

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

MIHAI BOSTAN

Modélisation de systèmes de particules et applications

soutenue le 23 novembre 2006 devant le jury

Rapporteurs :	JOSÉ ANTONIO CARRILLO	Université Autonome de Barcelone
	FRANÇOIS GOLSE	Université Paris 7
	PIERRE-EMMANUEL JABIN	Université de Nice Sophia-Antipolis

Examineurs :	STÉPHANE CORDIER	Université d'Orléans
	M. MOKHTAR-KHARROUBI	Université de Franche-Comté
	GAWTUM NAMAH	Université de Franche-Comté

REMERCIEMENTS

Le travail qui a abouti à cette habilitation a été effectué au Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté. J'exprime ma reconnaissance pour mon intégration au sein du laboratoire, ce qui m'a donné la possibilité de mener à bien tous mes projets de recherche.

J'adresse tous mes remerciements à Messieurs José Antonio Carrillo, François Golse et Pierre-Emmanuel Jabin pour avoir accepté de porter un jugement sur mon travail. Merci à tous les membres du jury de s'être rendus disponibles pour ma soutenance.

Je n'oublierai jamais le soutien constant, les encouragements répétés et la très grande disponibilité des collègues des équipes de Calcul Scientifique et Analyse des EDP, ce qui m'a permis de travailler à la fois dans la tranquillité et l'enthousiasme. Je remercie tout particulièrement toutes les personnes avec qui j'ai collaboré : Thierry Goudon (Université de Lille 1), Patrick Hild (Université de Franche-Comté), Simon Labrunie (Université de Nancy 1), Gawtum Namah (Université de Franche-Comté), Eric Sonnendrücker (Université de Strasbourg).

Je garde à l'esprit les bons moments passés en compagnie de Frédéric Poupaud, mon regretté directeur de thèse.

Merci, naturellement, à tous les collègues et amis. A tous je leur exprime ma sympathie et mon amitié.

MODÉLISATION DE SYSTÈMES DE PARTICULES ET APPLICATIONS

Présentation du mémoire

Ce mémoire rassemble mes résultats mathématiques obtenus après ma thèse de doctorat. Ces résultats portent essentiellement sur l'analyse théorique et numérique des EDP modélisant des systèmes de particules qui interagissent par des champs créés collectivement. J'ai abordé également d'autres thématiques comme le comportement en temps long des solutions des équations d'Hamilton-Jacobi du premier ordre, l'étude des solutions presque-périodiques des EDO, l'analyse des fluides de Bingham.

Pour la plupart, les résultats présentés dans ce mémoire n'ont pas la généralité de ceux de mes articles, l'objectif principal étant d'aider à la compréhension générale de mes travaux.

La première section synthétise les résultats d'existence de solution faible périodique en temps des équations de Vlasov-Poisson (VP), Vlasov-Maxwell (VM) dans un domaine borné. Dans le même cadre on retrouve le modèle de VP comme limite du modèle relativiste de VM lorsque la vitesse des particules est petite devant la vitesse de la lumière. L'unicité de la solution par caractéristiques est établie pour le problème 1D dans un intervalle borné avec condition initiale et conditions aux limites.

La deuxième section contient des résultats de stabilité pour le modèle collisionnel de Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck (VMFP) par rapport aux paramètres physiques caractéristiques d'un plasma. On obtient la limite champ fort en utilisant la méthode de l'énergie modulée (ou de l'entropie relative) et la limite champ faible par des méthodes de compacité.

La troisième section concerne l'analyse mathématique d'un modèle réduit introduit récemment par les physiciens pour étudier l'interaction laser-plasma. On montre l'existence globale et l'unicité de la solution par caractéristiques. Par la même méthode on traite un modèle d'astrophysique, obtenu par le couplage d'une équation de Vlasov avec la théorie gravitationnelle de Nordström. On justifie la convergence du modèle de Nordström-Vlasov (NV) vers le modèle de VP, lorsque la vitesse de la lumière est grande.

Dans la quatrième section je propose une méthode basée sur la formulation par caractéristiques pour l'approximation numérique des équations de VM. Cette méthode est validée à travers quelques simulations numériques.

La cinquième section regroupe des résultats d'existence et unicité de solution périodique en temps ou en espace : on étudie les solutions de viscosité périodiques et presque-périodiques en temps des équations d'Hamilton-Jacobi du premier ordre, on caractérise l'existence et l'unicité de la solution presque-périodique des EDO et on présente une analyse théorique et numérique des solutions périodiques en espace d'une équation, dite d'enveloppe, utilisée dans la modélisation des faisceaux de particules chargées.

La dernière section contient une analyse asymptotique du modèle des fluides de Bingham, lorsque les forces externes sont proches du seuil de blocage.

1 Les modèles de Vlasov-Maxwell et Vlasov-Poisson

Publications : [B4, B5, B6, B7, B8, B10, B11, B13].

On considère un système physique constitué de deux espèces de particules chargées (ions et électrons). On note $q_+ > 0$, m_+ et $q_- < 0$, m_- les charges et les masses des ions et des électrons respectivement. La vitesse d'une particule animée de l'impulsion p est donnée par

$$v_{\pm}(p) = \frac{p}{m_{\pm}}, \quad v_{\pm}(p) = \frac{p}{m_{\pm}} \left(1 + \frac{|p|^2}{m_{\pm}^2 c_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

dans les cas non relativiste et relativiste respectivement, c_0 étant la vitesse de la lumière dans le vide. On introduit les densités d'ions et d'électrons f_{\pm} dans l'espace des phases : pour tous les volumes $\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_p \subset \mathbb{R}^3$ le nombre d'ions/électrons qui se trouvent à l'instant t dans \mathcal{V}_x avec une impulsion comprise dans \mathcal{V}_p est donné par $\int_{\mathcal{V}_x} \int_{\mathcal{V}_p} f_{\pm}(t, x, p) dp dx$. On suppose que les particules n'interagissent que par l'intermédiaire des champs électriques et magnétiques créés collectivement (on néglige les collisions binaires). Dans ce cas les équations de mouvement des particules conduisent aux équations cinétiques de Vlasov

$$\partial_t f_{\pm} + v_{\pm}(p) \cdot \nabla_x f_{\pm} + q_{\pm}(E(t, x) + v_{\pm}(p) \wedge B(t, x)) \cdot \nabla_p f_{\pm} = 0.$$

Bien entendu E et B vérifient les équations de Maxwell

$$\partial_t E - c_0^2 \operatorname{curl} B = -\frac{j(t, x)}{\varepsilon_0}, \quad \partial_t B + \operatorname{curl} E = 0, \quad \operatorname{div} E = \frac{\rho(t, x)}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} B = 0,$$

où ε_0 est la permittivité électrique du vide et $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $j = j_+ + j_-$ sont les densités de charge et de courant données par

$$\rho_{\pm}(t, x) = q_{\pm} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\pm}(t, x, p) dp, \quad j_{\pm}(t, x) = q_{\pm} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\pm}(t, x, p) v_{\pm}(p) dp.$$

On complète éventuellement ces équations par des conditions initiales et des conditions aux limites. Le modèle obtenu est appelé le système de Vlasov-Maxwell tri-dimensionnel (VM3D). Si on néglige le champ magnétique B on peut prendre $E = -\nabla\Phi$. Le modèle obtenu en couplant les équations de Vlasov (avec vitesse non relativiste) et l'équation de Poisson $-\Delta\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ est appelé le système de Vlasov-Poisson tri-dimensionnel (VP3D).

Ces équations sont relativement bien comprises en ce qui concerne les problèmes de Cauchy dans l'espace tout entier. L'existence de solution faible pour VP3D a été montrée par Arseneev [6] tandis que l'existence et l'unicité de la solution forte ont été analysées par Cooper et Klimas [28] en 1D, Ukai et Okabe [95] en 2D, Lions et Perthame [73], Pfaffelmoser [79] en 3D. Un résultat d'existence locale de solution faible de VP3D avec charge totale et énergie cinétique infinies a été obtenu par Jabin [66]. Le premier résultat d'existence de solution faible pour VM3D a été démontré par DiPerna et Lions [43]. Des résultats d'existence et unicité pour la solution forte de VM ont été obtenus par Glassey et Schaeffer [53, 54]. Ces résultats reposent sur le Théorème de Glassey-Strauss [55]. Récemment l'existence de solution forte pour VM3D a été étudiée en utilisant des méthodes différentes par Klainerman et Staffilani [68], Bouchut, Golse et Pallard [18].

Cependant, la simulation de dispositifs repose sur des problèmes aux limites. Des solutions faibles ont été obtenues par Bézard [14], Guo [64] et Ben Abdallah [11]. Ce qui est particulièrement intéressant au niveau des applications est la modélisation des régimes permanents. Ces régimes permanents sont caractérisés par des solutions stationnaires ou périodiques. Le cas stationnaire a été étudié d'abord pour VP en une dimension d'espace par Greengard et Raviart [63], puis en dimension quelconque et pour VM par Poupaud [80]. Des résultats dans le cas périodique semblaient inexistant. Il paraissait donc nécessaire d'en avoir une meilleure compréhension. Mon travail de thèse a été un premier pas dans cette direction [BP1, BP2, BP3, B1].

Après ma thèse j'ai obtenu des résultats plus généraux : d'une part j'ai considéré des hypothèses moins restrictives (notamment j'ai supprimé l'hypothèse sur la compacité du support des données en impulsion), d'autre part j'ai traité ces équations en trois dimensions.

1.1 Solutions périodiques en temps du système de VP1D

Nous examinons dans cette section l'existence de solution faible périodique en temps des équations de VP1D dans un intervalle borné, avec des conditions aux limites. On se place dans le cadre non relativiste et on suppose que les différentes constantes physiques (la masse et la charge des particules, la permittivité électrique) sont égales à l'unité. On considère une seule espèce de particules dont la fonction de distribution est notée $f = f(t, x, v)$ où $t \in \mathbb{R}$ représente le temps, $x \in]0, 1[$ la position et $v \in \mathbb{R}$ la vitesse. Dans ce cas les équations de Vlasov-Poisson s'écrivent

$$\partial_t f + v \partial_x f + E(t, x) \partial_v f = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R} \times]0, 1[\times \mathbb{R},$$

$$E(t, x) = -\partial_x U, \quad -\partial_x^2 U = \rho(t, x) := \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times]0, 1[.$$

On impose les conditions aux limites

$$f(t, 0, v > 0) = g_0(t, v > 0), \quad f(t, 1, v < 0) = g_1(t, v < 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$U(t, 0) = \varphi_0(t), \quad U(t, 1) = \varphi_1(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $g_0 \geq 0$, $g_1 \geq 0$, φ_0 , φ_1 sont des fonctions bornées T périodiques en temps. Une approche naturelle consiste à se ramener à l'étude des points fixes d'une application non linéaire. La difficulté majeure est d'obtenir des estimations a priori. Notons que dans le cas d'un problème avec condition initiale les estimations résultent immédiatement par les conservations de la masse et de l'énergie. Ceci n'est plus possible quand on étudie les régimes permanents car dans ce cas on ne dispose pas de condition initiale.

L'équation de Vlasov est résolue au sens des distributions (on dit que f est une solution faible). Quand le champ électrique est régulier (lipschitzien par rapport à x , uniformément en t) on peut construire la solution par caractéristiques, qui est un cas particulier de solution faible. Un des points clé est d'observer que la variation de la vitesse au long d'une caractéristique de l'équation de Vlasov qui traverse une région bornée de l'espace est majorée par $(C\|E\|_{L^\infty})^{1/2}$ où C est une constante proportionnelle à la taille de la région traversée.

Soit $E \in L^\infty(\mathbb{R}; W^{1,\infty}(]0, 1[))$ un champ électrique régulier. Pour $(t, x, v) \in (\mathbb{R} \times]0, 1[\times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R} \times \{1\} \times \mathbb{R}^-)$ on note par $(X(s; t, x, v), P(s; t, x, v))$ l'unique solution de

$$\frac{dX}{ds} = V(s; t, x, v), \quad \frac{dV}{ds} = E(s, X(s; t, x, v)), \quad s_{\text{in}}(t, x, v) < s < s_{\text{out}}(t, x, v),$$

$$X(t; t, x, v) = x, \quad V(t; t, x, v) = v,$$

où $s_{\text{in}}, s_{\text{out}}$ sont les temps d'entrée et de sortie par rapport au domaine $]0, 1[$.

Lemme 1.1 (cf. [B4]) Soit $E \in L^\infty(\mathbb{R}; W^{1,\infty}(]0, 1[))$ et $(X(s), V(s))$ une caractéristique quelconque. Alors nous avons

$$|V(s_1) - V(s_2)| \leq 2\sqrt{2}\|E\|_{L^\infty}^{1/2}, \quad s_{\text{in}} \leq s_1 \leq s_2 \leq s_{\text{out}}.$$

Le lemme précédent nous permet d'estimer le champ électrique. L'ingrédient principal est la formulation par caractéristiques. Pour simplifier on suppose que $g_1 = 0$. On utilise les notations

$$(X^0(s), V^0(s)) = (X(s; t, 0, v), V(s; t, 0, v)), \quad s_{\text{out}}^0 = s_{\text{out}}(t, 0, v).$$

Rappelons que si E est régulier, T périodique et f est la solution par caractéristiques de l'équation de Vlasov alors pour toute fonction ψ , T périodique en temps nous avons

$$\int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f \psi \, dv dx dt = \int_0^T \int_{v>0} v g_0(t, v) \int_t^{s_{\text{out}}^0} \psi(s, X^0(s), V^0(s)) \, ds dv dt. \quad (1)$$

On veut estimer la masse totale de f sur une période de temps. Pour tout $R > 0$ nous avons $\int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f \, dv dx dt = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_0^T \int_0^1 \int_{|v| \leq R} f \, dv dx dt \leq 2TR \max\{\|g_0\|_{L^\infty}, \|g_1\|_{L^\infty}\}$ et $I_2 = \int_0^T \int_0^1 \int_{|v| > R} f \, dv dx dt$. Par la formulation (1) nous avons

$$I_2 = \int_0^T \int_{v>0} v g_0(t, v) \int_t^{s_{\text{out}}^0} \mathbf{1}_{\{|V^0(s)| > R\}} \, ds \, dv \, dt.$$

On prend $R = 6\sqrt{2}\|E\|_{L^\infty}^{1/2}$ et par le Lemme 1.1 on vérifie sans peine que :

- pour toute vitesse initiale $0 < v \leq 4\sqrt{2}\|E\|_{L^\infty}^{1/2}$ nous avons $|V^0(s)| \leq R, \forall t \leq s \leq s_{\text{out}}^0$ ce qui implique

$$\int_t^{s_{\text{out}}^0} \mathbf{1}_{\{|V^0(s)| > R\}} \, ds = 0 ;$$

- pour toute vitesse initiale $v > 4\sqrt{2}\|E\|_{L^\infty}^{1/2}$ nous avons $V^0(s) \geq v - 2\sqrt{2}\|E\|_{L^\infty}^{1/2}, \forall t \leq s \leq s_{\text{out}}^0$ et par conséquent

$$s_{\text{out}}^0 - t \leq \frac{1}{v - 2\sqrt{2}\|E\|_{L^\infty}^{1/2}} \leq \frac{2}{v}.$$

On en déduit que $I_2 \leq 2 \int_0^T \int_{v>0} g_0(t, v) \, dv dt$ et finalement on obtient une inégalité du type

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) \, dv dx dt \leq C(g_0)(1 + \|E\|_{L^\infty}^{1/2}).$$

Par des calculs supplémentaires on en déduit une majoration du même type pour le $\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) \, dv dx$. On peut conclure facilement car par l'équation de Poisson nous avons aussi

$$\|E\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0,1])} \leq \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) \, dv dx \leq C(g_0, \varphi_1 - \varphi_0)(1 + \|E\|_{L^\infty}^{1/2}).$$

On peut établir un résultat analogue à celui présenté dans le Lemme 1.1 en dimension supérieure. En le combinant avec des inégalités d'interpolation et de Sobolev on peut obtenir des bornes L^∞ du champ électrique pour des solutions de VP3D en domaine borné cf. [B13]. Ces bornes peuvent s'avérer utiles lorsqu'on souhaite estimer la taille du support en vitesse de la densité de particules f au vu des simulations numériques. Une fois l'estimation de la norme L^∞ du champ électrique établie, on montre facilement la propagation de tous les moments en vitesse de la densité de particules.

1.2 Solutions périodiques en temps du système de VM3D

Je me suis proposé d'obtenir un résultat d'existence de solution faible périodique en temps pour les équations de VM dans un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On note $\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^3$, $\Sigma^\pm = \{(x, p) \in \Sigma : \pm(v(p) \cdot n(x)) > 0\}$ où n représente la normale unitaire extérieure. On considère ici une seule espèce de particules chargées, de masse m et charge q , mais les résultats se généralisent sans peine au cas de plusieurs espèces. Le système de VM s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t f + v(p) \cdot \nabla_x f + q(E(t, x) + v(p) \wedge B(t, x)) \cdot \nabla_p f &= 0, \quad (t, x, p) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t E - c_0^2 \operatorname{curl} B &= -\frac{j(t, x)}{\varepsilon_0}, \quad \partial_t B + \operatorname{curl} E = 0, \quad \operatorname{div} E = \frac{\rho(t, x)}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega. \end{aligned}$$

On précise la densité de particules sur $\mathbb{R} \times \Sigma^-$ et on impose une condition de Silver-Müller sur $\mathbb{R} \times \partial\Omega$

$$f(t, x, p) = g(t, x, p), \quad (t, x, p) \in \mathbb{R} \times \Sigma^-,$$

$$n(x) \wedge E(t, x) + c_0 n(x) \wedge (n(x) \wedge B(t, x)) = h(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega.$$

On suppose que g , h sont T périodiques en temps et on veut montrer l'existence de solution (f, E, B) périodique en temps, de même période T . On cherche des bornes pour l'énergie totale (cinétique et électromagnétique). À nouveau on est confronté à la difficulté liée à l'absence de conditions initiales, car il s'agit d'un régime périodique en temps. De

ce fait l'étape d'estimation des solutions est beaucoup plus difficile : on ne peut pas conclure en utilisant seulement les conservations de la masse et de l'énergie totale. On surmonte cette difficulté en écrivant aussi la conservation de la quantité de mouvement et en utilisant la technique des multiplicateurs (voir [69]).

