouping 8×8 pixels: (a),(b) far field; (c),(d) near field.

with high probability, with random fluctuations of the background noise. Without any *a priori* assumption on the position of the peak, this is ensured with a confidence of 99% if the magnitude of the true peak is greater than 4.5 standard deviations, for an image of 64×64 pixels obtained by summing the correlations on groups of 8×8 pixels. This grouping is performed in order to adapt the size of the effective pixel to the size of the correlation peak. In Fig. 4, we have defined the signal-to-noise-ratio (SNR) as the magnitude of the correlation peak divided by the standard deviation, after grouping, of the correlation image outside the peak area. The minimum number of images necessary to demonstrate entanglement is only two in the far field, where deterministic distortions appear to be smaller than in the image plane.

Finally, we have verified that the images exhibit a sub-shot-noise statistics in both the near field and the far field: $r_n = 0.9975 \pm 0.0004$ and $r_f = 0.9959 \pm 0.0003$, where r is defined by

$$r = \frac{\langle \Delta^2(N_1 - N_2) \rangle}{\langle N_1 + N_2 \rangle}, \quad (7)$$

that is, the variance of the photon number difference $N_1(\boldsymbol{\rho}) - N_2(\boldsymbol{\rho})$ [and $N_1(\boldsymbol{\rho}) - N_2(-\boldsymbol{\rho})$ in far field] normalized to be expressed in shot noise units. These experimental results are under the classical limit 1, respectively, by more than 5 and 10 standard deviations, witnessing the quantum, i.e., particlelike, character of the correlations [12]. Note that smaller values of r can be obtained by grouping the pixels [23].

To conclude, we have demonstrated a two dimensional EPR paradox in the closest form of its original proposal by recording the behavior of light in couples of twin images. The quantum character of these images has been doubly demonstrated first by full-field measurement of a high degree of EPR paradox for both transverse directions, and second by demonstrating subshot noise character in both the near field and the far field. Reliable results can be obtained with 20 images, i.e., an acquisition time of 4 s and a computation time that scales also in seconds since cross-correlations are computed using FFT algorithms. This should be compared to days for raster scanning, or hours for compressive sensing [27]. Because of the experimental anisotropy, the dimensionality of entanglement, or Schmidt number K , can be assessed as the square root of the product of the paradox degrees in each direction: $K = \sqrt{594 \times 85} = 225$. Such high-dimensionality spatial entanglement has applications in numerous fields of quantum optics, like quantum cryptography [28] or quantum computation [29].

This work was partly supported by the Labex ACTION program (ANR-11-LABX-0001-01).

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

- [2] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
 [3] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
 [4] K. Banaszek and K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. A* **58**, 4345 (1998).
 [5] P. B. Dixon, G. A. Howland, J. Schneeloch, and J. C. Howell, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 143603 (2012).
 [6] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley, and R. W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 210403 (2004).
 [7] G. Brida, M. Genovese, and I. R. Berchera, *Nat. Photonics* **4**, 227 (2010).
 [8] O. Jedrkiewicz, Y.-K. Jiang, E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L. A. Lugiato, and P. Di Trapani, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 243601 (2004).
 [9] S. S. R. Oemrawsingh, W. J. van Drunen, E. R. Eliel, and J. P. Woerdman, *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 2391 (2002).
 [10] R. Fickler, M. Krenn, R. Lapkiewicz, S. Ramelow, and A. Zeilinger, *Sci. Rep.* **3**, 1914 (2013).
 [11] E. Lantz, J.-L. Blanchet, L. Furfaro, and F. Devaux, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **386**, 2262 (2008).
 [12] J.-L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, and E. Lantz, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 233604 (2008).
 [13] J.-L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, and E. Lantz, *Phys. Rev. A* **81**, 043825 (2010).
 [14] P.-A. Moreau, J. Mougins-Sisini, F. Devaux, and E. Lantz, *Phys. Rev. A* **86**, 010101 (2012).
 [15] M. Edgar, D. Tascia, F. Izdebski, R. Warburton, J. Leach, M. Agnew, G. Buller, R. Boyd, and M. Padgett, *Nat. Commun.* **3**, 984 (2012).
 [16] M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **40**, 913 (1989).
 [17] M. D. Reid, P. D. Drummond, W. P. Bowen, E. G. Cavalcanti, P. K. Lam, H. A. Bachor, U. L. Andersen, and G. Leuchs, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1727 (2009).
 [18] D. S. Tascia, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, F. Toscano, and P. Pellat-Finet, *Phys. Rev. A* **79**, 033801 (2009).
 [19] C. K. Law and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 127903 (2004).
 [20] M. P. van Exter, A. Aiello, S. S. R. Oemrawsingh, G. Nienhuis, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **74**, 012309 (2006).
 [21] M. Fedorov, Y. M. Mikhailova, and P. A. Volkov, *J. Phys. B* **42**, 175503 (2009).
 [22] E. Lantz and F. Devaux, *J. Opt. A* **2**, 362 (2000).
 [23] F. Devaux, J. Mougins-Sisini, P.-A. Moreau, and E. Lantz, *Eur. Phys. J. D* **66**, 192 (2012).
 [24] M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 063901 (2007).
 [25] S. Steinlechner, J. Bauchrowitz, T. Eberle, and R. Schnabel, *Phys. Rev. A* **87**, 022104 (2013).
 [26] M. Krenn, M. Huber, R. Fickler, S. Lapkiewicz, S. Ramelow, and A. Zeilinger, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **111**, 6243 (2014).
 [27] G. A. Howland and J. C. Howell, *Phys. Rev. X* **3**, 011013 (2013).
 [28] C. Branciari, E. G. Cavalcanti, S. P. Walborn, V. Scarani, and H. M. Wiseman, *Phys. Rev. A* **85**, 010301 (2012).
 [29] D. S. Tascia, R. M. Gomes, F. Toscano, P. H. Souto Ribeiro, and S. P. Walborn, *Phys. Rev. A* **83**, 052325 (2011).

Optimizing the signal-to-noise ratio in the measurement of photon pairs with detector arrays

Eric Lantz, Paul-Antoine Moreau, and Fabrice Devaux

Institut FEMTO-ST, Département d'Optique PM Duffieux, Unité Mixte de Recherche 6174 Centre National de la Recherche Scientifique, Université de Franche-Comté, 15 rue des Montboucons, 25000 Besançon, France

(Received 9 July 2014; published 9 December 2014)

To evidence multimode spatial entanglement of spontaneous down-conversion, detector arrays allow a full-field measurement, without any *a priori* selection of the paired photons. We show by comparing results of the recent literature that electron-multiplying CCD cameras allow, in the present state of technology, the detection of quantum correlations with the best signal-to-noise ratio (SNR), while intensified CCD cameras allow at best the identification of pairs. The SNR appears to be proportional to the square root of the number of coherence cells in each image, or Schmidt number. Then corrected estimates are derived for extended coherence cells and not-very-low and non-space-stationary photon fluxes. Finally, experimental measurements of the SNR confirm our model.

DOI: [10.1103/PhysRevA.90.063811](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.063811)

PACS number(s): 42.50.Ar, 03.65.Ud, 42.50.Dv, 42.50.Lc

I. INTRODUCTION

Entanglement in continuous spatial variables has attracted great attention during recent years because of its potentially very high dimensionality. Indeed, for spontaneous parametric down-conversion (SPDC) the dimensionality, or Schmidt number [1–3], corresponds to the number of resolution cells, or transverse spatial modes, where the size of a resolution cell scales as the inverse of the phase matching angular range [4]. This number can exceed several thousands in the transverse plane. A full characterization of the quantum properties of photons in this huge space would require a precise determination of arrival times for each resolution cell, which is clearly beyond the present technology capacities. One has therefore to choose between two less ambitious objectives.

(1) First, a few photons are picked at two localized places (pixels) that correspond to photon pairs with a reasonably high probability, by using a temporal coincidence circuitry [5–7]. Characterization of spatial entanglement is made by measuring an excess of coincidences for certain couples of pixels. Though useful to characterize spatial entanglement in view of its use in quantum information protocols, where we need to know that two detected photons do form a pair, these methods are questionable for demonstrating basic properties like the Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) paradox [8], because of the detection of very few parts of the incident photons with an *a priori* selection criterion. For example, it can be demonstrated that a classical single beam can show an apparent violation of the Heisenberg uncertainty principle if measurements are made in one dimension: see the Appendix. Moreover, measurements must be repeated for each couple of pixels, which is extremely time consuming. Attempts to reduce this time have been recently performed by using compressive sensing [9], however at the expense of the precise spatial location of the pairs, just as in the second type of methods described in the following.

