MÉMOIRE
présenté à
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ
en vue d'obtenir une
HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité

Mathématiques Appliquées

Présenté par

Franz CHOULY

Contributions au traitement des conditions limites et d'interface dans le cadre de la Méthode des Éléments Finis

soutenu le 4 décembre 2013 après l'avis des rapporteurs :

Yves Achdou	Université Paris 7, Paris
Roland Becker	Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau
Faker Ben Belgacem	Université de Technologie de Compiègne, Compiègne
Erik Burman	University College London, Londres, Royaume-Uni

et devant le jury composé de :

Yves Achdou	Université Paris 7, Paris
Faker Ben Belgacem	Université de Technologie de Compiègne, Compiègne
Erik Burman	University College London, Londres, Royaume-Uni
Alexei Lozinski	Université de Franche-Comté, Besançon
Yvon Maday	Université Paris 6, Paris
Alexandre Ern	Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris

A Beatriz.

A mes collègues.

Table des matières

Première partie

Synthèse des activités

Chapitre 1

Introduction

Avant les chapitres 2 et 3 qui résument les différents projets de recherche menés après mon doctorat, vient cette introduction qui a pour but, d'une part, de rappeler quel était mon sujet de thèse, et d'autre part, d'introduire la démarche générale suivie lors de mes rercherches post-doctorales.

1.1 Résumé de la thématique de la thèse d'université

Ma thèse doctorale, intitulée *"Modélisation physique des voies aériennes supérieures pour le Syndrome d'Apnées Obstructives du Sommeil"*, était centrée sur la modélisation et la simulation numérique du phénomène physique à l'origine d'un épisode d'apnée obstructive du sommeil : l'interaction entre un écoulement d'air et les tissus vivants pharyngés. Elle s'inscrivait donc dans un contexte biomédical. En conséquence, outre les questions liées à la modélisation et à la simulation, elle avait pour but de répondre également à une problématique clinique, liée au Syndrome d'Apnées Obstructives du Sommeil (SAOS). Ce syndrome est caractérisé par la survenue fréquente d'épisodes d'obstruction des voies aériennes supérieures au niveau de la base de la langue ou du voile du palais (ces épisodes sont dits d'"apnée obstructive"). L'intérêt alors de la simulation numérique est qu'elle autorise une compréhension plus fine du phénomène, et laisse espérer une amélioration des traitements. En particulier, elle pourrait être intégrée à terme dans des logiciels d'aide à l'apprentissage, à la planification et au guidage du geste chirurgical. Dans cette perspective, un code de calcul numérique doit satisfaire dans la mesure du possible aux deux critères suivants :

1. le temps de calcul lors d'une simulation doit être compatible avec les contraintes des utilisateurs potentiels (chirurgiens) en milieu clinique, qui disposent de ressources informatiques limitées, et ont besoin d'une réponse en temps court, voire très court s'il s'agit de guidage per-opératoire,
2. la prédiction fournie par la simulation doit être fiable, et l'erreur entre cette prédiction et le comportement réel du système modélisé doit être connue, puis si possible, contrôlée et minimisée.

Afin de réduire le temps de simulation (critère 1), des hypothèses simplificatrices physiquement justifiées ont été envisagées. D'une part, en ce qui concerne les tissus vivants, nous nous sommes placés dans le cadre de l'élasticité linéarisée. D'autre part, pour l'écoulement d'air, nous avons utilisé une formulation asymptotique, dérivée à partir des équations de Navier-Stokes incompressibles via des hypothèses précises sur la géométrie du conduit et le nombre de Reynolds. Les équations obtenues, dites équations de Navier-Stokes Réduites / Prandtl (RNS/P), sont de nature parabolique et ne présentent que les termes influant significativement sur l'écoulement. Une méthode numérique spécifique a ensuite été développée et implémentée pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure obtenu, et pour coupler les discrétisations associées à chaque sous-problème : éléments finis pour la structure et différences finies pour le fluide.

Afin d'examiner la qualité de la prédiction numérique (critère 2), une maquette in-vitro a été utilisée. Celle-ci permet de reproduire, dans des conditions contrôlées, une interaction entre flux d'air et paroi déformable analogue à celle qui se produit à la base de la langue en début d'obstruction. Une mesure précise de la déformation du conduit d'écoulement lors d'une interaction fluide-structure peut y être obtenue à l'aide d'une caméra digitale. Une série de comparaisons quantitatives a montré qu'en dépit des simplifications effectuées, l'erreur entre prédiction numérique et mesures réalisées est faible.

Finalement, pour se rapprocher d'avantage de la réalité clinique, des modèles de voies aériennes supérieures de quatre patients apnéiques ont été construits à partir de radiographies sagittales. Des comparaisons entre simulations numériques à partir de radiographies pré-opératoires et post-opératoires ont montré que les prédictions étaient globalement cohérentes avec les conséquences observées du geste chirurgical. Elles ont pu également mettre en évidence certaines limites de notre approche, dues à la complexité du phénomène.

Ce travail a été réalisé sous la direction de Yohan Payan (Laboratoire Techniques de l'Imagerie, de la Modélisation et de la Cognition, Grenoble) pour les aspects biomécanique et modélisation des tissus vivants, et sous la co-direction de Xavier Pelorson (Institut de la Communication Parlée, Grenoble) pour les aspects mécanique des fluides et aéro-dynamique. Concernant les aspects mécanique des fluides et aéro-dynamique, ces recherches ont aussi été effectuées en étroite collaboration avec Annemie Van Hirtum (Institut de la Communication Parlée, Grenoble) et Pierre-Yves Lagrée (Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Paris). Pour les aspects médico-chirurgicaux, nous étions en relation avec le CHU Purpan (Toulouse), où Jean-Roch Paoli (chirurgie maxillo-faciale) nous a fourni des données patients et nous a aidé via son expertise clinique.

Ma thèse doctorale a fait l'objet de :

- 3 publications dans des revues internationales avec comité de lecture [1, 2, 3],
- 1 chapitre de livre [15],
- plusieurs communications dans des congrès internationaux [19, 23, 26] et nationaux [20, 21, 24, 25].