Voyons quelles sont les idées principales de cette étape. Nous traitons simultanément les cas non relativiste et relativiste. Rappelons que $v(p) = \nabla_p \mathcal{E}(p)$ où l'énergie cinétique est donnée par $\mathcal{E}(p) = \frac{|p|^2}{2m}$ dans le cas non relativiste et $\mathcal{E}(p) = mc_0^2 \left(\left(1 + \frac{|p|^2}{m^2 c_0^2}\right)^{1/2} - 1 \right)$ dans le cas relativiste. Pour simplifier nous supposons que (f, E, B) est une solution T périodique régulière de VM3D. Par l'intégration des conservations de la masse et de l'énergie sur une période de temps nous obtenons une borne pour la masse et l'énergie cinétique sortantes et l'énergie électromagnétique tangentielle :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Sigma^+} (v(p) \cdot n(x))(1 + \mathcal{E}(p)) f d\sigma dp dt + \frac{c_0 \varepsilon_0}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \{|n \wedge E|^2 + c_0^2 |n \wedge B|^2\} d\sigma dt \\ = \int_0^T \int_{\Sigma^-} |(v(p) \cdot n(x))|(1 + \mathcal{E}(p)) g d\sigma dp dt + \frac{c_0 \varepsilon_0}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |h|^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (2)$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, p) p dp + \operatorname{div} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, p) (p \otimes v(p)) dp = \rho(t, x) E(t, x) + j(t, x) \wedge B(t, x).$$

En utilisant le multiplicateur x on obtient après intégration sur $]0, T[\times \Omega$

$$\int_0^T \int_{\Sigma} (v(p) \cdot n(x)) (p \cdot x) f d\sigma dp dt = \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (v(p) \cdot p) f dp dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\rho E + j \wedge B) \cdot x dx dt.$$

Le choix du multiplicateur x est motivé par l'apparition du terme $\int_0^T \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (v(p) \cdot p) f dp dx dt$ qui domine l'énergie cinétique, car nous avons l'inégalité $(v(p) \cdot p) \geq \mathcal{E}(p)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^3$.

En tenant compte des équations de Maxwell on vérifie sans peine que :

$$\rho E + j \wedge B = \varepsilon_0 (\operatorname{div} E E - E \wedge \operatorname{curl} E) + \varepsilon_0 c_0^2 (\operatorname{div} B B - B \wedge \operatorname{curl} B) - \varepsilon_0 \partial_t (E \wedge B).$$

On fait appel à l'identité $\operatorname{div} u u - u \wedge \operatorname{curl} u = \operatorname{div}(u \otimes u) - \frac{1}{2} \nabla |u|^2$. En combinant les calculs précédents on en déduit une borne pour l'énergie totale ainsi que pour les traces normales du champ électromagnétique. On démontre le résultat

Théorème 1.1 (cf. [B5, B8]) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$ régulière et strictement étoilée. On considère $g \in L^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma^-)$ et h des fonctions T périodiques telles que $g \geq 0$, $(n \cdot h)|_{\mathbb{R} \times \partial\Omega} = 0$ et*

$$\int_0^T \int_{\Sigma^-} |(v(p) \cdot n(x))|(1 + \mathcal{E}(p)) g(t, x, p) d\sigma dp dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |h(t, x)|^2 d\sigma dt < +\infty.$$

Alors il existe au moins une solution faible T périodique (f, E, B) du système de VM3D (cas non relativiste ou relativiste) qui possède des traces $\gamma^+ f \in L^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma^+)$, $(n \cdot E, n \cdot B) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega))^2$, $(n \wedge E, n \wedge B) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega)^3)^2$.

Il est possible de traiter d'autres conditions aux limites ou des mélanges de plusieurs espèces de particules chargées. L'existence de solution faible périodique en temps de VP en N dimensions suit par la même méthode [B11]. Par des calculs similaires on peut estimer les solutions périodiques en temps des modèles de VP ou VM avec un terme de collisions de Fokker-Planck (FP).

1.3 Convergence du modèle relativiste de VM vers le modèle de VP

Il existe dans la littérature plusieurs résultats justifiant le modèle de VP comme limite du modèle relativiste de VM lorsque les particules se déplacent à des vitesses petites devant celle de la lumière. Des résultats de ce type ont été prouvés par Degond [38], Schaeffer [91], Lee [71] pour des solutions classiques. Je me suis proposé d'étudier le même comportement asymptotique pour des régimes permanents (solutions stationnaires et solutions périodiques en temps). On rencontre des difficultés supplémentaires : d'une part on travaille avec des solutions faibles ; d'autre part on se place dans un domaine borné tri-dimensionnel, en imposant des conditions aux limites. Présentons ici le cas des solutions stationnaires, qui est beaucoup plus simple par rapport à celui des solutions périodiques. Pour tout $c > 0$ on note par (f_c, E_c, B_c) une solution faible stationnaire du modèle relativiste de VM3D

$$\begin{aligned} v_c(p) \cdot \nabla_x f_c + q(E_c(x) + v_c(p) \wedge B_c(x)) \cdot \nabla_p f_c &= 0, \quad (x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^3, \\ c^2 \operatorname{curl} B_c &= \frac{j_c(t, x)}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{curl} E_c = 0, \quad \operatorname{div} E_c = \frac{\rho_c(x)}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} B_c = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$f_c(x, p) = g(x, p), \quad (x, p) \in \Sigma^-,$$

$$n(x) \wedge E_c(x) + c n(x) \wedge (n(x) \wedge B_c(x)) = h(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

où $v_c(p) = \nabla_p \mathcal{E}_c(p)$, $\mathcal{E}_c(p) = mc^2 \left(\left(1 + \frac{|p|^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} - 1 \right)$, $\rho_c = q \int_{\mathbb{R}^3} f_c dp$, $j_c = q \int_{\mathbb{R}^3} f_c v_c(p) dp$. Comme précédemment $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un ouvert borné, régulier, étoilé et on suppose que les

conditions aux limites vérifient $g \geq 0$, $g \in L^\infty(\Sigma^-)$, $(n \cdot h)|_{\partial\Omega} = 0$ et

$$M^- + K^- := \int_{\Sigma^-} |(v(p) \cdot n(x))|(1 + \mathcal{E}(p))g(x, p) \, d\sigma dp < +\infty, \quad H := \int_{\partial\Omega} |h(x)|^2 \, d\sigma < +\infty,$$

où $\mathcal{E}(p) = \frac{|p|^2}{2m}$, $v(p) = \frac{p}{m}$. L'existence des solutions $(f_c, E_c, B_c)_{c>0}$ est assurée par le Théorème 1.1. Nous faisons appel à des arguments de compacité. Pour cela nous devons estimer uniformément par rapport à c l'énergie totale et les traces des solutions $(f_c, E_c, B_c)_{c>0}$. Il est possible d'estimer ces quantités en reprenant les calculs du paragraphe précédent mais les bornes peuvent dépendre éventuellement de c . Ceci est dû à la présence du terme $\frac{\varepsilon_0 c}{2} \int_{\partial\Omega} |h(x)|^2 \, d\sigma$ dans la variante stationnaire de (2)

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma^+} (v_c(p) \cdot n(x))(1 + \mathcal{E}_c(p))f_c \, d\sigma dp + \frac{\varepsilon_0 c}{2} \int_{\partial\Omega} \{|n \wedge E_c|^2 + c^2|n \wedge B_c|^2\} \, d\sigma \\ &= \int_{\Sigma^-} |(v_c(p) \cdot n(x))|(1 + \mathcal{E}_c(p))g \, d\sigma dp + \frac{\varepsilon_0 c}{2} \int_{\partial\Omega} |h(x)|^2 \, d\sigma \\ &\leq M^- + K^- + \frac{\varepsilon_0 c}{2} H. \end{aligned} \quad (4)$$

Plus précisément l'égalité (4) fournit une borne pour le $\sup_{c \geq 1} \int_{\partial\Omega} \{|n \wedge E_c|^2 + c^2|n \wedge B_c|^2\} \, d\sigma$ mais pas pour l'énergie sortante $K_c^+ := \int_{\Sigma^+} (v_c(p) \cdot n(x))\mathcal{E}_c(p)f_c \, d\sigma dp$. L'obtention d'une borne pour le $\sup_{c>0} K_c^+$ est un point délicat. Voici comment on peut procéder pour s'affranchir de cette difficulté. On suppose que Ω est simplement connexe. Comme $\text{curl} E_c = 0$, $n \wedge E_c \in L^2(\partial\Omega)^3$ il existe $\phi_c \in H^1(\Omega)$ qui possède une trace $\varphi_c = \phi_c|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega)$ tel que $E_c = -\nabla_x \phi_c$ et $\|\varphi_c\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq C(\Omega)\|n \wedge E_c\|_{L^2(\partial\Omega)^3}$. Après multiplication de l'équation de Vlasov par l'énergie $\mathcal{E}_c(p) + q\varphi_c(x)$ et intégration sur $\Omega \times \mathbb{R}^3$ on trouve

$$\int_{\Sigma^+} (v_c(p) \cdot n(x))(\mathcal{E}_c(p) + q\varphi_c(x))f_c \, d\sigma dp = \int_{\Sigma^-} |(v_c(p) \cdot n(x))|(\mathcal{E}_c(p) + q\varphi_c(x))g \, d\sigma dp.$$

Pour conclure il suffit de combiner des inégalités d'Hölder, de Sobolev (sur $\partial\Omega$) et d'interpolation.

Un deuxième point délicat est le traitement des conditions aux limites (3) : quelle sera la condition satisfaite par la solution limite lorsque $c \rightarrow +\infty$? Pour répondre à cette question on utilise la décomposition orthogonale (par rapport au produit scalaire de $L^2(\partial\Omega)^3$) du champ tangent h en parties irrotationnelle et rotationnelle $h = \nabla_\tau h_1 + n \wedge \nabla_\tau h_2$, avec $h_1, h_2 \in H^1(\partial\Omega)$, où ∇_τ est le gradient tangentiel au long de $\partial\Omega$. En utilisant les équations de Maxwell et l'équation de continuité $\text{div}_x j_c = 0$ on vérifie que les traces tangentielles du champ électromagnétique satisfont en distributions

$$c^2 \text{div}_\tau (n \wedge B_c) = -\frac{(n \cdot j_c)}{\varepsilon_0}, \quad \text{div}_\tau (n \wedge E_c) = 0, \quad (5)$$

c'est à dire

$$-c^2 \int_{\partial\Omega} (n \wedge B_c) \cdot \nabla_\tau \varphi \, d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \frac{(n \cdot j_c)}{\varepsilon_0} \varphi(x) \, d\sigma, \quad \int_{\partial\Omega} (n \wedge E_c) \cdot \nabla_\tau \varphi \, d\sigma = 0,$$

pour toute fonction $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$. Identifions la trace tangentielle de la limite faible $E = \lim_{c \rightarrow +\infty} E_c$ dans $L^2(\Omega)^3$. On note par $n \wedge E$ la limite faible $n \wedge E = \lim_{c \rightarrow +\infty} n \wedge E_c$ dans $L^2(\partial\Omega)^3$. Nous avons $\operatorname{div}_\tau(n \wedge E_c) = \operatorname{div}_\tau(n \wedge \nabla_\tau h_2) = 0$ et par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} (n \wedge E - n \wedge \nabla_\tau h_2) \cdot \nabla_\tau \varphi_1 \, d\sigma = 0, \quad \forall \varphi_1 \in C^1(\partial\Omega). \quad (6)$$

Soit maintenant $\varphi_2 \in C^1(\partial\Omega)$. La condition aux limites (3) et la première égalité de (5) impliquent

$$\int_{\partial\Omega} (n \wedge E_c - n \wedge \nabla_\tau h_2) \cdot (n \wedge \nabla_\tau \varphi_2) \, d\sigma = -c \int_{\partial\Omega} (n \wedge B_c) \cdot \nabla_\tau \varphi_2 \, d\sigma = -\frac{1}{\varepsilon_0 c} \int_{\partial\Omega} (n \cdot j_c) \varphi_2 \, d\sigma.$$

Après passage à la limite quand $c \rightarrow +\infty$ on en déduit que

$$\int_{\partial\Omega} (n \wedge E - n \wedge \nabla_\tau h_2) \cdot (n \wedge \nabla_\tau \varphi_2) \, d\sigma = 0, \quad \forall \varphi_2 \in C^1(\partial\Omega). \quad (7)$$

En combinant (6) et (7) on obtient $n \wedge E = n \wedge \nabla_\tau h_2$. On démontre le résultat

Théorème 1.2 (cf. [B6]) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné, régulier, de frontière strictement étoilée. On considère g et h des fonctions vérifiant $0 \leq g \in L^\infty(\Sigma^-)$, $M^- + K^- < +\infty$, $(n \cdot h)|_{\partial\Omega} = 0$, $H < +\infty$ et $(c_r)_r$ une suite divergente vers $+\infty$. On note par (f_r, E_r, B_r) les solutions du système de VM stationnaire avec $c = c_r$, construites précédemment. Alors il existe une sous-suite $(c_{r_k})_k$ telle que $f_{r_k} \rightharpoonup f$ faiblement \star dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, $E_{r_k} \rightharpoonup E$ faiblement dans $L^2(\Omega)^3$, où (f, E) est une solution faible du système de VP stationnaire*

$$v(p) \cdot \nabla_x f + qE(x) \cdot \nabla_p f = 0, \quad (x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^3,$$

$$\operatorname{curl} E = 0, \quad \operatorname{div} E = q \frac{\int_{\mathbb{R}^3} f \, dp}{\varepsilon_0}, \quad x \in \Omega,$$

$$f(x, p) = g(x, p), \quad (x, p) \in \Sigma^-, \quad n(x) \wedge E(x) = n(x) \wedge \nabla_\tau h_2, \quad x \in \partial\Omega.$$

On montre un résultat du même type pour les solutions faibles T périodiques en temps. Nous renvoyons à [B10] pour les détails de démonstration.

1.4 Unicité de la solution par caractéristiques de VP1D et VM1D

On dispose de nombreux résultats d'existence de solutions faibles/fortes pour les équations de VP et VM. La situation est différente en ce qui concerne l'unicité de ces solutions. L'unicité de la solution forte pour VP3D a été étudiée par Schaeffer [93], Lions et Perthame [73], Pfaffelmoser [79]. Rappelons aussi le résultat d'unicité obtenu par Robert [87] pour la solution faible de VP3D avec support compact en impulsion. Des résultats d'unicité pour VM ont été obtenus par Glassey et Schaeffer [53], [54] en utilisant le Théorème de Glassey-Strauss [55]. Une des hypothèses essentielles est la compacité du support en impulsion des densités de particules, ce qui ne correspond pas à la réalité physique. L'unicité de la solution stationnaire des équations de VP1D avec conditions aux limites a été étudiée par Greengard et Raviart [63].

J'ai analysé l'existence et l'unicité de la solution par caractéristiques pour les équations de VP1D et VM1D avec des conditions aux limites, en adaptant la méthode utilisée par Cooper et Klimas [28]. Bien entendu la partie originale de ce travail est le résultat d'unicité. Considérons ici les équations de VP1D

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \partial_x f + E(t, x) \partial_v f &= 0, \quad (t, x, v) \in]0, T[\times]0, 1[\times \mathbb{R}, \\ E(t, x) &= -\partial_x U, \quad -\partial_x^2 U = \rho(t, x) := \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv, \quad (t, x) \in]0, T[\times]0, 1[, \end{aligned}$$

avec la condition initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad (x, v) \in]0, 1[\times \mathbb{R},$$

et les conditions aux limites

$$f(t, 0, v > 0) = g_0(t, v > 0), \quad f(t, 1, v < 0) = g_1(t, v < 0), \quad t \in]0, T[,$$

$$U(t, 0) = \varphi_0(t), \quad U(t, 1) = \varphi_1(t), \quad t \in]0, T[.$$

On travaille avec des champs électriques réguliers $E \in L^\infty(]0, T[; W^{1,\infty}(]0, 1[))$ et l'équation de Vlasov est résolue par caractéristiques. On note par (X_E, V_E) , f_E les caractéristiques et la solution par caractéristiques associées au champ E . Pour simplifier on suppose ici que $g_1 = 0$. Rappelons que f_E vérifie pour toute fonction test ψ

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f_E \psi \, dv dx dt &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f_0(x, v) \int_0^{s_{\text{out}}(0, x, v)} \psi(s, X_E(s; 0, x, v), V_E(s; 0, x, v)) \, ds \, dv dx \\ &+ \int_0^T \int_{v>0} v g_0(t, v) \int_t^{s_{\text{out}}(t, 0, v)} \psi(s, X_E(s; t, 0, v), V_E(s; t, 0, v)) \, ds \, dv dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation de Poisson et l'équation de continuité on se ramène à l'étude des points fixes de l'application $E \rightarrow \mathcal{F}E$ définie par

$$\mathcal{F}E(t, x) = - \int_0^t j_E(s, x) ds + \int_0^t \int_0^1 j_E(s, y) dy ds + E_d(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1],$$

où $j_E = \int_{\mathbb{R}} v f_E dv$ et E_d dépend uniquement des données $f_0, \varphi_0, \varphi_1$. Afin d'obtenir un résultat d'unicité on cherche à estimer $\mathcal{F}A - \mathcal{F}B$ par rapport à $A - B$ quand A et B sont réguliers. On procède par la dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^\infty(0,1), L^1(0,1)}$. Pour toute fonction $\varphi \in L^1(]0, 1[)$ nous obtenons en utilisant la formulation par caractéristiques avec $\psi = v\varphi$

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^t j_A(s, \cdot) ds - \int_0^t j_B(s, \cdot) ds, \varphi \right\rangle_{L^\infty, L^1} &= \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} (f_A - f_B)(s, x, v) v \varphi(x) dv dx ds \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f_0(x, v) \int_{X_B(s_{\text{out}}^B(0, x, v))}^{X_A(s_{\text{out}}^A(0, x, v))} \varphi(u) du dv dx \\ &+ \int_0^t \int_{v>0} v g_0(s, v) \int_{X_B(s_{\text{out}}^B(s, 0, v))}^{X_A(s_{\text{out}}^A(s, 0, v))} \varphi(u) du dv ds \\ &= T_{f_0}(\varphi) + T_{g_0}(\varphi). \end{aligned}$$

Examinons le terme $T_{g_0}(\varphi)$, l'analyse du terme $T_{f_0}(\varphi)$ étant similaire. Le calcul précédent suggère l'introduction des vitesses critiques $v_E^0(t; s, 0), v_E^1(t; s, 0)$, $E \in \{A, B\}$ telles que :

- pour toute vitesse initiale $0 < v < v_E^0(t; s, 0)$ le temps de sortie de la caractéristiques issue de $(s, 0, v)$ est inférieur à t , $s_{\text{out}}^E(s, 0, v) < t$ et la sortie s'effectue par l'extrémité gauche de l'intervalle $]0, 1[$;
- pour toute vitesse initiale $v_E^0(t; s, 0) < v < v_E^1(t; s, 0)$ la caractéristique issue de $(s, 0, v)$ ne sort pas de $]0, 1[$ avant l'instant t ;
- pour toute vitesse initiale $v > v_E^1(t; s, 0)$ le temps de sortie de la caractéristiques issue de $(s, 0, v)$ est inférieur à t , $s_{\text{out}}^E(s, 0, v) < t$ et la sortie s'effectue par l'extrémité droite de l'intervalle $]0, 1[$.

