UFC UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ — espe École supérieure du professorat et de l'éducation Académie de Besançon

Mémoire

Présenté pour l'obtention du Grade de

MASTER

"Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation"

Mention 2nd degré – MATHÉMATIQUES

Sur le thème

« Peut-on apprendre à chercher en mathématiques ? »

Projet présenté par
Sofiane Enocq

Directeur
Sylvain Roussey
Numéro CNU

Année universitaire 2016-2017

DESCRIPTIF DU MEMOIRE

Champ(s) scientifique(s) :

Objet d’étude :

Méthodologie :

Corpus :

REMERCIEMENTS

Dans le cadre de l'écriture de ce mémoire et plus généralement de ma formation, je souhaite remercier :

Mme Jouvenot, Mme Aebischer, Mme Athias, Mme Dourdain, M. Buso, M. Leborgne, M. Dornier, M. Laleaux, M. Roussey et M. Bedel pour la qualité de nos échanges, didactiques et pédagogiques, quant au métier de professeur de Mathématiques ;

Mon tuteur M. Eric Ménigot et le personnel du Collège de Sochaux, pour leur disponibilité, leur expertise, leur conseil et accompagnement au cours de cette année de stage;

Mes professeurs, de mathématiques et des autres disciplines, qui auront contribué, par leur dévouement au métier et aux élèves, à me donner l'envie d'exercer ce métier exigeant et passionnant.

Introduction

L'ambition des nouveaux programmes scolaires, construits autour du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, est la construction d'une culture scolaire commune à tous les élèves. Celle-ci a pour vocation de permettre aux élèves de devenir des citoyens éclairés et actifs d'un monde de plus en plus complexe, afin de ne pas le subir. Chaque discipline enseignée est alors vue, de manière décloisonnée et en interaction avec les autres, comme une opportunité de voir le monde sous un éclairage particulier et de développer des connaissances et compétences nécessaires au futur citoyen.
L'évolution des pratiques d'enseignement et des théories de l'apprentissage apporte de nouveaux éclairages quant aux modalités d'acquisition de nouvelles connaissances par les élèves. En particulier, il est reconnu que ces derniers ne peuvent plus être placés en simple position de récepteurs d'un savoir transmis sous la conduite d'un maitre et destinés à reproduire ce savoir avec le plus de fidélité possible.
Dorénavant, on envisage plutôt de placer l'élève en position d'acteur dans la construction de son savoir. Ce qui semble de plus, être en continuité avec l'idée de le rendre ensuite acteur du monde dans lequel il vit et vivra.

Cette année, j'ai eu en responsabilité deux classes de collège (5ème et 4ème). Dans le document où l'on trouve le programme du cycle 4 (B.O.E.N, 2015) il est précisé qu'« *une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques, ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines* ».S'il convient de définir ce que l'on entend par « problèmes » l'objectif affiché est de permettre une meilleure appropriation des contenus d'enseignement en leur permettant de faire sens pour les élèves, en les contextualisant et en créant du lien, une unité avec les autres disciplines.
Cette démarche de « recherche de problèmes » semble donc particulièrement compatible avec un enseignement où l'élève est au centre des apprentissages : le contexte et la question posée sont plus proches de l'élève, puisque empruntés à la réalité qu'il vit, et c'est à l'élève d'amener la question dans le champ mathématique, afin d'utiliser des outils, méthodes qu'il connait (ou conçoit) pour le résoudre.

Dans ce mémoire professionnel, je me demande s'il est possible, pour un enseignant en mathématiques, de former ses élèves à la compétence « Chercher », (qui est l'une des 6 compétences que la mise en œuvre du programme doit permettre de développer, voir annexe 1 du présent document).
Dans une première partie, j'exposerai ce qui m'a poussé à m'intéresser à ce sujet, quels sont les problèmes rencontrés lors de mon expérience d'enseignement pendant mon stage en établissement. Ensuite, au cours de la deuxième partie, je détaillerai les différents axes de travail envisageables pour de répondre à cette problématique. Dans la troisième partie, je justifierai le choix des expérimentations réalisées en classe et en donnerait des rapports détaillés et commentés. Enfin, je terminerai mon propos par une discussion et une conclusion en dernière partie.

"Car l'esprit n'est pas comme un vase qu'il ne faille que remplir. À la façon du bois, il a plutôt besoin d'un aliment qui l'échauffe, qui fait naître en lui une impulsion inventive et l'entraîne avidement en direction de la vérité." (Plutarque)

Sommaire

Introduction **4**

1 Le travail de la compétence Chercher au sein de la classe de Mathématiques : un problème de didactique ? **8**

1.1 Une activité mathématique : le problème 8

1.1.1 L'interaction des élèves avec l'objet d'étude 8

1.1.2 Activité et usage des problèmes 9

1.1.3 Une description de l'activité mathématique dans les programmes 10

1.2 Un questionnement au cours de ma pratique professionnelle 11

1.2.1 Contexte de ma pratique professionnelle 11

1.2.2 Travail des compétences du programme 11

1.2.3 Spécificités et difficultés du travail de la compétence Chercher 12

2 Apprendre aux élèves à chercher : état de l'art des possibilités et des pratiques enseignantes. **17**

2.1 Activités « classiques » 17

2.1.1 Activités d'approche 17

2.1.2 Tâches intermédiaires : exercices d'application et de réinvestissement 17

2.1.3 Tests, devoirs, évaluations 18

2.2 Problèmes, situations, activités pour chercher 19

2.2.1 Les situations-problèmes 19

2.2.2 Les « tâches riches » 20

2.2.3 Les narrations de recherche, situations de recherche pour la classe et problèmes ouverts au sens de G.Arsac et M.Mante 20

3 Expérimentations en classe : présentation et rapports. **25**

3.1 Choix opéré pour l'expérimentation, justifications didactiques et pédagogiques 25

3.1.1 Développer la prise d'initiative, conquérir le vrai 25

3.1.2 Apprendre à questionner le monde 26

3.1.3 Donner une nouvelle place et une nouvelle conception de l'erreur en mathématiques 27

3.1.4 Susciter le débat avec les pairs et le travail collaboratif 28

3.2 Présentation des problèmes expérimentés en classe 30

3.2.1 Les polyominos 30

3.2.2 Les polycubes 31

3.2.3 Le nombre de segments possibles 32

3.3 Rapports d'expérimentation 33

3.3.1 Les polyominos 34

3.3.2 Les polycubes 35

3.3.3 Le nombre de segments possibles 38

4 Conclusion **46**

4.1 Bénéfices de la pratique d'activité de recherche 46
4.2 Des questionnements et axes d'amélioration 47
5 Bibliographie 49
6 Annexes 52
6.1 Annexe 1 : Description détaillée des Compétences Mathématiques travaillées au cycle 4 53
6.2 Annexe 2 : Sujet de l'activité « Polyominos » 55
6.3 Annexe 3 : Liste des n-cubes ($n \leq 6$) et Puzzle du Cube de Soma 59
6.4 Annexe 4 : Exemples de problèmes pour chercher 61

Partie 1

1 Le travail de la compétence Chercher au sein de la classe de Mathématiques : un problème de didactique ?

1 Le travail de la compétence Chercher au sein de la classe de Mathématiques : un problème de didactique ?

1.1 Une activité mathématique : le problème

1.1.1 L'interaction des élèves avec l'objet d'étude

Nous l'avons vu, l'objectif ambitieux de l'enseignement dont bénéficient les élèves est la construction d'une culture scolaire commune, articulée autour de connaissances et compétences identifiées dans le socle commun et les programmes officiels. Cette culture scolaire commune est vue comme un prérequis à la construction et à la participation dans la société de futurs citoyens éclairés.

La didactique des mathématiques et les théories de l'apprentissage donnent un certain éclairage sur les modalités d'acquisition de nouvelles connaissances et compétences dans la discipline.

> « Une idéologie très répandue suppose un lien de simple transfert de l'enseignement vers l'apprentissage: l'élève enregistre ce qui est communiqué par l'enseignant avec peut-être quelques pertes d'informations. » (C.Laborde, 1989)

En effet, l'élève n'est plus considéré, au contraire d'une conception transmissive des apprentissages, comme le récepteur d'un savoir transmis par un maître qu'il se contentera ensuite d'utiliser et d'adapter en fonction des problèmes-stimuli qu'il rencontrera.

Les théories de l'apprentissage (notamment par les approches constructivistes et socio-constructivistes) considèrent plutôt que les élèves doivent construire leurs propres connaissances et leur donner un sens, en interaction avec les objets d'étude (et également entre eux). Les élèves sont considérés comme actifs et cherchant une signification, un sens à toute chose. Pour Piaget « connaître ne consiste pas à copier (le réel) mais à agir sur lui et à le transformer. » (J.Piaget, 1967)

Selon Bachelard également, la connaissance suppose une démarche active, une construction :

> « Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » (G.Bachelard, 1993)

Ou encore, pour Chevallard :

> «L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage - ce qui demeure hors de son pouvoir - mais la prise en charge de la création des conditions de possibilité de l'apprentissage. » (Chevallard, 1986)

L'objectif est alors de donner à l'élève les conditions favorables pour que cette construction soit optimale (« les bonnes questions » en somme). D'après les travaux de G.Brousseau (G.Brousseau, 1986), cela suppose même de laisser à ceux-ci, moyennant l'obtention de ces conditions favorables, une certaine responsabilité et autonomie dans la construction de leur apprentissage. Ce qu'il définit comme « la dévolution de problème » : le fait de faire connaitre et de confier la pleine responsabilité de la situation d'apprentissage à l'élève (et nous verrons que cela conduit à redéfinir le rôle et la posture de l'enseignant). Si cette délicate « dévolution » de l'apprentissage s'opère, l'élève s'empare pleinement de ce dernier et on imagine sans peine que l'interaction qui en résulte est d'autant plus riche.

Le dictionnaire en ligne Larousse définit les mathématiques comme :

«Science qui étudie par le moyen du raisonnement déductif les propriétés d'êtres abstraits (nombres, figures géométriques, fonctions, espaces, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux. » (Larousse)

Cette « abstraction » des mathématiques peut sembler, a priori, rentrer en contradiction avec cette interaction nécessaire à l'apprentissage. Comment alors établir cette interaction fondamentale ?

1.1.2 Activité et usage des problèmes

La question de la définition de l' « activité » est délicate et objet de débat: qu'entend-on par « activité » ? Est-ce un ensemble d'observables chez l'élève, la classe (engagement dans l'activité, démarche de recherche, traces écrites, obtention de résultats, vérification de leur validité, débat, échanges verbaux avec les pairs/ le professeur, etc.) ? Il n'est naturellement ici pas question de définir formellement ce point, ni de sous-estimer l'activité des élèves lorsqu'ils ne réalisent pas ce que je décris ici comme « une activité ». Cependant, je conçois, dans mon propos « l'activité des élèves » comme étant justement cette interaction avec l'objet d'étude, et en particulier, pour le propos l'interaction préparée par le professeur pour répondre à un objectif de formation précis (on conçoit que l'interaction avec l'objet d'étude peut naturellement se faire en dehors de l'enseignement du professeur).

Cette activité peut en particulier prendre la forme de la « résolution de problèmes », comme le préconise le programme officiel du cycle 4 (B.O.E.N, 2015), dans l'introduction de la partie dédiée aux mathématiques :

> « […] une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques, ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines. Le programme fournit des outils permettant de modéliser des situations variées sous forme de problèmes mathématisés. »

Mais qu'appelle-t-on un problème exactement ?

Selon J.Brun, « dans une perspective psychologique, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire». (J.Brun, 1990)

Selon Gérard Vergnaud, «est problème tout ce qui, d'une façon ou d'une autre, implique de la part du sujet la construction d'une réponse ou d'une action qui produit un certain effet. » (G.Vergnaud, 1977)

Ces définitions supposent un engagement de l'élève (le « sujet » ici) dans la tâche proposée (puisque la solution n'est pas directement accessible) et des outils, procédures construites antérieurement au problème ou au cours de celui-ci (on retrouve une approche constructiviste de l'apprentissage) lui permettant de le résoudre.

Naturellement, ces problèmes peuvent prendre des formes diverses, plus ou moins classiques ou au contraire originales en fonction des objectifs didactiques poursuivis, des contraintes pédagogiques. Nous en donnerons un aperçu (non exhaustif) dans la deuxième partie.

On trouve par exemple dans le document *Mathématiques et quotidien*, (DGESCO-IGEN-IREM), une certaine orientation à privilégier pour ces problèmes, sous la forme de « […] situations actuelles sortant du cadre strict de la classe car ancrées dans l'incroyable variété du quotidien des élèves ou de leur famille. Le

caractère authentique et concret de ces situations favorise l'installation d'une véritable dynamique en permettant aux élèves :

•de s'approprier plus facilement un contexte, ferment d'activité mathématique

•de donner davantage de sens à l'enseignement des mathématiques

•de faire percevoir aux élèves le rôle indispensable des mathématiques, aussi bien pour la compréhension de certains phénomènes que pour la résolution de problèmes. ».

On le voit donc, la résolution de problèmes tient une place importante, au cœur de l'enseignement des mathématiques. Les problèmes ont bien vocation à mettre les élèves en position active, au centre de leur apprentissage, en leur permettant l'interaction avec l'objet d'étude mathématique, et répondent d'une approche constructiviste voire socio-constructiviste de l'apprentissage. Ils ont faculté à matérialiser, mettre en scène les mathématiques et donc à réduire la distance entre la connaissance mathématique et l'élève pour favoriser cette interaction constructive (pour peu que le problème soit choisi en vue de cet objectif). Ils ont vocation à construire du sens comme le souligne Roland Charnay :

> « Et c'est d'abord en faisant apparaître les notions mathématiques comme outils pour résoudre des problèmes qu'on permettra aux élèves de construire du sens. Ce n'est qu'ensuite que ces outils pourront être étudiés pour eux-mêmes.» (R.Charnay, 1988)

De plus, il semble même que les mathématiques entretiennent, avec la résolution de problèmes, un rapport étroit :

> « On dit souvent que faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes. C'est en effet l'activité du mathématicien, et cela pose des questions à l'enseignant : est-ce une activité que mon enseignement suscite chez les élèves ? » (G.Arsac et M.Mante, 2007)

D'ailleurs, d'après R.Charnay, il s'agit d'un lien originel :

> «Autant dire que l'activité de résolution de problèmes a été au cœur même de l'élaboration de la science mathématique. […]Ces quelques considérations (très schématiques) sur l'origine des connaissances mathématiques et les conditions de leur élaboration peuvent-elles trouver écho dans une réflexion sur la question des apprentissages mathématiques dans le cadre scolaire ? […] Reste que ce sont les problèmes qui leur ont donné naissance (et ceux qu'elles ont posés par la suite) qui ont donné sens au mathématiques produites ! » (R.Charnay, 1988)

Ainsi, si l'on ne peut réduire les mathématiques à la résolution de problèmes, ceux-ci sont au cœur de leur élaboration et permettent de leur donner du sens. Il semble pertinent, avec ces arguments, de vouloir inscrire la recherche de problèmes dans la création de situation d'enseignement et d'apprentissage, et d'avoir l'ambition de rapprocher l'activité des élèves de celle ayant permis l'émergence et la construction de la science mathématique.

Nous verrons dans la partie 2 dans quelle mesure les tâches proposées aux élèves au sein d'une séance de mathématiques peuvent être considérées comme des « problèmes ».

1.1.3 Une description de l'activité mathématique dans les programmes

Selon les rédacteurs des programmes de mathématiques, il est possible de décrire toute activité mathématique, de celle pratiquée à l'école maternelle à celle des mathématiciens, à l'aide de six compétences clés :

Chercher – Modéliser – Représenter – Raisonner – Calculer – Communiquer

Bien entendu, les descripteurs de chacune de ces compétences évoluent en fonction du niveau où sont enseignées les mathématiques. On trouvera par exemple, en Annexe 1, un extrait du programme du cycle 4 de mathématiques (B.O.E.N, 2015), donnant une description détaillée des six compétences à ce niveau.

C'est à travers cette vision des compétences, structurante, que l'enseignant en mathématiques doit penser la formation des élèves. Les programmes précisent le rôle de support privilégié attribué aux problèmes dans cet enseignement et pour le développement des dites compétences :

> « La mise en œuvre du programme doit permettre de développer les six compétences […] Pour ce faire, une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes » (B.O.E.N, 2015)

1.2 Un questionnement au cours de ma pratique professionnelle

1.2.1 Contexte de ma pratique professionnelle

Lors de cette année de mise en situation professionnelle, j'intervenais comme professeur de mathématiques en collège classé REP, avec des classes de 5ème et de 4ème (cycle 4). Il s'agissait de l'année de mise en œuvre de la réforme du collège et de ma première expérience en collège.

Chaque niveau se voyait dispensé 3h30 de mathématiques par semaine, comprenant 3 heures réparties sur 3 séances distinctes et 30 minutes de séance de travail en demi-groupes. Les classes étaient très hétérogènes, de niveau moyen, avec un certain nombre d'élèves en grande difficulté, notamment en classe de 5ème.

1.2.2 Travail des compétences du programme

Cette année de mise en situation professionnelle fut pour moi l'occasion de découvrir le changement de paradigme et la nouvelle vision de l'enseignement des mathématiques qu'introduit la réforme des programmes au travers des six compétences susmentionnées.

J'ai réalisé au cours de cette expérience que s'il est assez naturel lors d'une séance de mathématiques de travailler les compétences Modéliser, Représenter, Raisonner, Calculer et Communiquer avec les élèves ; il est plus difficile de former les élèves à la première des compétences : **Chercher**.

En effet, les 5 autres compétences bénéficient toutes de moments relativement privilégiés, voire dédiés, lors de la formation au cycle 4 :

- « Modéliser » est la compétence permettant à l'élève de mathématiser une situation réelle ou imaginaire, d'employer une notion mathématique pour décrire (et par la suite résoudre) un problème concret. Cette compétence est naturellement travaillée lors d'une séance de mathématiques, car nécessaire, afin de donner du sens aux notions découvertes lors d'une activité d'approche ; afin de valider la nécessité des mathématiques lors d'exercices d'application ou des problèmes concrets. Les cours de Sciences Physiques, Technologie et Sciences et Vie de la terre sont également d'autres opportunités rencontrées pour développer cette compétence.
- « Représenter » est la compétence qui permet de donner à voir des objets mathématiques et de cultiver le lien entre ces représentations. Nombreux sont les moments où les élèves ont à tracer, construire, organiser, mettre en forme et utiliser des représentations. Nombreux sont les changements de registres effectués pour l'apprentissage d'une notion, la résolution de problèmes et exercices. La spécificité du langage mathématique et le caractère abstrait des objets manipulés conduit souvent à la nécessité de mettre en forme ceux-ci et de les représenter.

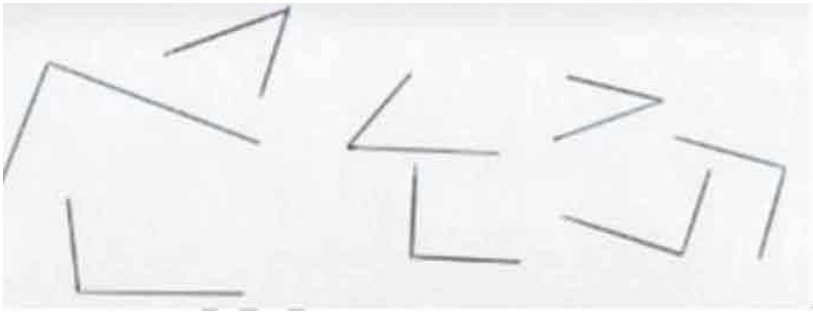
- « Calculer » est une compétence omniprésente en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Il est difficile d'assister à un cours de mathématiques sans la voir mise à l'œuvre. C'est d'ailleurs une conception fréquente des élèves : « faire des maths, c'est faire des calculs ».
- « Communiquer » est une compétence nécessaire mise à l'œuvre, tant dans la dynamique du cours vivant, dans la communication des démarches que cela soit à l'oral ou à l'écrit, que dans le dialogue, le débat avec les pairs et cela dans de multiples disciplines enseignées. On trouve de multiples occasions, en cours de formation, de travailler ses différents aspects.
- La compétence « Raisonner » trouve une place de choix dans la mise en œuvre des programmes. C'est l'ambition de l'éducation dispensée, au travers de l'enseignement des disciplines du programme, que de rendre les élèves capables de raisonner. La résolution de problèmes et la pratique progressive de la démonstration, l'introduction à l'algorithmique, l'analyse critique des résultats et productions, la pratique de l'argumentation et de démarches scientifiques ou non, fournissent de multiples occasions de travailler le raisonnement, de le mettre à l'épreuve. Cette construction de la capacité de raisonner en mathématiques est progressive sur le cycle 4.

1.2.3 Spécificités et difficultés du travail de la compétence Chercher

Quid de la première des Compétences, dans la liste proposée par les programmes, et dans le déroulement de l'activité mathématique, qu'est « Chercher » ?

Notons, tout d'abord, que la compétence Chercher est la réunion de deux aspects distincts, identifiés dans le document « Compétences travaillées en mathématiques – Chercher » (Eduscol, 2017), destiné à décrire en détail chacune des compétences :

« La compétence « Chercher » recouvre dans le travail quotidien de l'élève comme du mathématicien deux activités qu'il convient de distinguer. On peut illustrer cette dualité, qui tient simplement à la polysémie du verbe Chercher, par les deux consignes suivantes, toutes deux relatives à une série de représentations d'angles :



• Première consigne : « Chercher quels sont les angles droits »

• Deuxième consigne : « Chercher comment classer les angles »

Il s'agit de deux activités mettant en œuvre une recherche, mais alors que dans le premier cas, l'élève met en œuvre des processus éprouvés, repère et utilise les attitudes expertes qui lui auront explicitement été indiquées comme telles, dans l'autre, il s'agit de donner un sens à la question, voire de définir la question. »

Le premier sens de la compétence Chercher décrit ci-dessus (et également décrit, dans le document en Annexe 1, par « Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances ») relève plus d'une méthodologie régulièrement mise en œuvre dans l'ensemble des disciplines enseignées (et donc on peut supposer qu'elle bénéficie de multiples moments, dans des situations d'apprentissage variées et riches, pour être travaillée).