(2) Large bidimensional detector arrays allow a full-field detection of all arriving photons with an equal chance: some photons are not detected because of limited quantum efficiency or false thresholding and some detection events do not correspond to actual photons because of noise, but these imperfections do not lie on *a priori* assumptions about the nature of the light, except its weakness allowing a single-

photon sensitivity. Intensified CCD (ICCD) cameras [10–12] or more recently electron-multiplying CCD (EMCCD) cameras [13–16] allow this ultimate sensitivity. The advantages and drawbacks of these two types of cameras can be roughly described as follows. ICCDs have a poor quantum efficiency (50% at most) and a quite extended spatial impulse response but may have a very low noise level for a short exposure time. Conversely, EMCCDs may have a very high quantum efficiency and an impulse response almost limited to a single pixel, but are noisy. The basic reason for this difference is that the noisy transfer characterizing all CCDs occurs before amplification in EMCCDs, resulting in amplification of the clock-induced charge (CIC) [17], while the CIC is completely negligible as compared to the intensified signal in an ICCD.

The goal of this paper is to discuss how to optimize the use of detector arrays for measuring spatial quantum correlations. Tasca *et al.* have already proposed in a recent paper [18] an optimization criterion lying on the maximization of the visibility of these correlations. While this criterion can be pertinent if looking for detection of actual pairs, we show that evidencing quantum correlations on a whole image is best performed by maximizing the signal-to-noise ratio (SNR), where *signal* refers here to the correlation peak due to twin photons and *noise* refers to accidental coincidences as well as the camera noise.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we develop a simple model of imaging that allows us to discuss the pertinence of both criteria and their correspondence with an optimized mean photon flux level. Section III is devoted to estimation problems in a realistic situation. In Sec. IV, we show and compare with theory an experimental curve of SNR versus the intensity level. Then we conclude.

II. IDEALIZED MODEL

Let us consider an idealized type II SPDC experiment at very low gain, where the signal and idler beams are detected on two different cameras, or equivalently on two nonoverlapping zones of a single camera. In the spirit of this oversimplified model, we suppose that diffraction is negligible: for each photon that is impinging on the pixel S_i on the signal detector, a photon is impinging on the “twin” pixel I_i on the idler side,

where i gives the position of the pixel in the bidimensional transverse plane with a system of coordinates ensuring the same i for twin photons in the near field as well in the far field. A straightforward derivation from basic principles gives [19] the probability P_{ijmn} of detecting two photons' signal and idler on the pixels i and j and in the temporal modes m and n :

$$P_{ijmn} = \eta^2(v^4 + \delta_{ij}\delta_{mn}u^2v^2), \quad (1)$$

where the amplitude gains u and v obey the unitarity condition $u^2 - v^2 = 1$, δ is the Kronecker symbol, and η is the quantum efficiency, that takes into account the probability of no detection of the photon as well as the probability of a peak generated by a photoelectron of height below the threshold level. Let \mathcal{M} be the number of temporal modes where SPDC occurs. \mathcal{M} can be estimated as the ratio between the bandwidth of the SPDC and the spectral width of the pump beam, typically 10^3 in our experiments, for a Fourier-transform pump with a pulse duration of several hundreds of picoseconds. By summing the elementary probabilities given by Eq. (1) on the \mathcal{M}^2 couples of temporal modes, we obtain the mean number of coincidences P_{ij} between the the pixels i and j :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \eta^2(\mathcal{M}^2v^4 + \delta_{ij}\mathcal{M}u^2v^2) \\ &= m^2 + \delta_{ij}\left(\frac{m^2}{\mathcal{M}} + \eta m\right), \end{aligned} \quad (2)$$

where $m = \eta\mathcal{M}v^2$ is the mean number of photoelectrons recorded on one pixel. By subtracting the m^2 term, Eq. (2) is in agreement with the covariances given in [20]. If m is sufficiently small to neglect the weak probability of multiple detections on a single pixel, P_{ij} can be considered as the probability of a coincident detection of two signal and idler photons. The influence of multiple detections will be considered in Sec. III B, by using a relation valid for on-off detectors [13]. Because of the great number of temporal modes and of the low value of the fluence m , the term $\frac{m^2}{\mathcal{M}}$ is extremely weak and can be neglected. See also some comments about this term at the end of this section. The first term on the right-hand side of Eq. (2) appears as a probability of accidental coincidences, i.e., the probability of coincidences if the signal and the idler beam were independent. Note, however, that this term exists also, with the same value, for twin modes, where all photons arrive by pairs. For mathematical convenience, we will call this term ‘‘accidental coincidences’’ even in this latter case. We suppose now that a spurious detection due to the detector noise occurs with a low probability p_n . The probability of detection of a ‘‘false pair’’ that is due to accidental coincidences either between photons or between photon and noise or between noise and noise is given by $P_{\text{acc}} = (m + p_n)^2$. In a practical experiment, it means that the result G_{ij} of a numerical product, for each couple of pixels, of the signal and the idler values evidences for $i = j$ a correlation peak of height proportional to $P_{\text{acc}} + \eta m$, surrounded by a continuous background of mean value proportional to P_{acc} . In analogy with optical images, the visibility V of the correlation peak can be computed as

$$V = \frac{G_{\text{max}} - G_{\text{min}}}{G_{\text{max}} + G_{\text{min}}} = \frac{\eta m}{\eta m + 2(m + p_n)^2}. \quad (3)$$

Maximizing the visibility clearly implies working with m as low as possible inasmuch as the rare incident photons overcome the detector noise [18]. A straightforward derivation leads to a maximization of V for $m = p_n$.

Note that with such a criterion ICCD cameras may exhibit superiority over EMCCDs: the maximum visibility becomes equal to

$$V_{\text{max}} = \frac{\frac{\eta}{p_n}}{8 + \frac{\eta}{p_n}}, \quad (4)$$

which is an increasing function of $\frac{\eta}{p_n}$. Maximizing $\frac{\eta}{p_n}$ has a direct physical interpretation. Indeed, for $m \simeq p_n$, the ratio of true pairs detection over the false ones becomes proportional to $\frac{\eta}{p_n}$. Hence, ICCDs appear to work best to identify true pairs. Despite their lower quantum efficiency, low exposure times can reduce their dark noise to a negligible level, inducing a very low detector noise because of the absence of a CIC and a threshold level well above the readout noise. In [12], noise is primary due to stray light. The authors obtained 230 true pairs of photons for 1839 coincidences recorded on 436 000 images. True pairs of photons can be separated from the false ones because they form a correlation peak as expected, though not on a single pixel like in our idealized model.

On the other hand, stating that two given recorded photons form a true pair with high probability seems difficult with an EMCCD, even *a posteriori* like in the preceding example, because of the CIC. Nevertheless, we argue in the following that EMCCDs efficiently allow evidencing quantum correlations like a degree of EPR paradox. *Efficiently* means here with averages on a minimum of independent pixels and images. We will see that using a single couple of images (one couple for position and one for momentum for EPR demonstration) does not seem out of reach. A correlation peak is evidenced if it cannot be confounded, with high probability, with random fluctuations of the background noise. Hence, we have to prove that the true correlation peak is much higher than the highest fluctuation of the correlation background. The magnitude of this highest fluctuation is proportional to the standard deviation of the estimates of the correlation background. We give in the following the simplest computation of this standard deviation, in the frame of our idealized model. After the recording of K images, G_{ij} is estimated for each couple of pixels as

$$\widehat{G}_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K N_{i,k} N_{j,k}, \quad (5)$$

where $N_{i,k}$ ($N_{j,k}$) = 0 or 1 are the binary thresholded intensities on the image k , and the hat stands, here and in all the following, for ‘‘estimator of.’’ For pixels that do not correspond to true pairs ($i \neq j$), the variance σ_G^2 of \widehat{G}_{ij} is given by

$$\begin{aligned} \sigma_G^2 &= \frac{1}{K} [P_{\text{acc}}(1 - P_{\text{acc}})^2 + (1 - P_{\text{acc}})(0 - P_{\text{acc}})^2] \\ &= \frac{1}{K} P_{\text{acc}}(1 - P_{\text{acc}}). \end{aligned} \quad (6)$$

The signal-to-noise ratio (SNR) is therefore given by

$$\text{SNR} = \frac{P_{ii} - P_{\text{acc}}}{\sigma_G} \simeq \sqrt{K} \frac{\eta m}{m + p_n}, \quad (7)$$

where we have assumed $P_{\text{acc}} \ll 1$. In this expression, the signal is defined as the height of the twin peak above the noise floor of mean $P_{\text{acc}} = (m + p_n)^2$. Because of the absence of squaring in the denominator, the SNR increases with m , unlike the visibility, as long as m is not much greater than p_n . For $m \gg p_n$, the SNR becomes proportional to the quantum efficiency. Hence EMMCDs exhibit a clear superiority versus ICCDs when optimizing the SNR is the relevant criterion. However, a too large m would result in a too large probability of recording two photoelectrons on the same pixel. Though results are corrected in order to take into account this probability (see Sec. III B), it seems safe to work at a level minimizing the total probability of all false detections, either of no photoelectron where there is one, or of one photoelectron when there is zero or more than one. We have shown [17] that this level corresponds to $m = 0.15$ photoelectrons/pixel, giving a value of $\frac{\eta m}{m+p_n} \approx 0.85$, for $p_n \approx 10^{-2}$ and $\eta > 0.9$. This should be compared for an ICCD to $\frac{\eta m}{m+p_n} \approx \eta \approx 0.5$ for an ICCD of third generation [21]. Only for very low fluxes, $m < 10^{-2}$, the negligible value of p_n for an ICCD will lead to a better SNR than for an EMCCD.