On observe immédiatement que pour calculer $T_{g_0}(\varphi)$ il suffit de considérer les vitesses initiales $v \in]\min\{v_A^0, v_B^0\}, \max\{v_A^1, v_B^1\}[$ car dans les autres cas $X_A(s_{\text{out}}^A) = X_B(s_{\text{out}}^B)$. Les contributions des vitesses $v \in]\max\{v_A^0, v_B^0\}, \min\{v_A^1, v_B^1\}[$ sont estimées facilement en utilisant la dépendance continue des caractéristiques par rapport aux champs A, B (à noter que pour ces vitesses les caractéristiques associées à A, B sont définies au moins jusqu'à l'instant t). Pour conclure on doit estimer les vitesses critiques relatives $v_A^0 - v_B^0, v_A^1 - v_B^1$. Ceci est un résultat technique dont la preuve repose sur un argument de comparaison entre les sous/surcaractéristiques associées à un champ croissant par rapport à la variable spatiale.

Proposition 1.1 (cf. [B7]) Soient $A, B \in L^\infty(]0, T[; W^{1,\infty}(]0, 1[))$ deux champs croissants par rapport à x . Alors il existe une constante C qui dépend des normes de A, B dans $L^\infty(]0, T[; W^{1,\infty}(]0, 1[))$ telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$\max_{k \in \{0,1\}} |v_A^k(T; t, 0) - v_B^k(T; t, 0)| \leq C \int_t^T \|A(s) - B(s)\|_{L^\infty(]0,1[)} ds.$$

La proposition précédente implique après calcul

$$\left| \left\langle \int_0^t j_A(s, \cdot) ds - \int_0^t j_B(s, \cdot) ds, \varphi \right\rangle_{L^\infty, L^1} \right| \leq C_1 \|\varphi\|_{L^1(0,1)} \int_0^t \|A(s) - B(s)\|_{L^\infty(]0,1[)} ds,$$

et finalement on en déduit que

$$\|\mathcal{F}A(t) - \mathcal{F}B(t)\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_2 \int_0^t \|A(s) - B(s)\|_{L^\infty(]0,1[)} ds.$$

Clairement l'application \mathcal{F} possède au plus un point fixe. L'existence suit immédiatement par itérations successives. Par la même méthode on peut traiter les modèles de VP1D, VM1D dans l'espace tout entier et il est possible d'obtenir des résultats de dépendance continue de la solution par rapport aux données.

2 Limites champ fort et champ faible du système de Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck

Publications : [BG1, BG2].

On considère un plasma constitué d'électrons et d'ions qui interagissent par l'intermédiaire des champs électriques et magnétiques créés collectivement et aussi par des collisions. Les inconnues sont la densité d'électrons f , le champ électrique E , le champ magnétique B et on suppose connues les densités de charge et de courant des ions D, J . Pour la modélisation de ce système on peut utiliser l'équation de Vlasov avec un terme de collision de Fokker-Planck (FP)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{e}{m} (E(t, x) + v \wedge B(t, x)) \cdot \nabla_v f = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_v \left(v f + \frac{K_B T_{th}}{m} \nabla_v f \right),$$

couplée aux équations de Maxwell

$$\partial_t E - c_0^2 \operatorname{curl}_x B = -\frac{e \int_{\mathbb{R}^3} f v dv + J}{\varepsilon_0}, \quad \partial_t B + \operatorname{curl}_x E = 0, \quad \operatorname{div}_x E = \frac{e \int_{\mathbb{R}^3} f dv + D}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div}_x B = 0.$$

Le modèle obtenu est appelé le système de Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck (VMFP). Précisons la signification des différentes constantes dans les équations précédentes : ε_0 est la

permissivité électrique du vide, c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide, $e < 0$ est la charge des électrons, m est la masse des électrons, τ est le temps de relaxation qui caractérise l'interaction avec le bain thermique, K_B est la constante de Boltzmann et T_{th} est la température. Les densités D, J sont des fonctions données, vérifiant l'équation de continuité $\partial_t D + \text{div}_x J = 0$. Pour un plasma on distingue les grandeurs caractéristiques suivantes

- le libre parcours moyen $l = \sqrt{\frac{K_B T_{\text{th}}}{m}} \cdot \tau$: c'est la distance moyenne parcourue entre deux collisions successives ;
- la longueur de Debye $\Lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 K_B T_{\text{th}} d^3}{e^2 \mathcal{N}}}$: c'est la distance typique des perturbations d'un plasma quasi-neutre (ici \mathcal{N} est le nombre typique d'électrons et d est une longueur caractéristique).

Notre objectif est d'étudier la stabilité des solutions des équations de VMFP quand les différents paramètres physiques varient. Pour cela on doit choisir des unités d'observation et remplacer les grandeurs physiques par des quantités sans dimension.

2.1 Limite champ électrique fort du système non relativiste de VMFP

Supposons que le libre parcours moyen est petit devant la longueur de Debye et on note $\varepsilon = (\frac{l}{\Lambda})^2$. On choisit $T = \frac{\tau}{\varepsilon}$, $L = \frac{l}{\varepsilon}$, $V = \sqrt{\frac{K_B T_{\text{th}}}{m}}$ comme unités de temps, d'espace et de vitesse respectivement. Après quelques calculs (voir [BG1]) on obtient le système

$$\varepsilon(\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon) - (E_\varepsilon + \alpha \varepsilon (v \wedge B_\varepsilon)) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = \text{div}_v (v f_\varepsilon + \nabla_v f_\varepsilon), \quad (t, x, v) \in]0, T[\times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (8)$$

$$\partial_t E_\varepsilon - \text{curl}_x B_\varepsilon = -(J - j_\varepsilon) = - \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon v \, dv - J(t, x), \quad (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^3, \quad (9)$$

$$\alpha \varepsilon \partial_t B_\varepsilon + \text{curl}_x E_\varepsilon = 0, \quad (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^3, \quad (10)$$

$$\text{div}_x E_\varepsilon = D(t, x) - \rho_\varepsilon(t, x) = D(t, x) - \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon \, dv, \quad \text{div}_x B_\varepsilon = 0, \quad (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^3, \quad (11)$$

où ε est un petit paramètre et $\alpha = (\frac{\Lambda}{\tau c_0})^2$. On complète ces équations par des conditions initiales

$$f_\varepsilon(0, x, v) = f_\varepsilon^0(x, v), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad E_\varepsilon(0, x) = E_\varepsilon^0(x), \quad B_\varepsilon(0, x) = B_\varepsilon^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (12)$$

Notons que le terme non linéaire $E_\varepsilon \cdot \nabla_v f_\varepsilon$ est du même ordre de grandeur que le terme de diffusion de FP. Le régime asymptotique $\varepsilon \searrow 0$, $\alpha = \mathcal{O}(1)$ est appelé limite champ électrique fort.

L'analyse de ces régimes est motivée par des applications dans les domaines des semi-conducteurs et de l'interaction laser-plasma. Les limites champ fort ont été investiguées par Poupaud [84], Arnold, Carrillo, Gamba et Shu [5], Ben Abdallah, Degond, Markowich et Schmeiser [12], Degond et Jungel [39], Nieto, Poupaud et Soler [76], Goudon, Nieto, Poupaud et Soler [61]. On raisonne par des arguments de compacité. Une deuxième approche consiste à utiliser la méthode de l'entropie relative ou de l'énergie modulée, introduite par Yau [100]. Cette méthode a été utilisée pour traiter de nombreux modèles : rappelons les travaux de Brenier [19], Brenier, Mauser et Puel [20], Golse et Saint-Raymond [59] pour la physique des plasmas, Saint-Raymond [90], Berthelin et Vasseur [13] pour la dynamique des gaz, Goudon, Jabin et Vasseur [62] pour l'interaction fluide-particules.

Nous avons étudié la limite champ électrique fort des équations de VMFP3D par la méthode de l'entropie relative. Nous travaillons avec des solutions fortes de ces équations. Bien que la théorie des équations de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP) soit bien développée (voir les travaux de Carrillo et Soler [25], Victory [96] pour l'existence de solution faible et ceux de Bouchut [16, 17], Degond [37], O'Dwyer et Victory [83] pour l'existence et l'unicité de solution classique) à notre connaissance il n'existe pas de résultats d'existence/unicité pour la solution classique des équations de VMFP3D.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on suppose qu'il existe une solution classique de (8 – 12) notée $(f_\varepsilon, E_\varepsilon, B_\varepsilon)$. Pour identifier le système limite quand $\varepsilon \searrow 0$ on peut procéder comme il suit. En écrivant l'équation de Vlasov-Fokker-Planck sous la forme

$$\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon - \alpha(v \wedge B_\varepsilon) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_v \left(e^{-\frac{|v+E_\varepsilon(t,x)|^2}{2}} \nabla_v \left(f_\varepsilon e^{\frac{|v+E_\varepsilon(t,x)|^2}{2}} \right) \right),$$

on en déduit formellement que lorsque $\varepsilon \searrow 0$ nous avons $f_\varepsilon \approx \frac{\rho(t,x)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|v+E(t,x)|^2}{2}}$, ce qui implique $j_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon v \, dv \approx -\rho(t,x)E(t,x)$. En tenant compte de l'équation de continuité $\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}_x j_\varepsilon = 0$ on obtient le système limite

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \operatorname{div}_x(\rho E) = 0, & (t,x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}_x E = D(t,x) - \rho(t,x), \quad \operatorname{curl}_x E = 0, & (t,x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t E - \operatorname{curl}_x B = -J(t,x) - \rho(t,x)E(t,x), \quad \operatorname{div}_x B = 0, & (t,x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (13)$$

L'étude de l'existence et l'unicité de solution classique pour (13) s'effectue en utilisant les résultats de [76]. Soit (ρ, E, B) la solution classique de (13) et pour tout $\varepsilon > 0$ on définit l'entropie relative

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\ln f_\varepsilon + \frac{1}{2}|v + E|^2) \, dv dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|E_\varepsilon - E|^2 + \alpha \varepsilon |B_\varepsilon - B|^2) \, dx.$$

L'idée est d'analyser la variation en temps de cette quantité. Ceci nous permet de contrôler l'entropie relative $\mathcal{H}_\varepsilon(t)$ ainsi que sa dissipation $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\sqrt{f_\varepsilon}(v+E) + 2\nabla_v \sqrt{f_\varepsilon}|^2 dv dx dt$. On déduit les convergences $\lim_{\varepsilon \searrow 0} (E_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} B_\varepsilon) = (E, 0)$ dans $L^\infty([0, T[; L^2(\mathbb{R}^3))^6$, $\lim_{\varepsilon \searrow 0} B_\varepsilon = B$ dans $\mathcal{D}'([0, T[\times \mathbb{R}^3)^3$, $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \rho_\varepsilon = \rho$ dans $C^0([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^3))$ faiblement \star) et $\lim_{\varepsilon \searrow 0} j_\varepsilon = -\rho E$ dans $\mathcal{M}([0, T] \times \mathbb{R}^3)^3$ faiblement \star (on a noté par $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de Radon bornées sur X). La dernière convergence est obtenue en exploitant la dissipation de l'entropie car nous avons

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |j_\varepsilon + \rho_\varepsilon E| dx dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{f_\varepsilon} |\sqrt{f_\varepsilon}(v+E) + 2\nabla_v \sqrt{f_\varepsilon}| dv dx dt.$$

Il est possible de justifier la convergence (dans un certain sens) des densités de particules $f_\varepsilon(t, x, p)$ vers $\rho(t, x)(2\pi)^{-3/2} e^{-|v+E(t,x)|^2/2}$. En utilisant les inégalités logarithmiques de Sobolev (cf. [4, 3]) et l'inégalité de Csiszar-Kullback-Pinsker (cf. [70, 35]) on montre que pour toute fonction $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ nous avons

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(f_\varepsilon(t, x, v) - \frac{\rho(t, x)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|v+E(t,x)|^2}{2}} \right) \varphi(x) dx \right| dv dt = 0.$$

2.2 Limite champ faible du système relativiste de VMFP

D'autres régimes asymptotiques des équations de VMFP ont été mis en évidence, notamment les limites de diffusion. On suppose que le libre parcours moyen adimensionné est petit et que la vitesse thermique adimensionnée est inversement proportionnelle au libre parcours moyen adimensionné. Cette limite est appelée limite champ faible car dans ce cas le terme de collision domine le terme de transport. Les limites champ faible des équations de VPFP en 2D et 3D ont été étudiées par Poupaud et Soler [82]. Ils montrent un résultat de convergence locale en temps, un résultat de convergence globale en 2D sous des hypothèses moins restrictives étant obtenu par Goudon [60]. Dans le cas attractif le système limite est connu sous le nom du modèle de Smoluchowski, voir Chandrasekhar [26], Chavanis, Sommeria et Robert [27]. Le même modèle a été proposé par Keller et Segel [67] pour décrire l'évolution de certains systèmes en biologie.

L'étude de ces régimes permet d'établir des liens entre les modèles cinétiques et les modèles fluides et repose sur des techniques d'approximation par diffusion, utilisées dans la neutronique [8], la physique des semi-conducteurs [58, 81] et le transfert radiatif [7].

Nous nous sommes proposés d'étudier la limite champ faible des équations relativistes

de VMFP en une dimension d'espace et deux dimensions d'impulsion

$$\begin{aligned}
\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v_1(p) \partial_x f^\varepsilon + \left(\frac{1}{\varepsilon} E_1^\varepsilon + v_2(p) B_\varepsilon \right) \partial_{p_1} f^\varepsilon + \left(\frac{1}{\varepsilon} E_2^\varepsilon - v_1(p) B_\varepsilon \right) \partial_{p_2} f^\varepsilon \\
= \frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{div}_p (\nabla_p f^\varepsilon + v(p) f^\varepsilon), \quad (t, x, p) \in]0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\
\partial_t E_1^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} j_1^\varepsilon(t, x) + J(t, x), \quad \partial_x E_1^\varepsilon = \rho^\varepsilon(t, x) - D(t, x), \quad (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}, \\
\partial_t E_2^\varepsilon + \partial_x B_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} j_2^\varepsilon(t, x), \quad \varepsilon^2 \partial_t B_\varepsilon + \partial_x E_2^\varepsilon = 0, \quad (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}, \tag{14}
\end{aligned}$$

où $\rho^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} f^\varepsilon dp$, $j^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} f^\varepsilon v(p) dp$ et $D, J : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données vérifiant l'équation de continuité $\partial_t D + \partial_x J = 0$. Nous présentons ici les arguments formels qui permettent d'obtenir les équations du modèle limite. En multipliant l'équation de Vlasov par εp_1 on trouve après intégration par rapport à $p \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} p_1 f^\varepsilon dp + \partial_x \int_{\mathbb{R}^2} v_1(p) p_1 f^\varepsilon dp - E_1^\varepsilon \rho^\varepsilon - \varepsilon B_\varepsilon j_2^\varepsilon = \partial_t E_1^\varepsilon - J.$$

À l'exception du terme $\partial_x \int_{\mathbb{R}^2} v_1(p) p_1 f^\varepsilon dp$ on devine facilement les limites quand $\varepsilon \searrow 0$ de tous les autres termes de l'égalité précédente. Pour traiter le terme $\partial_x \int_{\mathbb{R}^2} v_1(p) p_1 f^\varepsilon dp$ nous analysons la dissipation de l'énergie et l'entropie. Nous montrons que

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla_p f^\varepsilon + v(p) f^\varepsilon|^2}{f^\varepsilon} dp dx dt \right) < +\infty,$$

et on en déduit que $f^\varepsilon(t, x, p) \approx \rho(t, x) \frac{e^{-\mathcal{E}(p)}}{K}$ où $\mathcal{E}(p)$ est l'énergie relativiste (adimensionnée) et $K = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mathcal{E}(p)} dp$. Dans ce cas nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_1(p) p_1 f^\varepsilon dp \approx -\frac{\rho(t, x)}{K} \int_{\mathbb{R}^2} p_1 \partial_{p_1} (e^{-\mathcal{E}(p)}) dp = \rho(t, x),$$

et nous obtenons formellement la convergence $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \partial_x \int_{\mathbb{R}^2} v_1(p) p_1 f^\varepsilon dp = \partial_x \rho$. Finalement on trouve les équations limites

$$\partial_t E_1 + \rho E_1 - \partial_x^2 E_1 = \partial_x D + J, \quad \partial_x E_1 = \rho - D, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Les preuves reposent sur des arguments de compacité. Un des points délicats consiste à montrer des estimations uniformes pour les normes L^∞ de $(E^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, $(\varepsilon B^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$. Ces estimations sont obtenues en adaptant la méthode utilisée par Glassey et Schaeffer [51] cette fois-ci dans un cadre collisionnel. Les normes L^2 de $(E^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, $(\varepsilon B^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ sont estimées en utilisant les bilans habituels d'énergie et entropie. Soient les limites faibles $(E_2, A) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (E_2^\varepsilon, \varepsilon B^\varepsilon)$ dans $L^2(]0, T[\times \mathbb{R})^2$. En passant à la limite quand $\varepsilon \searrow 0$ dans (14)

on en déduit que $\partial_x E_2 = \partial_x A = 0$ (on démontre préalablement une borne pour $\frac{j^\varepsilon}{\varepsilon}$ dans $L^2(]0, T[; L^1(\mathbb{R})^2)$ et par conséquent $E_2 = A = 0$ car $E_2, A \in L^2(]0, T[\times \mathbb{R})$. En faisant une analyse plus détaillée on montre les convergences $\lim_{\varepsilon \searrow 0} (\varepsilon^{-1} E_2^\varepsilon, B^\varepsilon) = (0, 0)$ dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R})^2$.