1.2 Recherches post-doctorales

Suite à mon doctorat, fortement pluridisciplinaire et centré sur une problématique clinique, j'ai souhaité approfondir d'avantage les aspects mathématiques liés à la simulation numérique par éléments finis en élasticité et en mécanique des fluides. Ma démarche a alors suivi celle de l'analyse numérique traditionnelle.

J'ai souhaité bien sûr explorer en premier lieu la simulation d'écoulements incompressibles et d'interaction fluide-structure, dans la continuité de ma thèse, mais avec pour objectif l'obtention de méthodes assez générales, possédant d'une part de bonnes propriétés mathématiques (stabilité, convergence) et d'autre part des caractéristiques intéressantes d'un point de vue pratique (implémentation aisée, réduction du temps de calcul).

Cette démarche m'a permis ensuite de m'ouvrir à des nouveaux champs d'applications, où certaines méthodes ont pu être adaptées en donnant des résultats nouveaux. Ainsi, j'ai travaillé plus récemment sur des méthodes pour les équations intégrales de frontière et pour la mécanique des contacts et frottements.

En parallèle à ceci, j'ai souhaité rester proche de certaines problématiques en biomécanique et en génie biomédical, pour lesquelles des progrès dans le traitement numérique des équations peuvent apporter des avancées intéressantes, et qui, réciproquement, peuvent être source de nouveaux problèmes d'ordre mathématique et numérique, tout comme le sont plus classiquement les problèmes issus de la physique ou de l'industrie.

Dans le Chapitre 2, je présenterai des contributions au **traitement de certaines conditions limites et d'interface dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis (MEF)**. Il s'agit d'une thématique classique qui a suscité de nombreux travaux depuis les années soixante-dix, où les bases mathématiques de la MEF ont été posées. Les méthodes initialement proposées (pénalité, multiplicateurs de Lagrange, Nitsche,...) sont d'ailleurs maintenant bien connues, comprises et analysées dans les cas les plus simples, en particulier pour un opérateur elliptique linéaire avec condition de Dirichlet. Toutefois, au moins deux raisons ont incité une communauté assez large de chercheurs à revisiter et à améliorer ces méthodes :

1. un accroissement de la complexité des problèmes physiques résolus dans le cadre de la MEF, permis d'une part par un progrès constant des ressources en calcul numérique, et d'autre part stimulé par les besoins des physiciens et des ingénieurs. En particulier, beaucoup de problèmes, dits "multi-physiques", font intervenir des équations aux dérivées partielles différentes dans des sous-domaines différents, avec des équations de couplage à l'interface, par exemple les problèmes d'interaction fluide-structure [90, 61, 68, 88], ou encore de couplage fluide-milieu poreux [62, 94]. Egalement, d'autres problèmes sont associés à des conditions aux limites complexes et fortement non-linéaires, comme par exemple le contact unilatéral ou le frottement de Coulomb [63, 102]. Il faut pouvoir alors adapter les méthodes existantes à ces nouvelles situations.
2. une volonté d'améliorer les méthodes en levant certaines restrictions apparaissant naturellement dans leurs formulations classiques. Par exemple, dans le cas des problèmes d'interface, on peut souhaiter que les maillages des deux sous-domaines séparés par l'interface ne soient pas compatibles, autrement dit que les noeuds des éléments qui sont de part et d'autre ne coïncident pas. De même, il peut être intéressant dans certaines situations d'avoir un maillage qui n'approche pas la frontière physique où l'on souhaite imposer une condition limite ("frontières immergées" ou "domaines fictifs" [95, 77]). Enfin, on peut vouloir coupler des méthodes différentes, par exemple une méthode éléments finis et une méthode spectrale [50].

Les divers travaux présentés dans le Chapitre 2 ont pour origine au moins une de ces deux raisons précitées.

Dans le Chapitre 3, je présenterai d'autres contributions liées à la **modélisation et à la simulation numérique d'écoulements et/ou d'interaction fluide-structure**, mais qui ne rentrent pas, ou pas complètement, dans le cadre de la première partie. Il s'agira d'abord des méthodes parallèles d'intégration en temps pour des problèmes d'évolution, qui permettent de faire de la décomposition de domaine en temps pour accélérer les calculs. Ensuite, je traiterai d'une nouvelle méthode éléments finis pour la résolution d'un modèle asymptotique décrivant un fluide incompressible dans un tube mince. Ce chapitre s'achèvera sur une problématique plus appliquée, avec un modèle éléments finis pour l'étude des vibrations des plis vocaux, et intégrant un couplage hydro-élastique.

Chapitre 2

Conditions limites et d'interface dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis

Nous commencerons ce chapitre par un court rappel sur les approches les plus répandues pour traiter des conditions limites de type Dirichlet non-homogène dans le cadre de la MEF, en nous servant d'un problème modèle très simple (problème de Poisson). Nous insisterons sur la méthode de Nitsche, qui est au coeur de la plupart des contributions présentées ici. Les sections qui viennent ensuite résumeront chacune de mes contributions sur le thème des conditions limites et d'interface, pour des problèmes plus complexes.

Le traitement des conditions de Dirichlet via Nitsche

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), que nous supposerons pour simplifier être un polygone ($d = 2$) ou un polyèdre ($d = 3$), et notons $\Gamma := \partial\Omega$ son bord. Soit le problème aux limites suivant :

$$\text{Trouver } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ qui vérifie :}\\ \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \quad (i) \\ \quad u = g & \text{sur } \Gamma, \quad (ii) \end{cases} \tag{2.1}$$

où sont donnés le terme source $f \in L^2(\Omega)$, ainsi que le terme de bord $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La notation Δ désigne le Laplacien. Sous forme faible, ce problème s'écrit :

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ qui vérifie } u = g \text{ sur } \Gamma \text{ et}\\ a(u, v) = (f, v)_\Omega \quad \text{pour tout } v \in H^1_0(\Omega), \tag{2.2}$$

où $(\cdot,\cdot)_\Omega$ désigne le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ (ou éventuellement sur $(L^2(\Omega))^d$) et avec la notation $a(v, w) := (\nabla v, \nabla w)_\Omega$ pour $v, w \in H^1(\Omega)$. Ce problème admet une unique solution u dans $H^1(\Omega)$ [64, Theorem 3.8, pp. 115–116].