Il me semble par contre qu'il est plus rare d'avoir un temps spécifiquement dédié au travail de la compétence Chercher dans le deuxième sens évoqué ci-dessus, que j'appellerai ici « recherche pure ». Le document en Annexe 1 propose comme description du deuxième sens :

> « • S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
>
> • Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.
>
> • Décomposer un problème en sous-problèmes ».

Pourtant ce deuxième aspect de Chercher revêt un caractère crucial et il est initiateur de l'ensemble de la démarche mathématique et de toute démarche scientifique (qui est un des objectifs forts de l'enseignement des sciences, notamment pour la formation d'un esprit raisonné et critique). Souvent, les activités proposées en mathématiques n'ont pas ou peu de temps consacré à la recherche pure, par contrainte de temps et par nécessité (et peut-être ; ce n'est qu'une hypothèse, par la difficulté pour les enseignants eux-mêmes d'appréhender cette compétence et d'organiser des activités dédiées à ce seul objectif d'apprentissage ?).

Nous l'avons vu, si l'on désire tirer parti des éclairages qu'apporte la didactique des mathématiques et les théories de l'apprentissage, la stratégie à adopter est d'amener l'élève (naturellement et volontairement) vers une position active. Et « Chercher » est pourtant précisément le fait de s'engager dans la résolution, d'adopter une posture active particulière, autonome et même créatrice. C'est bénéficier à ce moment d'une interaction idéale, constructrice, significative avec l'objet d'étude.

Alors pourquoi est-il si rare et difficile d'avoir un temps réel dédié au travail et au développement de cette compétence ?

Peut-être parce que son apprentissage est plus difficile à concevoir (dans les deux sens du terme) pour un enseignant et à mettre en œuvre pour les élèves. On trouve d'ailleurs, dans l'introduction du document « Compétences travaillées en mathématiques – Chercher » (Eduscol, 2017), quelques lignes témoignant de cette difficulté :

> « Chercher est peut-être la première des compétences à laquelle on pense lorsqu'on tente de décrire l'activité mathématique. Elle en constitue sans doute la part la plus exaltante pour celles et ceux qui aiment les mathématiques. Mais aussi la part la plus difficile pour d'autres. Il faut reconnaitre qu'il s'agit de l'une des compétences qui se laissent le moins facilement circonscrire. Amener les élèves à savoir quoi chercher et comment chercher est donc un objectif ambitieux, mais nécessaire au développement de toutes les autres compétences au cycle 4. »

La volonté de placer l'élève dans une posture de recherche pure, proche de celle adoptée par les mathématiciens (toutes proportions gardées bien évidemment) n'est pas anodine, c'est un véritable choix didactique, motivé par un objectif louable mais peut-être difficilement perceptible pour les élèves. Le « contrat didactique », concept introduit par G.Brousseau est :

> « […] une relation qui détermine […] implicitement ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera responsable d'une manière ou d'une autre devant l'autre. » (G.Brousseau, 1986)

Cette question de la perception par les élèves des objectifs et attentes du professeur (et du rôle de celui-ci) dans le cadre de la situation d'apprentissage est au cœur de ce contrat didactique. Ici, à l'occasion du travail

de la seule compétence de recherche pure, il y a précisément un changement du contrat didactique, puisque le professeur n'attend plus de ceux-ci la même chose que dans le cadre des autres tâches. La valeur souvent sous-estimée par les élèves (et parfois leur professeurs ?) de l'activité engagée (par la faible quantité ou qualité des écrits, l'absence d'obtention de réponse ou de réponse juste, le doute inhérent à la démarche, le questionnement provoqué qui reste invisible mais qui est une réelle activité non quantifiable de l'élève) peut expliquer le caractère ingrat qu'elle peut revêtir et la rupture (ou évolution du moins) de contrat didactique qui en résulte.

Cette spécificité de l'activité de recherche, comme éphémère, cachée, insubstantielle est également décrite dans le document « Compétences travaillées en mathématiques – Chercher »:

> « Chercher peut être vu en première analyse comme une activité transitoire pour l'élève, un échafaudage que l'on oublie une fois le bâtiment achevé. Pour aboutir au résultat d'un calcul, pour établir un raisonnement, pour construire une modélisation, on sait qu'il a fallu une phase de recherche, mais qui ne laisse pas de trace sur le résultat final : on recopie au propre et on note la synthèse dans le cahier. Cette phase de recherche et de tâtonnement (« je cherche… », dit l'élève en cachant son cahier) est pourtant essentielle en mathématiques […]. » (Eduscol, 2017)

A cela il faut également ajouter la peur de se tromper, ne pas faire juste, de ne pas donner la réponse attendue par le professeur (malgré des consignes claires à ce sujet et l'usage de mentions explicites, par exemple à l'écrit, du type « Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation»). Pour G.Bachelard pourtant: « L'essence même de la réflexion c'est de comprendre qu'on n'avait pas compris. » (G.Bachelard, 1934)

Nous le verrons par la suite, dans la conception des élèves, des enseignants, des parents et du sens commun, il n'y a pas ou peu de place pour l'erreur (en mathématiques) et cela sera un enjeu fort de notre réflexion:

> « Cet univers où il l'on vient apprendre, comprendre, pourrait être lieu agréable […] mais il est trop souvent lieu de souffrance intérieure, personnelle. Ce qui provoque ce sentiment de souffrance, c'est qu'il s'agit d'un univers dans lequel se tromper est un problème, se tromper est un échec, donc à terme une souffrance individuelle. L'Ecole est, en effet, un univers régi par l'aversion pour l'erreur. » (F.Cauchi-Bianchi, 2012)

En effet, lors de travaux pour lesquels une véritable recherche de l'élève est attendue (lors d'une séance en classe, en dehors de la classe, en devoir), il est également assez fréquent de voir beaucoup d'élèves ne pas s'engager (en particulier dans une tâche n'induisant aucune modélisation, aucune procédure), de ne pas se mettre dans une posture de recherche, non pas par refus catégorique de la tâche proposée ou par fainéantise mais plutôt car ils ne savent tout simplement pas comment l'aborder et ce qui est attendu d'eux.

Le souhait de rendre les élèves actifs et autonomes, responsables de la recherche plutôt que guidés (afin, nous l'avons vu, d'optimiser leur apprentissage, par une construction qui leur est propre), se heurte dans les faits à la réalité : peu rompus à une vraie démarche de recherche pure, n'ayant que peu de réflexes pour la mener, ils ont l'impression de n'avoir aucune prise possible sur le problème. Celui-ci est, qui plus est, souvent original et dans un premier temps difficilement associable à une procédure particulière qu'a pu se constituer l'élève.

S'il y a donc une réelle nécessité à travailler cette phase de l'activité mathématique, elle amène toutefois une réflexion importante sur les modalités de sa mise en œuvre et des enjeux didactiques réels.

C’est le point de départ de la réflexion exposée dans ce mémoire et des expérimentations menées au sein de mes classes : Peut-on apprendre aux élèves à chercher en mathématiques ?

Et si oui, quelle(s) pratique(s) permettent de le faire ?

Partie 2

2 Apprendre aux élèves à chercher : état de l'art des possibilités et des pratiques enseignantes.

2 Apprendre aux élèves à chercher : état de l'art des possibilités et des pratiques enseignantes.

Bien entendu, il y a dans les pratiques des enseignants de mathématiques (comme dans ceux des autres disciplines) beaucoup de richesse, et dans mon propos aucune volonté d'être exhaustif ou au contraire réducteur. Le but est simplement de référencer les pratiques qui peuvent s'inscrire dans la problématique de cet exposé et de voir dans quelle mesure elles permettent, d'un point de vue didactique, de former les élèves à adopter cette posture de recherche.

2.1 Activités « classiques »

2.1.1 Activités d'approche

Il s'agit d'activités dont l'objectif d'enseignement est de permettre la découverte d'une notion nouvelle aux élèves. Souvent, ces activités se basent sur les acquis des élèves (notions mathématiques, culture, expérience) pour introduire une nouvelle notion. C'est une phase de l'apprentissage qui permet, en partie, de construire du sens, en justifiant le besoin de cette nouvelle notion et/ou en s'appuyant sur les connaissances de l'élève.

Généralement celles-ci sont constituées d'une série de questions guidant l'élève vers la nouvelle notion et n'ont pas pour objectif la prise d'initiative ou l'expérimentation. Il existe toutefois, des activités d'approche de forme différente, proches de la démarche scientifique, appelées « situations-problèmes » abordées dans la suite en 2.2.1.

2.1.2 Tâches intermédiaires : exercices d'application et de réinvestissement

Les tâches intermédiaires ont pour objectif de stabiliser, consolider les connaissances acquises. Elles peuvent prendre la forme d'exercices d'application ou d'exercices de réinvestissement.

Comme leur nom l'indique, les exercices d'application ont pour vocation à exercer les élèves à l'application, l'utilisation, la manipulation de la notion enseignée. Il s'agit d'un entraînement via une répétition, plus ou moins importante, de situations visant la maitrise de l'application d'une procédure. L'intérêt est également de varier les types de situations rencontrées, les contextes pour optimiser les chances qu'aura l'élève de s'en emparer et de l'utiliser et assoir la construction du sens.

L'enseignant a la possibilité, à ce moment-là en particulier, de jouer sur les variables didactiques pour favoriser une appropriation par l'élève (notamment dans le cadre de la différenciation pédagogique), ou au contraire pour provoquer une adaptation, un questionnement qui permettra d'étoffer les connaissances, la maitrise de la notion enseignée.

D'après le document « type de tâches » publié sur Eduscol, les exercices de réinvestissement « permettent de consolider des connaissances, des procédures ou des stratégies antérieurement acquises, dans un contexte éventuellement différent du contexte d'apprentissage (on parle alors de transfert ou de recontextualisation). » (Eduscol, 2017)

Ce transfert, par l'extension du contexte de la notion et éventuellement les changements de registre qu'il implique, permet d'accroître la signification de celle-ci. Ils contribuent donc, dans ce contexte, aussi à la « construction » des connaissances.

Les exercices d'application et de réinvestissement, malgré les qualités susmentionnées, n'ont donc généralement pas pour objectif de permettre le travail de la compétence Chercher.

2.1.3 Tests, devoirs, évaluations

Les tests et devoirs sont constitués d'une collection d'exercices à réaliser, dont le but n'est pas (généralement) d'explorer, de découvrir, de tester (à part pour les devoirs en temps libre qui peuvent permettre d'aller plus loin dans les apprentissages et supposent une relative autonomie de l'élève) mais sont plutôt destinés à évaluer, sanctionner un certain niveau de connaissance, de maitrise : évaluations diagnostiques, formatives et sommatives permettent de mesurer le niveau d'acquisition d'un élève sur les notions enseignées.

Leur rôle est différent en fonction du type d'évaluation considérée :

• Évaluer l'état des connaissances mobilisables par l'élève avant l'apprentissage d'une nouvelle notion qui viendra s'appuyer sur elles (évaluation diagnostique)

• Observer les connaissances et compétences d'un élève pour remédier aux difficultés (évaluation formative)

• Sanctionner le niveau d'un élève sur les notions abordées et éventuellement le classer (évaluation sommative)).

Ce temps d'évaluation, nécessaire, est difficilement compatible avec la liberté que suppose l'activité de recherche pure. Les exercices de recherche qui peuvent (ou doivent) s'y trouver ont déjà été rencontrés ou approchés par des exercices proches lors de l'apprentissage ultérieur, et ne relèvent donc de l'approche voulue. Il n'y a pas ici lieu d'une réelle découverte par l'élève de l'exercice proposé puisque cela pourrait rentrer en contradiction avec l'objectif d'évaluation.

Ces activités ne peuvent pas être désignées comme des problèmes; l'objectif qu'elles visent chacune (découvrir une notion pas à pas par une démarche guidée pour les activités d'approche, maitriser l'application d'une procédure pour les exercices d'application et montrer sa compréhension des notions et des procédures de résolution des exercices pour les tests et devoirs) est différent de celui des problèmes. Cette distinction avec les activités susmentionnées des problèmes est notamment faite par François Pluvinage :

> « Le mot "problème" est à entendre ici dans le sens qu'il a pour tout mathématicien et non selon l'acception que l'on trouve notamment dans l'expression anglaise "*problem solving*", laquelle renvoie à des petites questions dont le schéma, standard, de traitement est appris. » (F.Pluvinage, 1993)

On trouve également dans le texte décrivant les modalités d'attribution du Diplôme National du Brevet, la phrase suivante, faisant référence à une forme particulière de problèmes : « Certains exercices exigent de la part du candidat une prise d'initiative. » (Eduscol, 2016). L'objectif, d'évaluer cette capacité de l'élève (et du candidat ici) à prendre des initiatives, être capable de faire des propositions et, en somme de s'engager dans une authentique procédure de recherche, est clair.

En effet, celui d'un problème est justement de s'entrainer à prendre l'initiative, à construire ou à choisir ses procédures, et de :

« Mettre en place une stratégie de recherche très développée en mathématique [entre autres] que nous appelons la démarche scientifique ; à savoir : essayer, conjecturer, tester, prouver. » (G.Arsac et M.Mante, 2007)(p.20)

Quelles sont donc les autres modalités de travail permettant de privilégier cette démarche de recherche ?

2.2 Problèmes, situations, activités pour chercher

Des axes de réflexion possibles pour concevoir des activités pour chercher peuvent être :

• de consacrer un véritable moment dédié à la seule recherche, sans autre objectif que celui de chercher.

• de trouver le moyen d'optimiser l'engagement de l'élève dans le problème à cette fin de recherche. Ce qui est, en pratique, souvent très difficile.

• de revaloriser la place de la recherche pure dans la conception qu'ont les élèves de l'activité mathématique, notamment en revalorisant le statut de leurs brouillons, tentatives, idées exposées à l'oral.

• de proposer des problèmes dont la résolution est accessible par de multiples points de vue et de procédures différentes (car la probabilité de trouver une piste de résolution est plus grande et le débat développé par la suite a de fortes chances d'être plus riche et fertile d'enseignements). Ce qui est sans doute l'un des problèmes majeurs posés en termes de pédagogie.

On donnera, pour chacun des types de problèmes exposés ci-dessous, des exemples en Annexe 2.

2.2.1 Les situations-problèmes

Il s'agit de problèmes visant la construction, au sens de l'approche constructiviste de l'apprentissage, d'une nouvelle notion. Ici, les problèmes proposés doivent à la fois se baser sur certaines conceptions et notions ultérieurement acquises par les élèves, et montrer l'insuffisance des autres pour résoudre le problème. Ce qui justifiera et conférera du sens, à l'introduction de la notion nouvelle.

R. Douady décrit les conditions à remplir pour qu'un problème soit une situation-problème :

« • L'énoncé a du sens dans le champ de connaissance de l'élève.

• L'élève doit pouvoir envisager ce que peut être une réponse au problème. Ceci est indépendant de sa capacité à concevoir une proposition de réponse ou d'une validation de réponse.

• Compte tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure. Mais la réponse n'est pas évidente. Cela veut dire qu'il ne peut pas fournir de réponse complète sans développer une argumentation le conduisant à des questions auxquelles il ne sait pas répondre immédiatement.

• Le problème est riche. Cela veut dire que le réseau de concepts impliqués est important, mais pas trop, pour que l'élève puisse en gérer la complexité, sinon tout seul, du moins en équipe ou même au sein de la collectivité classe.

• Le problème est ouvert, par la diversité des questions que l'élève peut poser ou par la diversité des stratégies qu'il peut mettre en œuvre et par l'incertitude qui en résulte pour l'élève. […]

• La connaissance visée par l'apprentissage est le moyen scientifique de répondre efficacement au problème. Autrement dit, elle est un outil adapté.» (R.Douady, 1983)

Une situation-problème peut être notamment proposée sous forme d'un jeu ; la définition donnée ci-dessus s'y prête totalement. Les jeux peuvent répondre à des objectifs d'apprentissage : D. Winnicott, J. Piaget, L. Vygotski, J. Bruner et bien d'autres se sont intéressés aux démarches ludiques dans le cadre de l'apprentissage. Leurs recherches ont contribué à montrer, à ce titre, l'importance du jeu. D'un point de vue socio-constructiviste, ceux-ci sont clairement adaptés, permettant une interaction optimale avec l'objet d'étude, puisqu'il faut essayer, manipuler, développer une stratégie, être créatif, solliciter la mémoire, communiquer avec les pairs et s'y confronter. Ils sont, à ce titre, également l'occasion de travailler de nombreuses attitudes et compétences enseignées à l'école, dans un cadre différent (et propice) pour les élèves.

Dans le cadre de notre propos, ils sont également un instrument de choix pour mettre l'élève dans une posture naturelle de recherche : la « dévolution du problème », au sens de G.Brousseau, épineuse question pour un problème à teneur mathématique clairement affichée, est ici facilité par le caractère ludique de l'activité. L'élève s'empare du problème sous-jacent au jeu et veut gagner, trouver la solution et celle-ci lui semble accessible.

2.2.2 Les « tâches riches »

Les « tâches riches » (ou « complexes » parfois dans d'autres documents, malgré la connotation péjorative associée à ce terme) permettent de former les élèves à des situations concrètes de la vie quotidienne. Elles sont « riches » ou « complexes » car elles nécessitent d'employer et d'articuler des « tâches simples ».

L'élève doit mobiliser à la fois ses connaissances, compétences, attitudes et capacités qu'il a déjà acquises et des ressources additionnelles (par exemple sous la forme de documents à exploiter, de fiches techniques, d'aide méthodologique, d'un appui logiciel, d'un travail de recherche sur internet, etc.).

L'objectif n'est pas de travailler ou d'appliquer les notions développées au même moment en formation mais plutôt de favoriser la pleine initiative des élèves et qu'aucune procédure de résolution ou énoncé inducteur ne soit donné. L'utilisation d'une situation concrète de la vie quotidienne (si possible proche des centres d'intérêt et de la culture des élèves, mais pas exclusivement) permet justement de masquer ou de décentrer le champ disciplinaire en jeu et d'engager les élèves dans la résolution.

Cette prise d'initiative, précieuse, répond en particulier à l'objectif de développement de la compétence Chercher (sous ses deux aspects). Mais pas exclusivement : la réalisation de la tâche mobilise plusieurs autres compétences en plus de la compétence Chercher (c'est également une tâche « riche » en ce sens).

2.2.3 Les narrations de recherche, situations de recherche pour la classe et problèmes ouverts au sens de G.Arsac et M.Mante

Ces trois activités sont différentes modalités possibles (et non exhaustives) de pratiques destinées à apprendre aux élèves à « chercher » (dans le 2ème sens de la compétence décrite dans les programmes) et sont assez proches les unes des autres. Le but est d'établir pour les élèves un nouveau rapport avec les mathématiques, et de les placer, toutes proportions gardées, dans la position du chercheur.

Les élèves ont la complète responsabilité du problème, et l'enseignant apparaît plus comme l'animateur de la séance et veille à sa dévolution (au sens de G.Brousseau) ; même si les 3 types d'activités décrites ici présentent des différences sur ce point. Il incombe aux élèves de tester, de conjecturer, d'élaborer des stratégies de résolution, de choisir ou construire des outils adaptés pour résoudre et cela, au sein de petits groupes de travail.

Pour mener à bien les objectifs de formation à la « recherche », il est donc idéal de choisir des problèmes n'induisant aucune procédure et aucune notion du cours, voire d'en être complétement détachés. Il y a, dans l'adoption de telles pratiques, une rupture nette, que cela soit avec les autres activités de la classe de mathématiques (ou souvent, les procédures et notions employées pour résoudre sont attendues et induites) ou dans le contrat didactique (l'élève devant être entièrement responsable vis-à-vis de la tâche et le rôle de l'enseignant, animateur, différent de sa posture habituelle).

Narration de recherche

La narration de recherche est une pratique inventée par A. Chevalier et M. Sauter dans le cadre d'un travail à l'IREM de Montpellier, vers la fin des années 80.

On trouve dans la brochure *Expériences de narration de recherche en mathématiques,* une définition de celle-ci:

> « Cette activité consiste à proposer aux élèves de travailler sur un problème choisi hors de toute contrainte de programme, puis de rédiger un compte rendu de leur recherche qui décrive toutes les idées, toutes les pistes suivies, y compris celles qui n'ont pas abouti. Les élèves sont prévenus qu'on attachera plus d'importance à la description de la recherche qu'à l'obtention du résultat. » (IREM-Paris-7, 2002)

Il s'agit donc d'un type de problème répondant à deux objectifs simultanés (ou consécutifs) :

- engager les élèves dans une démarche de recherche pure (travail de la compétence de Recherche)
- les amener à rédiger un compte rendu (travail de la compétence Communiquer): les élèves notent leurs résultats et idées au brouillon pendant la recherche (sur la ou les premières séances) et rédigent individuellement la « narration », le compte rendu.

Il est prévu une correction menée par le professeur en dialogue avec la classe : une présentation des différentes stratégies, méthodes proposées et de la (ou les) solution(s).