3 Modèles réduits pour l'interaction laser-plasma

Publications : [B12, B14, B15, B16, BL, B17].

On considère une population d'électrons relativistes dont la densité est notée $F = F(t, x, p)$, qui se déplacent sous l'action du champ électromagnétique (E, B) . Si on néglige les collisions, l'évolution de ce système est décrite par les équations de VM. Récemment un modèle réduit de VM a été introduit pour étudier l'interaction laser-plasma. On suppose que les inconnues (F, E, B) dépendent d'une seule variable spatiale, notée x , et que les électrons sont monocinétiques dans les directions orthogonales p_y, p_z . Après quelques transformations (voir [65]) on obtient le système réduit en une dimension d'espace et une dimension d'impulsion

$$\partial_t f + \frac{p}{\gamma_1} \partial_x f - \left(E(t, x) + \frac{A(t, x)}{\gamma_2} \partial_x A \right) \partial_p f = 0, \quad (15)$$

$$\partial_t^2 A - \partial_x^2 A = -\rho_{\gamma_2}(t, x) A(t, x), \quad (16)$$

$$\partial_t E = j(t, x), \quad \partial_x E = \rho_{ext}(x) - \rho(t, x), \quad (17)$$

où $\{\rho, \rho_{\gamma_2}, j\}(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \{1, \frac{1}{\gamma_2}, \frac{p}{\gamma_1}\} f(t, x, p) dp$, γ_1, γ_2 sont des facteurs de Lorentz et ρ_{ext} est la densité du fond neutralisant des ions. Dans le modèle d'origine (appelé fortement relativiste (FR)) les facteurs γ_1, γ_2 sont donnés par

$$\gamma_1 = \gamma_2 = (1 + |p|^2 + |A(t, x)|^2)^{1/2}. \quad (18)$$

Malgré sa basse dimension, le modèle FR est difficile à étudier à cause du couplage fortement non linéaire entre les variables cinétiques et électromagnétiques, donné par (18). Deux modèles simplifiés ont été introduits : le modèle non relativiste (NR), obtenu en remplaçant la dynamique relativiste par celle newtonienne ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$) et le modèle quasi relativiste (QR), dans lequel $\gamma_1 = (1 + |p|^2)^{1/2}$, $\gamma_2 = 1$. Notons que les solutions des modèles NR et FR sont des solutions exactes des équations de VM dans les cas

non relativiste et relativiste respectivement. En revanche, le modèle QR n'est qu'une approximation du modèle FR. Les modèles sont complétés par des conditions initiales

$$f(0, x, p) = f_0(x, p), (x, p) \in \mathbb{R}^2, (E, A, \partial_t A)(0, x) = (E_0, A_0, A_1)(x), x \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

3.1 Étude théorique du modèle FR

Les modèles NR et QR ont été étudiés très récemment par Carrillo et Labrunie [24]. Ils montrent des résultats d'existence et unicité locale en temps dans le cas NR et globale en temps dans le cas QR, mais la méthode utilisée ne permet pas de traiter le cas FR. Je me suis proposé d'étudier le cas FR en utilisant la méthode introduite dans [B7]. Pour tout couple de champs réguliers $E \in L^\infty(]0, T[; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, $A \in L^\infty(]0, T[; W^{2,\infty}(\mathbb{R}))$ on définit l'application \mathcal{F} donnée par

$$(E, A) \rightarrow f_{E,A} \rightarrow (\tilde{E}, \tilde{A}) =: \mathcal{F}(E, A),$$

où $f_{E,A}$ est la solution par caractéristiques de (15) associée aux champs E, A et les nouveaux champs \tilde{E}, \tilde{A} sont définis par

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{E}(t, x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} E_0(x) \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, p) \int_x^{X(t;0,x,p)} \varphi(u) dudpdx, \quad (20)$$

pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, x) &= \frac{1}{2}(A_0(x+t) + A_0(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} A_1(y) dy \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} (\rho_{\gamma_2} A)(s, y) dy ds, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (21)$$

On a noté par $(X, P) = (X(s; t, x, p), P(s; t, x, p))$ les caractéristiques de (15). Évidemment la définition de \tilde{A} provient de la résolution de (16) par la formule de Duhamel. Justifions maintenant la définition (20). Notons tout d'abord que si $E_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, le membre droit de (20) varie linéairement et continûment par rapport à $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et par conséquent $\tilde{E}(t, \cdot)$ est bien défini dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour tout t . D'autre part la première équation de (17) implique

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \{E(t, x) - E_0(x)\} \varphi(x) dx &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} j_{E,A}(s, x) \varphi(x) dx ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{E,A}(s, x, p) \frac{p}{\gamma_1} \varphi(x) dp dx ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, p) \int_0^t \frac{dX}{ds} \varphi(X(s)) ds dp dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, p) \int_x^{X(t;0,x,p)} \varphi(u) dudpdx, \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à la définition (20). Sous des hypothèses appropriées (typiquement on suppose que f_0 est de masse et énergie finies et que (E_0, A_0, A_1) sont réguliers) on montre l'existence d'un domaine $D_T \subset W^{1,\infty}([0, T[\times \mathbb{R}) \times W^{2,\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$ qui est laissé invariant par l'application \mathcal{F} . Pour établir ces estimations on utilise à plusieurs reprises la formulation par caractéristiques de (15), un des points clé étant le fait que la vitesse des particules au long des trajectoires ne dépasse pas la vitesse des caractéristiques de l'équation des ondes (16). Notons également qu'il est nul besoin d'imposer la compacité du support en impulsion de la densité initiale f_0 . L'étape suivante consiste à estimer $\mathcal{F}(E_1, A_1) - \mathcal{F}(E_2, A_2)$. On introduit la notation

$$|||(E, A)(t)||| = \|E(t)\|_{L^\infty} + \|A(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_x A(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_t A(t)\|_{L^\infty}.$$

On raisonne par la dualité $\langle L^\infty, L^1 \rangle$. Par exemple on écrit pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} (\tilde{E}_1(t, x) - \tilde{E}_2(t, x)) \varphi(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, p) \left| \int_{X_2(t;0,x,p)}^{X_1(t;0,x,p)} |\varphi(u)| du \right| dp dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, p) \mathbf{1}_{\{|u - X_1(t)| \leq |X_2(t) - X_1(t)|\}} dp dx du, \end{aligned}$$

où $(X_k, P_k)_{k \in \{1,2\}}$ sont les caractéristiques associées à $(E_k, A_k)_{k \in \{1,2\}}$. Par la dépendance continue des caractéristiques on obtient après quelques calculs

$$\|(\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2)(t)\|_{L^\infty} \leq C \int_0^t |||(E_1 - E_2, A_1 - A_2)(s)||| ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

De manière similaire on estime les normes L^∞ de $(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2, \partial_x \tilde{A}_1 - \partial_x \tilde{A}_2, \partial_t \tilde{A}_1 - \partial_t \tilde{A}_2)$ et finalement on montre qu'il existe une constante C qui dépend des conditions initiales et T telle que

$$\begin{aligned} |||\mathcal{F}(E_1, A_1)(t) - \mathcal{F}(E_2, A_2)(t)||| &\leq C \int_0^t |||(E_1 - E_2, A_1 - A_2)(s)||| ds \\ &+ C \|A_1(t) - A_2(t)\|_{L^\infty}, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Par la méthode des approximations successives on montre

Théorème 3.1 (cf. [B17]) Soient $f_0 \geq 0$, $\rho_{\text{ext}} \geq 0$, $E_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $A_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$, $A_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ vérifiant $(1 + |p|)f_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\rho_{\text{ext}} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $E_0' = \rho_{\text{ext}} - \int_{\mathbb{R}} f_0 dp$. Supposons qu'il existe une application bornée $n_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ croissante sur \mathbb{R}^- , décroissante sur \mathbb{R}^+ telle que $f_0(x, p) \leq n_0(p)$, $(x, p) \in \mathbb{R}^2$, $(1 + |p|)n_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique solution globale (f, E, A) de (15 – 19) vérifiant $f \geq 0$, $(1 + |p|)f \in L^\infty([0, T[; L^1(\mathbb{R}^2))$, $\int_{\mathbb{R}} f(\cdot, \cdot, p)(1 + |p|)dp \in L^\infty([0, T[\times \mathbb{R})$, $E \in W^{1,\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$, $A \in W^{2,\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$, $\forall T > 0$.

3.2 Solutions stationnaires des modèles NR, QR et FR

J'ai étudié l'existence de solution stationnaire pour les modèles d'interaction laser-plasma dans un intervalle, avec des conditions aux limites

$$\frac{p}{\gamma_1} \partial_x f - \left(E(x) + \frac{A(x)}{\gamma_2} A'(x) \right) \partial_p f = 0, \quad (x, p) \in]0, 1[\times \mathbb{R}, \quad (22)$$

$$f(x = 0, p > 0) = g_0(p), \quad f(x = 1, p < 0) = g_1(p), \quad (23)$$

$$E'(x) = \rho_{\text{ext}}(x) - \rho(x), \quad x \in]0, 1[, \quad \int_0^1 E(x) dx = \varphi_1 - \varphi_0, \quad (24)$$

$$-A''(x) + \rho_{\gamma_2}(x)A(x) = 0, \quad x \in]0, 1[, \quad A(0) = A_0, \quad A(1) = A_1, \quad (25)$$

où $\{\rho, \rho_{\gamma_2}\} = \int_{\mathbb{R}} \{1, \frac{1}{\gamma_2}\} f(\cdot, p) dp$. Ici $g_0, g_1, \rho_{\text{ext}}$ sont des fonctions connues et $\varphi_0, \varphi_1, A_0, A_1$ sont des réels fixés. Rappelons que les facteurs de Lorentz γ_1, γ_2 sont donnés par $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ dans le cas NR, $\gamma_1 = (1 + |p|^2)^{1/2}, \gamma_2 = 1$ dans le cas QR et $\gamma_1 = \gamma_2 = (1 + |p|^2 + |A(x)|^2)^{1/2}$ dans le cas FR. On utilise le théorème de Schauder en définissant une application de point fixe au niveau des champs (E, A) . On doit estimer les densités de charge et de courant. Un des ingrédients principaux est la conservation de l'énergie au long des caractéristiques.

Proposition 3.1 (cf. [B12]) *Soient $E \in W^{1,\infty}(]0, 1[)$, $A \in W^{2,\infty}(]0, 1[)$ et Φ une primitive de E , i.e., $\Phi' = E$. On note par W l'énergie totale*

$$W(x, p) = \frac{|p|^2}{2} + \frac{|A(x)|^2}{2} + \Phi(x), \quad \text{dans le cas NR,}$$

$$W(x, p) = (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{|A(x)|^2}{2} + \Phi(x), \quad \text{dans le cas QR,}$$

$$W(x, p) = (1 + |p|^2 + |A(x)|^2)^{\frac{1}{2}} + \Phi(x), \quad \text{dans le cas FR.}$$

Alors pour toute caractéristique $(X(s), P(s))$ nous avons

$$\frac{d}{ds} \{W(X(s), P(s))\} = 0, \quad s_{\text{in}} < s < s_{\text{out}}.$$

En utilisant la conservation de l'énergie on montre l'existence d'une impulsion critique $p_0 \geq 0$ telle que toute caractéristique issue de $(x = 0, p > p_0)$ sort de l'intervalle $]0, 1[$ par l'extrémité droite en temps fini et toute caractéristique issue de $(x = 0, 0 < p < p_0)$ "fait demi-tour" à l'intérieur de l'intervalle $]0, 1[$ pour ressortir éventuellement par l'extrémité gauche de $]0, 1[$ en temps fini (voir [B12] pour un énoncé précis). De manière analogue on construit l'impulsion critique $p_1 \leq 0$ associée à l'extrémité droite $x = 1$. Ces

propriétés géométriques s'avèrent très utiles pour l'estimation des moments de la solution par caractéristiques de (22). Supposons que

$$G = \int_{p>0} \frac{p}{\gamma_1} g_0(p) dp - \int_{p<0} \frac{p}{\gamma_1} g_1(p) dp < +\infty,$$

et cherchons une borne pour $j^\pm := \int_{\mathbb{R}} \frac{p^\pm}{\gamma_1} f(\cdot, p) dp$ dans $L^\infty(]0, 1[)$ avec $p^\pm = \max\{0, \pm p\}$. En faisant appel à la formulation par caractéristiques nous avons pour toute fonction $\varphi \in L^1(]0, 1[)$ non négative

$$\begin{aligned} \int_0^1 j^+(x) \varphi(x) dx &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(x, p) \varphi(x) \frac{p^+}{\gamma_1} dp dx \\ &= \sum_{k=0}^1 \int_{(-1)^k p > 0} \frac{|p|}{\gamma_1} g_k(p) \int_0^{s_{\text{out}}(k, p)} \left(\frac{P(s; k, p)}{\gamma_1(s)} \right)^+ \varphi(X(s; k, p)) ds dp. \end{aligned}$$

Prenons par exemple $k = 0$ et $p > p_0$. Dans ce cas $P(s; 0, p) > 0$ pour tout $0 < s < s_{\text{out}}(0, p)$ et $X(s_{\text{out}}(0, p)) = 1$. On obtient

$$\int_0^{s_{\text{out}}(0, p)} \left(\frac{P(s; 0, p)}{\gamma_1(s)} \right)^+ \varphi(X(s; 0, p)) ds = \int_0^{s_{\text{out}}(0, p)} \frac{dX}{ds} \varphi(X(s; 0, p)) ds = \|\varphi\|_{L^1(0,1)}.$$

Les autres cas se traitent de la même manière. Finalement on obtient

$$\int_0^1 j^+(x) \varphi(x) dx \leq G \|\varphi\|_{L^1(0,1)}, \quad \forall \varphi \in L^1(]0, 1[),$$

et par conséquent $\|j^+\|_{L^\infty} \leq G$. De la même façon on montre que $\|j^-\|_{L^\infty} \leq G$. Notons qu'on a obtenu des bornes indépendantes des champs (E, A) . Il est également possible d'estimer les moments de $f_{E,A}$ en contrôlant la variation de l'impulsion au long des trajectoires comme cela a été fait dans le Lemme 1.1.

Lemme 3.1 (cf. [B12]) Soient $E \in W^{1,\infty}(]0, 1[)$, $A \in W^{2,\infty}(]0, 1[)$ et D_{NR} , D_{QR} , D_{FR} les quantités définies par

$$D_{NR} := (2 \|E\|_{L^\infty} + 2 \|A\|_{L^\infty} \|A'\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}},$$

$$D_{QR} := (\beta_{QR}(1 + \beta_{QR}))^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_{QR} = 4 (\|E\|_{L^\infty} + \|A\|_{L^\infty} \|A'\|_{L^\infty}),$$

$$D_{FR} := \max \left\{ \|A\|_{L^\infty}, \left(\beta_{FR} (\beta_{FR} + (1 + \|A\|_{L^\infty}^2)^{\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad \beta_{FR} = 8 \sqrt{2} (\|E\|_{L^\infty} + \|A'\|_{L^\infty}).$$

Pour toute caractéristique (X, P) de (22) nous avons

$$|P(s_1) - P(s_2)| \leq 2D, \quad s_{\text{in}} \leq s_1 \leq s_2 \leq s_{\text{out}},$$

où $D = D_{NR}$ dans le cas NR , $D = D_{QR}$ dans le cas QR , $D = D_{FR}$ dans le cas FR .

On obtient le résultat d'existence

Théorème 3.2 (cf. [B12]) *Supposons que $g_0 \in L^1(0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty)$, $g_1 \in L^1(-\infty, 0) \cap L^\infty(-\infty, 0)$, $g_0, g_1 \geq 0$, $\rho_{\text{ext}} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_{\text{ext}} \geq 0$, $\varphi_0, \varphi_1, A_0, A_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une solution stationnaire $(f \geq 0, E, A) \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \times W^{1,\infty}(]0, 1[) \times W^{2,\infty}(]0, 1[)$ de (22 – 25).*

3.3 Régimes harmoniques pour l'interaction laser-plasma

Nous avons étudié une classe particulière de solutions pour les modèles d'interaction laser-plasma : il s'agit de solutions avec potentiel vecteur polarisé circulairement

$$A_y(t, x) = a(x) \cos(\omega t), \quad A_z(t, x) = a(x) \sin(\omega t).$$

Dans ce cas on obtient le système

$$\partial_t f + \frac{p}{\gamma_1} \partial_x f - \left(E(t, x) + \frac{a(x)}{\gamma_2} a'(x) \right) \partial_p f = 0,$$

$$-\omega^2 a(x) - a''(x) = -\rho_{\gamma_2}(t, x) a(x),$$

$$\partial_t E = j(t, x), \quad \partial_x E = \rho_{\text{ext}}(x) - \rho(t, x),$$

avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ dans le cas NR, $\gamma_1 = (1 + p^2)^{1/2}$, $\gamma_2 = 1$ dans le cas QR et $\gamma_1 = \gamma_2 = (1 + p^2 + a(x)^2)^{1/2}$ dans le cas FR. En supposant que le potentiel électrique, noté ϕ , ne dépend pas du temps on peut considérer des distributions boltzmanniennes du type $f \sim e^{-W(x,p)}$ où W est l'énergie d'une particule : $W(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{a(x)^2}{2} + \phi(x)$ dans le cas NR, $W(x, p) = (1 + p^2)^{1/2} + \frac{a(x)^2}{2} + \phi(x)$ dans le cas QR et $W(x, p) = (1 + p^2 + a(x)^2)^{1/2} + \phi(x)$ dans le cas FR. Pour simplifier, présentons ici le cas NR. On se place dans le cadre des solutions périodiques en espace, de période L . Notons que l'équation $\partial_t E = j$ est vérifiée trivialement et par conséquent on se ramène à la résolution du système

$$f(x, p) = K e^{-W(x,p)},$$

$$\rho(x) = K (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a(x)^2}{2} - \phi(x)}, \quad (26)$$

$$\phi''(x) = \rho_{\text{ext}}(x) - \rho(x), \quad (27)$$

$$-a''(x) + \rho(x)a(x) = \omega^2 a(x), \quad (28)$$

où la constante K se calcule en imposant la condition de neutralité $\int_0^L \rho dx = \int_0^L \rho_{\text{ext}} dx =: M$. L'étude de (26 – 28) s'effectue par une procédure de point fixe : pour a donné

on détermine l'unique solution du problème de Boltzmann (26 – 27) en minimisant la fonctionnelle convexe

$$J[\rho] = \int_0^L \left\{ \rho \ln \rho + \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dx} \phi[\rho] \right|^2 + \frac{1}{2} a(x)^2 \rho(x) \right\} dx,$$

sous la contrainte $\int_0^L \rho(x) dx = M$ (cf. [21, 44]) ; ensuite on considère la fonction propre normalisée associée à la première valeur propre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + \rho$ avec des conditions aux limites périodiques. Nous renvoyons à [BL] pour les détails de démonstration.