The second message of Eq. (7) is the increasing of the SNR with the number of acquired images. Moreover the space-stationarity assumption allows a further improvement: all couples of pixels in an image that have the same difference of spatial positions possess the same statistical properties. We follow now closely our previous work [3] to show that the normalized intercorrelation function between both images gives directly the degree of their quantum correlation. For a detection of a photon S at \vec{r}_S , the probability density of detection of a photon I at \vec{r}_I can be written as

$$p(\vec{r}_I | \vec{r}_S) = p(\vec{r}_I) + f(\Delta r), \quad (8)$$

where $p(\vec{r}_I) = m + p_n$ is the probability density of detection of a photoelectron issued from another pair or from noise (accidental coincidences) and $f(\Delta r)$ is the probability density of detection of the twin photon, with $\Delta r = \|\vec{r}_2 \pm \vec{r}_1\|$, $+$ holding for the far field (correlation of momenta on opposite modes) and $-$ holding for the near field. We assume translational invariance, circular symmetry, and independence of the pairs (pure SPDC without further amplification). Hence, if N_S is the number of photons S detected on a surface S_S and N_I is the corresponding quantity for photons I on a surface S_I , we have

$$\begin{aligned} \langle N_S N_I \rangle &= \int_{S_S} dr_S^2 \int_{S_I} dr_I^2 p(\vec{r}_S \text{ and } \vec{r}_I) \\ &= \int_{S_S} dr_S^2 \int_{S_I} dr_I^2 \{p(\vec{r}_S)p(\vec{r}_I) + p(\vec{r}_S)f(\Delta r)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Therefore, the probability of detection in S_I of the twin photon I of the photon S detected on S_S is simply given by

$$F(S_I) = \int_{S_I} dr_I^2 f(\Delta r) = \frac{\langle N_S N_I \rangle - \langle N_S \rangle \langle N_I \rangle}{\langle N_S \rangle}. \quad (10)$$

If S_S and S_I have the same size, this expression can be symmetrized and becomes the normalized intercorrelation

function:

$$F(S_I) = F(S_S) = \frac{\langle N_S N_I \rangle - \langle N_S \rangle \langle N_I \rangle}{(\langle N_S \rangle + \langle N_I \rangle)/2}. \quad (11)$$

For independent pairs, i.e., a pure Poissonian statistics for each beam, this quantity can also be expressed as a function of the variance of the difference between N_S and N_I :

$$\begin{aligned} \langle N_S \rangle &= \langle N_I \rangle = \langle (N_S)^2 \rangle - \langle N_S \rangle^2 \Rightarrow \\ F(S_I) &= 1 - \frac{\langle (N_S - N_I)^2 \rangle}{\langle (N_S + N_I) \rangle}. \end{aligned} \quad (12)$$

Hence, if we assume a pure Poissonian statistics of the pairs, a positive value of the correlation peak corresponds to a sub-shot-noise level of the variance of the difference, ensuring the demonstration of quantum correlations. The validity of this Poissonian assumption is a subtle matter, that is discussed in the following. On one hand, even if the statistics for each temporal mode is thermal, the number of photons in one temporal mode v^2 is much lower than 1, ensuring that the variance $u^2 v^2 \approx v^2$, i.e., the same equality as for a Poissonian beam. On the other hand, it has been extensively shown (see, for example, [22]) that classical thermal correlations can be evidenced even in this situation. This is the Handbury-Twiss-Brown effect [23]: if a classical thermal beam is divided in two, the rate of coincidences in a coherence cell, though low, is twice the accidental rate outside this coherence cell. However, this effect is negligible in our situation: $\mathcal{M} \approx 10^3$ independent temporal modes add on each pixel and it is very unlikely that two pairs come from the same temporal mode. Quantitatively, the rate of accidental coincidences m^2 in Eq. (2) is much greater than the classical thermal term $\frac{m^2}{\mathcal{M}}$. We have compared in Fig. 3 of [3] the experimental estimation of the degree of correlation between images issued either from Eq. (11) or Eq. (12), with a good agreement. Nevertheless, because of the possibility of classical correlations for thermal beams that obey a statistics exhibiting some Poissonian characters, the only safe criterion ensuring the quantum character of a correlation peak is the further demonstration of the sub-shot-noise level of the variance of the difference:

$$\frac{\langle (N_S - N_I)^2 \rangle}{\langle (N_S + N_I) \rangle} < 1. \quad (13)$$

Indeed, for a symmetrical process like SPDC, this sub-shot-noise level is equivalent to the violation of a Cauchy-Schwarz inequality [19,24]. However, we will see in the next section some possible artifacts in the estimation of both the correlation peak and the variance of the difference, that, if not corrected, could appear as quantum classical or not correlated beams.

Because of the translational invariance, the means in Eqs. (11) and (12) can be estimated by spatial averages on the different pixels in one image. Hence, we can estimate $P(\mathbf{r}_S \text{ and } \mathbf{r}_I)$ by summing the products of the fluences for pixels having the same difference of spatial positions:

$$\widehat{G(\Delta \mathbf{r})} = \frac{1}{D K} \sum_{d=1}^D \sum_{k=1}^K N_{S,d,k} N_{I,d',k}, \quad (14)$$

where D is the total number of pixels in each area and d' is the coordinate in the idler image corresponding to a shift of

$\Delta \mathbf{r}$ with respect to the coordinate d in the signal image. Edge effects, i.e., $d' > D$, can be easily treated: we are actually interested in the small values of $\Delta \mathbf{r}$. It is possible to define, for the range of these small values, a region of interest of D pixels on the signal image sufficiently small to be sure that the idler value $N_{I,d',k}$ has been acquired.

The covariance $\widehat{H}(\Delta \mathbf{r})$ between pixels can be computed by subtracting the estimated means:

$$\widehat{H}(\Delta \mathbf{r}) = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{d=1}^D (N_{S,d,k} - \overline{N_{S,d}})(N_{I,d',k} - \overline{N_{I,d'}})}{D(K-1)}, \quad (15)$$

where the horizontal bar means an average over the images for a given pixel: $\overline{N_{S,d}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K N_{S,d,k}$. Unlike G , H vanishes for $f(\Delta \mathbf{r} \neq \mathbf{0})$ and can be easily computed by using a standard correlation routine.

The interest of this sum over different couples of pixels in an image is of course to considerably increase the SNR. Equation (7) becomes, by still assuming $m + p_n \ll 1$,

$$\text{SNR} \simeq \sqrt{D K} \frac{\eta m}{m + p_n}. \quad (16)$$

III. REALISTIC CONDITIONS

We now consider the influence of more realistic conditions on the SNR. Specifically, the list of treated items includes (1) diffraction effects, leading to a probability of incidence of the twin photon on several pixels forming a coherence area; (2) a non-negligible probability of incidence of two photons or more on one pixel; and (3) a non-space-stationary beam, because of its Gaussian shape.

The first effect evidently determines the width of the quantum peak but we show below that it is also strongly connected to the effective SNR. The two other effects can lead to classical beams appearing as quantum. Only after their correction, the criterion of a sub-Poissonian variance becomes effective to characterize the quantum regime.

A. Diffraction and coherence cells

It can be demonstrated [3,25] that the conditional probability density in the far field is proportional to the pump amplitude in this plane, and therefore has the same width inasmuch as this width is much smaller than the width of the phase matching function. A dual relation exists in the near field: the width of the conditional probability function is given in this plane by the inverse of the phase-matching range. Hence in both planes, the number of transverse modes, or resolution cells in [4], has been recognized [1,2] as corresponding to the two-photon Schmidt number. The total conditional probability is given by the integral of the conditional probability density over the coherence cell. Experimentally, a binning (grouping) of the pixel in either the images or the intercorrelation bidimensional function allows the retrieval of a peak of maximal height for the quantum correlation function. To roughly quantify the influence of this binning on the SNR, let us suppose that the conditional probability density is constant over a coherence cell of C pixels. The conditional probability $P_{ii} = \eta m$ of our idealized model is now shared between these C pixels, with a corresponding division of the signal-to-noise ratio if there is

no binning (nothing has changed regarding P_{acc}):

$$\text{SNR}_{\text{no bin}} \simeq \frac{\sqrt{D K}}{C} \frac{\eta m}{m + p_n}. \quad (17)$$

By binning these C pixels, we recover a twin signal equal to ηm , while the variance of the noise is multiplied by C , leading to a SNR:

$$\text{SNR}_{\text{bin}} \simeq \sqrt{\frac{D}{C}} K \frac{\eta m}{m + p_n}. \quad (18)$$

Hence, with an adequate binning, the SNR appears to be proportional to the square root of the number $N_C = \frac{D}{C}$ of coherence cells in the image. The same conclusion holds if the experiment has been designed to ensure a size of a physical pixel corresponding to a coherence cell. It corresponds simply to the case $C = 1$ in the preceding equations.