La méthode standard pour résoudre (2.1) à l'aide de la MEF consiste à introduire un opérateur de relèvement discret (*"lifting"*) du bord Γ vers le domaine Ω. On se ramène ainsi au cas Dirichlet homogène. Si le relèvement discret est construit judicieusement, ce procédé revient à éliminer les degrés de liberté associés aux noeuds sur Γ dans le système linéaire obtenu après discrétisation [64, §3.2.2. pp.124–126, Remark 8.17 p.378].

Pour répondre à des motivations diverses, d'autres méthodes ont été proposées pour traiter la condition (2.1) (ii). Nous listons ci-après les quatre méthodes, ou familles de méthodes, principales. Cette liste n'est certainement pas exhaustive, mais elle regroupe celles qui semblent être les plus répandues :

1. La méthode de pénalité [41, 45] où la condition (2.1) (ii) est approchée par :
$$\partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - g). \tag{2.3}$$
Ici u_ε désigne la solution du problème pénalisé, et la notation $\partial_{\mathbf{n}} v$ est utilisée pour la dérivée normale sur Γ d'une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathbf{n}$ désigne la normale sortante au domaine Ω). Le paramètre de pénalité est noté $\varepsilon > 0$. La formulation faible pénalisée (continue) s'écrit alors :
$$\begin{aligned}&\text{Trouver } u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ qui vérifie :}\\ &a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}\langle u_\varepsilon, v\rangle_\Gamma = (f, v)_\Omega + \frac{1}{\varepsilon}\langle g, v\rangle_\Gamma \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega),\end{aligned} \tag{2.4}$$
avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur $L^2(\Gamma)$.
Comme les conditions (2.3) et (2.1) (ii) ne sont pas équivalentes ($u_\varepsilon \neq u$), la méthode de pénalité discrète est non-consistante. Les problèmes pénalisés continus et discrets sont bien posés. De plus, moyennant un choix approprié du paramètre ε, qui doit être petit, la méthode converge de façon optimale.
2. Les méthodes mixtes où la condition (2.1) est traitée de manière faible, en introduisant un multiplicateur de Lagrange $-\lambda$ qui se substitue à la dérivée normale $\partial_{\mathbf{n}} u$ [40, 51, 96, 97]. Le problème faible que l'on cherche à approcher est alors le suivant :
$$\begin{aligned}&\text{Trouver } (u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ qui vérifient :}\\ &\begin{cases} a(u, v) + \langle \lambda, v\rangle_\Gamma + \langle \mu, u\rangle_\Gamma = (f, v)_\Omega + \langle \mu, g\rangle_\Gamma \\ \text{pour } (v, \mu) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\end{cases}\end{aligned} \tag{2.5}$$
où cette fois-ci $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ désigne le produit de dualité sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ [1].
Différents choix d'approximation pour le multiplicateur de Lagrange correspondent à différentes méthodes, mais une condition inf–sup discrète doit être vérifiée pour le couple d'espaces d'élements finis correspondant aux variables (u, λ). Cette condition garantit le caractère bien posé du problème discret et la convergence optimale de la méthode. Par contre, elle restreint fortement les choix possibles pour les espaces d'éléments finis, qui doivent être construits de façon soignée [99].
3. Les méthodes stabilisées, qui s'appuient sur la formulation mixte (2.5), en y introduisant des termes additionnels au niveau discret. Ceux-ci permettent de conserver le caractère bien posé du problème, ainsi que la convergence optimale, pour des couples d'espaces d'élements finis ne vérifiant pas nécessairement la condition inf–sup discrète (pour l'idée originale, appliquée à Stokes, voir l'article de Hughes et Franca [83]). Dans cette catégorie, ci-

1. Par la suite, la notation $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ désignera soit le produit scalaire $L^2(\Gamma)$, soit, lorsque cela est nécessaire, le produit de dualité sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

tons tout d'abord la méthode stabilisée de Barbosa et Hughes de type résiduelle/moindres-carrés [43, 44] où le terme additionnel peut prendre la forme suivante [99] :

$$\gamma_0 h \langle \lambda^h + \partial_{\mathbf{n}} u^h, \mu^h + \partial_{\mathbf{n}} v^h \rangle_\Gamma,$$

avec γ_0 comme paramètre de stabilisation, et h est le paramètre de discrétisation en espace. Plus récemment, nous pouvons mentionner la stabilisation par projections L^2 locales [55], où le terme de stabilisation peut prendre la forme :

$$\gamma_0 h \langle (I-\pi)\lambda^h, (I-\pi)\mu^h \rangle_\Gamma,$$

où π désigne la projection sur un espace discret plus grossier que celui où vivent λ^h et μ^h, et qui permet de vérifier la condition de compatibilité inf–sup discrète.

4. La méthode de Nitsche [91, 37, 99], que nous détaillons ci-après.

Soit $\gamma > 0$ une fonction strictement positive de $L^2(\Gamma)$, et $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé. Pour écrire la méthode de Nitsche associée à (2.1), on peut partir de la reformulation de (2.1) (ii) donnée ci-dessous :

$$\partial_{\mathbf{n}} u = -\frac{1}{\gamma}((u-g) - \gamma \partial_{\mathbf{n}} u). \tag{2.6}$$

Remarquons que, contrairement à (2.3), la formule (2.6) est équivalente à (2.1) (ii) sous la condition $\gamma > 0$.

Ensuite, soit u la solution de (2.1), et v une fonction test, que nous supposons toutes les deux suffisamment régulières pour que les calculs suivants soient licites. A partir de (2.1) (i) et de la formule de Green, nous obtenons :

$$a(u,v) - \langle \partial_{\mathbf{n}} u, v \rangle_\Gamma = (f,v)_\Omega.$$

En écrivant $v = (v - \theta\gamma\partial_{\mathbf{n}} v) + \theta\gamma\partial_{\mathbf{n}} v$ nous arrivons à :

$$a(u,v) - \theta \langle \gamma \partial_{\mathbf{n}} u, \partial_{\mathbf{n}} v \rangle_\Gamma - \langle \partial_{\mathbf{n}} u, v - \theta\gamma\partial_{\mathbf{n}} v \rangle_\Gamma = (f,v)_\Omega.$$