Ce type de problème se prête tout à fait à l'objectif de former à la recherche. Toutefois, le professeur intervient pour répondre aux questions, suggérer, encourager, signaler les erreurs, impasses… et pour organiser la correction. Ce type de problème est assorti, et ce n'est pas négligeable d'une contrainte liée à la rédaction des comptes rendus. Il est légitime de se demander si cette contrainte n'interfère pas avec l'objectif premier de susciter une démarche de recherche pure, ou si, au contraire, elle en fait partie intégrante.

On trouvera, en annexe 4, un exemple de narration de recherche.

Situation de recherche pour la classe (SiRC)

La situation de recherche pour la classe (abrégé en SiRC) est une pratique développée par D.Grenier, C.Payan. Elle s'inscrit pleinement dans une volonté de formation des élèves à la démarche scientifique, par une activité particulièrement proche de celle des chercheurs.

Ses caractéristiques sont, d'après D.Grenier :

> « • Une SiRC est proche d'une question vive de la recherche mathématique […]
>
> • La question initiale est facile d'accès et pertinente à des niveaux différents […]
>
> • Des stratégies initiales existent, mais elles ne résolvent pas complètement la question […]

• Plusieurs avancées dans la résolution sont possibles, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, production d'exemples, etc. […]

• On peut changer les hypothèses, ou la question initiale, et s'emparer d'un nouveau problème » (D.Grenier, 2012)

La volonté ambitieuse de placer l'élève (quel que soit son niveau) au plus près de l'activité réelle de recherche par la transposition de vrais problèmes de recherche (résolus ou pas) rend la conception de situations de ce type particulièrement difficile. Cependant, une telle situation a le mérite de ne pas être complètement artificielle sur le plan de la recherche, puisqu'il s'agit de vrais sujets de recherche : il y a ici une vraie rupture de contrat didactique avec les autres activités souvent menées en classe et une vraie opportunité pour les élèves de se sentir valorisés dans leur travail. Il y aussi, une rupture dans le sens où on risque souvent (par les choix de problèmes opérés, proches des questions de la recherche en mathématiques) de ne pas conclure, et de laisser le problème ouvert.

De plus, autre particularité de cette pratique, la possibilité est laissée aux élèves de choisir la ou les valeurs de variables de recherche (qui jouent ici un rôle proche de celui de variable didactique), paramètres qui vont complexifier ou ouvrir l'activité de recherche.

On trouvera, en annexe 4, un exemple de SiRC.

Les problèmes ouverts au sens de G.Arsac et M.Mante

Les problèmes de ce type sont assez proches des situations de recherche pour la classe ; toutefois, ils ne semblent pas être aussi proche d'authentique sujets de recherche en mathématiques. Leurs caractéristiques, proches de celles des deux susmentionnées, sont données par G.Arsac et M.Mante :

« Nous appelons « problème ouvert », un problème qui possède les caractéristiques suivantes:

• l'énoncé est court ;

• l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution (pas de questions intermédiaires ni du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours ;

• le problème se trouve dans le domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

Il est également souhaitable qu'il y ait plusieurs procédures possibles pour atteindre le résultat et éventuellement aussi plusieurs expressions de la solution, voire plusieurs solutions ou des possibilités de trouver des solutions partielles. » (G.Arsac et M.Mante, 2007)

Ici aussi, c'est d'inscrire l'élève dans une démarche scientifique qui est l'objectif visé. L'organisation se fait autour d'une séance de recherche (et de la production d'une affiche retraçant les avancées, stratégies, résultats des groupes) et d'une séance de mise en commun, qui sera le théâtre d'un débat entre groupes (notamment par la présentation de l'affiche réalisée aux autres groupes). Lors de la recherche et lors du débat, l'enseignant se contente, encore une fois, d'une posture d'animateur, de stimulateur (non inducteur) d'activité et ne prends pas part à l'activité demandée aux groupes. Il veille à la dévolution du problème et à la bonne tenue du dispositif et au maintien de ses objectifs, mais prend également une posture d'observateur qui viendra nourrir sa perception des élèves et de leur mobilisation des connaissances acquises.

C'est la pratique que j'ai choisie pour mener mes expérimentations en classe. Je donnerai, dans la partie

suivante, une justification de ce choix, une présentation et un rapport de ces expérimentations. On trouvera en annexe 4 des exemples supplémentaires de problèmes ouverts au sens de G.Arsac et M.Mante.

Partie 3

3 Expérimentations en classe : présentation et rapports.

3 Expérimentations en classe : présentation et rapports.

3.1 Choix opéré pour l'expérimentation, justifications didactiques et pédagogiques

J'ai choisi, pour mes expérimentations en classe, un « Problème ouvert », au sens de G.Arsac et M.Mante. Sa pratique est en effet originale, et constitue un défi : la posture de l'enseignant, très en retrait, peut surprendre et inquiéter (la séance et la responsabilité de la recherche du problème étant entièrement dévolues aux élèves, l'interaction de les élèves étant minimale pour favoriser les échanges entre pairs), peut sembler difficile (il est extrêmement tentant d'intervenir durant les recherches, pour recadrer, guider, corriger…). Toutefois, c'est, par cette réserve du rôle de l'enseignant, cantonné au rôle d'animateur de séance pendant les recherches, aussi une occasion particulière pour les élèves d'exercer et développer les 6 compétences référencées par le programme de mathématiques, notamment « Chercher ».

Ayant voulu garder comme objectif de privilégier l'activité de recherche des élèves je n'ai pas choisi la modalité de « Narration de recherche ». Elle me semble relever d'un objectif supplémentaire, qui tient à la rédaction (avec les contraintes que cela suppose) d'un compte-rendu mais les deux modalités sont proches et revêtent toutes deux des intérêts certains. La communication des élèves se fera ici à l'oral, lors de la présentation de leurs travaux (qui peuvent être réduits à des dessins, annotés ou non) et cela devrait être, a priori, l'occasion d'échanges riches entre pairs (ce qui, nous le verrons par la suite, est un véritable atout dans la construction des savoirs).

3.1.1 Développer la prise d'initiative, conquérir le vrai

Il arrive que l'on souhaite développer certains automatismes chez l'élève, comme ceux acquis dans l'apprentissage des tables de multiplication par exemple, afin de libérer la réflexion et le raisonnement à des tâches plus complexes dans lesquelles ces calculs ne constituent qu'une étape.

Cependant, construire et donner des problèmes où on travaille spécifiquement la prise d'initiative, est à mon sens particulièrement important. Des problèmes où l'élève ne voit pas distinctement de procédure de résolution toute tracée ou connue, mais doit tester, essayer, changer d'approche, échanger avec les pairs, prendre le risque de se tromper, éprouver sa réflexion. C'est une posture plus incertaine, moins naturelle pour l'élève surtout s'il considère la discipline comme « le royaume de l'exactitude et des réponses justes » :

> « Le but de l'éducation intellectuelle n'est pas de savoir répéter ou conserver des vérités toutes faites... C'est d'apprendre à conquérir par soi-même le vrai, au risque d'y mettre le temps et de passer par tous les détours que suppose une activité réelle. » (J.Piaget, 1950)

C'est d'ailleurs une attitude qui est évaluée au cours de Diplôme National du Brevet :

> « Certains exercices exigent de la part du candidat une prise d'initiative. » (Eduscol, 2016)

Cette démarche active, hors des sentiers battus, des réflexes cultivés par les exercices d'application (pourtant nécessaires puisqu'ils permettent aux élèves d'acquérir des méthodes et outils de résolution éprouvés), est tout à fait en cohérence avec l'ambition des programmes, qui comme nous le rappelions en introduction, visent à « rendre l'élève acteur du monde dans lequel il vit et vivra » et à former à la pensée critique.

Comme le dit Piaget dans la citation ci-dessus, il s'agit de conquérir le « vrai » plutôt que d'apprendre des « vérités toutes faites » par quelqu'un d'autre. Il faut oser inventer, douter et accepter des faits qui choquent la croyance, qui remettent en cause des conceptions. Cette posture de doute et de « conquête », si elle constitue un exercice difficile, est également bénéfique, tant pour les apprentissages pour eux-mêmes

(puisqu'ils ont été vécus, construits et appropriés par l'élève plutôt que transmis et intégrés) que pour la formation de la pensée critique, puisque l'élève apprend qu'il peut accéder au « vrai », à la vérité par lui-même plutôt que de devoir subir celle d'autrui.

La pratique des problèmes ouverts permet aux élèves d'être créatifs et de s'engager d'eux-mêmes puisqu'ils sont pensés et choisis pour cela, en donnant l'impression que le problème est a priori à leur portée immédiate, en choisissant des énoncés clairs et peu mathématiques, plus proches de leur champ conceptuel, de leur propre expérience.

Plus le problème est ludique, plus l'engagement de l'élève sera grand. De nombreux travaux (autour de la « ludification », c'est-à-dire le transfert des mécanismes du jeu à la construction des apprentissages ou d'autres objectifs) montrent l'intérêt du jeu et son efficience pour la construction du savoir. Favoriser l'engagement de l'élève par ce procédé semble donc particulièrement pertinent.

3.1.2 Apprendre à questionner le monde

C'est un des objectifs de l'enseignement scolaire : fournir à l'élève cette capacité à mener l'enquête pour décrire et comprendre le monde, par ses propres moyens. Et il est naturel pour les mathématiques d'avoir un rôle à jouer à ce niveau. En effet, elles ne se contentent pas de fournir des outils, des méthodes, des recettes pour expliquer le monde, mais elles fournissent également une posture ouverte de questionnement et de doute constructif. En particulier, résoudre un problème, élucider une énigme c'est conquérir par soi-même une forme de pouvoir (celui de la compréhension) sur le monde, notamment si cette « énigme mathématique » prend origine dans la réalité de l'élève.

Accentuer cette possibilité particulière offerte par les mathématiques de comprendre le monde par modélisation, sur des activités contextualisées proches des élèves, ludiques et engageantes (mais aussi parfois sur des situations abstraites, décontextualisées progressivement), participe à la formation de l'élève à cette posture de questionnement, en lui permettant d'adopter de multiples points de vue :

> « Faire des mathématiques, c'est apprendre à se laisse surprendre par l'organisation mathématique du monde et à essayer d'en comprendre les raisons, c'est-à-dire les structures. C'est apprendre à expérimenter et à observer les faits mathématiques, numériques ou géométriques. » (Descaves, 2008)

Les élèves sont, par nature, dotés d'une curiosité naturelle qui ne demande souvent que peu de choses pour se manifester et j'ai fait maintes fois l'expérience avec mes classes de mettre à portée du regard un origami modulaire, un Rubik's cube ou des carrés magiques sur un coin de mon bureau : l'effet est immédiat. Comprendre et réussir à résoudre des « énigmes » et des questions (surtout si celles-ci sont pensées pour être de formes engageantes, comme c'est le cas des problèmes ouverts), est un moteur puissant des apprentissages. L'intervention de ce plaisir de chercher et trouver dans les tâches proposées et les questions induites laisseront des traces profondes et fécondes de sens chez les élèves.

Alors, plutôt que de créer une sorte de parcours d'expériences guidées, de questions que doit vivre l'élève, l'idéal est que l'on suscite chez lui la question, la curiosité et qu'une question en entraine une autre :

> « Seulement, il est sur le terrain même de l'expérimentation concrète, encore deux manières de concevoir le rapport du maître avec l'enfant et celui-ci avec les objets sur lesquels porte son action. L'une est de tout préparer, de façon telle que l'expérience consiste en une sorte de lecture obligée et entièrement réglée d'avance. L'autre est de provoquer chez l'élève une invention des expériences elles-mêmes en se bornant à lui faire prendre conscience des problèmes, qu'il se pose déjà en partie par lui-même, et à activer la découverte de nouveaux problèmes, jusqu'à faire de lui un

> expérimentateur actif qui cherche et trouve les solutions, au travers de nombreux tâtonnements peut-être, mais par ses propres moyens intellectuels. Or, affirmer le primat de la méthode inductive, c'est précisément s'engager dans cette seconde voie : c'est postuler une méthode telle que l'enfant soit conduit par l'action à l'élaboration de ses propres opérations intellectuelles; c'est remplacer la simple lecture des faits, en tant que données extérieures, par l'organisation spontanée des rapports et la construction même du processus inductif. » (Xypas, 1997)

C'est en particulier l'intérêt des problèmes ouverts au sens de G.Arsac et M.Mante : ils ne s'inscrivent pas dans une séquence particulière du programme, ils ne suggèrent aucune piste de résolution privilégiée et n'offrent que peu de possibilité au professeur d'intervenir et donc d'être modélisant (lui laissant la possibilité de ne répondre que par de nouvelles questions). Le problème proposé dans ce cadre est donc propice à ce que les élèves se posent d'eux-mêmes les questions/sous-questions auxquelles ils doivent répondre (en particulier celles qui se posent lorsqu'une démarche, un raisonnement est adopté pour tenter de répondre au problème).

Arriver à penser les apprentissages de la sorte n'est pas chose aisée, mais les bénéfices sont multiples. Se baser sur la curiosité naturelle de l'élève pour que l'apprentissage devienne une expérience issue d'un questionnement personnel est sans doute la meilleure façon, à mon sens, de s'assurer son appropriation. On s'inscrit une nouvelle fois dans une démarche socio-constructiviste des apprentissages et même dans la perspective de la différenciation de l'enseignement : l'élève construit alors son savoir en répondant à des questions qu'il s'est lui-même posé, avec ses mots et qui ont trouvé une réponse par son travail avec les pairs sur la résolution du problème (sa dévolution apparaît alors beaucoup moins problématique, puisque la question n'émane pas du professeur). De plus, on cultive chez l'élève cette faculté primordiale à s'interroger sur le monde, à le remettre en question et à chercher les moyens de le comprendre, par lui-même, puis avec l'aide extérieure des pairs ou de ressources.

Au fond, les connaissances mathématiques auxquelles auront accès les élèves sont déjà là, écrites, formalisées et forment une culture à part entière. Mais ceux-ci ne doivent pas simplement apprendre des références culturelles. Ils doivent se les approprier et pour cela, les vivre. C'est justement l'objet d'une telle pratique : vivre, par ces questions, l'expérience des mathématiques et par là-même, donner du sens aux notions développées et au formalisme qui les accompagne.

3.1.3 Donner une nouvelle place et une nouvelle conception de l'erreur en mathématiques

On ne fera pas ici une classification des erreurs dans la discipline. Mais donner une nouvelle place à l'erreur est à mon sens un véritable enjeu de l'enseignement des mathématiques, et même de l'enseignement tout court : pour son traitement au sein du cours et de l'activité des élèves mais surtout dans la conception de ceux-ci. La peur de se tromper et de « mal faire » est, nous l'avons vu, un frein véritable à l'engagement de l'élève dans l'activité (mathématique ou non). Le cours de mathématiques peut-être vécu par les élèves comme l'endroit où seules les réponses justes sont considérées et estimées, alors qu'il doit en être autrement et que cela ne correspond pas du tout ni à l'activité réelle d'un chercheur en mathématiques, ni à ce que l'on attend d'eux. C'est d'ailleurs une idée fortement ancrée dans les programmes et qui explique, en partie, la place nouvelle faite à l'algorithmique, propice à un nouveau traitement de l'erreur qui est vue comme le chemin nécessaire à la construction de la réponse au problème. Il faut pour construire un algorithme qui fonctionne, aller d'erreurs en erreurs, en les analysant.

Alexandre Grothendieck, l'un des plus grands mathématiciens du XXème siècle, disait à propos de l'erreur :

> « Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous

> se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mûs, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée. » (A.Grothendieck, 1986)

L'erreur n'est plus considérée comme une déficience de l'élève, mais comme une condition *sine qua none,* un obstacle nécessaire à la construction du savoir et au développement de l'élève. Il convient donc de lui redonner de l'importance, de la valoriser et de montrer en quoi elle a permis l'établissement de la vérité. Pour G.Brousseau :

> « L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. » (G.Brousseau, 1983)

La faculté de se tromper est chose commune et l'analyse des erreurs permet, personnellement mais aussi collectivement, de surmonter des obstacles dans la compréhension et de questionner le rapport entretenu par les élèves avec la connaissance :

> «L'élève distrait ou peu appliqué peut fort bien produire une réponse incorrecte, sans qu'il y ait pour autant de difficulté particulière dans ses rapports avec le savoir traité. Qu'il soit moins distrait et plus appliqué (ce qui le cas échéant peut être difficile à obtenir avec tel élève ou telle classe), et la production deviendra correcte. D'autres erreurs paraissent moins contingentes, plus liées aux rapports profonds entretenus avec un savoir dans des conditions données. En didactique des sciences et des mathématiques la dernière décennie a vu s'accumuler les travaux qui mettent en évidence ce type d'erreur. Dans des populations semblables d'élèves confrontés à des problèmes comparables, on trouve systématiquement des types d'erreurs bien caractérisées. » (Johsua Samuel et Dupin Jean-Jacques, 1993)

Une activité de recherche en classe, notamment lorsqu'elle est gérée selon le protocole des problèmes ouverts de G.Arsac et M.Mante, permet d'exhiber la construction de la vérité à partir des erreurs, de les dédramatiser et de les valoriser, de questionner leurs origines et de montrer dans quelle mesure elles suivent une logique propre, que l'on peut critiquer mais surtout comprendre et sublimer. L'erreur a alors aussi vocation à créer du lien avec les conceptions et perceptions des pairs, d'autrui.

Cette dimension sociale et constructive (voire empathique) de l'erreur est véritablement un atout à exploiter pour amener plus d'engagement des élèves, et prendre en compte leurs conceptions dans la construction du savoir.

3.1.4 Susciter le débat avec les pairs et le travail collaboratif

Nous en avons parlé en filigrane dans les propos tenus jusqu'ici, mais la dimension sociale des apprentissages est un facteur important à prendre en compte dans l'apprentissage.

Être capable de construire un raisonnement, par le fruit de ses recherches est intéressant pour la formation critique et la construction des savoirs. Mais être capable de le présenter et de le défendre devant des pairs suscite d'autres compétences. Soumettre le fruit de sa réflexion au regard d'autrui est un exercice difficile mais cette confrontation avec l'autre (ici les pairs) et son système de pensée, permet d'enrichir la réflexion et

permet de lui donner d'avantage de sens, de corps. Cela lui permet d'exister, dans la conception des élèves, sous une forme différente, de l'envisager sous un angle différent, nouveau et riche :

> « Piaget découvre que, d'une part, l'enfant construit son intelligence en agissant et en donnant sens à son environnement (physique et social), d'autre part, l'individu à lui seul est prisonnier de son *égocentrisme,* de cette manière naturelle et spontanée que chacun a de voir les choses de son propre point de vue. L'égocentrisme - à ne pas confondre avec l'égoïsme - est une vision spontanée et évidente du monde que l'on croit partager avec les autres, alors qu'il s'agit d'une image personnelle et subjective que l'on généralise. C'est en changeant de perspective, en se mettant à la place de l'autre pour comprendre son point de vue que l'on se décentre progressivement de sa vision égocentrée de départ (des « faux absolus » dit Piaget) pour accéder à une opinion de plus en plus nuancée, relative et, par cela même, objective. » (Xypas, 1997)

Pour Piaget, l'apprentissage se construit donc par décentration progressive à partir d'une pensée égocentrée de l'enfant et ce, au moyen de son environnement. Pour Vygotski, il faut prendre en compte la dimension sociale des apprentissages. L'interaction avec les pairs, avec un outil fondamental, le langage, permet de développer l'intelligence et structurer la pensée. Les mots (et les systèmes de représentations) permettent une intériorisation des activités et la formation des concepts. Le langage est, en ce sens, une première représentation abstraite du monde, construite par l'enfant :

> « L'utilisation fonctionnelle du mot ou d'un autre signe comme moyen de diriger l'attention, de différencier et de dégager les traits caractéristiques, de les abstraire et d'en faire une synthèse est une partie fondamentale et indispensable du processus de formation des concepts dans son ensemble. » (Vygotski, et al., 1985)

Pour lui et à la différence de Piaget, l'apprentissage précède le développement (en effet chez Piaget, on trouve cette idée l'apprentissage doit être en adéquation avec le développement en cours de l'enfant) :

> «L'apprentissage donne naissance, réveille et anime chez l'enfant toute une série de processus de développement internes qui, à un moment donné, ne lui sont accessibles que dans le cadre de la communication avec l'adulte et de la collaboration avec les camarades, mais qui, une fois intériorisés, deviendront une conquête propre à l'enfant. » (Vygotski, 1985)

> « Chaque fonction psychique supérieure apparaît deux fois au cours du développement de l'enfant : d'abord comme activité collective, sociale et donc comme fonction interpsychique, puis pour la deuxième fois comme activité individuelle, comme propriété intérieure à la pensée de l'enfant, comme fonction intrapsychique » (Vygotski, 1985)

Les activités favorisant le travail collaboratif ont donc une place importante à jouer dans les apprentissages et dans le développement des élèves. Les interactions entre pairs, la verbalisation des activités, la construction en collaboration des notions apparaissent comme relevant des fonctions cognitives supérieures (mémoire, langage, etc.) et permettent non seulement l'acquisition des notions, mais également la construction des capacités de compréhension et d'analyse, le développement de l'aptitude à apprendre et par un jeu de miroirs, de réflexivité permettent à l'enfant de s'appréhender lui-même et d'appréhender ses actions. Inscrire son enseignement dans cette perspective semble donc nécessaire, même s'il peut paraître a priori difficile de ne construire que des situations d'apprentissage de ce type. Piaget rappelle malgré sa mise en opposition classique avec Vygotski, cette importance du travail collaboratif dans le développement de la pensée et l'appropriation des connaissances :

> « Mais, comme y insistent la plupart de nos informateurs, l'appel à l'activité de l'élève suppose tôt ou tard (pour ce qui est non seulement du classement et de la systématisation des résultats obtenus, mais

encore souvent de leur interprétation même) une vie sociale organisée entre les élèves eux-mêmes : l'expérimentation se complète par la discussion en commun, la rédaction ou le dessin dans les cahiers d'observation, appelle la collaboration des chercheurs, bref l'exercice des opérations constitutives du savoir suppose cette coopération intellectuelle qui est le milieu nécessaire à l'organisation des opérations individuelles elles-mêmes. C'est ici que le rôle du maître redevient central, en tant qu'animateur des discussions, après avoir été l'instigateur, auprès de chaque enfant, de la prise de possession de cet admirable pouvoir de construction intellectuelle que manifeste toute activité réelle. » (Piaget, 1998)

« L'enfant n'est pas un être passif dont il s'agit de remplir le cerveau, mais un être actif, dont la recherche spontanée a besoin d'aliments. Ce changement radical de perspective opéré par une "école active", ne supprime pas la leçon, mais la réduit à un rôle plus modeste de réponse aux questions que se pose l'élève et la subordonne ainsi au travail individuel. Mais alors, dans la mesure où une part est faite au travail personnel, il y a travail en commun et formation de groupes, parce que seule la réception passive suppose l'isolement intellectuel des élèves, tandis que la recherche entraîne la collaboration et l'échange. » (Piaget, 1998)

La pratique des problèmes ouvert (par sa phase de travail par équipes et par la mise en commun et le débat qui s'en suit réalisés par les élèves) apparait donc, sous cette perspective socio-constructiviste, comme particulièrement bénéfique pour l'activité mathématique des élèves.