It is interesting to give an order of magnitude of the minimum total number of coherence cells ensuring a determination without ambiguities of the quantum correlation peak. If we assume that the fluctuations of the accidental coincidences are Gaussian, they never exceed five standard deviations. For $m \gg p_n$, it means that no ambiguity is possible if $\text{SNR} > 5$, or $N_C K > (\frac{5}{\eta})^2$. For a single couple of images, $K = 1$, and an overall quantum efficiency of 0.1, it corresponds to 50 coherence cells in each transverse direction. This overall quantum efficiency corresponds in practice to the integral of the normalized correlation signal, as experimentally determined in the far field [3] (see Sec. IV). Fifty coherence cells correspond to a degree of EPR paradox of 2500 in each direction, while our best recent results are 600 in a direction and 30 in the orthogonal one [26]. Nevertheless, the objective does not seem out of reach, since the overall quantum efficiency could be probably improved.

B. Several photons incident on one pixel

Experimentally, the use of an on-off detector like an EMCCD in the thresholding regime leads, for a coherent beam, to a measured variance smaller than the measured mean. This phenomenon can be easily explained by taking into account the cases where two photoelectrons or more are accumulated in the same pixel. If μ is the true mean number of photoelectrons accumulated in one pixel, a thresholding procedure would give, in the absence of false detections, a measured mean m given by

$$m = 1 - p(0) = 1 - \exp(-\mu), \quad (19)$$

where $p(0)$ is the probability of detecting no photoelectron. The first equality expresses the fact that the thresholding procedure is unable to distinguish between one and more photoelectrons on one pixel, while the second equality reflects the Poissonian distribution of photoelectrons. With the same hypotheses, the measured variance σ_m^2 is given by

$$\sigma_m^2 = m^2 p(0) + (1 - m)^2 [1 - p(0)] = m(1 - m). \quad (20)$$

Hence, the measured variance is smaller than the measured mean, because of the binary detection. Moreover, the variance of the difference is affected in the same way as the variance by this effect and the ratio between these variances gives an estimation of quantum correlations for independent pairs, with a standard quantum limit equal to 2. However, the more

general criterion separating the classical and the quantum world involves the means, like in Eq. (13). To employ such a criterion, the mean m must be replaced by the corrected mean $m(1 - m)$. This correction was first proposed by our group in [13]. It was rediscovered, seemingly independently, four years later in a somewhat more general context [27].

When the mean is estimated on a small number of samples, the estimator \widehat{m} of m fluctuates and the nonbiased estimator of the variance for K samples is given by

$$\widehat{\sigma}_m^2 = \frac{K}{K-1} \widehat{m}(1 - \widehat{m}), \quad \text{with} \quad \widehat{m} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K N_k, \quad (21)$$

with an indeterminate result for $K = 1$ ($\widehat{m} = 0$ or 1).

In the presence of detector noise, all the above reasoning remains valid if we replace the true number of photoelectrons μ by the number of electrons that is read $\mu + p_n$. The measured mean m is now given by $m = 1 - p(0) = 1 - \exp[-(\mu + p_n)]$. With this new definition of the measured mean, Eq. (20) remains valid.

C. Non-space-stationary beam

We have to perform statistics on all the transverse section of the Gaussian beam to take into account the largest part of the photon flux in order to make full-field measurements. Therefore, the hypothesis of stationary statistics of our idealized model is completely ruled out. At first sight, it does not seem to have important consequences: (co)variances between independent coherence cells add, like means, and summations allow the test of the sub-shot-noise character of the variance of the difference, by simply assuming a constant fluence on the different pixels of each coherence cell. By also assuming that the mean level of SPDC does not fluctuate from an image to another, we can indeed calculate the variance of the difference and the corrected mean for each pixel on the K images, and then perform spatial averages. The test of the quantum regime is obtained as

$$\frac{(K-1) \sum_{d=1}^D \sum_{k=1}^K (N_{S,d,k} - N_{I,d',k})^2}{K^2 \sum_{d=1}^D [\widehat{N}_{S,d}(1 - \widehat{N}_{S,d}) + \widehat{N}_{I,d'}(1 - \widehat{N}_{I,d'})]} < 1. \quad (22)$$

On the other hand, a difficulty appears if the corrected mean is calculated image per image, in order to test the quantum regime for each individual image. In this spirit, we define for the image k a coefficient r_k [14]:

$$r_k = \frac{\frac{1}{D} \sum_{d=1}^D (N_{S,d,k} - N_{I,d',k})^2}{\widehat{N}_{S,k}(1 - \widehat{N}_{S,k}) + \widehat{N}_{I,k}(1 - \widehat{N}_{I,k})}, \quad (23)$$

where the estimation is performed by an average on the whole image: $\widehat{N}_{S,k} = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D N_{S,d,k}$. However, $r_k < 1$ for an image and $\bar{r} < 1$ for the average on K images are not correct criteria of the quantum regime for a SPDC beam with Gaussian shape. Indeed, the variance estimate $\widehat{N}_{S,k}(1 - \widehat{N}_{S,k})$ includes a deterministic term due to the variation in space of the mean SPDC intensity. More precisely, for a pixel d localized at a given point in the Gaussian beam, the measured variance averaged on a great number of realizations with the same experimental conditions as in the image k can be written as

$$\sigma_m^2 = \langle N_{S,d,k}(1 - N_{S,d,k}) \rangle. \quad (24)$$

In practice, σ_m^2 can be estimated by averaging over the pixels of an image as

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_m^2 &= \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \langle N_{S,d,k}(1 - N_{S,d,k}) \rangle \\ &= \widehat{N}_{S,k} - \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \langle N_{S,d,k}^2 \rangle \\ &= \langle \widehat{N}_{S,k}(1 - \widehat{N}_{S,k}) \rangle - \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \langle \Delta N_d^2 \rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

where $\Delta N_d = \langle N_{S,d,k} - \widehat{N}_{S,k} \rangle$ is the deterministic deviation from the mean of the measured SPDC at the pixel d .

To conclude, the corrected mean overestimates the variance of the random fluctuations because this corrected mean includes also a term of variance due to the deterministic variations between pixels. It can be shown in the same way that the usual estimator of the variance overestimates the random part of the variance of the same quantity for the same reasons. On the other hand, there is no deterministic part in the variance of the difference inasmuch as the deterministic profiles of the signal and the idler are identical, because the mean of this difference is zero whatever the pixels. As a consequence, even decorrelated beams can exhibit an apparent sub-Poissonian behavior. We have indeed verified on noncorrelated experimental images that the variance of the difference appears smaller than the sum of the variances as well as the sum of the corrected means. After subtraction of the deterministic term, the expected equality is restored. This analysis has similarities, but also differences, with that performed in [20]. In both cases, experimental variance estimators are shown to include deterministic terms. However, these terms concern in [20] variation of quantum efficiency from one pixel to another, in a regime of proportional detection of fluences of several photons per pixel by a conventional CCD. In the photon-counting regime, the thresholding procedure renders this term negligible. Hence, the corrections affect both the variance and the variance of the difference in [20], while our correction consists in subtracting from the variance and from the corrected mean a deterministic term coming from the global Gaussian shape of the SPDC, with no modification of the variance of the difference, in order to avoid the measurement of a quantum regime [$F(S_I) < 1$] in Eq. (12) for independent images.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

Figure 1 shows the experimental signal-to-noise ratio of the mean intercorrelation of couples of far-field signal-idler images of SPDC, for different intensity levels. The experiment involves two cameras and details of the experimental setup can be found in [26]. To calculate this SNR, we first fit the intercorrelation peak with a Gaussian function, then sum the values of this function for all pixels. The term of noise is directly given by the standard deviation of the mean intercorrelation in an area where its mean value is zero, i.e., far from the intercorrelation peak. With this experimental procedure, Eq. (16) of our idealized model remains valid

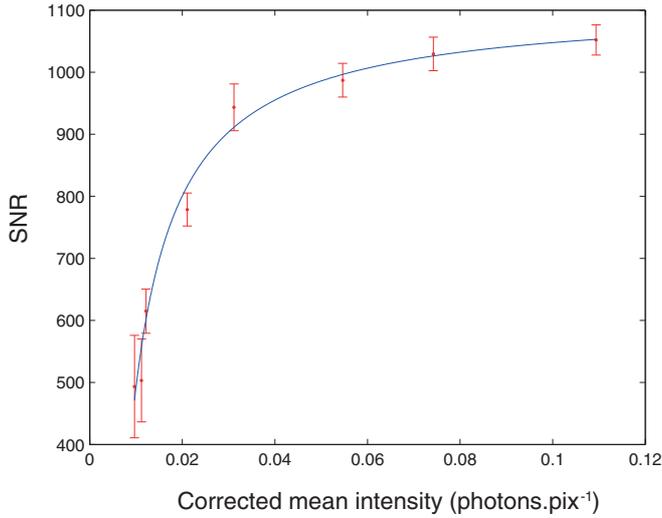


FIG. 1. (Color online) SNR vs the corrected mean intensity for 700 images and 384×384 pixels. Red stars: experimental values. Blue curve: Eq. (26) with parameters given in the text. The error bars are 95% confidence intervals deduced from the standard deviation of the SNR for sets of ten series of 70 images.