Maintenant utilisons (2.6) et nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} & a(u,v) - \theta \langle \gamma \partial_{\mathbf{n}} u, \partial_{\mathbf{n}} v \rangle_\Gamma + \langle \frac{1}{\gamma}(u - \gamma\partial_{\mathbf{n}} u), v - \theta\gamma\partial_{\mathbf{n}} v \rangle_\Gamma \\ = \quad & (f,v)_\Omega + \langle \frac{1}{\gamma} g, v - \theta\gamma\partial_{\mathbf{n}} v \rangle_\Gamma. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Cette formule peut ne pas avoir de sens au niveau continu si u et v ne sont pas suffisamment régulières, mais elle possède une contrepartie discrète qui est bien définie. Introduisons pour cela V^h un espace d'éléments finis H^1-conforme basé sur un maillage de Ω, où h est la taille maximale des éléments du maillage, et définissons la fonction γ comme étant une constante par morceaux sur les arêtes ou les faces du maillage sur la frontière Γ :

$$\gamma|_{T\cap\Gamma} = \gamma_0 h_T,$$

pour tout élément T de taille h_T qui possède une arête ($d=2$) ou une face ($d=3$) commune avec Γ, et où γ_0 est une constante positive. Pour alléger un peu la formulation faible (2.7) nous pouvons introduire l'opérateur

$$P_\gamma : \begin{array}{ccc} V^h & \to & L^2(\Gamma) \\ v^h & \mapsto & v^h - \gamma\partial_{\mathbf{n}} v^h \end{array},$$

et aussi les formes bilinéaire et linéaire

$$A_{\theta\gamma}(u^h, v^h) := a(u^h, v^h) - \theta\langle \gamma \partial_{\mathbf{n}} u^h, \partial_{\mathbf{n}} v^h \rangle_\Gamma,$$

$$L_{\theta\gamma}(v^h) := (f, v^h)_\Omega + \langle \frac{1}{\gamma} g, v^h - \theta\gamma \partial_{\mathbf{n}} v^h \rangle_\Gamma.$$

La méthode de Nitsche pour le problème de Poisson (2.1) s'écrit finalement :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in V^h \text{ qui vérifie :} \\ A_{\theta\gamma}(u^h, v^h) + \langle \frac{1}{\gamma} \, P_\gamma(u^h), P_{\theta\gamma}(v^h) \rangle_\Gamma = L_{\theta\gamma}(v^h), \quad \forall\, v^h \in V^h. \end{cases} \tag{2.8}$$

Le paramètre θ permet d'introduire - au moins - trois variantes de la méthode :

1. Pour $\theta = 1$, on remarque que la formulation (2.8) est symétrique. On préserve ainsi la symétrie du problème original (2.2).
2. Pour $\theta = 0$, on obtient une formulation non-symétrique "simple", dans le sens où c'est celle qui fait intervenir le moins de termes.
3. Pour $\theta = -1$, on trouve une formulation anti-symétrique, qui donne lieu à un problème bien posé quelque soit γ_0 strictement positif

La méthode de Nitsche (2.8) est consistante, stable et converge de façon optimale en norme H^1, pourvu que γ_0 soit suffisamment petit (ou pour tout γ_0 strictement positif dans le cas anti-symétrique $\theta = -1$). Elle se différencie des méthodes mixtes, car elle ne fait pas intervenir d'inconnue supplémentaire, et donc il n'y a pas de condition de compatibilité entre espaces discrets à vérifier pour obtenir la stabilité. Elle est donc en cela proche de la méthode de pénalité, avec pour avantage qu'elle préserve la consistance.

A noter par ailleurs que la version anti-symétrique $\theta = -1$ peut même se réduire, pour le problème modèle (2.1), à une version sans paramètre numérique :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in V^h \text{ qui vérifie :} \\ a(u^h, v^h) - \langle \partial_{\mathbf{n}} u^h, v^h \rangle_\Gamma + \langle u^h, \partial_{\mathbf{n}} v^h \rangle_\Gamma = (f, v^h)_\Omega + \langle g, \partial_{\mathbf{n}} v^h \rangle_\Gamma, \quad \forall\, v^h \in V^h. \end{cases}$$

ce qui revient formellement à considérer la valeur limite $\gamma_0 = +\infty$. Dans ce cas là, la méthode reste quand même stable, avec une convergence optimale en norme H^1 (voir l'article récent de Burman à ce sujet [54]).

Les notations ici ne sont pas standard par rapport à celles de la littérature, mais en contrepartie, elles permettront de comprendre facilement l'adaptation de la méthode pour les problèmes de contact et de frottement [2]. On pourra bien sûr se référer à l'article de Stenberg [99] pour une présentation différente, dans le cas symétrique, et également pour comprendre le lien entre cette méthode et la méthode stabilisée de Barbosa et Hughes décrite dans [43, 44]. Deux autres références classiques, qui décrivent de même la méthode de Nitsche symétrique pour le problème de Poisson sont l'ouvrage de Thomée [101, Chapter 2] et l'article de synthèse de Hansbo [79]. L'analyse complète de la méthode y est effectuée, et la dernière référence discute de différentes extensions. Dans le cadre des problèmes d'interface, une référence connue est l'article de Becker, Hansbo et Stenberg [46].

Les contributions présentées ci-après concernent des extensions de la méthode de Nitsche aux problèmes d'interaction fluide structure (Section 2.1), aux équations intégrales de frontière

2. En particulier, dans cette version, les termes en $\partial_{\mathbf{n}} u^h \partial_{\mathbf{n}} v^h$ s'annulent, et auraient donc pu être omis, mais ce ne sera plus nécessairement le cas pour des conditions aux limites plus complexes.

(Section 2.2), puis aux problèmes de contact et frottement (Section 2.4). D'autres contributions concernent la méthode de pénalité pour le contact et frottement (Section 2.3), et une méthode stabilisée utilisant des projections L^2 locales pour les domaines fictifs (Section 2.5).

2.1 Méthode semi-implicite de type Robin-Robin pour l'interaction fluide-structure

Pour de très nombreuses applications, il est nécessaire de résoudre les équations qui décrivent l'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique. Dans le cas où la densité du fluide est comparable à celle du solide élastique, des difficultés numériques surviennent liées à l'effet de *masse ajoutée* [56]. Elles se traduisent en particulier par l'apparition d'instabilités numériques lorsque les conditions d'interface entre le fluide et le solide sont traitées de façon explicite dans les schémas en temps, ou sinon par un coût élevé lors de la résolution si ces conditions sont traitées de façon implicite. De plus, lorsque le traitement des conditions d'interface est explicite, les instabilités ne disparaissent pas lorsque le pas de temps est réduit. Cette problématique a alors fait l'objet de recherches depuis le début des années 2000 (voir les synthèses [69, 67] ainsi que leur bibliographie).