3.2 Présentation des problèmes expérimentés en classe

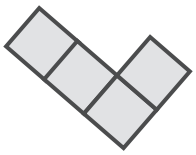
3.2.1 Les polyominos

Il s'agit d'une activité menée dans le cadre de l'Accompagnement personnalisé, avec des élèves de 6ème. Je me suis grandement inspiré d'une activité proposée par le groupe Math&Tice de l'académie d'Amiens, appelée *Pentaminos* (Combes).

L'objectif était, par une activité préliminaire de recherche des élèves, d'offrir un cadre propice et ludique au réinvestissement et à la discrimination des notions d'aire et de périmètre, de susciter un débat sur les formes obtenues qui se déduisent les unes des autres par symétrie ou rotation, sans formalisme. Il s'agit de 16 élèves provenant de diverses classes de 6ème de l'établissement.

On trouvera en annexe 2 le sujet de l'activité donnée aux élèves.

Dans cette activité, on demande aux élèves de rechercher et de dénombrer toutes les formes possibles composées d'un nombre donné de carrés unités, assemblés les uns aux autres par un côté.



Un exemple de polyomino formé de 4 carrés unité (tetramino) que l'on retrouve dans le jeu Tetris.

L'activité se déroule sur 3 séances : une séance de recherche des polyominos, une séance de mise en commun et de remplissage du tableau (voir sujet en annexe) et une séance de dessin des polyominos sur Geogebra et de conception du puzzle à résoudre (le puzzle est rectangle 6 x 10 formé des 12 pentaminos) par équipes.

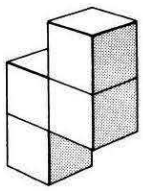
3.2.2 Les polycubes

Il s'agit d'une activité menée avec ma classe de 5ème, constituée de 25 élèves. Je me suis inspiré de l'activité polyominos, décrite ci-dessus, lors d'une réflexion sur les stratégies à adopter pour travailler la vision dans l'espace avec les élèves.

Le but de l'activité est de dénombrer tous les polycubes possibles (jusqu'aux pentacubes (composés de 5 cubes unité), avec la possibilité pour les équipes en avance de chercher quelques hexacubes (composés de 6 cubes unité)).

L'objectif était de privilégier une activité ludique et engageante autour de l'espace mais d'amener les élèves à chercher, en observant leurs stratégies. J'espérai également que la question des solides qui se déduisent les uns des autres par symétrie ou rotation serait abordée, sans formalisme autour de ces notions et que certaines méthodes, des pistes pour organiser la recherche pourraient être déduites des élèves.

L'activité se termine par une petite compétition entre équipes sur la résolution du puzzle de Soma (voir annexe 3), car les pièces du jeu sont des polycubes.



Un exemple de polycube formé de 4 cubes unité (tetracube).

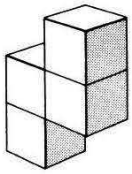
L'activité est prévue sur une séance, avec un réinvestissement possible dans la suite du cours, au moment de la représentation en perspective cavalière. Un temps de recherche, de 40 minutes, suivi d'un temps de synthèse et de débat de 20 minutes.

L'énoncé est le suivant :

CHERCHER : *démarche d'investigation en mathématiques* Travail en équipes de 3 à 4 personnes

Ce problème est différent des exercices et activités que nous abordons en classe habituellement. C'est un problème qui ressemble beaucoup à ceux que rencontrent les chercheurs en mathématiques. Le but n'est pas forcément d'arriver à trouver sa solution, mais de s'engager dans la recherche et d'arriver à exposer et défendre le fruit de son travail. Pour cela, on écrira, après avoir cherché au brouillon, les recherches faites sur la feuille de compte-rendu.

Enoncé **:** Trouver tous les polycubes qu'il est possible de former à partir des cubes dont vous disposez.



Vous dessinerez ces polycubes sur le papier pointé fourni.
Il faudra être capable d'expliquer (rapidement) sa méthode.

Un exemple de polycube formé de 4 cubes unité.

Bien entendu, j'ai expliqué ce qu'était un polycube (avec l'exemple de tetracube ci-dessus) et. Je m'attends à ce qu'il y ait des difficultés de représentations, mais je pense que cela permettra plus de réactivité lors des échanges.

3.2.3 Le nombre de segments possibles

Il s'agit d'une activité menée avec ma classe de 4ème, constituée de 23 élèves. C'est une activité classique de dénombrement qui peut être menée du collège à l'université.

L'activité est prévue sur 2 séances, une séance de recherche (55 minutes) et une séance de mise en commun (en fonction du temps nécessaire pour présenter les travaux des groupes).

L'énoncé est le suivant :

CHERCHER : *démarche d'investigation en mathématiques* Travail en équipes de 3 à 4 personnes.

Ce problème est différent des exercices et des activités que nous abordons en classe habituellement. C'est un problème qui ressemble beaucoup à ceux que rencontrent les chercheurs en mathématiques. Le but n'est pas forcément d'arriver à trouver sa solution, mais de s'engager dans la recherche et d'arriver à exposer et défendre le fruit de son travail. Pour cela, on écrira, après avoir cherché au brouillon, les recherches faites et les résultats obtenus sur la grande feuille A3.

Enoncé : Etant donné plusieurs points sur une feuille, combien peut-on tracer de segments joignant deux quelconques de ces points ?

Déterminer le plus petit nombre de points pour lequel le nombre de segments dépasse 10 000.

Ici il est précisé aux élèves que le but est d'essayer de répondre à la première question avant toute chose, la deuxième étant totalement optionnelle. Il leur est donné comme consigne que le but est d'essayer de trouver une logique et d'expliquer la démarche qui a permis de l'atteindre. Les solutions, résultats proposés peuvent prendre toutes les formes voulues.

L'objectif était de remplir les conditions du problème ouvert au sens de G.Arsac et M.Mante, données dans la partie 2.2.3. Pour rappel :

❶ *L'énoncé est court*.

C'est le cas ici, il ne comporte qu'une phrase.

❷ *L'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution (pas de questions intermédiaires ni du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours*.

C'est également le cas ici, aucune démarche de résolution, aucune indication n'est donnée. Il n'y a aucun lien particulier avec les chapitres traités cette année avec la classe.

❸ *Le problème se trouve dans le domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.*

Les termes de l'énoncé ne posent a priori aucun problème aux élèves. La seule notion mathématique est celle de segment, avec laquelle ils entretiennent assez de familiarité, puisqu'ils la connaissent depuis l'école primaire. Le nombre de points à envisager n'est pas indiqué, ce qui peut être source de questions.

❹ *Il est également souhaitable qu'il y ait plusieurs procédures possibles pour atteindre le résultat et éventuellement aussi plusieurs expressions de la solution, voire plusieurs solutions ou des possibilités de trouver des solutions partielles. »* (G.Arsac et M.Mante, 2007)

Stratégies de recherche possibles : Les élèves aborderont le problème majoritairement par la réalisation de dessins, de schémas. Même si l'on pourrait imaginer que des élèves imaginent mentalement des points et raisonnent en visualisant le nombre de nouveaux segments à prendre en compte en plus des segments précédemment pris en compte…c'est assez improbable à priori.

Il est nécessaire d'avoir perçu le caractère indéterminé du nombre de points à prendre pour les élèves. Toutefois, c'est le traité, l'organisation de la recherche qui présente une richesse de procédures possibles. En effet, l'élève peut :

• en se répartissant le travail de dénombrement sur des figures différentes dans l'équipe, mettre en commun ses résultats avec les camarades.

• construire un dessin petit à petit et écrire le nombre de segments obtenus à chaque étapes. Ce qui nécessite une organisation particulière avec par exemple un codage particulier ou l'emploi de couleurs.

• construire des dessins différents (et les organiser), en augmentant pour chaque dessin le nombre de points pris en compte et en comptant à chaque fois le nombre de segments obtenus, en organisant les résultats dans un tableau.

Ensuite, une fois obtenues une première suite du nombre de segments constructibles, essayer de comprendre sa logique de construction et anticiper sur les configurations avec un nombre de points (ce qui nécessite aussi d'avoir perçu le caractère indéterminé du nombre de points à prendre). A partir de là, pour trouver à partir de quel nombre de points de base on obtient 10 000 segments, il est possible de :

• comprendre la logique de construction de la suite et proposer un raisonnement permettant de répondre à la question, sans penser à un outil en particulier, et en effectuant les calculs de proche en proche à la main (c'est laborieux…surtout pour arriver à 10 000 !).

• se servir d'un tableur ou d'une calculatrice (pour un nombre de segments plus raisonnable et en s'organisant)

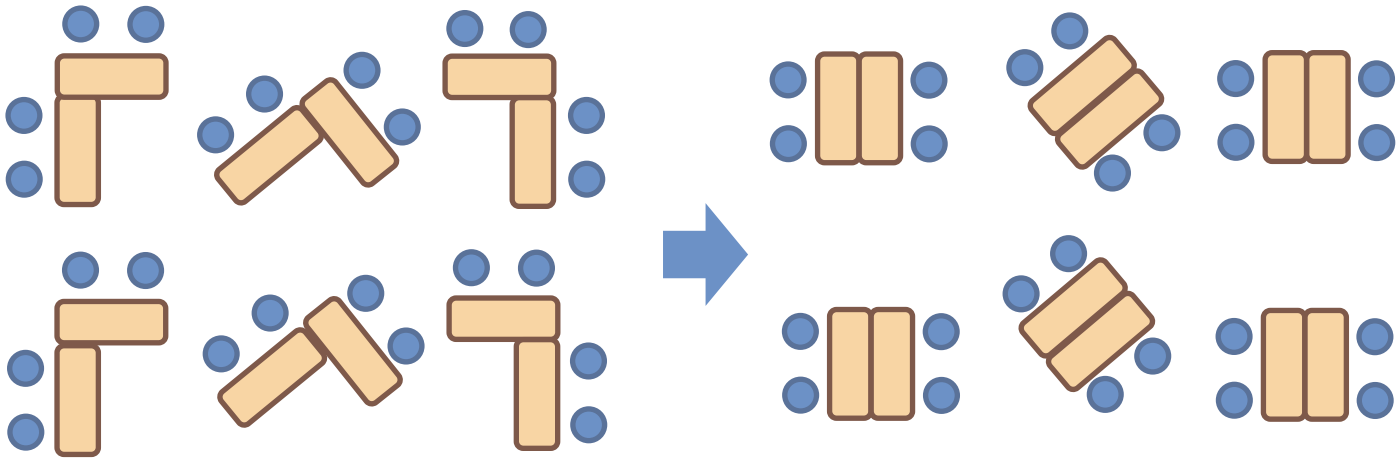
• pour un nombre de segments à obtenir plus raisonnable, un grand dessin réfléchi de manière à optimiser la construction des segments et sa lecture (par exemple en s'organisant avec des segments de couleur) : cela aurait pu être possible avec un nombre de 100 segments à obtenir par exemple.

3.3 Rapports d'expérimentation

Pour chacune des expériences décrites ci-dessous, on a expliqué en amont aux élèves le travail qui serait mené (en général deux jours en avance, pour la séance prochaine). On leur explique les objectifs et le sens de l'activité, comment elle se déroulera et ce qui sera attendu d'eux. J'ai choisi d'appliquer le conseil de G.Arsac et M.Mante :

> « Il peut par exemple annoncer aux élèves que, lors de la prochaine séance, il leur proposera de chercher un problème comme le fait un chercheur en mathématiques. » (G.Arsac et M.Mante, 2007)

Les élèves travaillent en îlots par équipes de 3 à 4 élèves, les tables sont retournées et organisées rapidement comme ceci :



Configuration classe « classique » **Configuration « activité en équipes »**

3.3.1 Les polyominos

Déroulement de l'activité de recherche: Après un rappel de ce qui est attendu et des spécificités du travail qui va être mené, les élèves disposent les tables en îlots et forment des groupes de 4 (voir schéma de l'organisation de la salle ci-dessus). Je précise que j'aimerai que garçons et filles soient mélangés (une certaine résistance s'opère dans un groupe, où cela semble impossible pour un garçon de travailler avec des filles !).

Je leur donne les sujets de l'activité (deux sujets pour 4). Un temps de recherche individuelle est demandé, afin de lire l'énoncé et de s'assurer que tous ses termes sont compris, que le travail à faire est clair. Un temps de synthèse très court est pris pour comprendre la notion nouvelle de polyomino et les différentes familles (travail de vocabulaire sur les préfixes).

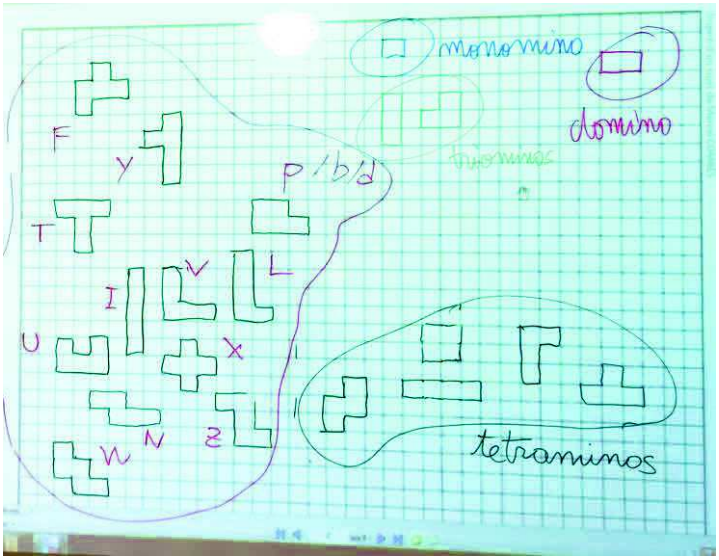
Les élèves se lancent très rapidement dans la recherche. Certains proposent d'emblée de multiples polyominos là où d'autres élèves peinent à comprendre comment ils sont construits (la définition « Un polyomino est un assemblage d'un certain nombre de carrés identiques disposés dans n'importe quel ordre en les juxtaposant le long de leurs côtés, mais pas en diagonale» est mal comprise). Certains élèves ne proposent que peu de polyominos.

Globalement les recherches s'éparpillent, mais certains prennent le parti d'organiser tout de suite leur recherche, en progressant par étapes et en épuisant petit à petit les polyominos possibles pour chaque famille. J'assiste également à des regroupements par couleurs et par sacs (pour mettre dans le même « sac » les tetraminos, dans un autre les pentaminos, etc.). D'autres ne comprennent pas la liberté de ce temps de recherche au brouillon, et s'attachent, par soucis de bien faire, à tracer leurs polyominos à la règle. Certains groupes s'attachent à répartir le travail tandis que d'autres travaillent, au sein d'un groupe, individuellement.

La question de la prise en compte de polyominos qui « se ressemblent beaucoup » (qui se déduisent les uns des autres par des symétries et/ou des rotations) se pose. Pour certains, l'intérêt de les prendre en compte est limité, car « ce qui compte c'est de trouver des formes différentes », mais ce n'est pas évident pour tous.

Mise en commun des recherches: Pour des raisons pratiques, j'ai choisi de gérer la mise en commun des travaux sur cette phase de l'activité par un tracé des élèves au tableau des polyominos trouvés. L'enthousiasme est à son comble et c'est un vrai plaisir pour moi de voir tous les doigts levés pour aller dessiner les polyominos, à tour de rôle au tableau.

La convention est prise de ne pas redessiner « les polyominos qui se ressemblent beaucoup ». Je suggère, avec eux, l'intérêt de les nommer pour pouvoir en parler et les distinguer. Je mets en lumière, en donnant la parole aux élèves concernés, le travail fait par certains pour organiser leur recherche (couleurs, ensembles, etc.).



Une photographie de la mise en commun de la recherche de polyominos par les élèves

Déroulement de la suite de l'activité: la partie concernant le remplissage du tableau se déroule dans des conditions similaires.

Le tableau est par contre assez laborieux à remplir, même si les élèves continuent de montrer un enthousiasme tout à fait manifeste. Les multiples formes des polyominos (qui peuvent avoir des aires égales mais des périmètres différents et inversement) sont tout à fait propice à un réinvestissement des notions d'aire et de périmètre, porteuses de sens et par construction, proches des élèves (ce sont eux qui les ont construits).

Concernant la construction sur Geogebra et mise à part quelques difficultés de prise en main de l'interface du logiciel, les élèves dessinent très rapidement les 12 pentaminos trouvés et trouvent plaisir à le faire. Les plus rapides « jouent » avec les possibilités du logiciel. Des jeux avec le plateau (rectangle 6 x 10) et les 12 pièces du puzzle (12 pentaminos) sont imprimés, collés sur du papier rigide et découpés.

3.3.2 Les polycubes

Le but de l'activité est de dénombrer tous les polycubes possibles (jusqu'aux pentacubes (composés de 5 cubes unité), avec la possibilité pour les équipes en avance de chercher quelques hexacubes (composés de 6 cubes unité)).

Consignes et précisions:

Après un rappel des attentes et des spécificités du travail à effectuer, je fais distribuer par deux élèves les énoncés, le papier pointé (une feuille réponse par équipe et des feuilles de recherches) et je distribue des petits cubes en bois pouvant servir de support à la réflexion (ils sont placés au centre de la table, les élèves

étant libre de s'en servir ou non). Le travail se déroulera par équipes de 3 ou 4 personnes qui choisissent avec qui elles ont envie de travailler (on distribue quatre lots de 6 cubes en bois) qui viendront, après le temps de recherche, dessiner leurs propositions au tableau (en expliquant leur démarche); les autres contrôlant les réponses proposées.

Après un temps de lecture individuel rapide, je demande si quelqu'un n'a pas compris l'énoncé. Plusieurs élèves lèvent la main. Je montre alors ce qu'est un polycube (en montrant un tetracube) et comment il peut être dessiné sur la feuille de papier pointé.

Déroulement de l'activité de recherche:

• Rapidement, plusieurs équipes se demandent combien de polycubes sont à trouver et je leur réponds que je ne sais pas, en souriant. Plus sérieusement je leur explique que la plupart du temps, les mathématiciens sont placés dans cette position et doivent explorer toutes les réponses possibles. C'est à eux qu'il appartient de répondre à cette question.

• La question est également posée de la prise en compte ou non des polycubes symétriques l'un de l'autre, je leur réponds de même qu'il leur revient de répondre à cette question, que cela fait partie de l'activité.

• Beaucoup d'élèves dessinent des représentations planes, sans perspective. Je les interroge en leur demandant si les dessins donnaient une idée suffisante de la forme qu'ils cherchaient à représenter.

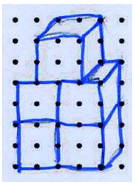
• Un grand nombre d'élèves ne conçoivent que des polycubes « plats », c'est-à-dire ceux que l'on peut construire à partir des polyominos. Pour ne pas être trop modélisant j'arrive avec une feuille de papier que je pose sur les polycubes trouvés et leur demande ce que c'est polycubes ont en commun, puis s'il existe d'autres configurations « plus originales ».

• Les élèves commencent tous pour la plupart à dénombrer les polycubes à 6 unités (alors que la consigne précise que l'on considère les polycubes de 1 à 5 cubes unité)… il y a 6 cubes posés sur la table par élève!

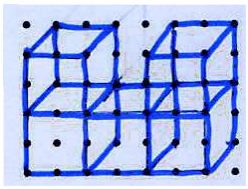
• Certains éprouvent des difficultés à reproduire les configurations de polycubes sur la feuille de papier pointé (la perspective cavalière n'ayant pas encore été revue et institutionnalisée). La question se pose : comment rendre compte, sur le papier des configurations trouvées qui sont par définition faites dans l'espace?

• Certains polycubes ne sont pas accessibles aux élèves… et pour cause : lorsque l'on dispose les cubes sur la table pour réaliser une configuration, la gravité empêche de considérer ce polycube (c'est le cas des pentacubes entourés dans la liste des pentacubes donnés en annexe 3).