even for a coherence cell not reduced to one pixel (note, however, that this method is applicable only if the position of the correlation peak has been previously determined). Indeed, the theoretical value issued from this equation appears to be in good agreement with the experimental values. The measured quantity is the sum of the photoelectrons and of the noise $I = m + p_n$. By applying the correction proposed in Sec. III B, Eq. (16) becomes

$$\text{SNR} \simeq \sqrt{D K} \frac{\eta [I(1-I)] - p_n}{I(1-I)}. \quad (26)$$

With $D = 384 \times 384$ pixels and $K = 700$ images, the best fit of the experimental points of Fig. 1, using a standard nonlinear least-squares procedure, is obtained with $\eta = 0.109$ and $p_n = 5.6 \cdot 10^{-3}$. This latter value is compatible with the usual level of the CIC in an EMCCD camera [17]. Moreover, the standard deviation of the mean intercorrelation function appears, for all intensity levels, to be equal within 10% to $I(1-I)/\sqrt{D K}$. On the other hand, $\eta = 0.109$ does not correspond to the actual overall quantum efficiency of the system, which is approximately 0.5 by taking into account all the optical elements. A part of the discrepancy could come from stray light generated by fluorescence of the optical elements. Because the level of this fluorescence is proportional to the pump intensity, like SPDC and unlike CIC, its effect is similar to a decrease of the quantum efficiency. Indeed, if F photons coming from a pair plus αF single photons are incident on one of the twin pixels of our idealized model, the mean number of photoelectrons becomes $m = \eta(1 + \alpha)F$, while the correlation signal remains equal to $\eta^2 F = \eta' m$, with $\eta' = \eta/(1 + \alpha)$. Nevertheless, even by taking into account this fluorescence $\eta = 0.109$ is weaker than expected. Note that the degree of correlation can be directly assessed from Eq. (11) or Eq. (12), with the same too weak values [3]. As detailed in [28], many geometrical factors can affect the coefficient $F(S_I)$ of

Eq. (12). In short, if the signal and idler surfaces are not in strict correspondence, the variance of the difference increases. However, we do not believe that the low value of η given by our fitting procedure is related to such geometrical aspects. Indeed, if both photons of a pair are detected, they increase the integral of the correlation peak even if they are not detected on the right pixels. Hence, geometrical imperfections would result at best in a shifting of the correlation peak, at worst to an enlargement of the peak, but not to loss of photons. Since there is a good correspondence between the integral of the normalized intercorrelation function [Eq. (11)] and the variance of the difference for sufficiently binned pixels [Eq. (12)], we think that the geometrical correspondence is correct, resulting also in a correlation peak whose lateral dimensions are reasonably close to the theoretical values [26].

V. CONCLUSION

We have shown that the amount of quantum correlation between twin images can be determined by assessing the signal-to-noise ratio of the intercorrelation signal. This SNR scales as the square root of the number of involved coherence cells and images. Hence, it seems possible to obtain results on single couples of images for a sufficient number of coherence cells in the image. The SNR increases also with the mean level in the image, inducing the necessity of working at a relatively high level, unlike with the visibility criterion. Furthermore, the quantum nature of the correlation must be proved by computing the variance of the difference, that should be sub-Poissonian after correction of two artifacts, both of which could lead to an apparent sub-Poissonian correlation of images that are not correlated at all. The first artifact is due to the non-negligible probability of multiple photons on one pixel. The second is related to the deterministic spatial profile of the SPDC.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been partly supported by the Labex ACTION program (Contract No. ANR-11-LABX-0001-01).

APPENDIX

Here we show how a classical beam of light can appear to violate the Heisenberg uncertainty principle if measured with a one-dimensional detector. Such a classical state can be built by combining coherently two Gaussian beams. As shown in Fig. 2, we add two Gaussian beams of different sizes (a) and (b) to build the state presented in (c). If now we apply a one-dimensional detection on this last state, by selecting a row of pixels in the intensity beam profiles in both the near and the far field, we obtain the distributions presented in Fig. 3. We can then evaluate the standard deviation of those intensity distribution curves, in order to test the Heisenberg uncertainty principle. In our example, assuming a pixel size of $10 \mu\text{m}$ in the near field, we obtain the standard deviation in the near field $\sigma_x = 0.0733 \text{ mm}$ and in the far field $\sigma_p = 5.51 \hbar \text{ mm}^{-1}$, giving a product of

$$\sigma_x \sigma_p = 0.4039 \hbar < \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{A1})$$

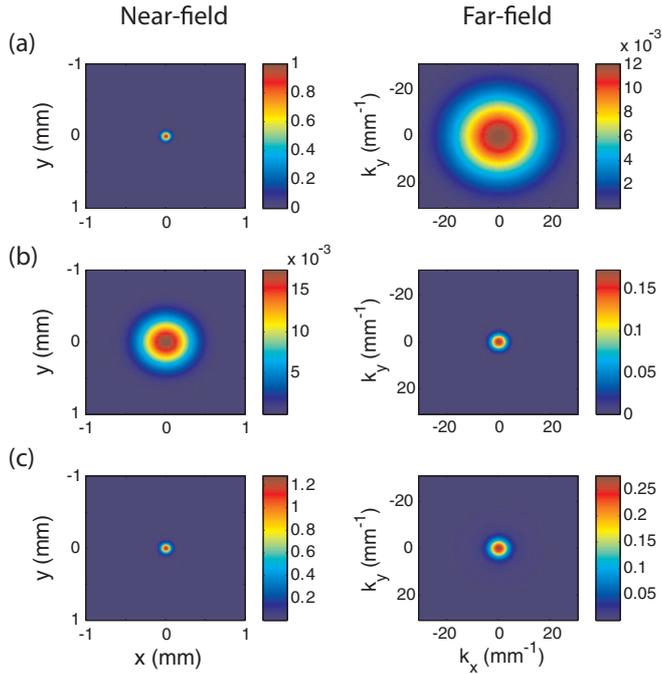


FIG. 2. (Color online) Intensity profiles of the beams in the near and far field. (a) Gaussian beam with a waist of $w_0 = 0.0847$ mm. (b) Gaussian beam with a waist of $w_0 = 0.4525$ mm. (c) Beam resulting from the coherent sum of the two previous beams. Color bars correspond to intensity levels expressed in arbitrary units.

This equation exhibits an apparent violation of the Heisenberg inequality. Of course the Heisenberg uncertainty principle is in fact verified by the state that we have built classically in Fig. 2(c). This false violation appears because of the lack of consistency in the previous test of the Heisenberg inequalities. Indeed, by applying a one-dimensional detection we are led to evaluate σ_x and σ_p on two distinct subsystems. As a consequence, the product of the standard deviations no longer has meaning because the Heisenberg principle governs the behavior of a unique system. We can easily be convinced that the two involved subsystems in the previous test were not the same, since the subsystem that is selected by one-dimensional detection in the near field would diffract in the far field on the whole plane after passing through a one pixel wide slit. The system involved in the far field, where detection is also performed on a row of pixels, is clearly different. Actually, at the center of the beam the contribution of the smallest Gaussian will always be favored in both the near and far field, leading to the apparent violation, while the largest beam is diluted in two dimensions because of the intrinsic two dimensionality of the diffraction phenomenon. For the same reasons, away from the center the most important contribution is always due to the larger Gaussians and those contributions have to be taken into account to maintain the consistency of the demonstration.

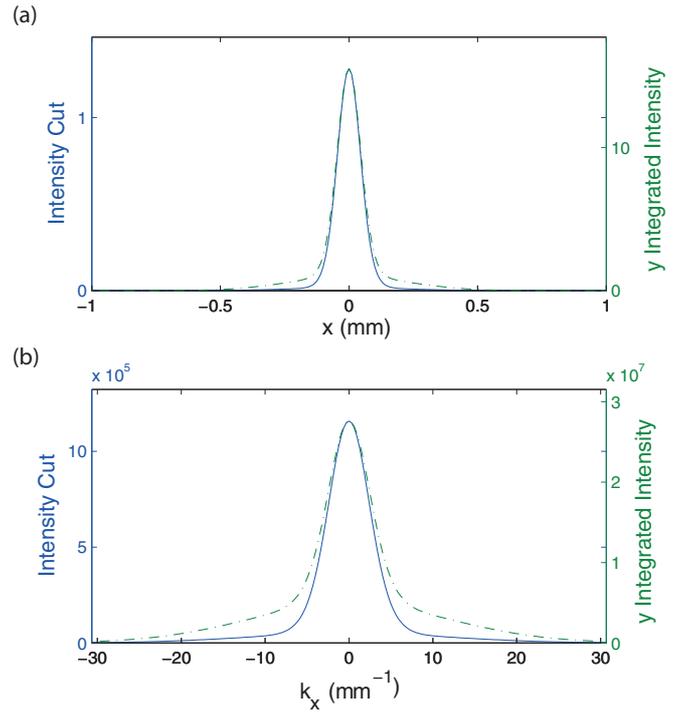


FIG. 3. (Color online) Full blue lines: one-dimensional intensity profiles which correspond to the selection of the row of pixels $y = 0$ in both the near field (a) and far field (b). Intensity levels are expressed in arbitrary units. Dashed green lines: corresponding y integrated intensities.