Avec Matteo Astorino et Miguel A. Fernández (INRIA CRI Paris-Rocquencourt), nous avons combiné deux stratégies, qui permettent un traitement efficace de ces problèmes d'interaction fluide-structure tout en préservant la stabilité numérique :

1. D'une part, l'utilisation du schéma de projection de Chorin-Temam [100, 58, 78] pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles permet d'accélérer le couplage, car seule l'équation en pression, lors de l'étape de projection, doit être couplée à la structure élastique de façon implicite pour préserver la stabilité, comme cela avait été montré dans un travail de Fernández, Gerbeau et Grandmont [70].
2. D'autre part, lors de l'étape explicite du schéma de Chorin-Temam, le couplage en vitesse est traité via un partitionnement de type Robin-Robin, inspiré par la méthode de Nitsche.

Ce rajout nous a permis d'améliorer les conditions de stabilité du schéma en temps par rapport à la méthode semi-implicite décrite dans [70], qui impliquait un partitionnement de type Dirichlet-Neumann lors de l'étape explicite. En effet, pour un tel algorithme, la condition de stabilité théorique obtenue, pour un problème linéarisé, était

$$\rho^{\mathrm{s}}/\rho^{\mathrm{f}} \geq C\left[1 + \mu\tau/(\rho^{\mathrm{f}} h^2)\right],$$

avec $\rho^{\mathrm{s}}, \rho^{\mathrm{f}}$ les densités solides et fluides, μ la viscosité du fluide, et h, τ les paramètres de discrétisation en espace et en temps. Pour la nouvelle méthode semi-implicite de type Robin-Robin, nous obtenons des conditions de stabilité du type :

$$\gamma \geq C, \quad \gamma\mu\tau = \mathcal{O}(h),$$

où γ est le paramètre de Robin. Un fait remarquable est l'obtention de conditions de stabilité indépendantes du ratio des densités solide et fluide (lié à l'effet de masse ajoutée). Un autre point intéressant est que la stabilité a pu être démontrée avec un schéma en temps conservatif pour la structure (dans le travail antérieur [70], on supposait ce schéma dissipatif pour pouvoir démontrer la stabilité).

Nous avons effectué l'analyse de stabilité de cette méthode, ainsi que des expériences numériques sur des cas tests simplifiés, à l'aide du logiciel FreeFEM++ [3], et sur des cas tests plus réalistes d'écoulements dans des vaisseaux sanguins en 3D, à l'aide du logiciel LifeV [4].

Ce travail a fait l'objet d'un article [5] et d'une note aux Comptes-Rendus Mathématique [14]. Il a également été présenté en congrès internationaux [27] [28] [30].

2.2 Méthode de Nitsche pour l'équation intégrale hypersingulière

Les équations intégrales de frontière apparaissent dès que l'on ramène sur le bord d'un domaine une équation aux dérivées partielles homogène, en se servant d'une formule de reconstruction basée sur la solution fondamentale de l'opérateur elliptique associé. Leur utilisation est commode dans le cas de problèmes en domaine non-borné, ou également en domaine borné car la dimension du problème à résoudre est alors réduite [89]. Si les équations intégrales de deuxième espèce sont bien étudiées maintenant, et rentrent dans le cadre classique de la théorie de Fredholm, les équations intégrales de première espèce, ont été objet d'attention plus récemment.

Par exemple, la résolution du problème de Laplace $-\Delta u = 0$ hors d'une surface ouverte Γ dans $\mathbb{R}^3$ avec conditions de Neumann sur Γ fait intervenir l'équation intégrale de première espèce suivante, dite hypersingulière :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ qui vérifie :} \\ Wu(x) := -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\displaystyle\int_\Gamma u(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\,dS_y = f(x), \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.9}$$

où Γ est une surface plane ouverte surfacique, de frontière polygonale, assimilable à un domaine de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{n}$ est la normale sortante à Γ et $f \in L^2(\Gamma)$ est une fonction donnée. L'espace $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est le complété de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme

$$\|u\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)} := \left(|u|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \int_\Omega \frac{u(x)^2}{(\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le bon cadre pour étudier un opérateur tel que W est celui des espaces de Sobolev fractionnaires [59].

Les premières méthodes de décomposition de domaine avec maillages incompatibles pour les équations intégrales hypersingulières sont toutes récentes (fin des années 2000 environ), alors qu'elles sont connues depuis les années 1990 dans le cadre de la MEF pour les problèmes elliptiques : ce sont les méthodes de joints ou *"mortar"* [49, 50, 47, 71]. Elles ont pour principal intérêt ici de faciliter le maillage de surfaces complexes, que l'on peut alors découper en plusieurs sous-surfaces de géométries simples, pouvant être maillées aisément, sans se soucier des raccords entre maillages aux interfaces. Ainsi une méthode de joints, basée sur des multiplicateurs de Lagrange, a été proposée par Healey et Heuer en 2010 [81], faisant suite à un résultat préliminaire pour le traitement faible des conditions de Dirichlet dans ce cadre [74].

Avec Norbert Heuer (Pontificia Universidad Católica, Santiago du Chili), nous avons prolongé ce travail en introduisant une méthode alternative à celle des joints, et qui est basée sur

3. http ://www.freefem.org/ff++/
4. http ://www.lifev.org/

un traitement des conditions d'interface entre sous-domaines via Nitsche. Ce type de décomposition de domaine présente ici les mêmes avantages que dans le cadre des équations aux dérivées partielles elliptiques (voir [46], et aussi le paragraphe introductif sur la méthode de Nitsche) :

1. aucune inconnue supplémentaire introduite,
2. pas de condition inf-sup discrète à respecter,
3. la symétrie du problème éventuellement préservée.