3.4 Les équations de Nordström-Vlasov 1D

On considère une population de particules dont on néglige les collisions qui interagissent par des forces gravitationnelles. La dynamique du système est décrite par les équations d'Einstein-Vlasov (voir [2, 85, 86]). Il existe un modèle simplifié obtenu par le couplage d'une équation cinétique de Vlasov avec la théorie gravitationnelle de Nordström [77]

$$\partial_t F + v(p) \cdot \nabla_x F - \left((\partial_t \phi + v(p) \cdot \nabla_x \phi) p + (1 + |p|^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla_x \phi \right) \cdot \nabla_p F = 0,$$

$$\partial_t^2 \phi - \Delta_x \phi = -e^{(N+1)\phi(t,x)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t,x,p)}{(1+|p|^2)^{\frac{1}{2}}} dp,$$

où $v(p) = \frac{p}{(1+|p|^2)^{1/2}}$ est la vitesse relativiste d'une particule animée de l'impulsion $p \in \mathbb{R}^N$, $N \in \{1, 2, 3\}$ (on suppose que la masse des particules, la constante gravitationnelle et la vitesse de la lumière sont égales à l'unité). Il convient de faire le changement d'inconnue $f(t, x, p) = e^{(N+1)\phi(t,x)} F(t, x, p)$ et on obtient le système

$$\partial_t f + v(p) \cdot \nabla_x f - \left((S\phi) p + (1 + |p|^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla_x \phi \right) \cdot \nabla_p f = (N + 1) f(S\phi), \quad (29)$$

$$\partial_t^2 \phi - \Delta_x \phi = -\mu(t, x), \quad \mu(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t, x, p)}{(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}} dp, \quad (30)$$

où $S = \partial_t + v(p) \cdot \nabla_x$. On complète ces équations par des conditions initiales

$$f(0, \cdot, \cdot) = f_0, \quad \phi(0, \cdot) = \varphi_0, \quad \partial_t \phi(0, \cdot) = \varphi_1. \quad (31)$$

Le système (29 – 30) est appelé le système de Nordström-Vlasov (NV). Il a été étudié récemment par Calogero et Rein, voir [22] pour l'existence et l'unicité de solution classique et [23] pour l'existence de solution faible. En particulier dans [22] on montre l'existence globale et l'unicité de la solution classique en une dimension pour des données $f_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_0 \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\varphi_1 \in C_b^1(\mathbb{R})$ (ici C_b^k représente l'ensemble des fonctions de classe C^k avec

les k premières dérivées bornées). Notons la ressemblance du modèle de NV avec celui de l'interaction laser-plasma. Je me suis proposé de montrer un résultat d'existence globale et unicité de la solution par caractéristiques pour NV1D sous des hypothèses moins restrictives en adaptant la méthode utilisée pour traiter le modèle d'interaction laser-plasma.

Théorème 3.3 (cf. [B14]) Soient $\varphi_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$, $\varphi_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $0 \leq f_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et supposons qu'il existe une fonction bornée g_0 croissante sur \mathbb{R}^- , décroissante sur \mathbb{R}^+ telle que $f_0(x,p) \leq g_0(p)$, $\forall (x,p) \in \mathbb{R}^2$, $(1+|p|)g_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique solution globale de (29 – 31) vérifiant $(f \geq 0, \phi) \in L^\infty(]0, T[; L^1(\mathbb{R}^2)) \times W^{2,\infty}(]0, T[\times \mathbb{R})$, $\forall T > 0$.

Dans [B15] on a étudié l'existence de solution faible stationnaire des équations de NV1D

$$v(p)\partial_x f - (1+p^2)^{\frac{1}{2}}\phi'(x)\partial_p f = 2f(x,p)v(p)\phi'(x), \quad (x,p) \in]0, 1[\times \mathbb{R}, \quad (32)$$

$$\phi''(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x,p)}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp, \quad x \in]0, 1[, \quad (33)$$

avec les conditions aux limites

$$f(x=0, p > 0) = g_0(p), \quad f(x=1, p < 0) = g_1(p), \quad (34)$$

$$\phi(0) = \varphi_0, \quad \phi(1) = \varphi_1. \quad (35)$$

Comme pour les modèles d'interaction laser-plasma on se sert de la conservation de l'énergie des particules au long des trajectoires

$$\frac{d}{ds}\{W(X(s), P(s))\} = 0, \quad W(x,p) = (1+p^2)^{1/2}e^{\phi(x)} - 1,$$

et des propriétés géométriques des caractéristiques de (32), notée (X, P) . Par une procédure de point fixe on montre le résultat

Théorème 3.4 (cf. [B15]) Soient $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{R}$, $g_0, g_1 \geq 0$ vérifiant

$$e^{-\varphi_0} \int_{p>0} v(p)g_0(p) dp - e^{-\varphi_1} \int_{p<0} v(p)g_1(p) dp < +\infty, \quad \max\{\|g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}, \|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^-)}\} < +\infty.$$

Alors il existe au moins une solution $(f \geq 0, \phi) \in (L^\infty(]0, 1[; L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(]0, 1[\times \mathbb{R})) \times W^{2,\infty}(]0, 1[)$ de (32 – 35).

Un autre problème intéressant est l'analyse du comportement asymptotique des solutions stationnaires associées à des conditions aux limites singulières, comme cela a été fait pour les équations de VP1D [40] ; pour $\varepsilon > 0$ on considère $(f_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ une solution stationnaire de (32, 33, 35) vérifiant

$$f_\varepsilon(x = 0, p > 0) = g_\varepsilon(p) := \frac{1}{\varepsilon^2} g\left(\frac{p}{\varepsilon}\right), \quad f_\varepsilon(x = 1, p < 0) = 0,$$

où $g \geq 0$ est une fonction donnée telle que $\gamma = \int_{\mathbb{R}} ug(u)du < +\infty$. Les fonctions $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ modélisent une approximation d'une densité monocinétique de courant γ , car nous avons

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{p>0} v(p)g_\varepsilon(p) dp = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{u>0} \frac{u}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 u^2}} g(u) du = \gamma.$$

Théorème 3.5 (cf. [B15]) Soient $\varphi_0 > \varphi_1$, $0 \leq g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que $\gamma = \int_{u>0} ug(u)du < +\infty$. Alors nous avons les convergences

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \phi_\varepsilon = \phi \text{ dans } C^1([0, 1]), \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{M}([0, 1] \times \mathbb{R}) \text{ faiblement } \star,$$

où $\phi \in C^1([0, 1]) \cap C^2(]0, 1])$ est l'unique solution de

$$\phi''(x) = \frac{\gamma}{e^{\varphi_0 - \phi(x)} \sqrt{e^{2\varphi_0 - 2\phi(x)} - 1}}, \quad x \in]0, 1[, \quad \phi(0) = \varphi_0, \quad \phi(1) = \varphi_1,$$

et

$$f(x, p) = \frac{\gamma}{\sqrt{e^{2\varphi_0 - 2\phi(x)} - 1}} \delta\left(p - \sqrt{e^{2\varphi_0 - 2\phi(x)} - 1}\right).$$

Le résultat d'existence de solution stationnaire pour les équations de NV a été étendu en 3D [B16]. On utilise à nouveau la conservation de l'énergie des particules, qui s'écrit

$$W_c(x, p) = mc^2 \left(\left(1 + \frac{|p|^2}{m^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\phi(x)}{mc^2}} - 1 \right),$$

où m représente la masse des particules et c est la vitesse de la lumière. On montre également la convergence du modèle de NV vers celui de VP gravitationnel lorsque c tend vers l'infini.

4 Une méthode particulière pour la résolution numérique des équations de VM1D

Publication : [B18]

Il existe de nombreuses méthodes pour l'approximation numériques des équations de VM. En particulier on peut utiliser des méthodes particulières qui consistent à remplacer la densité de particules par une collection finie de macro-particules [15]. À chaque pas de temps on calcule les nouvelles positions et impulsions des macro-particules à l'aide des caractéristiques de l'équation de Vlasov. Les valeurs du champ électromagnétique sont déterminées en utilisant une discrétisation des équations de Maxwell. Pour la mise à jour du champ électromagnétique on doit approcher les densités de charge et de courant (qui sont les termes sources des équations de Maxwell) ce qui nécessite à contrôler le gradient de la fonction de distribution.

Les méthodes particulières ont été étudiées par Cottet et Raviart [30, 31], Schaeffer [92], Wollman [98, 99], Ganguly et Victory [49], Glassey et Schaeffer [52], Victory et Allen [97]. En général on impose des conditions initiales assez régulières de sorte qu'il existe une solution exacte régulière pour les équations de VP ou de VM. Mais dans la pratique la distribution de particules chargées n'est qu'une fonction L^1 , d'énergie cinétique finie. Je me suis proposé de construire un schéma numérique basé sur la formulation par caractéristiques de l'équation de Vlasov, permettant le traitement des conditions initiales L^1 . On considère ici les équations relativistes de VM1D

$$\partial_t f + v(p)\partial_x f + q E(t, x)\partial_p f = 0, \quad (t, x, p) \in]0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (36)$$

$$\partial_t E = -\frac{j(t, x)}{\varepsilon_0}, \quad \partial_x E = \frac{\rho(t, x)}{\varepsilon_0}, \quad (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}, \quad (37)$$

où $v(p) = \frac{p}{m} \left(1 + \frac{|p|^2}{m^2 c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ est la vitesse relativiste. On choisit des unités telles que $m = 1, q = 1, \varepsilon_0 = 1$. On complète les équations (36, 37) par les conditions initiales

$$f(0, x, p) = f_0(x, p), \quad (x, p) \in \mathbb{R}^2, \quad E(0, x) = E_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

et on suppose que

H1) il existe une fonction $g_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ croissante sur \mathbb{R}^- et décroissante sur \mathbb{R}^+ telle que $0 \leq f_0(x, p) \leq g_0(p), \forall (x, p) \in \mathbb{R}^2$;

H2) $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$;

H3) $E_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que $E_0' = \rho_0 := \int_{\mathbb{R}} f_0 dp$.

Sous ces hypothèses on montre cf. [B7] qu'il existe une unique solution globale $(f, E) \in L^\infty([0, +\infty[; L^1(\mathbb{R}^2)) \times L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ avec $E \in W^{1,\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$, $\forall T > 0$ et f solution par caractéristiques. Cette solution se propage à vitesse finie.

Théorème 4.1 (cf. [B18]) Soient $(f_0^k, E_0^k)_{k \in \{1,2\}}$ des conditions initiales vérifiant H1-H3 et notons par $(f^k, E^k)_{k \in \{1,2\}}$ les solutions globales correspondantes. Alors pour tout $R > 0$ il existe une constante $C(R/c)$ telle que pour $t \in [0, R/c]$

$$\|E^1(t) - E^2(t)\|_{L^\infty([-R-ct, R-ct])} \leq C \left(\frac{R}{c} \right) (\|f_0^1 - f_0^2\|_{L^1([-R, R] \times \mathbb{R})} + \|E_0^1 - E_0^2\|_{L^\infty([-R, R])}).$$

En particulier si $f_0^1(x, p) = f_0^2(x, p) \forall (x, p) \in [-R, R] \times \mathbb{R}$ et $E_0^1(x) = E_0^2(x) \forall x \in [-R, R]$, alors pour $t \in [0, R/c]$ nous avons

$$f^1(t, x, p) = f^2(t, x, p), \forall (x, p) \in [-(R-ct), R-ct] \times \mathbb{R},$$

$$E^1(t, x) = E^2(t, x), \forall x \in [-(R-ct), R-ct].$$

Présentons maintenant le schéma numérique. Soient f_0, E_0 vérifiant les hypothèses H1-H3. On considère les pas de temps Δt , d'espace Δx , d'impulsion Δp . Pour $(n, i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2$ on note $t^n = n\Delta t$, $x_i = i\Delta x$, $p_j = j\Delta p$ et

$$f_{ij}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta p} \int_{|x-x_i| < \frac{\Delta x}{2}} \int_{|p-p_j| < \frac{\Delta p}{2}} f_0(x, p) dp dx.$$

Bien évidemment nous avons $\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \Delta x \Delta p f_{ij}^0 = \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$. Notons par (f, E) la solution exacte de (36 – 38). En utilisant l'équation $\partial_t E = -j$ et la formulation par caractéristiques de (36) on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} E(t, x) \theta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} E_0(x) \theta(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, p) \int_x^{X(t;0,x,p)} \theta(u) du dp dx, \quad (39)$$

pour toute fonction $\theta \in L^1(\mathbb{R})$, où (X, P) sont les caractéristiques de (36) associées au champ électrique E . On fixe une fonction φ non négative, à support compact, telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) du = 1$. En s'inspirant de (39) on définit notre schéma comme il suit

- on démarre avec $(X_{ij}^0, P_{ij}^0) = (x_i, p_j)$, $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$;
- pour tout $n \geq 0$ on calcule $(X_{ij}^{n+1}, P_{ij}^{n+1})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ en utilisant les formules

$$X_{ij}^{n+1} = X_{ij}^n + \Delta t v(P_{ij}^n), \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \quad (40)$$

$$P_{ij}^{n+1} = P_{ij}^n + \Delta t E^n(X_{ij}^n), \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \quad (41)$$

où le champ E^n est donné par

$$E^n(\cdot) = E_0(\cdot) - \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} f_{ij}^0 \Delta p \int_{x_i}^{X_{ij}^n} \varphi\left(\frac{u - \cdot}{\Delta x}\right) du. \quad (42)$$

On montre l'estimation d'erreur suivante

Proposition 4.1 (cf. [B18]) Soient (f, E) la solution exacte de (36–38), (X, P) les caractéristiques associées à E et $(X_{ij}^n, P_{ij}^n)_{(n,i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2}$, $(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution numérique donnée par (40–42). Alors il existe une constante C qui dépend des conditions initiales et $T = N\Delta t$ telle que pour $0 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \{ |X_{ij}^n - X(t^n; 0, x_i, p_j)| + |P_{ij}^n - P(t^n; 0, x_i, p_j)| \} &+ \|E^n(\cdot) - E(t^n, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq C(\Delta t + \Delta x + \Delta p). \end{aligned}$$

Clairement on peut calculer seulement un nombre fini de caractéristiques approchées (X_{ij}^n, P_{ij}^n) . On peut rendre le schéma théorique (40–42) utilisable en pratique en faisant appel à la propagation à vitesse finie pour localiser en espace et en négligeant la densité initiale f_0 pour $|p|$ assez grand (c.a.d. $f_{ij}^0 = 0$ pour $|j|$ assez grand), voir [B18].

Pour tester cette méthode on cherche à construire une solution analytique des équations de VM1D. Ceci est possible dans le cas non relativiste

$$\partial_t f + v \partial_x f + E \partial_v f = 0, \quad \partial_t E = -j := - \int_{\mathbb{R}} v f(t, x, v) dv.$$

Remarquons que la solution exacte vérifiant les conditions initiales

$$f(0, x, v) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{v^2}{2\theta}}, \quad E(0, x) = \sqrt{\rho\theta}.$$

est donnée par

$$f(t, x, v) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(v - \sqrt{\theta} \sin(\sqrt{\rho} t))^2}{2\theta}}, \quad E(t, x) = \sqrt{\rho\theta} \cos(\sqrt{\rho} t).$$

Les caractéristiques de l'équation de Vlasov se calculent par les formules

$$X(t; 0, x, v) = x + tv + \sqrt{\frac{\theta}{\rho}} (1 - \cos(\sqrt{\rho} t)), \quad V(t; 0, x, v) = v + \sqrt{\theta} \sin(\sqrt{\rho} t).$$

Les Figures 1–3 illustrent des comparaisons de la solution calculée numériquement par rapport à la solution analytique.