In order to maintain the consistency, the evaluations of σ_x and σ_p have to be done on the whole system by integrating on the two spatial transverse dimensions. By integrating on y for the light system presented in Fig. 2(c), we obtain the green dashed lines in Fig. 3, with a standard deviation $\sigma_x = 0.12$ mm in the near field and $\sigma_p = 8.54\hbar$ mm $^{-1}$ in the far field, giving the product

$$\sigma_x \sigma_p = 1.029\hbar, \quad (\text{A2})$$

thus satisfying the Heisenberg inequality as expected for classical light.

It should be noted that evidencing an EPR paradox requires the demonstration of the sub-Heisenberg behavior of correlations. As a consequence, the demonstration has to be done in the same context as that in which the Heisenberg principle can be correctly tested. In particular, such an EPR demonstration has to satisfy the criterion of uniqueness of the quantum system. The whole light system has therefore to be involved in both the near field and far field and only a two-dimensional integration would be consistent.

[1] C. K. Law and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 127903 (2004).
 [2] M. P. van Exter, A. Aiello, S. S. R. Oemrawsingh, G. Nienhuis, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **74**, 012309 (2006).

[3] F. Devaux, J. Mougins-Sisini, P. Moreau, and E. Lantz, *Eur. Phys. J. D* **66**, 192 (2012).

[4] F. Devaux and E. Lantz, *Opt. Commun.* **114**, 295 (1995).

- [5] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley, and R. W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 210403 (2004).
- [6] M. N. O'Sullivan-Hale, I. A. Khan, R. W. Boyd, and J. C. Howell, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220501 (2005).
- [7] P. B. Dixon, G. A. Howland, J. Schneeloch, and J. C. Howell, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 143603 (2012).
- [8] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [9] G. A. Howland and J. C. Howell, *Phys. Rev. X* **3**, 011013 (2013).
- [10] B. Jost, A. Sergienko, A. Abouraddy, B. A. Saleh, and M. C. Teich, *Opt. Express* **3**, 81 (1998).
- [11] O. Haderka, J. J. Perina, M. Hamar, and J. Perina, *Phys. Rev. A* **71**, 033815 (2005).
- [12] S. S. R. Oemrawsingh, W. J. van Drunen, E. R. Eliel, and J. P. Woerdman, *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 2391 (2002).
- [13] J. L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, and E. Lantz, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 233604 (2008).
- [14] J. L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro, and E. Lantz, *Phys. Rev. A* **81**, 043825 (2010).
- [15] P. A. Moreau, J. Mougins-Sisini, F. Devaux, and E. Lantz, *Phys. Rev. A* **86**, 010101(R) (2012).
- [16] M. P. Edgar, D. S. Tasca, F. Izdebski, R. E. Warburton, J. Leach, M. Agnew, G. S. Buller, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, *Nat. Commun.* **3**, 984 (2012).
- [17] E. Lantz, J. L. Blanchet, L. Furfaro, and F. Devaux, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **386**, 2262 (2008).
- [18] D. S. Tasca, M. P. Edgar, F. Izdebski, G. S. Buller, and M. J. Padgett, *Phys. Rev. A* **88**, 013816 (2013).
- [19] E. Brambilla, A. Gatti, L. A. Lugiato, and M. Kolobov, *Eur. Phys. J. D* **15**, 127 (2001).
- [20] G. Brida, M. Genovese, A. Meda, and I. R. Berchera, *Phys. Rev. A* **83**, 033811 (2011).
- [21] See <http://www.andor.com/learning-academy/ccd,-emccd-and-iccd-comparisons-difference-between-the-sensors>
- [22] L. Basano, P. Ottonello, and T. Torre, *J. Opt. Soc. Am. B* **22**, 1314 (2005).
- [23] R. H. Brown and R. Q. Twiss, *Proc. R. Soc. A* **242**, 300 (1957).
- [24] K. V. Kheruntsyan, J.-C. Jaskula, P. Deuar, M. Bonneau, G. B. Partridge, J. Ruauadel, R. Lopes, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 260401 (2012).
- [25] B. E. A. Saleh, A. F. Abouraddy, A. V. Sergienko, and M. C. Teich, *Phys. Rev. A* **62**, 043816 (2000).
- [26] P. A. Moreau, F. Devaux, and E. Lantz, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 160401 (2014).
- [27] J. Sperling, W. Vogel, and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **85**, 023820 (2012).
- [28] A. Meda, I. Berchera, I. Degiovanni, G. Brida, M. Rastello, and M. Genovese, *Appl. Phys. Lett.* **105**, 101113 (2014).

Bibliographie

- [Abouraddy et al., 2007] Abouraddy, A. F., Yarnall, T., Saleh, B. E., and Teich, M. C. (2007). Violation of Bell’s inequality with continuous spatial variables. *Physical Review A*, 75(5) :052114.
- [Adlard et al., 1997] Adlard, C., Pike, E., and Sarkar, S. (1997). Localization of one-photon states. *Physical review letters*, 79(9) :1585.
- [Aspect et al., 1982a] Aspect, A., Dalibard, J., and Roger, G. (1982a). Experimental test of Bell’s inequalities using time- varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :1804–1807.
- [Aspect et al., 1981] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G. (1981). Experimental tests of realistic local theories via Bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :460–463.
- [Aspect et al., 1982b] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G. (1982b). Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment* : A new violation of Bell’s inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :91–94.
- [Banaszek and Wódkiewicz, 1998] Banaszek, K. and Wódkiewicz, K. (1998). Nonlocality of the Einstein-Podolsky-Rosen state in the Wigner representation. *Physical Review A*, 58(6) :4345.
- [Barreto et al., 2012] Barreto, J., Cease, H., Diehl, H., Estrada, J., Flaughner, B., Harrison, N., Jones, J., Kilminster, B., Molina, J., Smith, J., et al. (2012). Direct search for low mass dark matter particles with CCDs. *Physics Letters B*, 711(3) :264–269.
- [Basden et al., 2003] Basden, A., Haniff, C., and Mackay, C. (2003). Photon counting strategies with low-light-level CCDs. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 345(3) :985–991.
- [Bell, 1964] Bell, J. S. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1 :195–200.

-
- [Bell, 1986] Bell, J. S. (1986). EPR correlations and EPW distributions. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 480(1) :263–266.
- [Bennett et al., 1992] Bennett, C. H., Bessette, F., Brassard, G., Salvail, L., and Smolin, J. (1992). Experimental quantum cryptography. *Journal of cryptology*, 5(1) :3–28.
- [Bennink et al., 2002] Bennink, R. S., Bentley, S. J., and Boyd, R. W. (2002). 'Two-photon' coincidence imaging with a classical source. *Physical review letters*, 89(11) :113601.
- [Blanchet et al., 2008] Blanchet, J.-L., Devaux, F., Furfaro, L., and Lantz, E. (2008). Measurement of sub-shot-noise correlations of spatial fluctuations in the photon-counting regime. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :233604.
- [Blanchet et al., 2010] Blanchet, J.-L., Devaux, F., Furfaro, L., and Lantz, E. (2010). Purely spatial coincidences of twin photons in parametric spontaneous down-conversion. *Phys. Rev. A*, 81 :043825.
- [Bleuler and Bradt, 1948] Bleuler, E. and Bradt, H. L. (1948). Correlation between the states of polarization of the two quanta of annihilation radiation. *Phys. Rev.*, 73 :1398–1398.
- [Boschi et al., 1998] Boschi, D., Branca, S., De Martini, F., Hardy, L., and Popescu, S. (1998). Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical Review Letters*, 80(6) :1121.
- [Bowles et al., 2014] Bowles, J., Vértesi, T., Quintino, M. T., and Brunner, N. (2014). One-way Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Physical Review Letters*, 112(20) :200402.
- [Boyd, 2003] Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear optics*, chapter 1, pages 1–68. Academic press.
- [Boyer et al., 2008] Boyer, V., Marino, A. M., Pooser, R. C., and Lett, P. D. (2008). Entangled images from four-wave mixing. *Science*, 321(5888) :544–547.
- [Brambilla et al., 2008] Brambilla, E., Caspani, L., Jedrkiewicz, O., Lugiato, L. A., and Gatti, A. (2008). High-sensitivity imaging with multi-mode twin beams. *Phys. Rev. A*, 77 :053807.
- [Brambilla et al., 2004] Brambilla, E., Gatti, A., Bache, M., and Lugiato, L. A. (2004). Simultaneous near-field and far-field spatial quantum correlations in the high-gain regime of parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 69 :023802.
- [Breitenbach et al., 1997] Breitenbach, G., Schiller, S., and Mlynek, J. (1997). Measurement of the quantum states of squeezed light. *Nature*, 387(6632) :471–475.
- [Brida et al., 2010] Brida, G., Genovese, M., and Berchera, I. R. (2010). Experimental realization of sub-shot-noise quantum imaging. *Nat Photon*, 4(4) :227–230.