La difficulté majeure pour adapter la méthode de Nitsche à ce cadre et effectuer son analyse est qu'il n'existe pas d'opérateur de trace dans l'espace $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, où la formulation faible est bien posée. Il est alors nécessaire d'avoir recours à toute une famille d'espaces de Sobolev fractionnaires de régularité plus élevée $H^s(\Gamma)$ $(s > \frac{1}{2})$ pour contourner ce problème, puis il faut par la suite des inégalités inverses permettant de majorer les normes des espaces de régularité plus élevée par celles des espaces de régularité plus faible lorsque les fonctions sont discrètes. On parvient à montrer grâce à cette technique un résultat de convergence presque quasi-optimal de la forme :

$$\|u - u_h\|_{\frac{1}{2},h} \leq C \max\{\gamma^{\frac{1}{2}}|\log h|^{\frac{3}{2}}, \gamma^{-\frac{1}{2}}|\log h|^{\frac{1}{2}}\} h^{\nu-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^\nu(\Gamma)},$$

où $\|\cdot\|_{\frac{1}{2},h}$ est une norme de type $H^{\frac{1}{2}}$ discrète, qui fait intervenir aussi le saut de la solution sur l'interface entre les sous-domaines, γ est le paramètre de Nitsche, h est le pas de discrétisation en espace, et $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$ est le degré de régularité de la solution. Les conditions sur les paramètres de Nitsche θ et γ pour obtenir la stabilité de la méthode et cette propriété de convergence sont proches de celles nécessaires dans le cadre de la MEF classique, à ceci près que la perturbation logarithmique en h intervient aussi dans le choix du paramètre γ. Des cas tests numériques nous ont permis de nous assurer de la validité de notre analyse en pratique. Ils ont également mis en évidence ici de meilleures propriétés de convergence de la variante symétrique de la méthode de Nitsche (qui de plus, préserve la symétrie du problème original).

Ce travail a fait l'objet d'un article [7], et il a été présenté lors de congrès [31].

2.3 Analyse numérique de la méthode de pénalité pour le contact unilatéral et le frottement de Tresca

Les problèmes de contact unilatéraux, omniprésents dès qu'il s'agit de simuler des interactions entre solides déformables dans des systèmes mécaniques, sont traditionnellement résolus à l'aide de la méthode des éléments finis. Ils s'écrivent mathématiquement sous la forme d'une inéquation variationnelle, où la condition de non-pénétration est incluse dans l'ensemble convexe où vivent la solution et les fonctions test (voir par exemple [84, 76, 80, 102]). Pour l'approximation numérique de ces problèmes, une approche très commode et répandue consiste à utiliser une méthode de pénalité, autrement dit à ajouter dans la fonctionnelle d'énergie un terme en $1/\varepsilon$ qui pénalise la pénétration des solides élastiques. Rappelons que les conditions de contact unilatéral sur un bord de contact Γ_C, entre un solide déformable et un support rigide, s'écrivent :

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u})\, u_n = 0, \tag{2.10}$$

où u_n est le déplacement normal sur la frontière de contact, et $\sigma_n(\mathbf{u})$ est la contrainte normale sur cette même frontière (la normale pointe vers l'extérieur du solide déformable). La condition de contact pénalisée s'écrit alors :

$$\sigma_n(\mathbf{u}_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,n}]_+, \tag{2.11}$$

avec $\varepsilon > 0$ le paramètre de pénalité, et $[\cdot]_+$ la fonction "partie positive" ($[x]_+ = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pour $x \in \mathbb{R}$). La formule (2.11) ci-dessus est donc une extension aux conditions de contact de la formule (2.3) qui sert de base à la méthode de pénalité pour une condition de Dirichlet non-homogène. Cette approximation revient à autoriser une petite pénétration du solide déformable dans son support, de l'ordre de ε. Comme son homologue pour Dirichlet, cette méthode de pénalité est à nouveau non-consistante avec le problème de départ. Dans le cadre du contact, elle présente toutefois un gros atout puisqu'elle transforme une inéquation variationnelle en une équation variationnelle (non-linéaire) :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{V} \text{ qui vérifie :}\\
&a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon}\langle [u_{\varepsilon,n}]_+, v_n\rangle_{\Gamma_C} = L(\mathbf{v}) \quad \text{ pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{V},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où $\mathbf{V}$ est le sous-espace de $(H^1(\Omega))^d$ ($d = 2, 3$) restreint aux déplacements admissibles, $a(\cdot,\cdot)$ est la forme bilinéaire associée aux équations de l'élasticité linéarisée, et $L(\cdot)$ la forme bilinéaire associée aux forces volumiques et surfaciques. L'équation (2.12) ci-dessus peut alors être discrétisée et résolue de façon très simple dans le cadre de la méthode des éléments finis. De plus, lorsque le paramètre de pénalité ε est pris suffisamment petit, on tend à retrouver le problème de contact initial, avec pour contrepartie une moins bonne convergence des algorithmes itératifs de résolution du système non-linéaire (Newton généralisé par exemple) [98].

Bien que largement connue et implémentée dans de nombreux codes commerciaux et industriels, la méthode de pénalité pour le contact unilatéral n'avait fait l'objet à ce jour d'aucune étude de convergence approfondie. A notre connaissance, les seuls travaux traitant du sujet sont les articles de Kikuchi, Kim, Oden et Song [85, 92, 93] (voir également le livre de Kikuchi et Oden [84]) et plus récemment, dans le cadre des éléments frontière, l'article de Chernov, Maischak et Stephan [57].

Avec Patrick Hild (Institut de Mathématiques de Toulouse), nous avons alors effectué l'analyse numérique de cette méthode. Nous avons montré que les problèmes pénalisés continu et discret possédaient une unique solution, pour toute valeur de ε strictement positive. Nous avons ensuite dérivé des estimations d'erreur pour les méthodes pénalisées continues et discrètes. Nous nous sommes appuyés sur un travail récent de Hild et Renard en 2012 pour obtenir des estimations quasi-optimales sans faire d'hypothèse sur la topologie des zones d'adhérences et/ou de régularité supplémentaire de la contrainte normale sur le bord de contact [82]. Avec l'hypothèse d'une régularité $H^2(\Omega)$ de la solution $\mathbf{u}$ du problème de contact continu, on obtient ainsi l'estimation suivante, pour la solution discrète et pour la condition de contact pénalisée (2.11) discrétisée :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon^h\|_{1,\Omega} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| \sigma_n(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,n}^h]_+ \right\|_{0,\Gamma_C} \leq C \left(h|\ln h|^{\frac{1}{2}} + (h\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \right) \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}.$$

On observe ainsi qu'en choisissant le paramètre de pénalité ε du même ordre de grandeur que le paramètre de discrétisation h ($\varepsilon = O(h)$), on retrouve la meilleure convergence en norme H^1, qui est celle obtenue lorsque l'on discrétise directement l'inéquation variationnelle. Un point intéressant est que cette propriété reste vraie quelque soit la régularité de la solution continue. Tout l'argument pour montrer de telles estimations repose sur un traitement adéquat de certains termes d'erreur dans la norme duale $H^{-\frac{1}{2}}$.