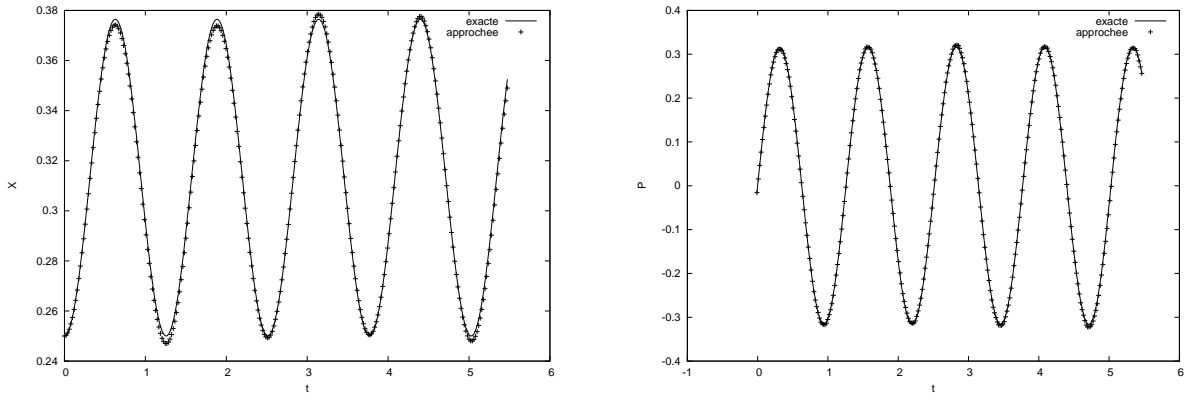


Figure 1: Évolution en temps de la position/vitesse d'une caractéristique

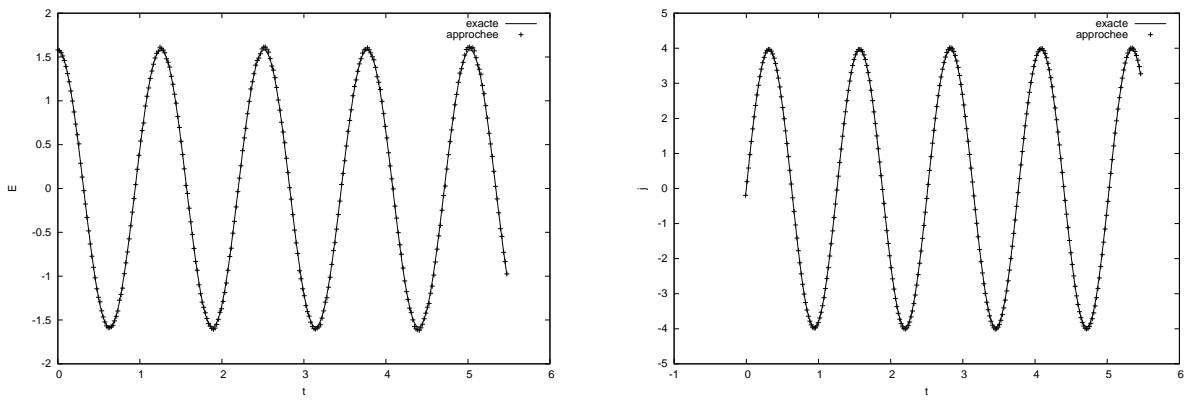


Figure 2: Évolution en temps du champ électrique et du courant

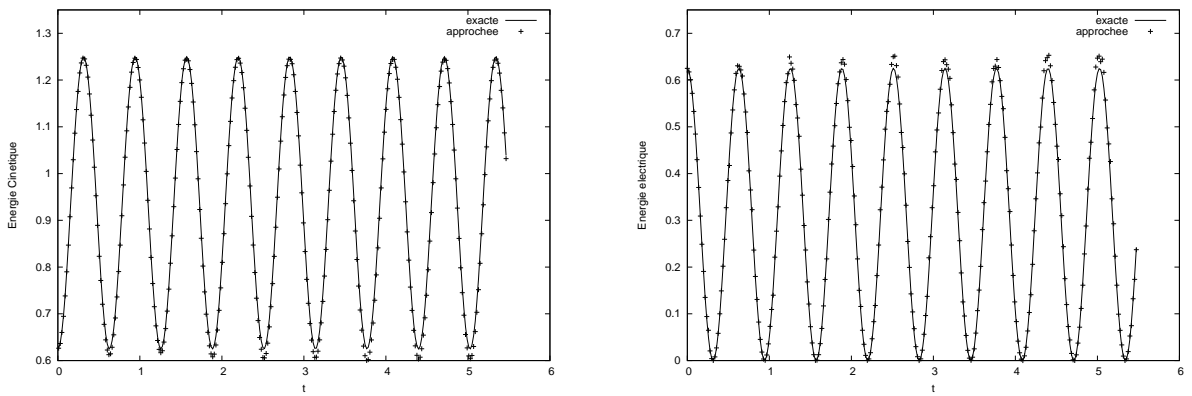


Figure 3: Évolution en temps de l'énergie cinétique/électrique totale

5 Solutions périodiques et presque-périodiques

Publications : [BN, B9, BS]

Nous présentons ici quelques résultats concernant l'existence de solutions périodiques ou presque-périodiques. Dans les deux premiers paragraphes il s'agit de périodicité (presque-périodicité) en temps. Dans le dernier on s'intéresse à l'existence de solution périodique en espace pour une équation dite d'enveloppe, utilisée pour l'étude des faisceaux de particules chargées.

5.1 Solutions périodiques en temps des équations d'Hamilton-Jacobi du premier ordre

On étudie l'existence de solution de viscosité périodique en temps des équations d'Hamilton-Jacobi de la forme

$$\partial_t u + H(x, u, Du) = f(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (43)$$

où H et f sont continues, f étant périodique en temps. Évidemment l'étude de (43) repose sur les résultats d'existence et unicité pour le problème de Cauchy associé, voir les travaux de Crandall et Lions [32, 33], Lions [72], Crandall, Evans et Lions [34] où la notion de solution de viscosité a été introduite et où on étudie l'unicité et la stabilité de ce type de solution pour les équations plus générales

$$\partial_t u + H(x, t, u, Du) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, T[,$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Pour des résultats généraux d'existence on peut consulter Souganidis [94]. On suppose que l'hamiltonien H vérifie les hypothèses usuelles parmi lesquelles la croissance "stricte" par rapport à u

$$\forall R > 0 \exists \gamma_R > 0 : H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq \gamma_R(u - v), \quad \forall x, p \in \mathbb{R}^N, -R \leq v \leq u \leq R, \quad (44)$$

et la coercivité

$$\forall R > 0, \lim_{|p| \rightarrow +\infty} H(x, u, p) = +\infty, \quad \text{uniformément pour } (x, u) \in \mathbb{R}^N \times [-R, R]. \quad (45)$$

Rappelons que l'hypothèse (44) joue un rôle crucial dans la preuve de l'unicité et que l'hypothèse (45) implique la régularité lipschitzienne de la solution. L'existence de solution

de viscosité T périodique en temps résulte facilement dans le cas des hamiltoniens vérifiant (44). Pour cela il suffit d'étudier le comportement en temps long du problème de Cauchy avec une condition initiale arbitraire, par exemple $u(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. On montre immédiatement que $\|u(\cdot, t+T) - u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ce^{-\gamma t}$, $t \geq 0$ avec $\gamma > 0$ et on conclut facilement en étudiant la suite $(u_n)_n = (u|_{\mathbb{R}^N \times [nT, (n+1)T]})_n$. L'unicité est immédiate car si u, v sont solutions T périodiques alors

$$\|u(\cdot, T) - v(\cdot, T)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{-\gamma T} \|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

ce qui implique $u(\cdot, 0) = v(\cdot, 0)$ et par conséquent $u = v$. Le cas des hamiltoniens seulement croissants par rapport à u

$$H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v \leq u, \quad p \in \mathbb{R}^N, \quad (46)$$

est beaucoup plus délicat. Il est très important car en particulier c'est le cas des hamiltoniens qui ne dépendent pas de u . Pour traiter ce cas on utilise un résultat de comparaison légèrement amélioré.

Proposition 5.1 (cf. [BN]) *Soient u une sous-solution de viscosité bornée s.c.s. de $\partial_t u + H(x, t, u, Du) = f(x, t)$ dans $\mathbb{R}^N \times]0, T[$ et v une sursolution de viscosité i.s.c. de $\partial_t v + H(x, t, v, Dv) = g(x, t)$ dans $\mathbb{R}^N \times]0, T[$. Alors nous avons*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (u(x, t) - v(x, t)) \leq e^{-\gamma t} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (u(x, 0) - v(x, 0))_+ + \sup_{0 \leq s \leq t} \int_s^t \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (f(x, \sigma) - g(x, \sigma)) d\sigma, \quad (47)$$

où $\gamma = \gamma_{R_0}$, $R_0 = \max\{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, T[)}, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, T[)}\}$ et on a noté par $(\cdot)_+$ la partie positive.

En utilisant le principe de comparaison classique on aurait obtenu

$$e^{\gamma t} \|(u(\cdot, t) - v(\cdot, t))_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|(u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0))_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t e^{\gamma s} \|(f(\cdot, s) - g(\cdot, s))_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds. \quad (48)$$

À noter la présence du terme $(f - g)_+$ dans le membre droit de (48) alors que dans (47) on voit apparaître $f - g$.

De l'inégalité (47) on déduit facilement que si u est une sous-solution de viscosité bornée, s.c.s. T périodique et v est une sursolution de viscosité bornée, s.c.i. T périodique alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (u(x, t) - v(x, t)) \leq \sup_{s \leq t} \int_s^t (f(\sigma) - g(\sigma)) d\sigma. \quad (49)$$

Soit H vérifiant (46). Voyons comment on peut procéder pour montrer l'existence de solution de viscosité T périodique de (43) dans ce cas. L'idée est de se ramener à l'étude de l'équation stationnaire

$$H(x, U, DU) = \langle f \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (50)$$

Supposons par exemple qu'il existe une solution de viscosité bornée V de (50). On utilise la méthode de la pénalisation : pour tout $\alpha > 0$ il existe une unique solution périodique v_α de

$$\alpha(v_\alpha - V(x)) + \partial_t v_\alpha + H(x, v_\alpha, Dv_\alpha) = f(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

car l'hamiltonien $H_\alpha(x, v, p) = \alpha(v - V(x)) + H(x, v, p)$ vérifie bien (44) avec $\gamma_R = \alpha$, $\forall R > 0$. Il s'agit maintenant de chercher des estimations uniformes par rapport à α pour conclure en utilisant le résultat de stabilité. On utilise l'inégalité (49). En observant que V vérifie

$$\alpha(V(x) - V(x)) + \partial_t V + H(x, V, DV) = \langle f \rangle, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

on en déduit que

$$-\|f - \langle f \rangle\|_{L^1(0, T)} \leq \inf_{s \leq t} \int_s^t \{f(\sigma) - \langle f \rangle\} d\sigma \leq v_\alpha - V \leq \sup_{s \leq t} \int_s^t \{f(\sigma) - \langle f \rangle\} d\sigma \leq \|f - \langle f \rangle\|_{L^1(0, T)}.$$

L'inégalité (49) permet également de montrer que $(v_\alpha)_{\alpha > 0}$ sont uniformément lipschitziennes en temps, car nous avons pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$

$$v_\alpha(x, t + h) - v_\alpha(x, t) \leq \sup_{s \leq t} \int_s^{s+h} (f(\sigma + h) - f(\sigma)) d\sigma \leq 2|h| \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

En utilisant l'hypothèse (45) on montre par des arguments classiques que $(v_\alpha)_{\alpha > 0}$ sont aussi uniformément lipschitziennes par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$. En passant à la limite quand $\alpha \searrow 0$ on en déduit que $v = \lim_{\alpha \searrow 0} v_\alpha$ est une solution de viscosité T périodique de (43). On a montré le résultat (voir [BN] pour un énoncé précis)

Théorème 5.1 *Soient $H = H(x, z, p)$ un hamiltonien vérifiant (46), (45) et $f \in C(\mathbb{R})$ une fonction T périodique. Alors il existe une solution de viscosité bornée, lipschitzienne, T périodique de (43) ssi il existe une solution de viscosité bornée de (50).*

Nous avons analysé le comportement en temps long du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + H(x, u, Du) = f(t), & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (51)$$

Nous avons vu que pour des hamiltoniens vérifiant (44) on a convergence vers l'unique solution T périodique. Ceci n'est plus vrai pour des hamiltoniens vérifiant (46). Pour s'en convaincre considérons l'exemple suivant avec un second membre stationnaire $f = 1$, cf. [9]

$$\begin{cases} \partial_t u + |1 - \partial_x u| = 1, & (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (52)$$

La solution exacte est $u(x, t) = \sin(x + t)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et $u(x, t)$ ne converge pas lorsque $t \rightarrow +\infty$. Des résultats concernant le comportement en temps long ont été obtenus par Fathi [46], Namah et Roquejoffre [75], Barles et Souganidis [10], Roquejoffre [88, 89]. En utilisant des arguments de monotonie et compacité on montre la convergence en temps long pour certaines classes de conditions initiales (voir [BN] pour un énoncé précis)

Théorème 5.2 *Soient $H = H(x, z, p)$ vérifiant (46), (45), $f \in C(\mathbb{R})$ une fonction T périodique et $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. On suppose qu'il existe une solution de viscosité bornée de $H(x, U, DU) = \langle f \rangle, x \in \mathbb{R}^N$.*

- 1) *Alors il existe une unique solution de viscosité $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$ de (51) ;*
- 2) *Si la condition initiale est telle que $u_0(x) \leq u(x, T)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ alors*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(x, t + kT) = \varphi(x, t), \text{ uniformément pour } (x, t) \in \overline{B}_R \times \mathbb{R}^+,$$

où φ est la solution T périodique minimale de (43) vérifiant $\varphi(x, 0) \geq u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$;

- 3) *Si la condition initiale est telle que $u_0(x) \geq u(x, T)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ alors*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(x, t + kT) = \Phi(x, t), \text{ uniformément pour } (x, t) \in \overline{B}_R \times \mathbb{R}^+,$$

où Φ est la solution T périodique maximale de (43) vérifiant $\Phi(x, 0) \leq u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Un autre problème intéressant est le comportement asymptotique des solutions lorsque la fréquence devient grande. Soit f une fonction T périodique et u_n des solutions $\frac{T}{n}$ périodiques de

$$\partial_t u_n + H(x, u_n, Du_n) = f(nt), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

En introduisant la variable rapide $s = nt$ et l'ansatz $u_n(x, t) = u^0(x) + \frac{1}{n}u^1(x, nt) + \dots$ on obtient formellement

$$\partial_s u^1(x, s) + \dots + H(x, u^0(x) + \frac{1}{n}u^1(x, s) + \dots, Du^0(x) + \frac{1}{n}Du^1(x, s) + \dots) = f(s), \quad (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Comme u_n est $\frac{T}{n}$ périodique par rapport à t , la fonction $u^1(x, s)$ est T périodique par rapport à s et après intégration pour $s \in [0, T]$ on trouve

$$\frac{1}{T} \int_0^T H(x, u^0(x) + \frac{1}{n}u^1(x, s) + \dots, Du^0(x) + \frac{1}{n}Du^1(x, s) + \dots) ds = \langle f \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Après passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ on en déduit que $H(x, u^0, Du^0) = \langle f \rangle$, $x \in \mathbb{R}^N$. Sous des hypothèses appropriées on montre effectivement que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une solution U de (50) et que $\|u_n - U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})} \leq \frac{1}{n} \|f - \langle f \rangle\|_{L^1(0, T)}$, $n \geq 1$ (voir [BN]). Signalons qu'il est possible d'obtenir des résultats similaires dans le cas d'une fonction f presque-périodique en temps.

5.2 Solutions presque-périodiques des équations différentielles ordinaires

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'existence de solution classique presque-périodique des équations différentielles du premier ordre

$$x'(t) + g(t, x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (53)$$

où g est une fonction croissante en x , presque-périodique en t . Les premiers résultats ont été obtenus par Favard [47], Demidovitch [42], Gheorghiu [50], Opial [78]. Rappelons aussi les résultats d'Amerio [1], Corduneanu [29]. Dans tous ces travaux on suppose l'existence d'une solution bornée et on montre qu'elle est presque-périodique. Je me suis proposé d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes à imposer sur la fonction g qui assurent l'existence de solution presque-périodique de (53). Supposons qu'il existe une solution x presque-périodique de (53). On définit la fonction de moyenne $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t, x) dt = \langle g(\cdot, x) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On vérifie aisément que G est une fonction croissante, continue. Comme $x(\cdot)$ est presque-périodique, elle est bornée et donc $m \leq x(t) \leq M$, $t \in \mathbb{R}$. Par la monotonie de g on obtient

$$g(t, m) \leq g(t, x(t)) = -x'(t) \leq g(t, M),$$

ce qui implique immédiatement que $G(m) \leq 0 \leq G(M)$. Nous avons obtenu la condition nécessaire suivante

$$\exists X \in \mathbb{R} : \langle g(\cdot, X) \rangle = 0.$$

Une condition suffisante pour l'existence de solution presque-périodique est donnée par l'hypothèse plus forte

$$\exists X \in \mathbb{R} : \sup_{s,t \in \mathbb{R}} \left(- \int_s^t g(\sigma, X) d\sigma \right) < +\infty. \quad (54)$$

Théorème 5.3 (cf. [B9]) *Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante en x , presque-périodique en t vérifiant (54). Alors il existe au moins une solution presque-périodique $x(\cdot)$ de (53) telle que*

$$\|x(\cdot) - X\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sup_{s,t \in \mathbb{R}} \left(- \int_s^t g(\sigma, X) d\sigma \right).$$

Dans le cas d'une fonction g à variables séparées $g(t, x) = \beta(x) - f(t)$ avec β une fonction continue, croissante et f une fonction presque-périodique, on peut indiquer une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité de la solution presque-périodique.