- [Campos et al., 1989] Campos, R. A., Saleh, B. E., and Teich, M. C. (1989). Quantum-mechanical lossless beam splitter : Su (2) symmetry and photon statistics. *Physical Review A*, 40(3) :1371.
- [Clauser et al., 1969] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., and Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 23(15) :880.
- [Cohen, 1997] Cohen, O. (1997). Nonlocality of the original Einstein-Podolsky-Rosen state. *Physical Review A*, 56(5) :3484.
- [Cohen-Tannoudji et al., 1997] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., and Laloë, F. (1997). *Mécanique quantique*. Hermann.
- [Cohen-Tannoudji et al., 1987] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., and Grynberg, G. (1987). *Photons et atomes : Introduction a l'Electrodynamique Quantique*. Inter-éditions.
- [Cohen-Tannoudji et al., 2001] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., and Grynberg, G. (2001). *Processus d'interaction entre photons et atomes*. Edp Sciences.
- [Devaux et al., 2012] Devaux, F., Mougou-Sisini, J., Moreau, P.-A., and Lantz, E. (2012). Towards the evidence of a purely spatial Einstein-Podolsky-Rosen paradox in images : measurement scheme and first experimental results. *The European Physical Journal D*, 66(7) :1–6.
- [Edgar et al., 2012] Edgar, M., Tasca, D., Izdebski, F., Warburton, R., Leach, J., Agnew, M., Buller, G., Boyd, R., and Padgett, M. (2012). Imaging high-dimensional spatial entanglement with a camera. *Nat Commun*, 3 :984.
- [Einstein et al., 1935] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47 :777–780.
- [Franke-Arnold et al., 2013] Franke-Arnold, S., Gatti, A., and Treps, N. (2013). High dimensional quantum entanglement. *The European Physical Journal D*, 67(5).
- [Gatti et al., 2004] Gatti, A., Brambilla, E., Bache, M., and Lugiato, L. A. (2004). Ghost imaging with thermal light : comparing entanglement and classical correlation. *Physical review letters*, 93(9) :093602.
- [Grynberg et al., 2010] Grynberg, G., Aspect, A., and Fabre, C. (2010). *Introduction to quantum optics : from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge university press.
- [Händchen et al., 2012] Händchen, V., Eberle, T., Steinlechner, S., Samblowski, A., Franz, T., Werner, R. F., and Schnabel, R. (2012). Observation of one-way Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Nature Photonics*, 6(9) :596–599.
- [Hawton, 1999] Hawton, M. (1999). Photon position operator with commuting components. *Physical Review A*, 59(2) :954.

- [Hong et al., 1987] Hong, C. K., Ou, Z. Y., and Mandel, L. (1987). Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :2044–2046.
- [Horne et al., 1989] Horne, M. A., Shimony, A., and Zeilinger, A. (1989). Two-particle interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 62 :2209–2212.
- [Howell et al., 2004] Howell, J. C., Bennink, R. S., Bentley, S. J., and Boyd, R. W. (2004). Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :210403.
- [Howland and Howell, 2013] Howland, G. A. and Howell, J. C. (2013). Efficient high-dimensional entanglement imaging with a compressive-sensing double-pixel camera. *Physical Review X*, 3(1) :011013.
- [Hsu et al., 2005] Hsu, M. T., Bowen, W. P., Treps, N., and Lam, P. K. (2005). Continuous-variable spatial entanglement for bright optical beams. *Physical Review A*, 72(1) :013802.
- [Hynecek and Nishiwaki, 2003] Hynecek, J. and Nishiwaki, T. (2003). Excess noise and other important characteristics of low light level imaging using charge multiplying CCDs. *Electron Devices, IEEE Transactions on*, 50(1) :239–245.
- [Jacques et al., 2007] Jacques, V., Wu, E., Grosshans, F., Treussart, F., Grangier, P., Aspect, A., and Roch, J.-F. (2007). Experimental realization of wheeler’s delayed-choice gedanken experiment. *Science*, 315(5814) :966–968.
- [Janesick, 2001] Janesick, J. R. (2001). *Scientific charge-coupled devices*, volume 83. SPIE press.
- [Jedrkwicz et al., 2004] Jedrkiewicz, O., Jiang, Y.-K., Brambilla, E., Gatti, A., Bache, M., Lugiato, L. A., and Di Trapani, P. (2004). Detection of sub-shot-noise spatial correlation in high-gain parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :243601.
- [Jerram et al., 2001] Jerram, P., Pool, P. J., Bell, R., Burt, D. J., Bowring, S., Spencer, S., Hazelwood, M., Moody, I., Catlett, N., and Heyes, P. S. (2001). The LLCCD : low-light imaging without the need for an intensifier. In *Photonics West 2001-Electronic Imaging*, pages 178–186. International Society for Optics and Photonics.
- [Johansen, 1997] Johansen, L. M. (1997). EPR correlations and EPW distributions revisited. *Physics Letters A*, 236(3) :173–176.
- [Jost et al., 1998] Jost, B., Sergienko, A., Abouraddy, A., Saleh, B., and Teich, M. (1998). Spatial correlations of spontaneously down-converted photon pairs detected with a single-photon-sensitive ccd camera. *Optics Express*, 3(2) :81–88.
- [Kaiser et al., 2012] Kaiser, F., Coudreau, T., Milman, P., Ostrowsky, D. B., and Tanzilli, S. (2012). Entanglement-enabled delayed-choice experiment. *Science*, 338(6107) :637–640.

- [Kleinman, 1968] Kleinman, D. (1968). Theory of optical parametric noise. *Physical Review*, 174(3) :1027.
- [Kolobov, 2007] Kolobov, M. I. (2007). *Quantum imaging*. Springer Science & Business Media.
- [Laloë, 2013] Laloë, F. (2013). *Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique?* EDP sciences.
- [Lantz et al., 2008] Lantz, E., Blanchet, J.-L., Furfaro, L., and Devaux, F. (2008). Multi-imaging and Bayesian estimation for photon counting with EMCCDs. *Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society*, 386(4) :2262–2270.
- [Lantz and Devaux, 2000] Lantz, E. and Devaux, F. (2000). The phase-mismatch vector and resolution in image parametric amplification. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 2(5) :362.
- [Lantz et al., 2014] Lantz, E., Moreau, P.-A., and Devaux, F. (2014). Optimizing the signal-to-noise ratio in the measurement of photon pairs with detector arrays. *Phys. Rev. A*, 90 :063811.
- [Lantz et al., 2004] Lantz, E., Treppe, N., Fabre, C., and Brambilla, E. (2004). Spatial distribution of quantum fluctuations in spontaneous down-conversion in realistic situations. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 29(3) :437–444.
- [Leach et al., 2012] Leach, J., Warburton, R. E., Ireland, D. G., Izdebski, F., Barnett, S. M., Yao, A. M., Buller, G. S., and Padgett, M. J. (2012). Quantum correlations in position, momentum, and intermediate bases for a full optical field of view. *Phys. Rev. A*, 85 :013827.
- [Leggett, 2003] Leggett, A. J. (2003). Nonlocal hidden-variable theories and quantum mechanics : An incompatibility theorem. *Foundations of Physics*, 33(10) :1469–1493.
- [Li et al., 2012] Li, L., Liu, N.-L., and Yu, S. (2012). Duality relations in a two-path interferometer with an asymmetric beam splitter. *Physical Review A*, 85(5) :054101.
- [Louisell, 1990] Louisell, W. H. (1990). *Quantum Statistical Properties of Radiation*, volume 1. Wiley.
- [Ma et al., 2011] Ma, X.-s., Zotter, S., Tetik, N., Qarry, A., Jennewein, T., and Zeilinger, A. (2011). A high-speed tunable beam splitter for feed-forward photonic quantum information processing. *Optics express*, 19(23) :22723–22730.
- [Malygin et al., 1985] Malygin, A., Penin, A., and Sergienko, A. (1985). Spatiotemporal grouping of photons in spontaneous parametric scattering of light. In *Sov. Phys. Dokl*, volume 30, pages 227–229.
- [Mandel and Meltzer, 1969] Mandel, L. and Meltzer, D. (1969). Theory of time-resolved photoelectric detection of light. *Physical Review*, 188(1) :198.