Nous avons également étendu notre analyse à la méthode de pénalité pour le problème de frottement linéarisé (frottement de Tresca), avec les mêmes techniques et en obtenant les mêmes conclusions.

Ce travail a fait l'objet d'un article [9].

2.4 Méthode de Nitsche pour le contact unilatéral et le frottement

Dans le prolongement des travaux précédents, d'une part sur les méthodes de Nitsche, et d'autre part sur la méthode de pénalité, nous avons souhaité étendre la méthode de Nitsche pour le traitement des conditions aux limites non-linéaires de type contact unilatéral et/ou frottement.

Avec Patrick Hild (Institut de Mathématiques de Toulouse) et Yves Renard (Institut Camille Jordan, Lyon), nous avons dérivé une famille de méthodes de Nitsche pour le contact unilatéral et le frottement linéarisé de Tresca. Tout comme pour les méthodes de type pénalité, on transforme alors l'inéquation variationnelle associée à ces problèmes en une équation variationnelle non-linéaire. Toutefois, le traitement des conditions de contact/frottement via Nitsche permet ici aussi de rester consistant avec le problème original. On conserve sinon les autres avantages liés à la pénalité : pas d'inconnue supplémentaire et pas de condition inf-sup discrète à vérifier.

L'idée fondamentale, pour le contact sans frottement, consiste à reformuler les conditions de contact (2.10) comme suit :

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\gamma}[u_n - \gamma\sigma_n(\mathbf{u})]_+, \tag{2.13}$$

avec $\gamma > 0$ le paramètre de Nitsche (voir la formule (2.6) pour le problème de Dirichlet). Cette reformulation avait déjà été proposée par Alart et Curnier [35], mais n'avait pas été exploitée pour construire une méthode de type Nitsche. La méthode de Nitsche que nous obtenons alors pour le contact sans frottement présente une forme très similaire à celle donnée en (2.8) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \text{ qui vérifie :} \\ A_{\theta\gamma}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + \displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{\gamma}\,[P_\gamma(\mathbf{u}^h)]_+ P_{\theta\gamma}(\mathbf{v}^h)\ d\Gamma = L(\mathbf{v}^h), \quad \forall\, \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h. \end{cases} \tag{2.14}$$

Comme pour la formulation (2.12) les variables $\mathbf{u}^h$ et $\mathbf{v}^h$ sont des champs de déplacements dans $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, appartenant à un espace d'éléments finis H^1-conforme $\mathbf{V}^h$. Ici $A_{\theta\gamma}(\cdot,\cdot)$ représente la forme bilinéaire de Nitsche écrite pour le système de l'élasticité linéarisée, et $P_\gamma(\mathbf{v}^h) := v_n^h - \gamma\sigma_n(\mathbf{v}^h)$ pour tout $\mathbf{v}^h$ dans $\mathbf{V}^h$. La différence significative avec (2.8) est bien sûr la présence de la partie positive, qui rend l'équation (2.14) non-linéaire. Cette non-linéarité peut être traitée simplement avec une méthode de Newton généralisée, comme c'est déjà le cas pour d'autres formulations du contact (pénalité, Lagrangien augmenté) [98]. Dans le cas du contact avec frottement de Tresca, la démarche est complètement similaire.

Nous avons effectué une analyse complète de la famille de méthodes obtenue, en montrant le caractère bien-posé du problème discrétisé, et en établissant la convergence en norme H^1, pour les cas 2D et 3D, et pour des éléments finis de Lagrange linéaires et quadratiques. Nous aboutissons à l'estimation optimale suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} + \|\gamma^{\frac{1}{2}}(\sigma_n(\mathbf{u}) + \frac{1}{\gamma}[P_\gamma(\mathbf{u}^h)]_+)\|_{0,\Gamma_C} \le Ch^{\frac{1}{2}+\nu}\|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega},$$

où le terme $\|\gamma^{\frac{1}{2}}(\sigma_n(\mathbf{u}) + \frac{1}{\gamma}[P_\gamma(\mathbf{u}^h)]_+)\|_{0,\Gamma_C}$ représente l'erreur de contact, et où la régularité de $\mathbf{u}$ est donnée par $\nu \in (0, k - \frac{1}{2}]$ ($k = 1, 2$ est le degré des éléments de Lagrange). Les conditions sur les paramètres de Nitsche nécessaires sont identiques à celles que l'on observe dans le cadre linéaire (i.e., dans le cas des conditions de Dirichlet) et résumées dans l'introduction à ce chapitre. La seule différence est que nous n'avons pas pu mettre en évidence une variante qui serait l'équivalent de la méthode anti-symétrique sans paramètre proposée par Burman dans le cadre des conditions de Dirichlet [54].

Un point très intéressant est que nous avons pu démontrer la convergence optimale de ces méthodes sans avoir recours à aucune hypothèse sur la topologie de la zone d'adhérence ou de régularité supplémentaire sur la solution dans la zone de contact. A ce jour et à notre connaissance, un tel résultat n'a pas pu être établi pour les autres méthodes.

Des expériences numériques en 2D et 3D, réalisées avec le logiciel GetFEM++ [5], sont venues complémenter l'analyse théorique de cette famille de méthodes. Elles ont permis de corroborer les résultats d'existence, d'unicité et de convergence optimale. Elles ont également mis en évidence l'intérêt pratique des méthodes non-symétrique $\theta = 0$ et anti-symétrique $\theta = -1$, qui permettent de choisir le paramètre de Nitsche γ_0 dans un intervalle plus étendu que celui pour la méthode symétrique $\theta = 1$. Ainsi l'algorithme de Newton généralisé converge mieux pour ces valeurs de θ, et la convergence optimale en norme H^1 est vérifiée également en pratique, même pour γ_0 relativement grand. La méthode non-symétrique $\theta = 0$, par sa simplicité, ouvre en plus des perspectives d'extensions au cadre de l'élasticité finie (non-linéaire).