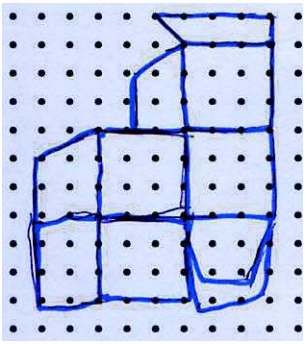
Ci-dessous quelques productions d'élèves (les dessins des élèves ont été repassés pour plus de lisibilité) :



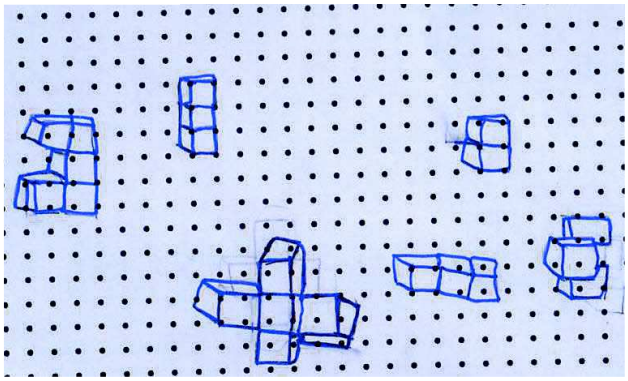
Un tracé montrant que la consigne initiale est mal comprise.

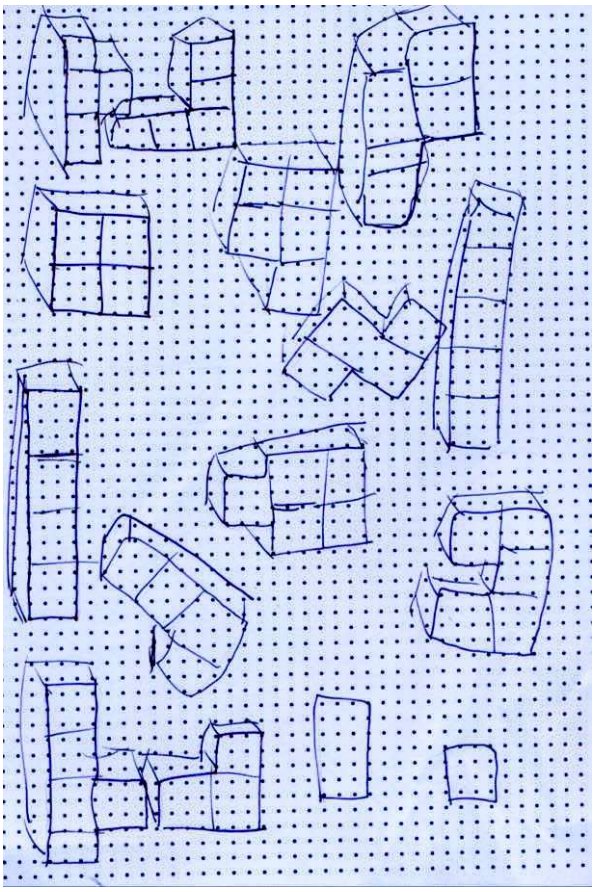


Cet élève s'est évertué à dessiner tous ses polycubes en transparence.

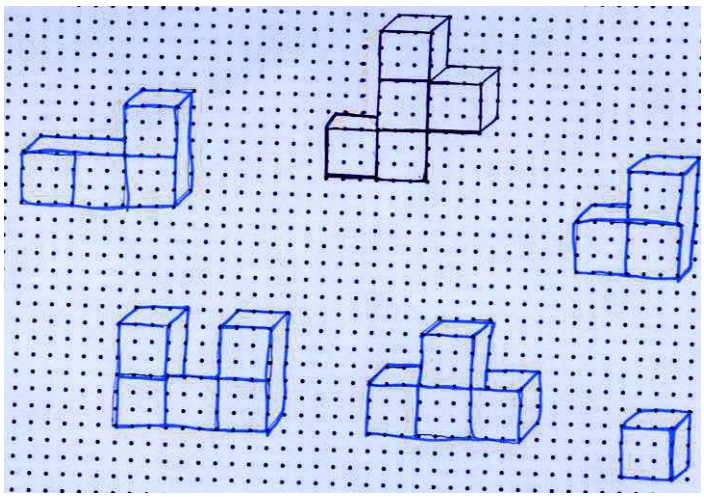


La représentation des polycubes aura posé beaucoup de problèmes à certains élèves.



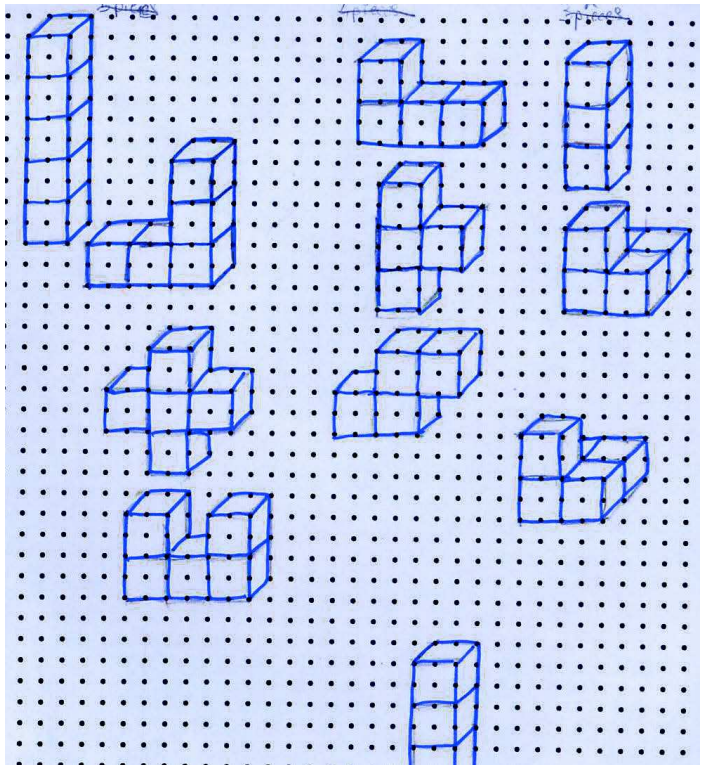


Une recherche active, au brouillon.



Des polycubes tous « plats ».

Une recherche plus structurée (l'élève avait commencé à organiser sa recherche en augmentant progressivement le nombre de cubes à considérer et indiqué cette information, avant de se raviser et rayer ses inscriptions « 3 pièces, 4 pièces et 5 pièces »).



Phase de débat et de synthèse: Un représentant de chaque équipe vient dessiner les polycubes trouvés (on utilise le vidéoprojecteur pour projeter une feuille de papier pointé au tableau). La question de la difficulté de dessiner les configurations trouvées se pose à nouveau et un élève vient montrer comment il dessine de manière à montrer « le relief » (la notion a été introduite en Arts plastiques).

Je coordonne le passage des équipes afin que celles n'ayant trouvé que peu de polycubes contribuent en premier, et les autres équipes viennent compléter les réponses apportées. La classe porte un regard très critique sur les réponses dessinées, notamment pour détecter les polycubes symétriques de polycubes déjà dessinés, ou discriminer des polycubes déjà dessinés sous une autre vue.

Se pose la question des polycubes à prendre en compte : doit-on compter ceux qui ont la même « forme » ? Pour la classe, des polycubes symétriques et/ou tournés l'un par rapport à l'autre ont la même forme.

Lors de la synthèse, j'oriente les échanges en posant des questions à la classe :

Y'a-t-il eu des stratégies particulières pour trouver les polycubes ? Des méthodes pour s'organiser et travailler en équipe ?

Globalement les élèves trouvent peu de polycubes différents mais les échanges ont été riches, sur la question du dessin des polycubes (et donc plus généralement de solides en 3 dimensions), sur la question des pistes et attitudes à adopter pour se donner plus de chances de trouver en cherchant. Ici :

• Etre sûr de bien avoir compris le problème, par exemple en échangeant avec les autres membres de l'équipe.

• Se répartir le travail et être sûr que l'on ne travaille pas sur la même question qu'un autre membre de l'équipe.

• Participer activement au travail de l'équipe, s'écouter et confronter ses idées, points de vue, sur un ton constructif : l'idée est que l'équipe soit performante et utilise les habilités de tous.

• Essayer, par le biais de la manipulation ou autre, de résoudre le problème pour des cas simples, que l'on connaît et progresser méthodiquement, étape par étape.

• Tenir une trace écrite des configurations trouvées, organisée.

Ensuite, pour clore l'activité, je leur demande s'ils sont capables de deviner combien de polycubes à 6 unités il est possible de former et leur montre la liste. J'insiste sur le fait que le fruit de leur travail lors de cette séance réside plus dans les échanges et les méthodes qu'ils ont dégagées lors de la synthèse que sur la recherche de polycubes en elle-même.

Pour finir, je leur propose des cubes de soma à résoudre (voir en annexe 3 une description du jeu) et leur propose de trouver une solution le plus rapidement possible pour maintenir l'émulation au sein des équipes puis de trouver le maximum de solutions différentes avant la fin de la séance.
Je demande à la classe comment on pourrait être sûr de ne pas reproduire des solutions déjà expérimentées : l'idée est émise de garder une trace de chaque solution.

3.3.3 Le nombre de segments possibles

Consignes et précisions:

Après un rappel de ce qui est attendu et des spécificités du travail qui va être mené (les élèves n'ont jamais eu une activité de ce type cette année mais ont été prévenu en amont), les élèves disposent rapidement les

tables en îlots (voir schéma de l'organisation de la salle ci-dessus), avec comme consigne de se regrouper en équipes avec les camarades avec qui ils aiment travailler. Le déplacement des tables occasionne toujours du bruit et une forme de dissipation. La classe est assez compliquée à gérer du fait d'un nombre important d'élèves avec des difficultés et/ou des problèmes de comportement et d'attention.

Je leur donne les sujets de l'activité (un chacun), des feuilles de brouillon et une feuille A3 (une par équipe). Un temps de recherche individuelle est demandé suivi d'une synthèse rapide, afin de lire l'énoncé et de s'assurer que tous ses termes sont compris, que le travail à faire est clair. J'insiste sur le fait que l'objectif est de trouver une stratégie, une logique pour répondre à la question 1 et que tout matériel pouvant les aider à résoudre le problème est autorisé. Il faudra ensuite, écrire, dessiner, expliquer sommairement et à sa convenance la ou les stratégie(s) adoptées par le groupe et les résultats obtenus sur la grande feuille A3.

Dévolution du problème et déroulement de l'activité de recherche :

G.Arsac et M.Mante le rappellent dans *Les pratiques du problème ouvert*, le professeur doit se cantonner au rôle d'animateur et être le moins modélisant et le plus neutre possible, renvoyer les questions aux élèves, mais cette posture est difficile:

> « Disons tout de suite que le gros écueil à éviter, c'est l'excès d'interventions. C'est une tentation à laquelle nous, enseignants, échappons difficilement. Pourtant, des interventions trop fréquentes peuvent difficilement laisser penser aux élèves que le professeur leur laisse réellement la responsabilité de la recherche d'une solution : ils auront vite tendance à penser que, trouver une solution, c'est, comme souvent, l'affaire du professeur. En fait, l'observation de ce qui se passe dans les groupes pendant ces séances de recherche montre que les interventions du professeur peuvent avoir des effets dont l'enseignant peut difficilement avoir conscience. » (G.Arsac et M.Mante, 2007)

Bien entendu, je n'ai pas pu échapper à cette tentation malgré moi, même en restant vigilant.

Certaines équipes (2 sur 6) constitués d'élèves majoritairement à l'aise et studieux se lancent immédiatement dans la recherche, et les membres des équipes réalisent de premiers schémas, qu'ils se soumettent et qui sont l'objet de débats. Les autres équipes, quelque peu désarçonnées par ce nouveau travail mais aussi peu rompues à l'effort (beaucoup d'élèves ne se lancent généralement pas d'eux-mêmes dans le travail, quel que soit sa nature) ne produisent que peu de traces, de réflexions et échangent sur tout à fait autre chose. En m'efforçant d'être le moins modélisant possible et en minimisant mes interventions, je leur signifie l'importance de se lancer dans la tâche et leur demande régulièrement où ils en sont, s'ils ont échangé leurs idées. Quelques élèves relient leurs points par des courbes et je les questionne sur la nature de ces liens en les renvoyant à l'énoncé du problème.

J'arrive ainsi, par des phrases neutres et une posture plus distante qu'à l'accoutumée, à mobiliser certains élèves et à motiver certains échanges. Il y a cependant des élèves qui ne s'engagent pas et ne produisent rien.

Majoritairement les élèves se lancent tous dans des dessins, partant d'un grand nombre de points et n'étudient que cette configuration, ne percevant pas la généralité de la situation. Certains élèves ont malgré tout l'idée de partir avec des dessins simples et peu de points et de raisonner en prenant petit à petit peu de points. Les équipes qui se lancent véritablement dans le travail et ont commencé à raisonner s'empressent d'attendre ma validation. Je me contente de renvoyer les questions à l'équipe entière. Mes réponses sont courtes et peu modélisantes, ce qui génère un peu de frustration chez certains élèves. Je leur explique rapidement et à nouveau l'objectif de la démarche.

Productions des élèves :

Mis à part deux équipes qui ont vraiment fait un travail de synthèse sur la feuille A3 pour expliquer leur démarche, la classe a négligé ce travail. On trouvera dans les images ci-dessous des scans à la fois des feuilles de brouillon et des feuilles de rendu A3. Les productions ne sont pas toujours évidentes à analyser.

Les difficultés rencontrées par les élèves résident, d'après mon analyse :

• dans la compréhension du problème dans sa globalité et du nombre de points mentionnés dans l'énoncé comme une indéterminée. Il est difficile pour certains de s'engager dans la production de quelques figures qui illustrent ce caractère indéterminé du nombre de points pris en compte.

• dans les dessins des figures qui rendent le comptage des segments difficile et entretiennent la confusion lorsque le nombre de points augmente

• le parti pris de s'engager dans une configuration avec un nombre de points déjà important

• la question additionnelle, « de trouver le plus petit nombre de points nécessaires pour obtenir 10 000 segments », est difficile et accessible uniquement après avoir pensé au tableur ou à une résolution (guidée par un logiciel de calcul formel) d'équation

• la difficulté de rédiger un compte-rendu de recherche, même avec une rédaction très réduite, pour expliquer les démarches entreprises par l'équipe

Les points intéressants dans les productions illustrées :

• les traces d'authentiques recherches, éventuellement infructueuses (figure 1 et 1')

• l'usage des couleurs pour montrer les segments additionnels lors du passage d'une configuration d'un nombre de points donnés à la suivante sur une même figure (figure 2)

• l'usage de couleurs et d'un « codage » pour s'aider lors du comptage des segments (figure 3)

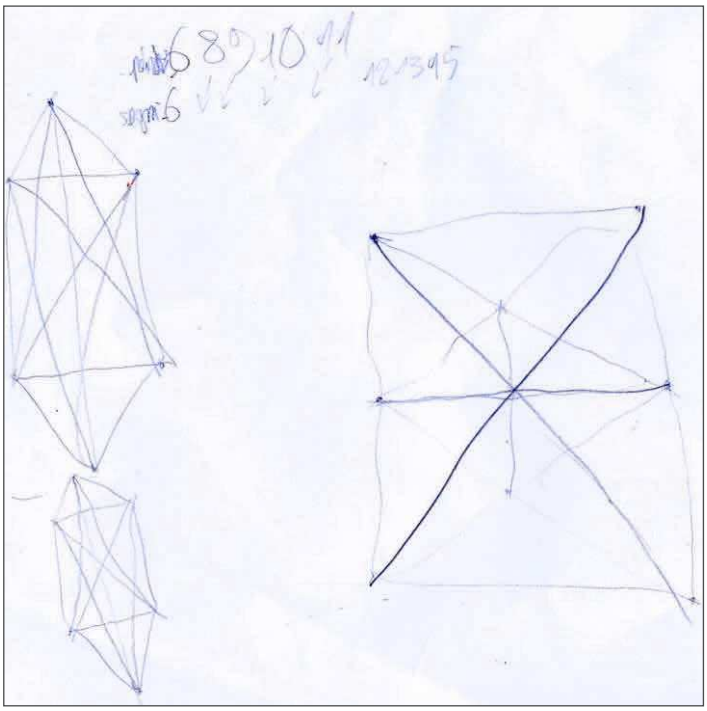
• le début de la recherche sur des configurations simples, en augmentant peu à peu le nombre de points (figures 4 et 5)

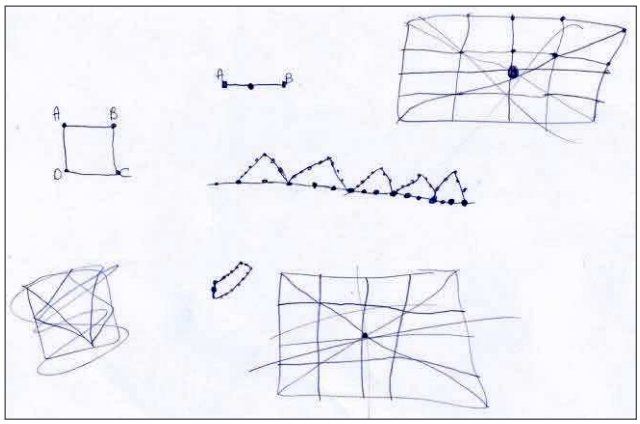
• la production d'écrits destinés à expliquer la démarche (figure 6 et 6')

• l'organisation des résultats sous forme de tableaux (figure 7)

• des tentatives infructueuse et plus surprenant, fructueuse d'exprimer le nombre de point par une expression littérale, en choisissant de désigner le nombre de points considérés par une lettre (ici x dans la figure 8)

• deux équipes qui résolvent le problème et s'engagent pour répondre à la question additionnelle (figure 6, 6' et 7) en étant proches de la résoudre.





Figures 1 et 1' : des recherches infructueuses mais réelles

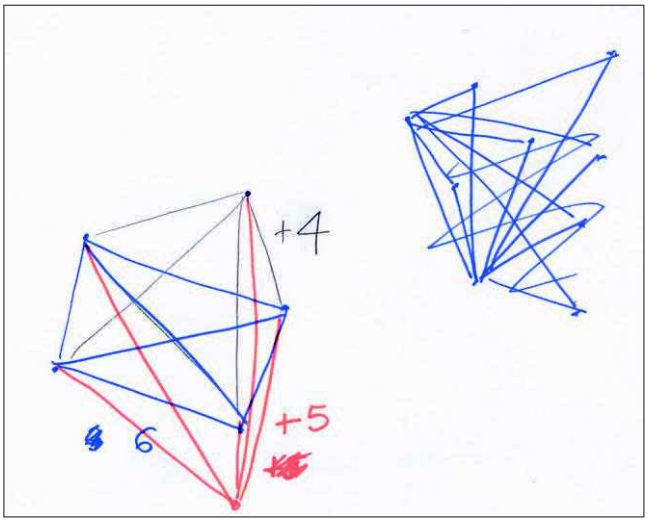


Figure 2 : Une stratégie de comptage sur 3 configurations différentes à partir d'une même figure, avec l'aide de couleurs.

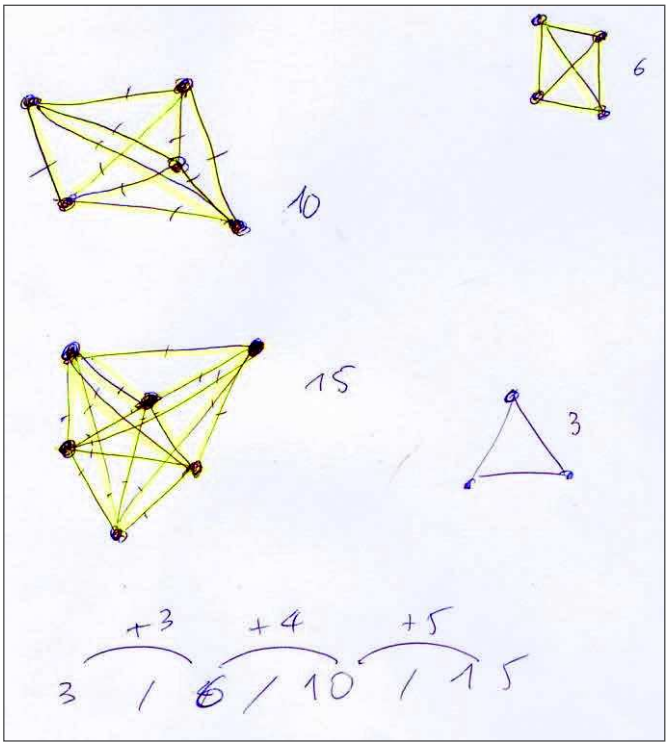


Figure 3 : Une stratégie de comptage sur 4 configurations simples et consécutives sur des figures différentes, avec l'aide de couleurs et d'un « codage » pour compter.

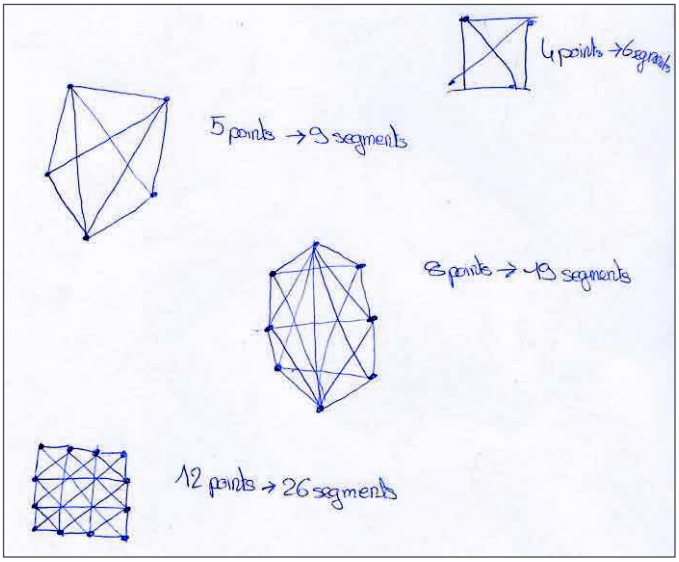


Figure 4 : Une stratégie de comptage organisée avec l'étude de configurations simples et consécutives (en partie erronée).