Théorème 5.4 (cf. [B9]) *Soient $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante continue et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction presque-périodique vérifiant $\sup_{s,t \in \mathbb{R}} \left(\int_s^t \{f(\sigma) - \langle f \rangle\} d\sigma \right) < +\infty$ et $\langle f \rangle \in g(\mathbb{R})$. Alors il existe au moins une solution presque-périodique de $x'(t) + \beta(x(t)) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. De plus la solution presque-périodique est unique ssi*

$$\text{diam}(g^{-1}\langle f \rangle) \leq \sup_{s,t \in \mathbb{R}} \left(\int_s^t \{f(\sigma) - \langle f \rangle\} d\sigma \right).$$

5.3 Solutions périodiques des équations elliptiques non linéaires.

Application aux faisceaux de particules chargées

La modélisation des faisceaux de particules repose sur la résolution du système de VM3D. L'approximation de ces équations demande des efforts numériques considérables. Il convient d'utiliser des modèles simplifiés, en tenant compte des particularités du problème physique (longueurs caractéristiques, géométrie). Un des modèles largement utilisés dans la physique des accélérateurs de particules est l'approximation paraxiale. L'analyse mathématique de ce modèle a été effectuée par Degond et Raviart [41]. Ils présentent la distribution de Kapchinsky-Vladimirsky (KV) qui est une solution exacte du modèle paraxial. Pour calculer la distribution de KV on doit disposer d'une solution périodique en espace de l'équation dite d'enveloppe (voir [36, 48])

$$-u''(x) - a k(x)u(x) + \frac{1}{u(x)} + \frac{b}{(u(x))^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $a > 0, b \geq 0$ et $k(\cdot) \geq 0$ est une fonction périodique. Plus généralement on étudie les solutions périodiques des équations elliptiques non linéaires

$$-\Delta u + g(x, u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (55)$$

où $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée périodique en x et monotone en u . Le cas des non linéarités (strictement) croissantes est plus favorable, car c'est le cadre standard dans lequel on montre l'unicité de la solution et le principe de comparaison entre les sous/solutions. À noter que la non linéarité de l'équation d'enveloppe est décroissante par rapport à u . On travaille avec des solutions faibles dans l'espace de Sobolev périodique

$$H_{\#}^1(\mathbb{R}^N) = \{v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N) : \exists (\varphi_n)_n \subset C_{\#}^1(\mathbb{R}^N), \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v - \varphi_n\|_{L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)} = 0, \\ \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|\nabla \varphi_n - \nabla \varphi_m\|_{L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)} = 0\},$$

avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_{\#}^1(\mathbb{R}^N)} = \int_P u(x)v(x) dx + \int_P \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_{\#}^1(\mathbb{R}^N),$$

où $C_{\#}^k(\mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des fonctions $L = (L_1, L_2, \dots, L_N)$ périodiques de classe C^k et $P = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 \leq x_1 < L_1, 0 \leq x_2 < L_2, \dots, 0 \leq x_N < L_N\}$.

Définition 5.1 *On dit que $u \in H_{\#}^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution L périodique de (55) ssi $g(\cdot, u(\cdot)) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ et $\int_P \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_P g(x, u(x)) v(x) dx = 0, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\mathbb{R}^N)$.*

On présente ici le cas plus simple des fonctions g à variables séparées $g(x, u) = \beta(u) - f(x)$, $(x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, où β est une fonction continue, monotone et f est une fonction L périodique. En dimension $N \in \{1, 2, 3\}$ on obtient le résultat

Théorème 5.5 (cf. [BS]) *Soient $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante et $f \in L_{\#}^2(\mathbb{R}^N)$ telles que $\langle f \rangle := (\text{meas}(P))^{-1} \int_P f(x) dx \in \beta(\mathbb{R})$. Alors il existe au moins une solution périodique $u \in H_{\#}^2(\mathbb{R}^N)$ de $-\Delta u + \beta(u(x)) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. De plus, si β est strictement croissante, alors la solution périodique est unique.*

Donnons aussi un résultat en dimension $N = 1$ pour des non linéarités décroissantes

Théorème 5.6 (cf. [BS]) *Soient $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante, K lipschitzienne, $f \in L_{\#}^2(\mathbb{R})$. Supposons que*

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} f(x) dx \in \beta(\mathbb{R}), \quad K L_1^2 < 2.$$

Alors il existe au moins une solution L_1 périodique de $-u''(x) + \beta(u(x)) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. De plus, si β est strictement décroissante, alors la solution périodique est unique.

Présentons quelques résultats numériques en dimension $N = 1$. L'idée est de remplacer l'équation elliptique (55) par le problème parabolique

$$\alpha u + \partial_t u - \partial_x^2 u + g(x, u(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad (56)$$

avec une condition initiale arbitraire $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ petit. En vérité si g est croissante en u et si on note par U_α l'unique solution périodique de $\alpha U(x) - U''(x) + g(x, U(x)) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, on obtient immédiatement que

$$\|u(\cdot, t) - U_\alpha\|_{L^2_\#(\mathbb{R})} \leq e^{-\alpha t} \|u_0 - U_\alpha\|_{L^2_\#(\mathbb{R})}, \quad t > 0.$$

Par conséquent $u(\cdot, t) \approx U_\alpha$ pour $t \approx \frac{1}{\alpha}$ et $\alpha > 0$ petit. Une meilleure approche consiste à remplacer la constante α par une fonction décroissante $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0$. On fait évoluer α selon une équation du type

$$\alpha'(t) + \alpha(t)C(u(\cdot, t)) = 0, \quad t > 0,$$

où $C \geq 0$ est une fonction vérifiant $C \approx 1$ si $u(\cdot, t)$ est "proche" de la solution périodique et $C \approx 0$ sinon. L'idée est de garder α constant jusqu'à ce que la solution $u(\cdot, t)$ soit suffisamment proche du régime périodique. On peut considérer

$$C(u(\cdot, t)) = \mathbf{1}_{\{|\alpha(t) \langle u(\cdot, t) \rangle + \langle g(\cdot, u(\cdot, t)) \rangle| < \varepsilon\}},$$

avec $\varepsilon > 0$ petit. Effectivement si $u(\cdot, t)$ est "proche" de l'état périodique alors $\partial_t u \approx 0$, $\int_0^{L_1} \partial_x^2 u \, dx \approx 0$ et après intégration de (56) sur $]0, L_1[$ on trouve $\alpha(t) \langle u(\cdot, t) \rangle + \langle g(\cdot, u(\cdot, t)) \rangle \approx 0$ ce qui implique $\mathbf{1}_{\{|\alpha(t) \langle u(\cdot, t) \rangle + \langle g(\cdot, u(\cdot, t)) \rangle| < \varepsilon\}} = 1$.

Les Figures 4, 5 illustrent des résultats numériques pour les équations associées aux fonctions croissantes en u

$$g_1(x, u) = u(1 + \cos x) - (2 + \cos x)(\sin x - \cos x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^2,$$

$$g_2(x, u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}(1 + \cos x) - (\sin x + \cos x) \left(1 + \frac{1 + \cos x}{\sqrt{2 + \sin(2x)}} \right), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^2,$$

dont les solutions exactes sont $u_{1,2}(x) = \sin x \mp \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Considérons maintenant l'équation qui correspond à la non linéarité décroissante

$$g_3(x, u) = -K \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - \sin x + K \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^2,$$

dont la solution exacte est $u_3(x) = \sin x$ ainsi que l'équation d'enveloppe associée à $g(x, u) = -a(1 + \cos x)u + \frac{1}{u} + \frac{b}{u^3}$. Ces résultats numériques sont présentés dans la Figure 6.

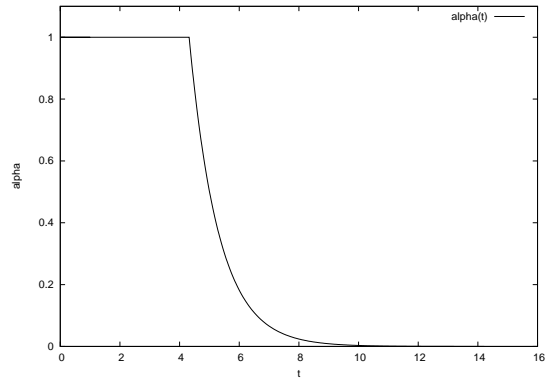
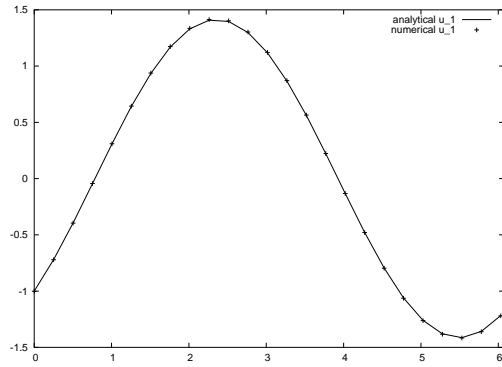


Figure 4: Solution exacte/approchée u_1 Évolution en temps de α_1

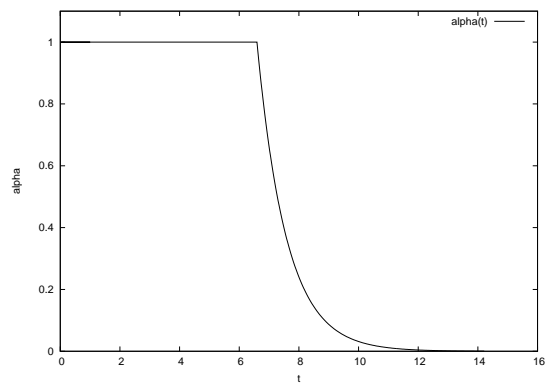
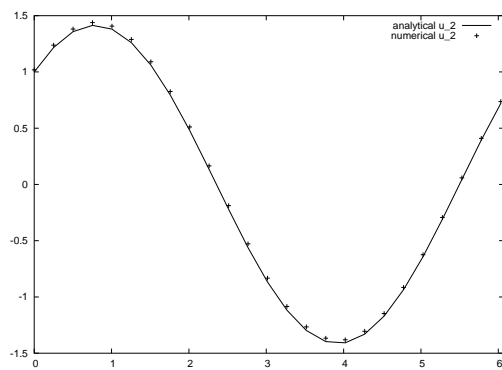


Figure 5: Solution exacte/approchée u_2 Évolution en temps de α_2

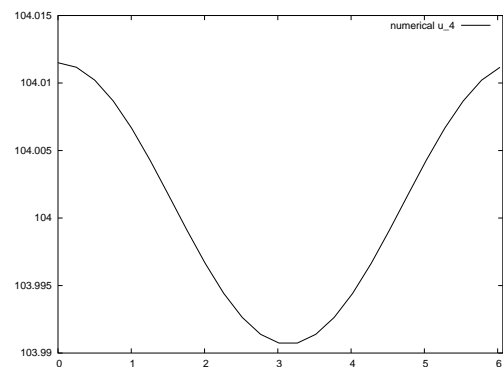
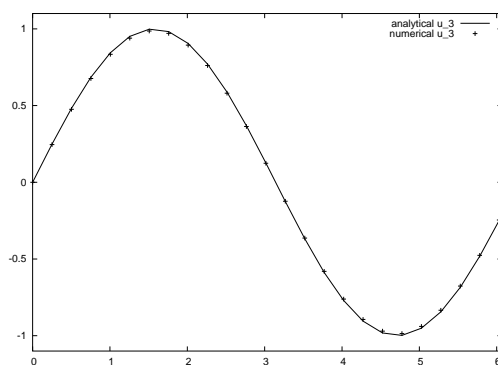


Figure 6: Solution exacte/approchée u_3 Solution approchée u_4

6 Étude asymptotique des fluides de Bingham

Publication : [BH]

Un fluide de Bingham se déplace comme un milieu rigide si une certaine fonction des contraintes ne dépasse pas un certain seuil. Ce type de comportement s'observe dans le cas des huiles ou des boues utilisées dans les forages pétroliers, ainsi que dans le béton. Si le seuil est strictement positif, on peut obtenir des zones rigides au sein de l'écoulement. Quand les forces externes diminuent, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement.

Pour l'analyse mathématique du modèle de Bingham on peut consulter le livre de Duvaut et Lions [45]. L'écoulement stationnaire, incompressible d'un fluide de Bingham est décrit par l'inéquation variationnelle

$$u \in H_0^1(\Omega)^3 : a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \langle l, v - u \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega)^3,$$

où $a : H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire symétrique

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \eta(x) \sum_{1 \leq i, j \leq 3} D_{ij}(u) D_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} \eta(x) D(u) : D(v) dx, \forall u, v \in H_0^1(\Omega)^3,$$

$j : H_0^1(\Omega)^3 \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est la fonction convexe définie par

$$j(v) = \int_{\Omega} g(x) |D(v)| dx \text{ si } \operatorname{div} v = 0, \quad j(v) = +\infty \text{ sinon,}$$

et $l : H_0^1(\Omega)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application linéaire $\langle l, v \rangle = \int_{\Omega} b(x) \cdot v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)^3$. On suppose que la viscosité η vérifie $0 < \eta_0 \leq \eta(x) \leq \eta_1, x \in \Omega$ et que le seuil $g > 0$ et les forces externes b sont des fonctions de $L^2(\Omega)$ respectivement $L^2(\Omega)^3$. Nous avons utilisé la notation $D(v) = (\nabla v + \nabla^T v)/2, \forall v \in H_0^1(\Omega)^3$. Par le Lemme de Korn (voir [45]) on en déduit que $a(\cdot, \cdot)$ est elliptique sur $H_0^1(\Omega)^3$. On vérifie également que j est convexe, i.s.c. et homogène.

Par la suite on présente nos résultats dans le cadre abstrait des inéquations variationnelles. Soient $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace de Hilbert réel, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue, V -elliptique, $j : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, propre, i.s.c., homogène et $f \in V$. L'inéquation variationnelle

$$u \in V : a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u), \forall v \in V, \quad (57)$$

admet une unique solution, cf. [74, 56, 57]. Le problème (57) est équivalent au problème

$$\begin{cases} a(u, u) + j(u) = (f, u), \\ a(u, v) + j(v) \geq (f, v), \forall v \in V. \end{cases}$$

On en déduit que $u = 0$ est solution ssi $j(v) \geq (f, v)$, $\forall v \in V$, ou encore ssi $f \in \partial j(0)$. Une telle force f sera appelée force de blocage. On souhaite étudier le comportement des solutions de (57) lorsque f varie dans un voisinage d'une force maximale de blocage. Plus précisément on dit que f est une force maximale de blocage si f est une force de blocage et pour tout $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon := (1 + \varepsilon)f$ ne l'est pas; c.a.d. la solution associée à f est $u = 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ la solution associée à f_ε est non nulle, $u_\varepsilon \neq 0$. Notre objectif est d'étudier le comportement de $w_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon}$ quand $\varepsilon \searrow 0$. On introduit l'ensemble $C = \{v \in V : j(v) = (f, v)\}$. On montre qu'il est non vide, convexe, fermé et qu'il coïncide avec l'ensemble $\{v \in V : f \in \partial j(v)\}$.

Commençons par établir des estimations, afin d'extraire une suite faiblement convergente. Rappelons que u_ε vérifie

$$\begin{cases} a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + j(u_\varepsilon) = (1 + \varepsilon)(f, u_\varepsilon), \\ a(u_\varepsilon, v) + j(v) \geq (1 + \varepsilon)(f, v), \forall v \in V. \end{cases}$$

On obtient $a(w_\varepsilon, w_\varepsilon) \leq a(w_\varepsilon, w_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(j(w_\varepsilon) - (f, w_\varepsilon)) = (f, w_\varepsilon)$ et on déduit facilement une borne pour $(\|w_\varepsilon\|)_{\varepsilon>0}$. Soit $w_k := w_{\varepsilon_k}$ une suite faiblement convergente vers $w \in V$. En passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité $j(w_k) \leq (1 + \varepsilon_k)(f, w_k)$ on obtient $j(w) \leq (f, w)$. L'inégalité opposée est vérifiée aussi, car f est une force de blocage. Par conséquent la limite faible w est un élément de C . Montrons maintenant que la suite $(w_k)_k$ converge fortement. En utilisant la notation $(Au, v) = a(u, v)$ nous avons $f_\varepsilon \in Au_\varepsilon + \partial j(u_\varepsilon)$ ou encore $f + \frac{f}{\varepsilon} \in Aw_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\partial j(w_\varepsilon)$. Comme $w \in C$ on a $f \in \partial j(w)$ ce qui implique $f \in Aw_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\partial j(w_\varepsilon) - \partial j(w))$. On conclut facilement après multiplication par $w_\varepsilon - w$ avec $\varepsilon = \varepsilon_k$. Pour identifier la limite w on procède comme il suit : pour tout $v \in C$ on a $f \in \partial j(v)$ et comme avant on en déduit que $f \in Aw_k + \frac{1}{\varepsilon_k}(\partial j(w_k) - \partial j(v))$. Après multiplication par $w_k - v$ on obtient $a(w_k, w_k - v) = (Aw_k, w_k - v) \leq (f, w_k - v)$ et finalement par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ on trouve $a(w, v - w) \geq (f, v - w)$. Nous avons montré le résultat

Théorème 6.1 (cf. [BH]) Soient $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue, V -elliptique, $j : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe, i.s.c., homogène et f une

force maximale de blocage. Alors $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement dans V quand $\varepsilon \searrow 0$ vers l'unique solution de l'inéquation variationnelle

$$w \in C : a(w, v - w) \geq (f, v - w), \forall v \in C.$$

Nous étudions aussi le comportement de $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Théorème 6.2 (cf. [BH]) Soient $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue, V -elliptique, $j : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe, i.s.c., homogène et $f \in V$ (pas nécessairement une force de blocage). Alors $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement dans V quand $\varepsilon \rightarrow +\infty$ vers l'unique solution de l'inéquation variationnelle

$$w \in \overline{D(j)} : a(w, v - w) \geq (f, v - w), \forall v \in \overline{D(j)}.$$

PUBLICATIONS

(préprints disponibles sur http://www-math.univ-fcomte.fr/pp_Annu/MBOSTAN/)

References

- [BP1] M. Bostan, F. Poupaud, *Solutions périodiques du système de Vlasov-Poisson avec conditions aux limites*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 325, pp. 1333-1336 (1997) ;
- [BP2] M. Bostan, F. Poupaud, *Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 10, No. 5, pp. 651-672 (2000) ;
- [BP3] M. Bostan, F. Poupaud, *Periodic solutions of the 1D Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 23, No. 14, pp. 1195-1221 (2000) ;
- [B1] M. Bostan, *Numerical study by a controllability method for the calculation of the time periodic solutions of the Maxwell and Vlasov-Maxwell systems*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., Vol. 35, No. 1, pp. 165-189 (2001) ;
- [B2] M. Bostan, *Solutions périodiques des équations d'évolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 332, pp. 401-404 (2001) ;
- [B3] M. Bostan, *Periodic solutions for evolution equations*, Electron. J. Differential Equations, Monograph 3, 41 pp. (2002) ;
- [B4] M. Bostan, *Permanent regimes for the 1D Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 35, No. 4, pp. 922-948 (2003) ;
- [B5] M. Bostan, *Solutions périodiques en temps des équations de Vlasov-Maxwell*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 339, pp. 451-456 (2004) ;
- [B6] M. Bostan, *Convergence des solutions faibles du système de Vlasov-Maxwell stationnaire vers des solutions faibles du système de Vlasov-Poisson stationnaire quand la vitesse de la lumière tend vers l'infini*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 340, pp. 803-808 (2005) ;
- [B7] M. Bostan, *Existence and uniqueness of the mild solution for the 1D Vlasov-Poisson initial-boundary value problem*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 37, No. 1, pp. 156-188 (2005) ;
- [B8] M. Bostan, *Boundary value problem for the three dimensional time periodic Vlasov-Maxwell system*, J. Comm. Math. Sci., Vol. 3, No. 4, pp. 621-663 (2005) ;

- [B9] M. Bostan, *Almost periodic solutions for first order differential equations*, Differential Integral Equations, Vol. 19, No. 1, pp. 91-120 (2006) ;
- [BH] M. Bostan, P. Hild, *Starting flow analysis for Bingham fluids*, Nonlinear Anal., Vol. 64, No. 5, pp. 1119-1139 (2006) ;
- [B10] M. Bostan, *Asymptotic behavior of weak solutions for the relativistic Vlasov-Maxwell equations with large light speed*, J. Differential Equations, Vol. 227, No. 2, pp. 444-498 (2006) ;
- [B11] M. Bostan, *Boundary value problem for the N -dimensional time periodic Vlasov-Poisson system*, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 29, pp. 1801-1848 (2006) ;
- [B12] M. Bostan, *Stationary solutions of the 1D Vlasov-Maxwell equations for laser-plasma interaction*, accepté à Indiana Univ. Math. J. ;
- [BL] M. Bostan, S. Labrunie, *On the harmonic Boltzmannian waves in laser-plasma interaction*, J. Phys. A : Math. Gen. 39, pp. 11697-11706 (2006) ;
- [BN] M. Bostan, G. Namah, *Time periodic viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, accepté à Commun. Pure Appl. Anal. ;
- [B13] M. Bostan, *Weak solutions for the Vlasov-Poisson initial-boundary value problem with bounded electric field*, accepté à Chinese Ann. Math. ;
- [B17] M. Bostan, *Mild solutions for the relativistic Vlasov-Maxwell system for laser-plasma interaction*, accepté à Quart. Appl. Math. ;
- [BS] M. Bostan, E. Sonnendrücker, *Periodic solutions for nonlinear elliptic equations. Applications to charged particles beam focusing systems*, accepté à M2AN Math. Model. Numer. Anal.