- [Midgley et al., 2010] Midgley, S., Ferris, A., and Olsen, M. (2010). Asymmetric gaussian steering : when Alice and Bob disagree. *Physical Review A*, 81(2) :022101.
- [Moreau et al., 2014] Moreau, P.-A., Devaux, F., and Lantz, E. (2014). Einstein-Podolsky-Rosen paradox in twin images. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :160401.
- [Moreau et al., 2012] Moreau, P.-A., Mougins-Sisini, J., Devaux, F., and Lantz, E. (2012). Realization of the purely spatial Einstein-Podolsky-Rosen paradox in full-field images of spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 86 :010101.
- [Newton and Wigner, 1949] Newton, T. D. and Wigner, E. P. (1949). Localized states for elementary systems. *Rev. Mod. Phys.*, 21 :400–406.
- [Ou and Mandel, 1989] Ou, Z. Y. and Mandel, L. (1989). Further evidence of nonclassical behavior in optical interference. *Phys. Rev. Lett.*, 62 :2941–2944.
- [Ou et al., 1992] Ou, Z. Y., Pereira, S. F., Kimble, H. J., and Peng, K. C. (1992). Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :3663–3666.
- [Pershon, 1963] Pershan, P. (1963). Nonlinear optical properties of solids : energy considerations. *Physical Review*, 130(3) :919.
- [Peruzzo et al., 2012] Peruzzo, A., Shadbolt, P., Brunner, N., Popescu, S., and O’Brien, J. L. (2012). A quantum delayed-choice experiment. *Science*, 338(6107) :634–637.
- [Pittman et al., 1995] Pittman, T., Shih, Y., Strekalov, D., and Sergienko, A. (1995). Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement. *Physical Review A*, 52(5) :R3429.
- [Pittman et al., 1996] Pittman, T. B., Strekalov, D. V., Migdall, A., Rubin, M. H., Sergienko, A. V., and Shih, Y. H. (1996). Can two-photon interference be considered the interference of two photons? *Phys. Rev. Lett.*, 77 :1917–1920.
- [Rarity and Tapster, 1990] Rarity, J. G. and Tapster, P. R. (1990). Experimental violation of bell’s inequality based on phase and momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :2495–2498.
- [Reid, 1989] Reid, M. D. (1989). Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. *Phys. Rev. A*, 40 :913–923.
- [Reid and Drummond, 1988] Reid, M. D. and Drummond, P. D. (1988). Quantum correlations of phase in nondegenerate parametric oscillation. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :2731–2733.
- [Reid et al., 2009] Reid, M. D., Drummond, P. D., Bowen, W. P., Cavalcanti, E. G., Lam, P. K., Bachor, H. A., Andersen, U. L., and Leuchs, G. (2009). *Colloquium* : The Einstein-Podolsky-Rosen paradox : From concepts to applications. *Rev. Mod. Phys.*, 81 :1727–1751.

-
- [Revzen et al., 2005] Revzen, M., Mello, P., Mann, A., and Johansen, L. (2005). Bell’s inequality violation with non-negative Wigner functions. *Physical Review A*, 71(2) :022103.
- [Roslund et al., 2014] Roslund, J., De Araujo, R. M., Jiang, S., Fabre, C., and Treps, N. (2014). Wavelength-multiplexed quantum networks with ultrafast frequency combs. *Nature Photonics*, 8(2) :109–112.
- [Saleh et al., 2000] Saleh, B. E., Abouraddy, A. F., Sergienko, A. V., and Teich, M. C. (2000). Duality between partial coherence and partial entanglement. *Physical Review A*, 62(4) :043816.
- [Schrödinger, 1935] Schrödinger, E. (1935). Discussion of probability relations between separated systems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 31, no. 4, pages 555–563. Cambridge Univ Press.
- [Shapiro, 2008] Shapiro, J. H. (2008). Computational ghost imaging. *Physical Review A*, 78(6) :061802.
- [Smith and Raymer, 2007] Smith, B. J. and Raymer, M. (2007). Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory. *New Journal of Physics*, 9(11) :414.
- [Steinlechner et al., 2013] Steinlechner, S., Bauchrowitz, J., Eberle, T., and Schnabel, R. (2013). Strong Einstein-Podolsky-Rosen steering with unconditional entangled states. *Phys. Rev. A*, 87 :022104.
- [Strekalov et al., 1995] Strekalov, D., Sergienko, A., Klyshko, D., and Shih, Y. (1995). Observation of two-photon ‘ghost’ interference and diffraction. *Physical review letters*, 74(18) :3600.
- [Tasca et al., 2009] Tasca, D. S., Walborn, S. P., Souto Ribeiro, P. H., Toscano, F., and Pellat-Finet, P. (2009). Propagation of transverse intensity correlations of a two-photon state. *Phys. Rev. A*, 79 :033801.
- [Treps, 2001] Treps, N. (2001). *Effets quantiques dans les images optiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Treps and Fabre, 2000] Treps, N. and Fabre, C. (2000). Transverse distribution of quantum fluctuations and correlations in spatial solitons. *Phys. Rev. A*, 62 :033816.
- [Tualle-Brouri et al., 2009] Tualle-Brouri, R., Ourjoumtsev, A., Dantan, A., Grangier, P., Wubs, M., and Sørensen, A. S. (2009). Multimode model for projective photon-counting measurements. *Physical Review A*, 80(1) :013806.
- [Wagner et al., 2008] Wagner, K., Janousek, J., Delaubert, V., Zou, H., Harb, C., Treps, N., Morizur, J. F., Lam, P. K., and Bachor, H. A. (2008). Entangling the spatial properties of laser beams. *Science*, 321(5888) :541–543.
- [Walborn et al., 2003] Walborn, S. P., de Oliveira, A. N., Pádua, S., and Monken, C. H. (2003). Multimode Hong-Ou-Mandel interference. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :143601.

- [Walborn et al., 2011] Walborn, S. P., Salles, A., Gomes, R. M., Toscano, F., and Souto Ribeiro, P. H. (2011). Revealing hidden Einstein-Podolsky-Rosen nonlocality. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :130402.
- [Walls and Milburn, 2007] Walls, D. F. and Milburn, G. J. (2007). *Quantum optics*. Springer.
- [Wiseman et al., 2007] Wiseman, H. M., Jones, S. J., and Doherty, A. C. (2007). Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physical review letters*, 98(14) :140402.
- [Yariv, 1989] Yariv, A. (1989). *Quantum electronics*. Wiley.
- [Yarnall et al., 2007] Yarnall, T., Abouraddy, A. F., Saleh, B. E. A., and Teich, M. C. (2007). Experimental violation of Bell's inequality in spatial-parity space. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :170408.

Résumé :

Nous étudions les aspects spatiaux de l'intrication, d'une part dans le cadre de la génération d'états intriqués de haute dimensionnalité par amplification paramétrique optique, et d'autre part dans le cadre des expériences dites de Hong-Ou-Mandel. La première partie de cette étude s'attache à démontrer l'existence d'un paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) dans le comportement de la lumière de fluorescence générée par un amplificateur paramétrique optique. Le paradoxe EPR est étudié dans le contexte de sa formulation originelle, c'est-à-dire dans le domaine des positions et impulsions. La détection des photons intriqués est assurée à l'aide de caméras particulières, appelées caméras EMCCD, qui présentent la propriété de pouvoir atteindre un régime de comptage de photons. En prenant des images des faisceaux de fluorescence, nous montrons l'existence d'un paradoxe EPR de haut degré. La seconde partie de cette étude concerne les expériences de Hong-Ou-Mandel et cherche à démontrer, par l'utilisation de simulations, la possibilité d'obtenir une coalescence complète des paires de photons sur toute l'extension spatiale de faisceaux de fluorescence paramétrique. Partant du constat du comportement non-local qui apparaît clairement au cours de cette étude, nous démontrons la possibilité d'établir une inégalité de Bell pour ce phénomène d'interférence à deux photons. Nous montrons par ailleurs que le formalisme quantique prévoit la violation de cette inégalité de Bell par un état construit en filtrant l'état intriqué écrit par EPR en 1935.

Mots-clés : Paradoxe EPR, Intrication de forte dimensionnalité, Effet HOM, Non-localité, Images jumelles

Abstract:

Spatial aspects of entanglement in parametric amplification : Einstein-Podolsky-Rosen paradox in twin images and Hong-Ou-Mandel experiment.

We study spatial aspects of entanglement, first in the context of spontaneous down converted light exhibiting high dimensional entanglement, and in a second step through a simulated Hong-Ou-Mandel experiment. The first part of this study demonstrate an Einstein-Podolsky-Rosen paradox in its original formulation, e.g. in the context of position and momentum correlations. We detect photons by mean of special cameras including a gain register, called EMCCD cameras, able to count photon arrival on each pixel. By taking direct images of the fluorescence beams, we demonstrate a strong degree of EPR paradox. The second part of this study aim to demonstrate, by mean of simulations, the possibility to obtain a full field coalescence of fluorescence photons, due to the Hong-Ou-Mandel effect. Starting from the observation that the HOM effect exhibits a nonlocal behaviour, we establish a Bell inequality on the two photons interference phenomenon itself. We then show that the original 1935 EPR state is able to violate this Bell inequality.

Keywords: EPR paradox, High dimensional entanglement, HOM interference, Nonlocality, Twin images

The logo for the SPIM (École doctorale SPIM) features the letters 'S', 'P', 'I', and 'M' in a large, white, sans-serif font. The 'S' is stylized with a thick, light green horizontal bar extending to the left, partially overlapping the letter.

■ École doctorale SPIM 16 route de Gray F - 25030 Besançon cedex

■ tél. +33 [0]3 81 66 66 02 ■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

The logo for the University of Franche-Comté (UFC) consists of the letters 'U' and 'FC' in a large, bold, black font. Below them, the words 'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ' are written in a smaller, black, sans-serif font. A vertical yellow bar is positioned to the left of the 'U'.