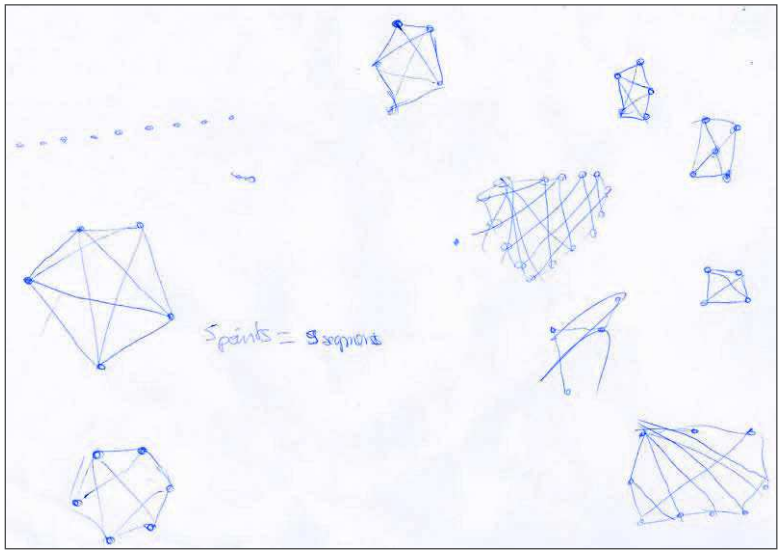
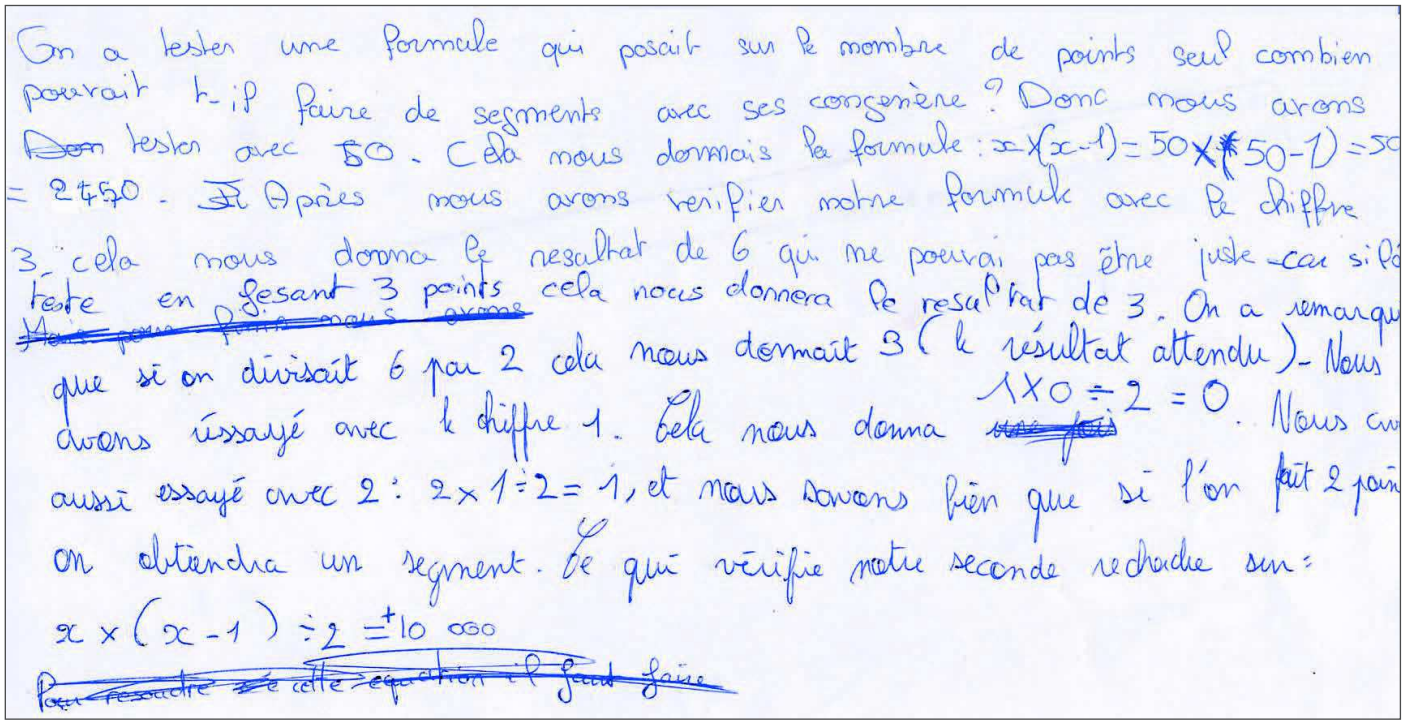


Figure 5 : Une stratégie de comptage sur des configurations simples et consécutives.

Figure 6 : Une rédaction un peu confuse, expliquant la démarche employée pour l'obtention d'une formule permettant de quasiment répondre au problème. On trouve pour ce groupe l'idée de tester la formule qui est proposée sur des configurations simples pour tester sa validité. La réponse à la question additionnelle peut être apportée moyennant la résolution de l'équation donnée (par exemple avec un logiciel de calcul formel).



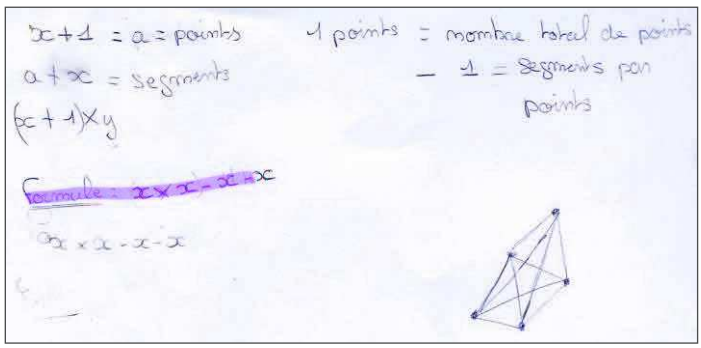


Figure 6' : On peut peut-être trouver l'origine de la formule trouvée dans cette recherche sur le brouillon. Le travail récent sur le calcul littéral a visiblement trouvé écho dans les recherches de cet élève.

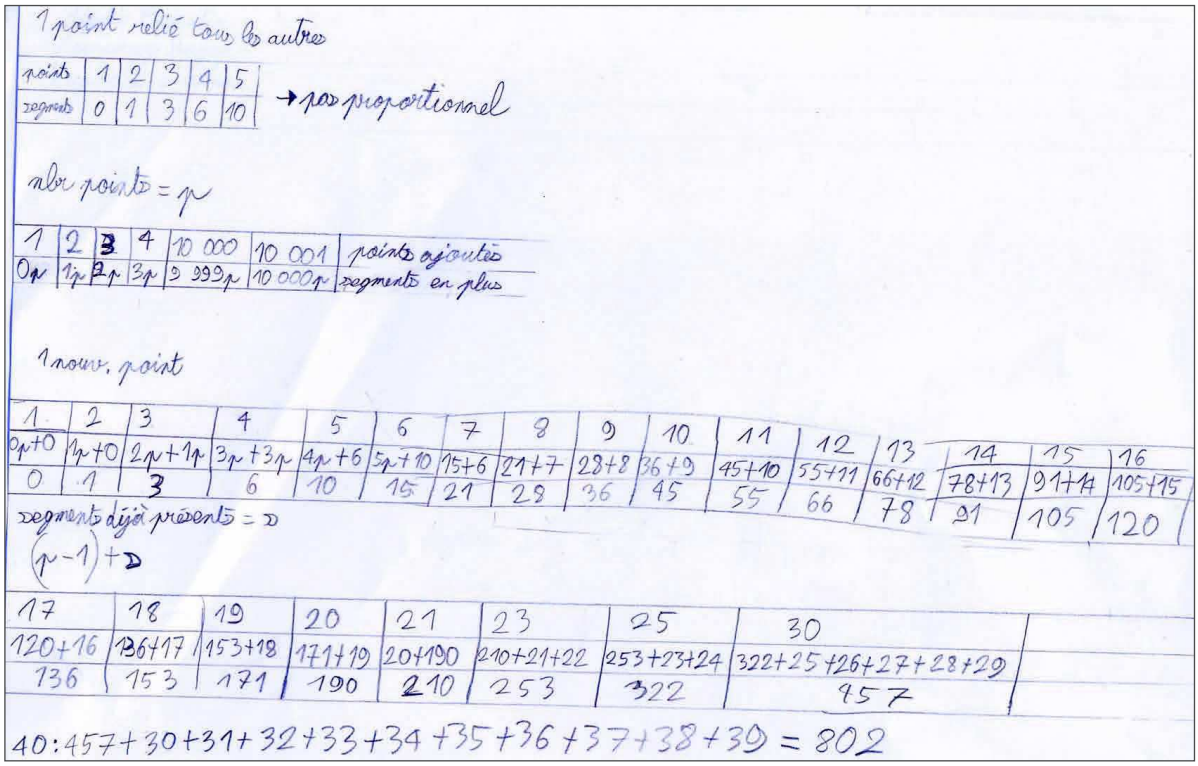


Figure 7 : Un exemple de raisonnement organisé à l'aide de tableaux qui conduit à la demande par cette équipe du tableur (en fin de séance malheureusement). L'équipe a, par réalisation de figures simples sur des configurations croissantes de points, retranscrit ses résultats dans un tableau et perçu la logique du dénombrement. Cela amène cette équipe à être très proche de la solution (ou même à obtenir la solution si le nombre de segments de la deuxième question avait été moins important). Avec deux élèves très à l'aise dans cette équipe, il a fallu s'assurer que les deux autres membres avaient pu participer aux recherches et compris ce que proposaient leurs camarades.

Phase de débat :

Lors de cette phase, mon objectif était, conformément aux préconisations faites par G.Arsac et M.Mante, d'intervenir le moins possible et que les élèves exposent leurs travaux et débattent avec un minimum d'intervention de ma part. Je voulais que la responsabilité du débat leur incombe naturellement et utiliser à bon escient l'esprit de contradiction et de compétition dont ils font preuve naturellement (tout en restant garant de la qualité du débat et du respect, de l'écoute de la parole d'autrui).

Les élèves n'ont pas ou que très peu rédigé sur les feuilles de compte-rendu. Le but était, après un premier temps de relecture de leurs travaux (pour s'en imprégner à nouveau, la séance de recherche remontant à quelques jours), de restituer les résultats ou avancées faites sur la question par l'équipe et de les confronter, de les comparer à celles faites par les autres. Ils n'ont pas produit à l'issue de la première séance de véritable compte-rendu comme attendu, alors l'exercice n'était pas évident.

J'ai fait intervenir les groupes les uns après les autres, en veillant à ce que l'ordre de passage soit fonction de l'avancement du groupe sur la question, afin que les groupes n'ayant que peu progressé ne soient pas découragés et restent actifs dans les échanges.

Les premiers groupes, par les faibles recherches qui ont été faites, n'apportent que peu de richesse au débat. J'interviens à ce moment pour faire valoriser à la classe ce qui est fait au maximum (quantité de recherche, organisation, codage), et leur faire exhiber les procédures intéressantes.

Un élève de la classe intervient pour signaler la difficulté de compter les segments correctement lorsque le nombre de points considérés devient trop important. La classe exhibe quelques erreurs et un élève propose de lister les premiers résultats (0, 1, 2, 3, 4, 5 segments).

C'est alors que les deux dernières équipes entrent en scène.

La première est celle qui a, après un travail de recherche au brouillon, déduit la logique permettant étapes après étapes de trouver le nombre de segments obtenus. Son travail est résumé sous forme de tableau (très organisé). Elle présente une première conjecture fait, quant à l'éventuelle proportionnalité entre le nombre de segments constructibles et le nombre de points, et le fait que cette hypothèse, après vérification, ait été rejetée (la vision d'un tableau, au collège, est souvent associée à l'hypothèse de la proportionnalité !). J'interviens à ce niveau pour valoriser ce travail de conjecture/réfutation : cette conjecture invalide est déjà un résultat en soit, et il est intéressant d'avoir testé cette approche. Ensuite, ils présentent leur raisonnement qui est de dire qu'en rajoutant un nouveau point aux n points déjà présents, on se donne la faculté de créer n segments supplémentaires. Cette logique est exploitée pour, de proche en proche, déduire le nombre segments constructibles étape après étape. A ce stade, le but est de répondre à la question subsidiaire du nombre de points suffisants pour construire 10 000 segments ! J'interviens pour demander à la classe ce qu'elle pense de cette façon de faire et rebondi sur la différence avec les dessins : les dessins sont souvent indispensables au raisonnement mais ensuite celui-ci est plus puissant et efficient qu'une démarche graphique. J'envoie un des élèves utiliser le tableur (à sa demande) et montrer le nombre de points nécessaires (142).

La dernière équipe s'est rapidement donné pour objectif d'établir une formule et leur raisonnement se construit autour de cette idée. Ils n'ont pas décidé de raisonner à partir de figures simples et d'en déduire une suite. Ils ont raisonné en disant que si l'on dispose de x points, chacun d'entre eux forme avec ses $(x-1)$ « congénères » (expression utilisée par l'équipe) $(x-1)$ segments. Ils ont ensuite l'idée de tester leur formule sur un nombre de points donné (un grand nombre : 50) et ensuite un nombre plus petit (3) et constatent le problème. Ils décident d'ajuster leur formule en divisant par 2 (mais n'explique pas pourquoi). Je reprends la main temporairement pour souligner l'usage du contre-exemple : un exemple suffit à montrer qu'une propriété n'est pas vérifié, mais pas à la démontrer pour toute valeur. Je valorise leur démarche et leur demande d'expliquer le sens de cette division par 2 : leur but était de retrouver le fait que 3 segments sont constructibles à partir de 3 points. Je prends la parole pour rendre plus accessible à la classe (après avoir tenté d'interroger d'autres équipes pour le faire) la démarche employée par cette équipe : si l'on dispose de x points, chacun d'entre eux forme avec ses $(x-1)$ « congénères » $(x-1)$ segments. Cependant, chaque segment risque d'être compté deux fois, c'est le sens de cette division par 2. Il y a donc $x \times (x-1) \div 2$ segments constructibles à partir de x points. Je valorise la mise en équation qui est faite par l'équipe qui elle aussi s'est engagée dans la question subsidiaire, en expliquant qu'au niveau du collège on ne sait pas résoudre ce type d'équation, mais que les logiciels de calcul formel le permettent.

Je salue le travail qui a été fait par les équipes.

Partie 4

4 Conclusion

4 Conclusion

4.1 Bénéfices de la pratique d'activité de recherche

Outre les arguments didactiques et pédagogiques avancés dans mon propos lors des précédentes parties, j'ai ressenti un certain plaisir lors de la pratique de ce type d'activité. Les élèves aussi apprécient généralement ce moment différent et leurs retours sont très encourageants.

• Concernant l'activité de recherche de polyominos menée avec les 6èmes, elle a visiblement beaucoup plu, et je pense que les objectifs fixés sont atteints. L'intérêt d'une recherche initiale prise en compte dans les activités suivantes (ici la détermination des pièces du puzzle pour le construire ensuite) m'apparaît très bénéfique et porteuse de sens et permet aux recherches de vivre, en fil rouge, sur un certain temps.

Les élèves participent avec beaucoup d'enthousiasme aux échanges lors du débat et trépignent d'impatience pour aller dessiner les figures trouvées. Cet enthousiasme manifeste se retrouve également lors de la résolution du puzzle construit à partir de la recherche et certains élèves s'attachent même à repartir avec un jeu complet pour le soumettre à leurs parents ! J'ai également le droit à des remarques directes très positives des élèves sur le plaisir qu'ils ont pris à faire le travail (recherche de polyominos et puzzle).

• L'activité de recherche de segments menée quant à elle avec les 4èmes, a également, par son ouverture sur les approches utilisables et son apparente simplicité bien plu aux élèves. Certains élèves ont apprécié le fait d'être valorisés, à travers leurs recherches projetées au tableau et les arguments donnés par la classe pour saluer les réussites. Même si, nous le verrons par la suite, j'ai quelques réserves sur l'activité, je pense qu'une partie des objectifs sont atteints : les élèves se sont globalement lancés dans l'activité, ont testé, expérimenté et débattu des résultats et de procédures de résolution ou du moins de recherche différentes. Les équipes se sont attachées à valoriser les points positifs et isoler d'autres aspects pouvant être traités différemment (notamment sur des arguments méthodologiques). Au regard des exigences du programme vis-à-vis du travail sur les compétences et des domaines du socle, l'activité recèle beaucoup d'intérêt et encore une fois, peut-être prolongée par exemple par un travail sur le tableur et avec des logiciels de calcul formel pour résoudre des équations que les élèves n'ont pour le moment pas la possibilité de résoudre.

Pour gagner en qualité d'enseignement, l'usage de ces activités de recherche me semble nécessaire. Si la définition des problèmes ouverts au sens de G.Arsac et M.Mante exclut leur lien explicite avec le programme, il n'est pas interdit de s'inspirer des bénéfices de cette approche, de la gestion particulière de cette activité, pour faire vivre l'activité de recherche plus fréquemment au sein de la classe, pour mener des activités d'approche ou des séances destinées à travailler une certaine modalité de l'activité mathématique (notamment numérique). Des séances de ce type sont tout à fait pertinentes pour motiver un travail sur la méthodologie, l'organisation, la collaboration avec les pairs, des compétences transversales et transférables.

• L'activité de recherche des polycubes, menée avec les 5èmes, illustre bien ce propos : les lacunes qu'ont constaté les élèves vis-à-vis des moyens de représenter les solides de l'espace lors de la séance motivera d'autant plus l'apprentissage (ou le perfectionnement) de la perspective cavalière. La séance et ses modalités nouvelles de travail, a je pense, bien plu aux élèves, même si ici encore j'ai quelques réserves que j'exprimerai dans la suite de mon propos.

G.Arsac et M.Mante le décrivent très bien dans *Les pratiques du problème ouvert* : l'exercice pour le professeur d'adopter une posture de retrait et de réserve, se contentant d'assurer la dévolution du problème et l'animation de la séance, répondant aux questions par des questions et intervenant le moins possible est difficile. Je pense d'ailleurs ne pas avoir toujours réussi à vraiment m'inscrire dans cette posture, malgré une

vigilance constante, y compris en dehors de ces temps d'expérimentation : je m'astreins personnellement à être le moins modélisant possible et à faire en sorte que les réponses viennent des élèves lors de leurs échanges (le travail avec mon tuteur cette année m'ayant notamment permis d'être particulièrement attentif sur ce point). Cependant, cette posture de retrait offre un recul appréciable sur l'activité réelle des élèves, l'état de leurs connaissances et des procédures mobilisables par eux. Elle permet d'observer plus finement leur fonctionnement en équipes, leurs échanges et affinités, et de partir de leurs connaissances et compétences.

Certains élèves en difficulté trouvent parfois, dans ces modalités différentes de travail, une nouvelle chance d'être valorisés : je l'ai constaté en particulier avec quelques-uns de mes élèves de $6^{ème}$ et de $5^{ème}$.

Menées régulièrement au cours de l'année, des séances de recherche sont également l'occasion de diversifier les modalités de travail en mathématiques, briser la monotonie et continuer à surprendre les élèves (l'aspect ludique de l'objet d'étude contribuant beaucoup à cet objectif). Une étude à une plus grande échelle et sur une plus grande période permettrait d'estimer plus rigoureusement les bénéfices de cette pratique, mais elle s'inscrit parfaitement dans les préconisations du programme pour faire vivre les mathématiques avec les élèves.

4.2 Des questionnements et axes d'amélioration

Tout d'abord, il n'est pas évident de trouver des problèmes qui se prêtent à cette pratique, des problèmes vraiment ouverts, notamment sur les procédures de résolution qui sont mobilisables par les élèves (cette richesse est le garant du succès de la phase d'échanges qui suit la phase de recherche). On peut, en plus des énoncés donnés en annexe 4, trouver des idées dans les banques d'exercices P.I.S.A (items libérés), dans les sujets de concours Kangourou ou de rallyes, etc.

Il m'est apparu que la contrainte de devoir rédiger ou dessiner au propre un compte-rendu ou un document pour mener la synthèse-débat avec la classe, que je pensais minime et secondaire, ne l'était pas tant que ça. Les élèves n'ont soit pas le temps, soit pas la motivation de faire ce travail au moment de la recherche, et lorsqu'il est réalisé, c'est bien souvent par un élève consciencieux qui se charge de cette tâche. Il y a, à mon avis, soit à différer ce moment lors d'une autre séance, soit à trouver une nouvelle modalité pour garder une trace des recherches (lecteurs MP3 pour garder les échanges et arguments, appareils photos numériques pour garder une trace des expérimentations (par exemple avec les configurations de polycubes)) et les exploiter lors du débat.

Pour optimiser le travail des équipes, une autre piste consiste à désigner des rôles pour chacun des membres : un élève secrétaire (qui prend en note les arguments, idées, solutions trouvées), un élève communicateur (qui est le seul à pouvoir poser une question au professeur), un élève présentateur (qui sera chargé de présenter le fruit des recherches), un régulateur (qui a pour fonction de s'assurer que l'équipe travaille ensemble et qu'elle mène à bien ses objectifs : temps de recherche, temps de rédaction de l'affiche/du compte rendu).