ARTICLES SOUMIS

- [BG1] M. Bostan, T. Goudon, *Electric high-field limit for the Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck system*, soumis aux Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire (septembre 2005) ;
- [B14] M. Bostan, *Mild solutions for the one dimensional Nordström-Vlasov system*, soumis à Nonlinearity (octobre 2006) ;
- [B15] M. Bostan, *Stationary solutions for the one dimensional Nordström-Vlasov system*, soumis à Asymptotic Anal. (avril 2006) ;

- [B16] M. Bostan, *Boundary value problem for the stationary Nordström-Vlasov system*, soumis à Adv. Differential Equations (juillet 2006) ;
- [B18] M. Bostan, *Analysis of a particle method for the one dimensional Vlasov-Maxwell system*, soumis à Numer. Methods PDE (juillet 2006) ;
- [BG2] M. Bostan, T. Goudon, *Low field regime for the relativistic Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck system ; the one and one-half dimensional case*, soumis à Arch. Ration. Mech. Anal. (septembre 2006).

ARTICLES EN PRÉPARATION

- [BGGV] M. Bostan, I. M. Gamba, T. Goudon, A. Vasseur, *Stationary solutions for the Boltzmann-Vlasov-Poisson equations; hydrodynamic limit in a half line.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Amerio, Soluzioni quasi-periodiche, o limitate di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati, Ann. Mat. Pura Appl., 39(1955) 97-119.
- [2] H. Andréasson, *The Einstein-Vlasov system/Kinetic theory*, Living Rev. Relativ. 5 (2002) 33-.
- [3] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, *On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations*, Comm. Partial Differential Equations 26(2001) 43-100.
- [4] D. Bakry, M. Emery, *Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 299(1984) 775-778.
- [5] A. Arnold, J. A. Carrillo, I. Gamba C.-W. Shu, *Low and high field scaling limits for the Vlasov- and Wigner-Poisson-Fokker-Planck system*, Transport Theory Statist. Phys. 30(2001) 121-153.
- [6] A. Arseneev, *Global existence of a weak solution of the Vlasov system of equations*, U.R.S.S. Comp. Math. Phys. 15(1975) 131-143.
- [7] C. Bardos, F. Golse, B. Perthame, R. Sentis, *The non accretive radiative transfert equation, existence of solutions and Rosseland approximation*, J. Funct. Anal. 88(1988) 434-460.
- [8] C. Bardos, R. Santos, R. Sentis, *Diffusion approximation and computation of critical size of a transport operator*, Trans. Amer. Math. Soc. 284(1984) 617-649.
- [9] G. Barles, P.E. Souganidis, *Some counterexamples on the asymptotic behavior of the solutions of the Hamilton-Jacobi equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 330(2000), 963-968.
- [10] G. Barles, P.E. Souganidis, *On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal. 31(2001) 925-939.
- [11] N. Ben Abdallah *Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov-Poisson system*, Math. Methods Appl. Sci. 17(1994) 451-476.
- [12] N. Ben Abdallah, P. Degond, P. Markowich, C. Schmeiser, *High field approximation of the spherical harmonics expansion model for semiconductors*, Z. Angew. Math. Phys. 52(2001) 201-230.
- [13] F. Berthelin, A. Vasseur, *From kinetic equations to multidimensional isentropic gas dynamics before shocks*, SIAM J. Math. Anal. 36(2005) 1807-1835.
- [14] M. Bézard, *Boundary value problems for the Vlasov-Maxwell system*, Sémin. EDP École Polytech Palaiseau, Exp. 4(1993) 19-.
- [15] C.K. Birdsall, A.B. Langdon, *Plasma physics via computers simulation*, McGraw-Hill, New-York 1985.
- [16] F. Bouchut, *Existence and uniqueness of a global smooth solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in three dimensions*, J. Funct. Anal. 111(1993) 239-258.
- [17] F. Bouchut, *Smoothing effect for the nonlinear Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, J. Differential Equations 122(1995) 225-238.
- [18] F. Bouchut, F. Golse, C. Pallard, *Classical solutions and the Glassey-Strauss theorem for the 3D Vlasov-Maxwell system*, Arch. Ration. Mech. Anal. 170(2003) 1-15.

- [19] Y. Brenier, *Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations*, Comm. Partial Differential Equations 25(2000) 737-754.
- [20] Y. Brenier, N. Mauser, M. Puel, *Incompressible Euler and e-MHD as scaling limits of the Vlasov-Maxwell system*, Commun. Math. Sci. 1(2003) 437-447.
- [21] M. J. Cáceres, J. A. Carrillo, J. Dolbeault *Nonlinear stability in L^p for a confined system of charged particles*, SIAM J. Math. Anal. 34(2002) 478-494.
- [22] S. Calogero, G. Rein, *On classical solutions of the Nordström-Vlasov system*, Comm. Partial Differential Equations 28(2003) 1863-1885.
- [23] S. Calogero, G. Rein, *Global weak solutions to the Nordström-Vlasov system*, J. Differential Equations 204(2004) 323-338.
- [24] J.A. Carrillo, S. Labrunie, *Global solutions for the one-dimensional Vlasov-Maxwell system for laser-plasma interaction*, Math. Models Methods Appl. Sci. 16(2006) 19-57.
- [25] J. A. Carrillo, J. Soler, *On the initial value problem for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system with initial data in L^p spaces*, Math. Methods Appl. Sci. 18(1995) 825-839.
- [26] S. Chandrasekhar, *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Modern Phys. 15(1943) 1-89.
- [27] P.-H. Chavanis, J. Sommeria, R. Robert, *Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems*, Astrophys. J. 471(1996) 385-399.
- [28] J. Cooper, A. Klimas, *Boundary value problem for the Vlasov-Maxwell equation in one dimension*, J. Math. Anal. Appl. 75(1980) 306-329.
- [29] C. Corduneanu, *Almost periodic functions*, Chelsea, New York, 1989.
- [30] G.-H. Cottet, P.-A. Raviart, *Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations*, SIAM J. Numer. Anal. 21(1984) 52-76.
- [31] G.-H. Cottet, P.-A. Raviart, *On particle-in-cell methods for the Vlasov-Poisson equations*, Transport Theory Statist. Phys. 15(1986) 1-31.
- [32] M.G. Crandall, P.-L. Lions, *Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 292(1981) 183-186.
- [33] M.G. Crandall, P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 277(1983) 1-42.
- [34] M.G. Crandall, L.C. Evans, P.-L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 282(1984) 487-502.
- [35] I. Csiszar, *Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations*, Studia Sci. Math. Hungar. 2(1967) 299-318.
- [36] R.C. Davidson, H. Qin, *Physics of charged particle beams in high energy accelerators*, Imperial College Press, World Scientific Singapore, 2001.
- [37] P. Degond, *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimensions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. IV 19(1986) 519-542.

- [38] P. Degond, *Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity*, Math. Methods Appl. Sci. 8(1986) 533-558.
- [39] P. Degond, A. Jungel, *High field approximation of the energy-transport model for semiconductors with non-parabolic band structure*, Z. Angew. Math. Phys. 52(2001) 1053-1070.
- [40] P. Degond, P.-A. Raviart, *An asymptotic analysis of the one-dimensional Vlasov-Poisson system : the Child-Langmuir law*, Asymptotic Anal. 4(1991) 187-214.
- [41] P. Degond, P.-A. Raviart, *On the paraxial approximation of the stationary Vlasov-Maxwell system*, Math. Models Meth. Appl. Sci. 3(1993) 513-562.
- [42] B.P. Demidovitch, *Almost periodic solutions of first order differential equations*, Russian Math. Surveys VIII 6(1953) 103-106.
- [43] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system*, Comm. Pure Appl. Math. XVII(1989) 729-757.
- [44] J. Dolbeault *Free energy and solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system: external potential and confinement (large time behavior and steady states)*, J. Math. Pures Appl. 78(1999) 121-157.
- [45] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris 1972.
- [46] A. Fathi, *Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 327(1998) 267-270.
- [47] J. Favard, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques*, Acta Mathematica, 51(1928) 31-81.
- [48] F. Filbet, E. Sonnendrücker, *Modeling and numerical simulation of space charge dominated beams in the paraxial approximation*, Research report INRIA, no. 5547 (2004).
- [49] K. Ganguly, H.D. Victory Jr., *On the convergence of particle methods for multi dimensional Vlasov-Poisson system*, SIAM J. Numer. Anal. 26(1989) 249-288.
- [50] N. Gheorghiu, *Soluții aproape periodice și asimptotic aproape periodice ale unor ecuații diferențiale neliniare de ordinul I*, An. Șt. Univ. Iași, Sect. I(1955) 17-20.
- [51] R. Glassey, J. Schaeffer, *On the one and one-half dimensional relativistic Vlasov-Maxwell system*, Math. Methods Appl. Sci. 13(1990) 169-179.
- [52] R. Glassey, J. Schaeffer, *Convergence of a particle method for the relativistic Vlasov-Maxwell system*, SIAM J. Numer. Anal. 28(1991) 1-25.
- [53] R. Glassey, J. Schaeffer, *The two and one-half dimensional relativistic Vlasov-Maxwell system*, Comm. Math. Phys. 185(1997) 257-284.
- [54] R. Glassey, J. Schaeffer, *The relativistic Vlasov-Maxwell system in two space dimensions*, Part I and II, Arch. Ration. Mech. Anal. 141(1998) 331-354 and 355-374.
- [55] R. Glassey, W. Strauss, *Singularity formation in a collisionless plasma could only occur at high velocities*, Arch. Ration. Mech. Anal. 92(1986) 56-90.
- [56] R. Glowinski, *Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems*. Notes by M. G. Vijayasundaram and M. Adimurthi. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 65. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Springer-Verlag, Berlin-New York, (1980).

- [57] R. Glowinski, J.-L. Lions, R. Trémolières, *Numerical analysis of variational inequalities*. Studies in Mathematics and its Applications, 8. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, (1981).
- [58] F. Golse, F. Poupaud, *Limite fluide des équations de Boltzmann des semi-conducteurs pour une statistique de Fermi-Dirac*, Asymptotic Anal. 6(1992) 135-160.
- [59] F. Golse, L. Saint-Raymond, *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime*, Math. Models Methods Appl. Sci. 13(2003) 661-714.
- [60] T. Goudon, *Hydrodynamic limit for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system : analysis of the two-dimensional case*, Math. Models Methods Appl. Sci. 15(2005) 737-752.
- [61] T. Goudon, J. Nieto, F. Poupaud, J. Soler, *Multidimensional high-field limit of the electrostatic Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, J. Differential Equations 213(2005) 418-442.
- [62] T. Goudon, P.-E. Jabin, A. Vasseur, *Hydrodynamic limits for the Vlasov-Navier-Stokes equations. Part II: Fine particles regime*, Indiana Univ. Math. J. 53(2004) 1517-1536.
- [63] C. Greengard, P.-A. Raviart *A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson equations : the plane diode*, Comm. Pure Appl. Math. XLIII(1990) 473-507.
- [64] Y. Guo *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Comm. Math. Phys. 154(1993) 245-263.
- [65] F. Huot, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Sonnendrücker, O. Coulaud, *Instability of the time-splitting scheme for the one-dimensional and relativistic Vlasov-Maxwell system*, J. Comput. Phys. 185(2003) 512-531.
- [66] P.-E. Jabin, *The Vlasov-Poisson system with infinite mass and energy*, J. Statist. Phys. 103(2001) 1107-1123.
- [67] E. Keller, L. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theoret. Biol. 26(1970) 399-415.
- [68] S. Klainerman, G. Staffilani, *A new approach to study the Vlasov-Maxwell system*, Comm. Pure Appl. Anal. 1(2002) 103-125.
- [69] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, RAM, Masson, Paris, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (1994).
- [70] S. Kullback, *A lower bound for discrimination information in terms of variation*, IEEE Trans. Information Theory 4(1967) 126-127.
- [71] H. Lee, *The classical limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system in two space dimensions*, Math. Methods Appl. Sci. 27(2004) 249-287.
- [72] P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Research Notes in Mathematics, Pitman, 1982.
- [73] P.-L. Lions, B. Perthame, *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. 105(1991) 415-430.
- [74] J.-L. Lions, G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure. Appl. Math. XX(1967) 493-519.
- [75] G. Namah, J.-M. Roquejoffre, *Remarks on the long time behaviour of the solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Comm. Partial Differential Equations 24(1999) 883-893.
- [76] J. Nieto, F. Poupaud, J. Soler, *High-field limit of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, Arch. Ration. Mech. Anal. 158(2001) 29-59.

- [77] G. Nordström, *Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips*, Ann. Phys. Lpz. 42(1913) 533.
- [78] Z. Opial, *Sur les solutions presque-périodiques des équations différentielles du premier et second ordre*, Ann. Polon. Math. 7(1959) 51-61.
- [79] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, J. Differential Equations 95(1992) 281-303.
- [80] F. Poupaud, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Maxwell system*, Forum Math. 4(1992) 499-527.
- [81] F. Poupaud, *Mathematical Theory of Kinetic Equations for Transport Modelling in Semiconductors*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Kinetic Theory and Computing, B. Perthame ed. World Scientific 22(1994) 141-168.
- [82] F. Poupaud, J. Soler, *Parabolic limit and stability of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, Math. Models Methods Appl. Sci. 10(2000) 1027-1045.
- [83] B. O'Dwyer and H.D. Victory Jr., *On classical solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, Indiana Univ. Math. J. 39(1990) 105-156.
- [84] F. Poupaud, *Runaway phenomena and fluid approximation under high fields in semiconductors kinetic theory*, Z. Angew. Math. Mech. 72(1992) 359-372.
- [85] A. D. Rendall, *An introduction to the Einstein-Vlasov system*, Mathematics of gravitation, Part I 35-68, Banach Center Publ. 41, Polish Acad. Sci., Warszawa 1997.
- [86] A. D. Rendall, *The Einstein-Vlasov system (The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields)*, Birkhauser, Basel, 2004 231-250.
- [87] R. Robert, *Unicité de la solution faible à support compact de l'équation de Vlasov-Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 324(1997) 873-877.
- [88] J.-M. Roquejoffre, *Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. 80(2001) 85-104.
- [89] J.-M. Roquejoffre, *Large time convergence in Hamilton-Jacobi equations*, Proceedings in Control Systems : Theory, Numerics and Applications, Rome (2005), to appear.
- [90] L. Saint-Raymond, *Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit*, Arch. Ration. Mech. Anal. 166(2003) 47-80.
- [91] J. Schaeffer, *The classical limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system*, Comm. Math. Phys. 104(1986) 403-421.
- [92] J. Schaeffer, *Discrete approximation of the Vlasov-Poisson system*, Quart. Appl. Math. 45(1987) 59-73.
- [93] J. Schaeffer, *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions*, Comm. Partial Differential Equations 16(1991) 1313-1335.
- [94] P.E. Souganidis, *Existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, J. Differential Equations 56(1985) 345-390.
- [95] T. Ukai, S. Okabe, *On the classical solution in the large time of the two dimensional Vlasov equations*, Osaka J. Math. 15(1978) 245-261.
- [96] H.D. Victory Jr., *On the existence of global weak solutions for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, J. Math. Anal. Appl. 160(1991) 525-555.

- [97] H.D. Victory Jr., E.J. Allen, *The convergence theory of particle-in-cell methods for multi dimensional Vlasov-Poisson system*, SIAM J. Numer. Anal. 28(1991) 1207-1241.
- [98] S. Wollman, *A discrete approximation to the one-dimensional Vlasov-Poisson system*, Transport Theory Statist. Phys 17(1988) 561-594.
- [99] S. Wollman, *Convergence of a numerical approximation to the one dimensional Vlasov-Poisson system*, Transport Theory Statist. Phys. 19(1990) 545-562.
- [100] H.T. Yau, *Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models*, Lett. Math. Phys. 22(1991) 63-80.