Le moment du débat est souvent dur à mener, les élèves ayant rapidement la fâcheuse tendance de ne plus s'écouter et de ne plus participer. Il est peut-être trop long ou doit être mené différemment. Il est possible d'imaginer, au lieu d'une séance de débat assez longue, une activité en fil rouge sur une semaine par exemple, où, après la séance dédiée au temps de recherche, les élèves auront rapidement, par équipes et à chaque début de séance à présenter le fruit de leur travail. La question vivra dans l'esprit des élèves sur un temps plus grand et soutenir l'attention et débattre sera peut-être moins difficile sur des périodes plus courtes.

Autre observation : le rôle non négligeable joué par l'utilisation de dessins ou croquis lors des phases de recherche. Poser sa réflexion sur le papier est bien souvent, en mathématiques comme dans d'autres disciplines, nécessaire l'élaboration d'une réflexion et d'un raisonnement, nécessaire pour trouver des idées. A l'issue de ces activités avec les élèves (que cela soit pour les dénombrements de polyominos, de polycubes, ou de segments) il m'est apparu que les conditions dans lesquelles se déroulait cette phase de dessin conditionnaient la richesse des résultats. Par exemple, pour dénombrer les segments constructibles à partir de n points, les élèves ont tendance à choisir n assez grand : dès n=6 ou 7 par exemple, la figure est confuse et sans organisation, il est difficile de dénombrer correctement ces segments. Une figure mieux organisée, peut-être plus régulière peut être plus favorable à un meilleur dénombrement. Des dessins progressifs, avec une itération du nombre de points à chaque dessin, le sont aussi. Pour le cas des polycubes, le papier pointé (peut-être trop contrasté) semble conditionner certains élèves à dessiner des polycubes « plats » et constituer un obstacle pour imaginer des polycubes « non plats ». L'utilisation de cubes en bois semble amener les élèves à ne pas considérer des formes qui, du fait de la gravité, ne pourraient être montrées avec les cubes. Pour les polyominos, les élèves avaient à leur disposition des feuilles blanches, ce qui me semble-t-il a amené une plus grande richesse de formes. Il est alors légitime de se demander dans quelle mesure la réalisation de dessins, de croquis, l'utilisation d'un dispositif particulier pour expérimenter, rendre compte, impacte la richesse et la qualité des débats (et des représentations mentales que se font les élèves). Des activités permettant des manières de chercher et d'expérimenter (mais aussi des manières noter et organiser les résultats) multiples et variées pourraient peut-être permettre d'accéder à des représentations et des points d'entrée dans le problème différents et dès lors, permettre une plus grande richesse lors du débat et de la synthèse, puisque les équipes n'auront pas toutes partagé la même expérience.

Les activités que j'ai choisies, autour du dénombrement de polyominos et polycubes, ne sont peut-être pas assez propices à un authentique débat scientifique, permettant par exemple de faire intervenir la classe sur les notions de preuve mathématique de propriétés, d'exemples et de contre-exemples, sur le plan du raisonnement, comme a pu l'être l'activité de dénombrement de segments. Toutefois, elles ont eu le mérite d'engager fortement les élèves et de pouvoir faire émerger les questions de symétrie et de rotation lors de la prise en compte des formes. Trouver des activités de recherche qui rendent la phase de débat particulièrement riche, notamment sur le plan de la démarche scientifique et des arguments mathématiques en jeu serait l'idéal.

L'activité de recherche au sein de la classe revêt ainsi un intérêt majeur dans le cadre de l'enseignement des mathématiques et de la formation de l'élève, et je compte lui donner, dans les années à venir, et peut être avec d'autres modalités, une grande importance au sein de mon action.

5 Bibliographie

A.Grothendieck. 1986. *Recoltes et Semailles: Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien.* 1986. consultable en ligne : http://lipn.univ-paris13.fr/~duchamp/Books&more/Grothendieck/RS/pdf/RetS.pdf.

B.O.E.N. 2015. Annexe 3 Programme d'enseignement du cycle des approfondissements (cycle 4). *Le Bulletin Officiel de l'Education Nationale.* [En ligne] Education Nationale, 2015. http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717. NOR : MENE1526483A.

C.Laborde. 1989. Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes de la 13° Conférence Internationale PME Psychology of Mathematics Education.* 1989.

Chevallard. 1986. Les programmes et la transposition didactique - Illusions, contraintes et possibles. 1986, n°352, pp. 32-50.

Combes, Marcel. Pentaminos. *ac-amiens.fr.* [En ligne] Math&Tice. http://maths.ac-amiens.fr/201-pentaminos.html.

D.Grenier. 2012. Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *educmath.* [En ligne] 2012. http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-grenier.

Descaves, Alain. 2008. *Le manuel Mathématiques du Professeur des Ecoles.* [éd.] Hachette. PARIS : s.n., 2008. p. 9. ISBN 978-2-01-171116-8.

DGESCO-IGEN-IREM. Mathématiques et Quotidien. *Eduscol.* [En ligne] http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ressources_transversales/99/8/RA16_C3_C4_MATH_math_et_quotidien_600998.pdf.

Dorbec. 2007. *Thèse : Empilements et recouvrements.* [éd.] Université Joseph Fourier. Grenoble : s.n., 2007.

Eduscol. 2016. Modalités d'attribution du diplôme national du brevet. *Eduscol.* [En ligne] 2016. http://eduscol.education.fr/cid98239/modalites-d-attribution-du-diplome-national-du-brevet.html. NOR : MENE1609352N.

—. 2017. Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4). *Eduscol.* [En ligne] 2017. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/12/5/RA16_C4_MATH_chercher_552125.pdf.

—. 2017. Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4). *Eduscol.* [En ligne] 2017. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/ressources_transversales/93/8/RA16_C4_MATH_types_de_taches_547938.pdf.

F.Cauchi-Bianchi. 2012. Le statut de l'erreur, Intervention formation de formateurs. *Site de Lettres de l'Académie de Nice.* [En ligne] 2012. http://www.ac-nice.fr/lettres/index.php/graines-a-semer/139-le-statut-de-l-ereur-dans-la-classe-et-pour-les-apprentissages.

F.Pluvinage. 1993. Didactique de la résolution de problèmes. *Petit'x.* 1993, n°32.

G.Arsac et M.Mante. 2007. *Les pratiques du problème ouvert.* Lyon : SCEREN-CRDP Académie de Lyon, 2007. p. 20. 978-2-86625-334-9.

—. 2007. *Les pratiques du problème ouvert.* Lyon : SCEREN-CRDP de l'Académie de Lyon, 2007. p. 28. ISBN : 978-2-86625-334-9.

—. 2007. *Les pratiques du problème ouvert.* Lyon : SCEREN-CRDP de l'Académie de Lyon, 2007. p. 11. 978-2-86625-334-9.

—. 2007. *Les pratiques du problème ouvert.* Lyon : SCEREN-CRDP de l'Académie de Lyon, 2007. p. 32. ISBN 978-2-86625-334-9.

G.Bachelard. 1993. *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance.* Paris : Librairie Philosophique Jean Vrin, 1993. 2-7116-1150-7.

—. 1934. *Le nouvel esprit scientifique.* 2013. s.l. : Puf, 1934. 2130576559.

G.Brousseau. 1986. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques - Recherche en didactique des mathématiques. [éd.] La Pensée Sauvage. *RDM* . 1986, Vol. 7/2.

—. 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. [éd.] La pensée sauvage. *RDM.* 1983, Vol. 4/2.

G.Vergnaud. 1977. Activité et connaissance opératoire. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques (APM).* 1977, n°307.

Grenier. 2009. Deux exemples de situations de recherche pour la classe. *IREM Université Joseph Fourier, Grenoble.* [En ligne] 2009. www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/sirc_paf_200fd7f.pdf.

IREM-Paris-7. 2002. *Expériences de narration de recherche en mathématiques.* [éd.] Les Editions du Kangourou- IREM Paris 7. 2002. p. 5. 2-87694-100-7.

J.Brun. 1990. La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Maths Ecole.* 1990, n°141.

J.Piaget. 1967. *Biologie et Connaissance: essai sur les relations entre les régulations organiques et les processus cognitifs.* Paris : Gallimard, 1967.

—. 1988. *De la pédagogie.* [éd.] Editions Odile Jacob. Collection Pédagogues & Pédagogies. Paris : Presse Universitaire de France, 1988. 2738105483.

—. 1950. Le Droit à l'Éducation dans le Monde actuel. [éd.] Gallimard (collection Folio essai) n°104. *Les Droits de l'esprit: six études sur les aspects culturels de la Déclaration universelle des droits de l'homme.* Librairie du Recueil Sirey, 1950, p. 38. disponible au téléchargement : http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001284/128482fo.pdf.

Johsua Samuel et Dupin Jean-Jacques. 1993. *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* [éd.] PUF. Collection 1er Cycle. Paris : s.n., 1993.

Larousse. mathématiques. *Larousse.* [En ligne] Larousse. http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/math%C3%A9matiques/49860.

Piaget. 1998. *De la pédagogie.* [éd.] Editions Odile Jacob. 1998. p. 164. 2-7381-0548-3.

Plutarque. *Comment écouter.* [trad.] Pierre Maréchaux. s.l. : Rivage. p. 67. Vol. n°150. 2-86930-890-6.

Polyominoes - Puzzles , Patterns, Problems and Packings. **S.W, Golomb. 1994.** Princeton : Princeton Science Library, 1994.

R.Charnay. 1988. Apprendre (par) la résolution de problèmes. [éd.] IREM de Grenoble. *revue Grand N.* 1988, n° 42, p. 22.

R.Douady. 1983. Rapport enseignement apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres. *Cahiers de didactique.* 1983, n°3, p. 19.

Vygotski et Piaget. 1985. *Pensée et langage.* [éd.] La_Dispute. [trad.] Françoise Sève. 4ème Edition. 1985. pp. 204-205. ISBN 2843032334.

Vygotski, J.-P, Schneuwly B. et Bronckart. 1985. *Vygotsky aujourd'hui, coll. Textes de base en psychologie.* [éd.] Delachaux et Niestlé. Neufchâtel : s.n., 1985. ISBN: 2-603-00576-7.

Xypas. 1997. *Piaget et l'éducation.* s.l. : Presse Universitaire de France, 1997. pp. 42-43. Vol. n°17, Pédagogues et Pédagogies. ISSN 1255-2488.

—. 1997. *Piaget et l'éducation.* Collection Pédagogues & Pédagogies. s.l. : Presse Universitaire de France, 1997.

6 Annexes

6.1 Annexe 1 : Description détaillée des Compétences Mathématiques travaillées au cycle 4

(Extrait du document : Programmes pour les cycles 2, 3 et 4, *Bulletin officiel spécial* n°11 du 26 novembre 2015, 2015, p.368-369)

▶ **CYCLE 4** MATHÉMATIQUES

Compétences travaillées

Chercher

» Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances.

» S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.

» Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.

» Décomposer un problème en sous-problèmes.

Domaines du socle : 2, 4

Modéliser

» Reconnaître des situations de proportionnalité et résoudre les problèmes correspondants.

» Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple, à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).

» Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique.

» Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).

Domaines du socle : 1, 2, 4

Représenter

» Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.

» Produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.

» Représenter des données sous forme d'une série statistique.

» Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides (par exemple, perspective ou vue de dessus/de dessous) et de situations spatiales (schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques, photographies, plans, cartes, courbes de niveau).

Domaines du socle : 1, 5

Raisonner

» Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.

» Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.

» Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.

» Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

Domaines du socle : 2, 3, 4

Calculer

» Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).

» Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements.

» Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.).

Domaines du socle : 4

Communiquer

» Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française.

» Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

» Vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes.

Domaines du socle : 1, 3

6.2 Annexe 2 : Sujet de l'activité « Polyominos »

6e Travail en accompagnement personnalisé

POLYOMINOS

Le mot « **Polyomino** » est un mot inventé et construit à partir de deux termes :

- « ***Poly*** », qui signifie « plusieurs », comme dans les mots « polygone » (plusieurs côtés) et « polyèdre » (plusieurs faces)
- « ***Mino*** », en référence aux « dominos ».

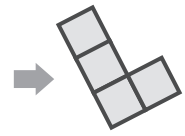
Un polyomino est un assemblage d'un certain nombre de carrés identiques disposés dans n'importe quel ordre en les juxtaposant le long de leurs côtés, mais pas en diagonale.

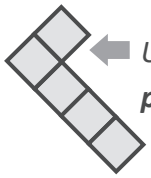
- Un **mono**mino est constitué d'un seul carré.
- Un **duo**mino ou domino est constitué de deux carrés identiques.
- Un **trio**mino est constitué de …… carrés identiques.
- Un **tetra**mino est constitué de …… carrés identiques.
- Un **penta**mino est constitué de …… carrés identiques.

… et ainsi de suite, pour les autres assemblages de carrés identiques en plus grand nombre, en utilisant les préfixes adaptés.

Exemples :

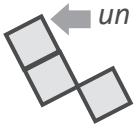
*un exemple de **tetra**mino*





*Un exemple de **penta**mino*

Ceci n'est pas un polyomino



Partie A **Travail sur la feuille de brouillon (à rendre avec le sujet) : « *Attrapez-les tous !* »**

Le travail à faire dans cette partie consiste à chercher **sur le brouillon tous les polyominos possibles** au sein de ces familles de polyominos : **monomino**, **dominos**, **triominos**, **tetraminos**, **pentaminos**.
Donner 5 exemples d'hexaminos et 5 exemples d'heptaminos.

Partie B **Travail sur la feuille quadrillée (à rendre avec le sujet) :**

Le travail de cette partie consiste à mettre en commun vos résultats et à **les reproduire au propre (au crayon gris et à la règle) sur la feuille quadrillée fournie avec l'énoncé**.

Partie C **Travail sur le tableau fourni (à rendre avec le sujet) :**

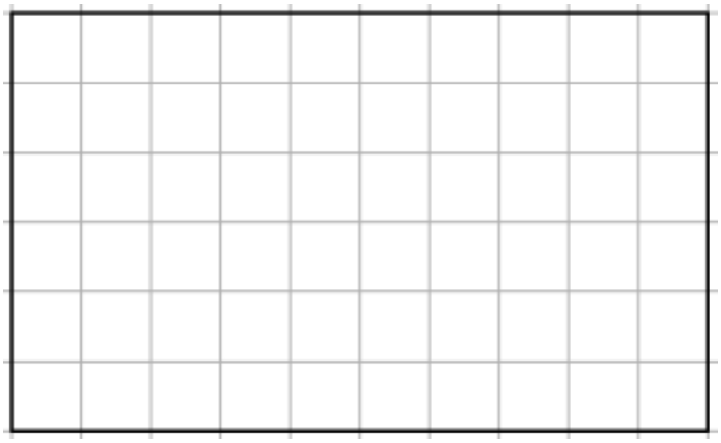
Le travail de cette partie consiste à **classer, dans chaque famille, les polyominos par nombre de sommets** et à déterminer leur nombre de côtés, leur périmètre et leur aire.

Exemple : une des lignes du tableau a été remplie pour le tetramino suivant

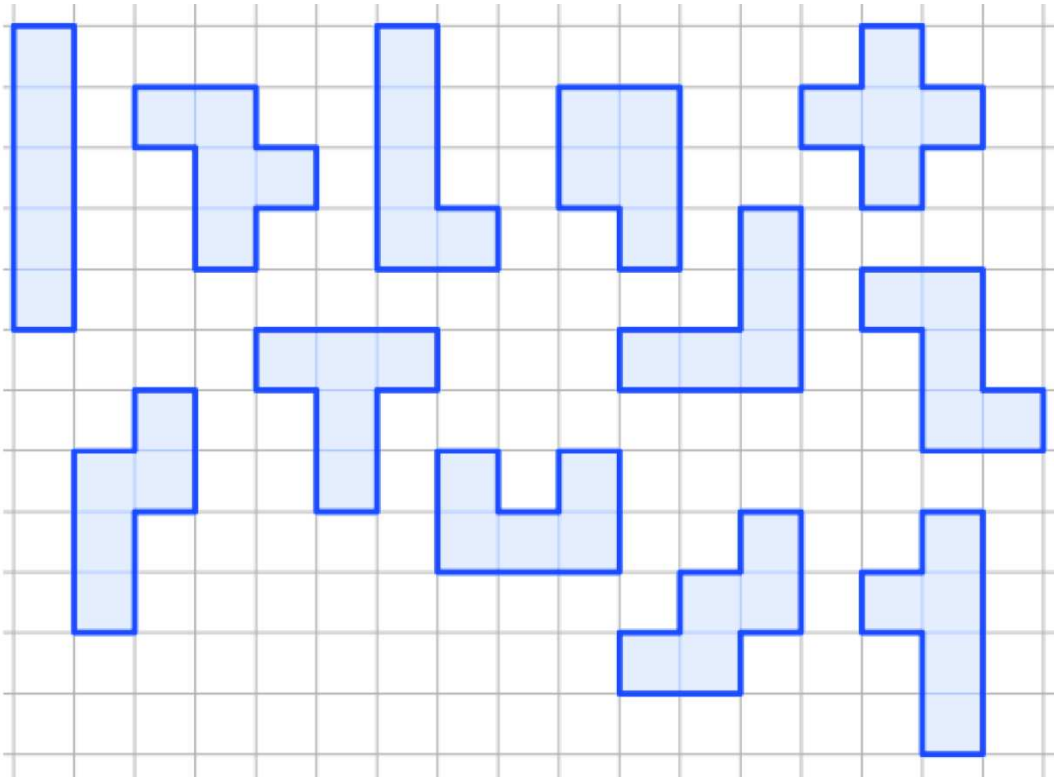
Inspiré d’un sujet de Marcel COMBÈS

Type de polyomino	Croquis <u>rapide</u> du polyomino	Nombre de sommets	Nombre de côtés	Périmètre	Aire
MONOMINO					
DOMINO					
TRIOMINO					
TRIOMINO					
TETRAMINO		*6*	*6*	*10*	*4*

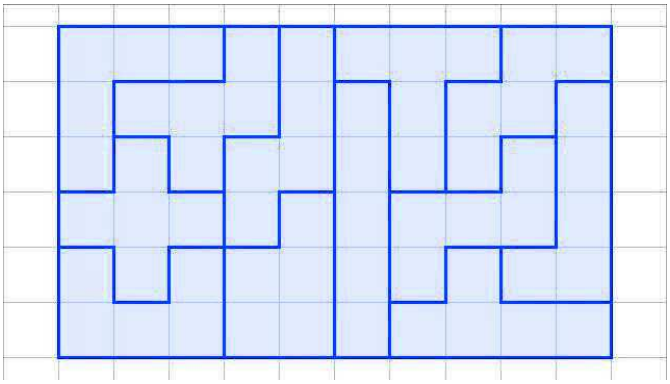
Dessiner ci-dessous, au crayon dans un premier temps, la réponse du puzzle de pentaminos 6 x 10 :

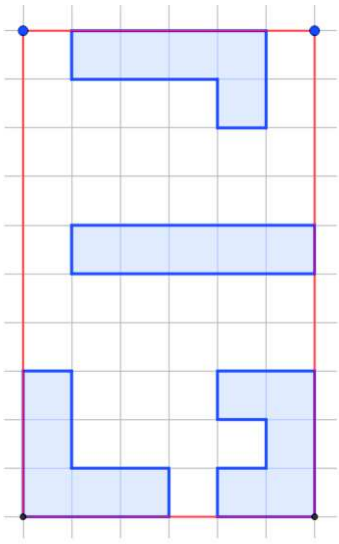


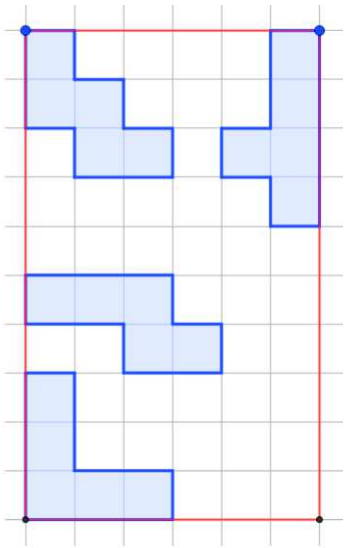
Pièces produites par les élèves sur Geogebra :



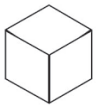
Solution du puzzle 6 x 10 et indices pouvant être donnés (un par équipe) :



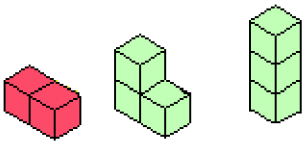




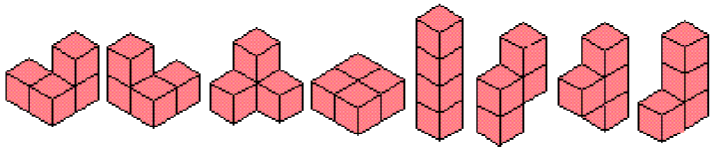
6.3 Annexe 3 : Liste des n-cubes (n ≤ 6) et Puzzle du Cube de Soma



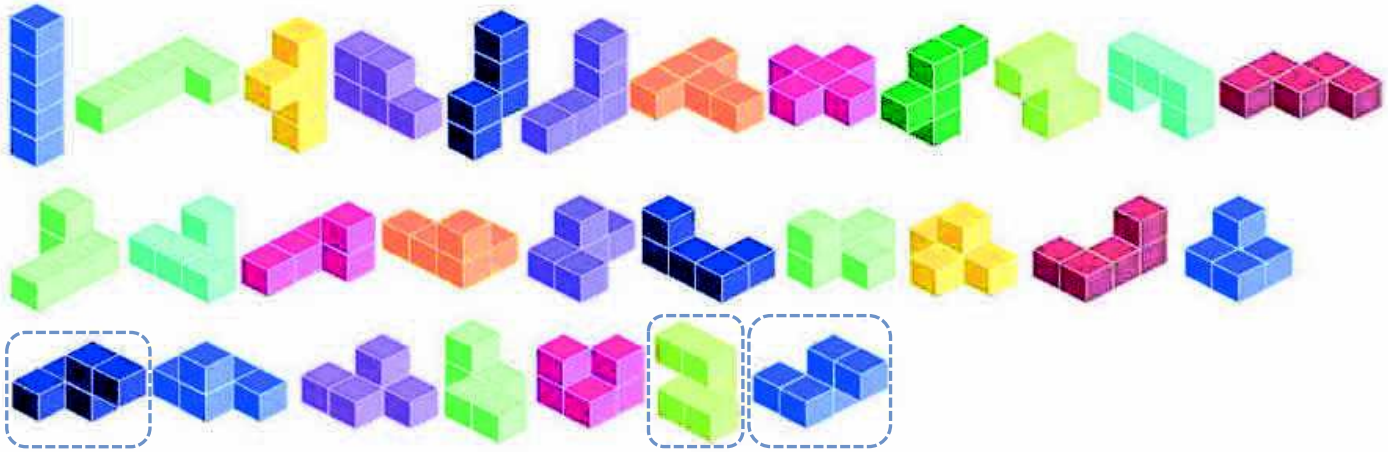
1 monocube



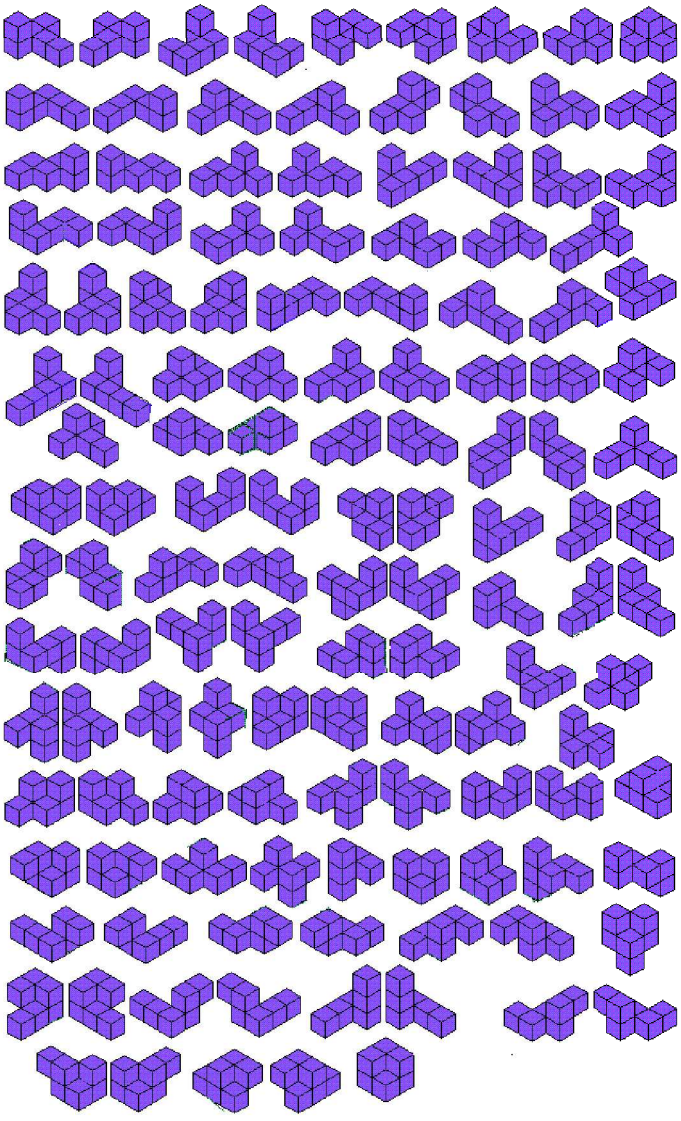
1 dicube et 2 tricubes



8 tetracubes

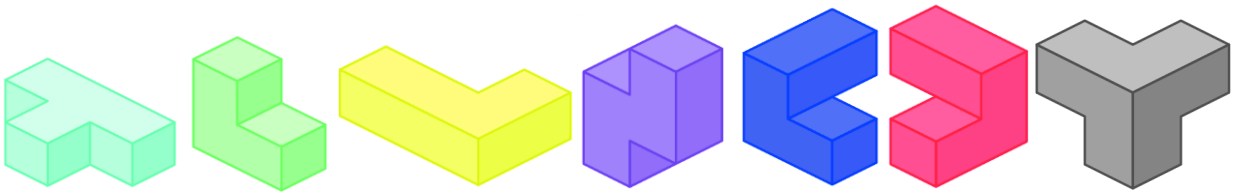


12 pentacubes plats (1ère ligne) issus des 12 pentaminos et 17 pentacubes non plats (deux autres lignes)

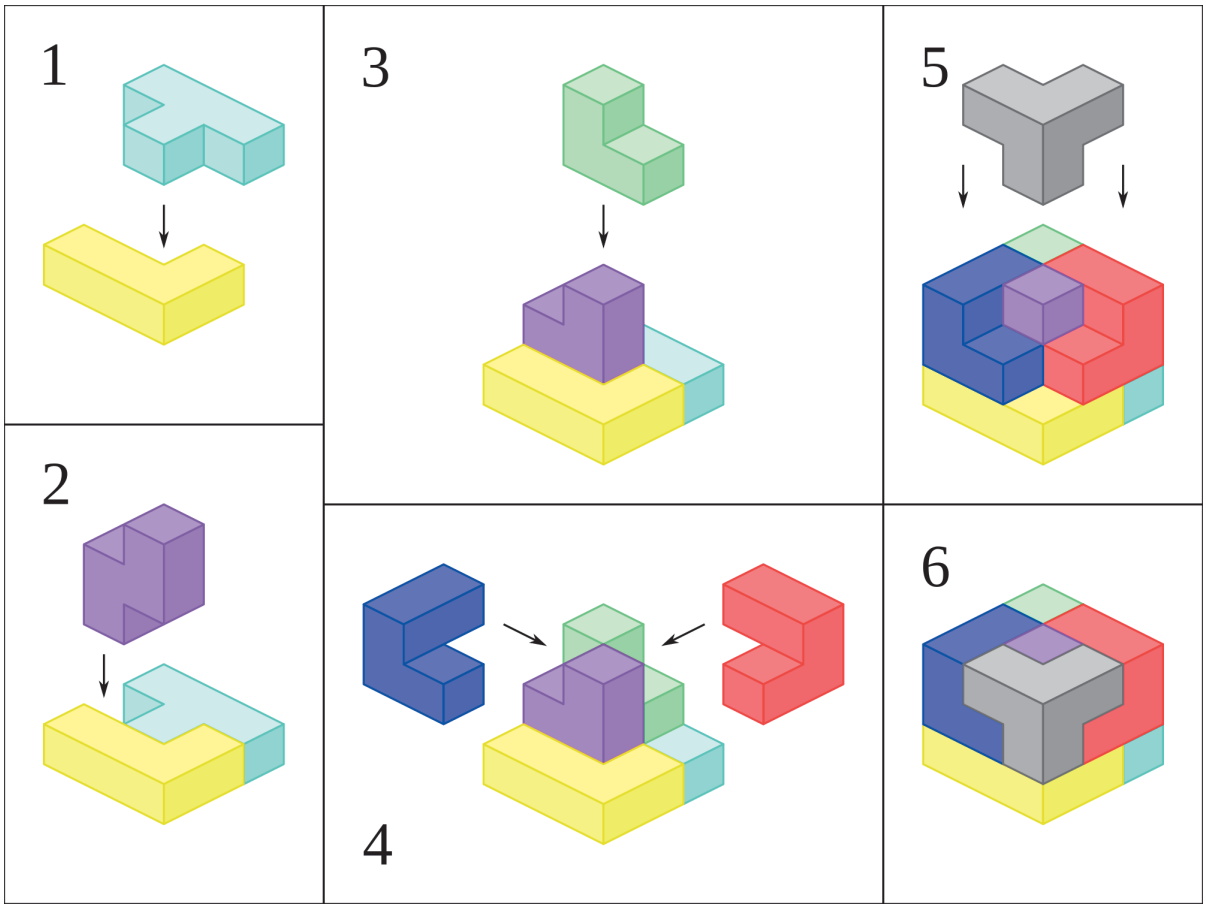


Cube de Soma

Il s'agit d'un casse-tête inventé en 1936 par le poète et scientifique danois Piet Hein. Le but du jeu est de reconstituer un cube 3 x 3 x 3 à partir de 7 pièces. Les pièces du jeu sont l'équivalent tridimensionnel des polyominos : des polycubes. Il s'agit d'assemblages de cubes unitaires. Ces 7 pièces (polycubes) sont les assemblages de 4 cubes ou moins, privés des pavés droits (polyèdres convexes).



Une solution (parmi les très nombreuses existantes) :



Micmaths (Mickaël Launay) a dédié une vidéo au cube de Soma :
https://www.youtube.com/watch?v=o6n6WMvca-w

6.4 Annexe 4 : Exemples de problèmes pour chercher

❶ Un exemple de problème qui peut être traité en Narration de recherche (voir partie 2.2.3)

Il s'agit d'un problème issu de la brochure « Expériences de narration de Recherche en Mathématiques (IREM-Paris-7, 2002), proposé à des élèves de 6ème.

Les Poules et les Lapins

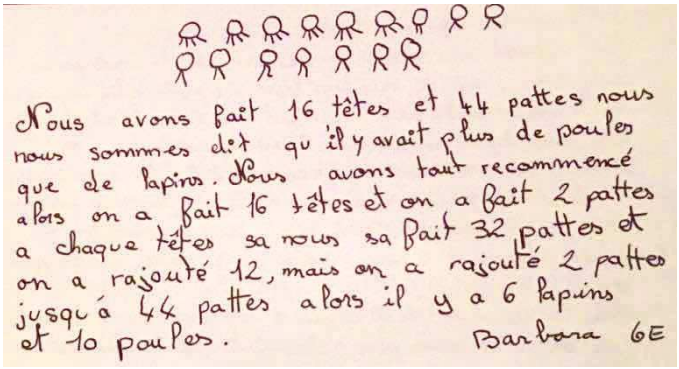
Problème **:** Dans la cour du collège, il y a des poules et des lapins. J'ai compté 16 têtes et 44 pattes.

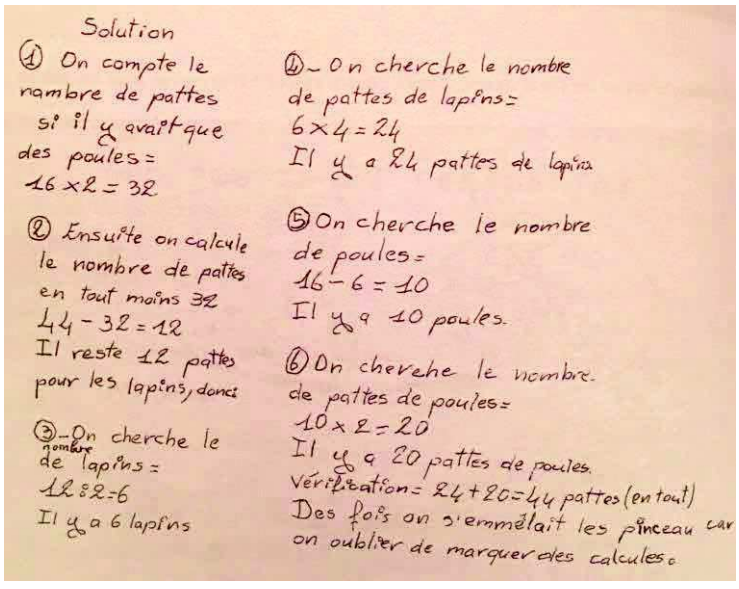
• Combien y a-t-il de poules ? Combien y a-t-il de lapins ?

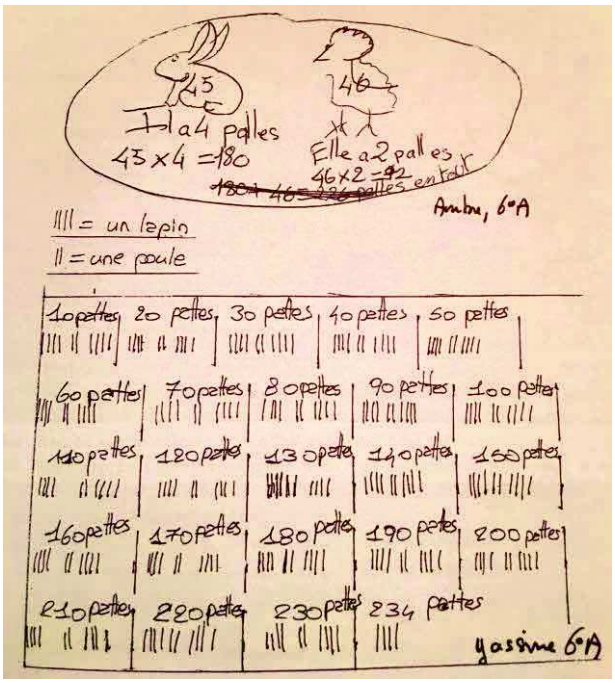
Ce problème est particulièrement intéressant, car :

- Il est engageant : l'énoncé est court, ne comporte pas de mots spécifiquement liés aux mathématiques ou complexes et est donc compréhensible par tous les élèves, qui peuvent s'en emparer rapidement.
- Il peut être abordé selon de multiples procédures et peut permettre de voir de nombreuses représentations, stratégies adoptées par les élèves : la brochure en exhibe quelques-unes. Les élèves réalisent des tableaux, des dessins, procèdent par tâtonnements …
- On peut l'imaginer être redonné par la suite aux élèves en faisant évoluer la variable didactique des nombres et lorsqu'ils se seront approprié les bases du calcul littéral, pour justifier et donner du sens à ce dernier.

Ci-dessous quelques extraits (parus dans la dite brochure) de productions d'élèves :


Nous avons fait 16 têtes et 44 pattes nous nous sommes dit qu'il y avait plus de poules que de lapins. Nous avons tout recommencé alors on a fait 16 têtes et on a fait 2 pattes a chaque têtes sa nous sa fait 32 pattes et on a rajouté 12, mais on a rajouté 2 pattes jusqu'à 44 pattes alors il y a 6 lapins et 10 poules.
Barbara 6E


Solution
① On compte le nombre de pattes si il y avait que des poules = 16 x 2 = 32
② Ensuite on calcule le nombre de pattes en tout moins 32 44 - 32 = 12 Il reste 12 pattes pour les lapins, donc
③ On cherche le nombre de lapins = 12 : 2 = 6 Il y a 6 lapins
④ On cherche le nombre de pattes de lapins = 6 x 4 = 24 Il y a 24 pattes de lapins
⑤ On cherche le nombre de poules = 16 - 6 = 10 Il y a 10 poules.
⑥ On cherche le nombre de pattes de poules = 10 x 2 = 20 Il y a 20 pattes de poules.
Vérification = 24 + 20 = 44 pattes (en tout)
Des fois on s'emmêlait les pinceau car on oublier de marquer des calculs.



❷ Un exemple de problème qui peut être traité en Situation de Recherche pour la Classe ou SiRC (voir partie 2.2.3).

Le problème de recherche donné en exemple est cité dans une publication de Denise Grenier (Equipe Combinatoire et Didactique, Institut Fourier, I.R.E.M Université Joseph Fourier, Grenoble) destinée à présenter les SiRC (Grenier, 2009). Il est initialement dû à Golomb (Polyominoes - Puzzles , Patterns, Problems and Packings, 1994). Il s'agit, sous sa forme plus générale, d'un problème encore ouvert au niveau de la recherche (ce qui est un des critères de SiRC).

Le problème :

Dans un « territoire » composé d'un ensemble de carreaux unités contigus, on désire empêcher les « bêtes » de se poser et pour ce faire, on emploie des pièges. Les « bêtes » sont des polyominos (voir partie 3.2.1 et l'annexe 2) et les « pièges » sont des carreaux unités.

Le but du jeu est de mettre en place le plus petit nombre de pièges possible sur le territoire.

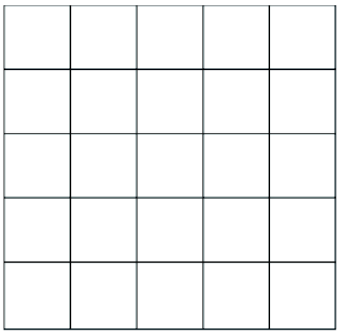
Il s'agit d'un problème d'optimisation qui permet par exemple un travail sur la logique et la démonstration. Pour démontrer qu'un nombre de piège est optimal, on peut, d'une part, montrer une solution avec un nombre donné de pièges et prouver d'autre part qu'il est impossible d'en disposer moins.

L'existence de solutions est assurée puisqu'il est possible de piéger toutes les cases.

Pour assurer une meilleure dévolution du problème, il est conseillé de rendre possibles les manipulations avec l'emploi de matériel (plateaux quadrillés / damiers, polyominos).

Deux exemples :

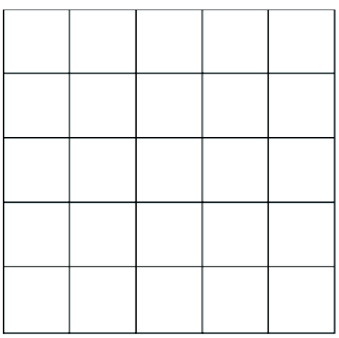
La chasse à la bête « Domino » sur un carré de côté 5 carreaux



Un piège

Une bête

La chasse à la bête « Triomino long » sur un carré de côté 5 carreaux



Un piège

Une bête

❸ Des exemples de problèmes qui remplissent les critères de G.Arsac et M.Mante pour être qualifiés de problèmes ouverts (voir partie 2.2.3) :

Problème 1 **:** Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme le résultat de l'addition de plusieurs nombres entiers, par exemple : **23 = 11 + 5 + 7**.

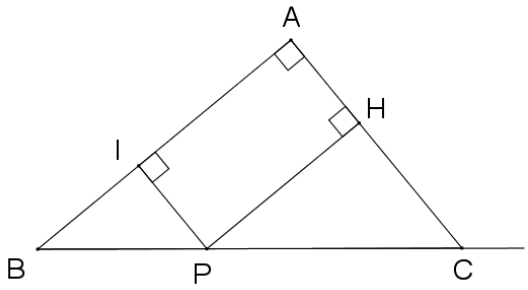
• Trouvez, parmi ces additions de nombres possibles, celle dont la multiplication des nombres qui interviennent est la plus grande. Par exemple, la multiplication pour l'addition donnée en exemple est : 11 x 5 x 7 = 385.

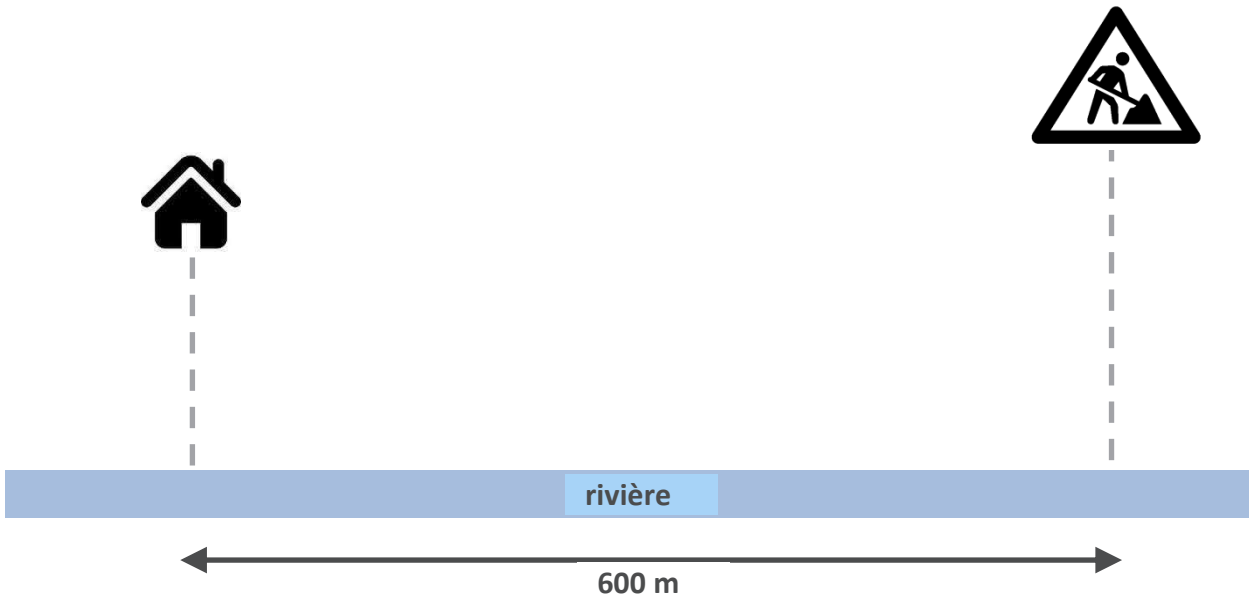
Problème 2 **:** Chez un commerçant, j'aurai pu régler le prix d'un objet avec 3 pièces différentes, mais j'ai préféré régler avec une pièce de 50 centimes. Le commerçant m'a rendu la monnaie avec 3 pièces différentes.

• Quel est le prix de l'objet ?

Problème 3 **:** ABC est un triangle rectangle en A.

• Où faut-il placer P sur l'hypoténuse du triangle ABC pour que la longueur IJ soit la plus petite possible ?



Problème 4 **:** Un homme quitte sa maison qui se trouve à 300 m de la rivière, va jusqu'à la rivière, prend de l'eau avec son arrosoir et rejoint un chantier qui se trouve à 400 m de la rivière.

• Où doit-il prendre de l'eau à la rivière pour que son trajet soit le plus court possible ?