Ce travail a été publié dans deux articles [10] [11], et un autre article est en cours de révision [13]. Il a été récemment présenté en congrès [33].

2.5 Méthode stabilisée par projections L^2 locales pour les domaines fictifs

Les méthodes de domaines fictifs permettent de s'affranchir des contraintes de conformité du maillage à la frontière naturelle d'un problème aux limites donné. Elles se sont très rapidement popularisées compte-tenu de leur intérêt pour la simulation de certains phénomènes physiques. Par exemple pour simuler l'évolution d'une structure mince immergée dans un fluide, on se heurte aux difficultés de reconstruction et d'adaptation efficace et robuste du maillage si l'on choisit une approche conforme pour mailler un domaine fluide dont la forme peut évoluer fortement au cours d'un calcul. Cette difficulté s'évanouit avec un traitement par domaines fictifs [39].

Une formulation classique pour ce type de méthode est celle proposée par Glowinski, Pan et Périaux [77] et analysée ensuite par Girault et Glowinski [75]. Cette formulation est basée sur un traitement faible de la condition de Dirichlet via un multiplicateur de Lagrange et nécessite alors une condition inf-sup discrète afin que le problème soit bien posé et converge de manière optimale. Elle se rapproche ainsi de la méthode initialement proposée par Babuška [40] mentionnée dans l'introduction au chapitre (voir la formulation (2.5)), la différence essentielle ici étant que le domaine utilisé pour la résolution numérique ne coïncide pas nécessairement avec le domaine physique, mais peut être plus simple par exemple.

Dans le cas d'une discrétisation naïve par éléments de Lagrange linéaires pour la variable primale, et par éléments constants par morceaux sur la frontière pour le multiplicateur, il faut alors satisfaire une contrainte géométrique sur les maillages pour que cette condition inf-sup soit vérifiée : la résolution du maillage associé au multiplicateur sur la frontière doit être plus grossière que celle du maillage associée à la variable primale (voir l'article de Girault et Glowinski [75] pour la caractérisation précise). Il peut être difficile en pratique d'assurer ce type de contrainte, en particulier pour les problèmes où la frontière évolue significativement en fonction du temps.

5. http ://download.gna.org/getfem/html/homepage/

Avec Gabriel Barrenechea (Université de Strathclyde, Royaume-Uni) nous avons proposé une extension de la méthode de Glowinski, Pan et Périaux [77] qui inclut une stabilisation par projections L^2 locales. Un terme de stabilisation de type projection L^2 est ajouté à la formulation variationnelle discrète, qui pénalise la distance à un espace de multiplicateurs pour lequel la condition inf–sup discrète uniforme est vérifiée [52, 53]. Ce terme permet de s'affranchir de la contrainte géométrique précédemment citée, et ainsi, d'utiliser par exemple comme maillage sur la frontière physique la trace du maillage sur le domaine global.

Nous avons effectué une analyse de stabilité et de convergence de la méthode, ainsi que des tests numériques sous Matlab$^{\text{TM}}$/Octave. Nous avons ainsi montré qu'une condition inf-sup uniforme était satisfaite pour le problème discret, et que la méthode converge de manière optimale en norme H^1 moyennant les bonnes hypothèses de régularité sur l'extension de la solution.

A noter que des approches similaires ont ensuite été proposées, dans un cadre plus général [55] et dans celui des éléments finis étendus ("X-FEM") [36].

Ce travail a fait l'objet d'un article [8].

Chapitre 3

Méthodes numériques pour les fluides et l'interaction fluide-structure

Nous décrivons ici les autres projets de recherche auxquels j'ai contribué après ma thèse, et qui peuvent être regroupés au sein d'une thématique assez large donnée dans le titre de ce chapitre. Ils présentent en général une dimension applicative plus forte. La Section 3.1 traite de deux approches pour adapter la méthode "Pararéelle" de parallélisation en temps à des problèmes couplés. La Section 3.2 concerne une méthode éléments finis pour la résolution d'un modèle asymptotique de fluide incompressible. Enfin, la Section 3.3 traite de modélisation par éléments finis du couplage hydro-élastique intervenant dans les plis vocaux.

3.1 Méthodes parallèles en temps

Lorsque l'on souhaite accélérer un calcul pour la résolution d'un problème d'évolution en temps, les méthodes de décomposition de domaine classiques (en espace) s'avèrent parfois insuffisantes pour la parallélisation. Dans certaines situations en effet le nombre de degrés de liberté en espace est faible, et l'on s'intéresse à des simulations en temps long. Dans d'autres cas, le gain apporté par la décomposition en un grand nombre de sous-domaines en espace peut être compensé par les pertes de temps liées aux transferts d'informations entre les différents processeurs au sein d'une architecture matérielle. Dans ces cas de figure, une décomposition de domaine en espace-temps serait souhaitable. C'est le but de la méthode d'intégration en temps "Pararéelle" proposée par Lions, Maday et Turinici en 2001 [87] (voir aussi [65]). Elle consiste à effectuer des calculs séquentiels rapides et peu précis, qui sont itérativement corrigés par des calculs plus fins sur chaque portion de l'intervalle de temps considéré. Ces calculs fins, et coûteux, peuvent être parallélisés en leur associant un processeur chacun. Ainsi cette méthode permet en théorie une résolution plus efficace sur architecture parallèle dans les deux cas de figure précédemment mentionnés.

3.1.1 Application à l'interaction fluide-structure

Dans un premier travail avec Miguel Fernández (INRIA CRI Paris-Rocquencourt), nous avons cherché à adapter cette méthode "Pararéelle" pour des problèmes d'interaction fluide-structure. Le verrou scientifique auquel nous nous sommes alors heurtés a été la stabilité de l'algorithme dans sa formulation originale. Celui-ci présente en effet de fortes instabilités numériques pour les problèmes hyperboliques de deuxième ordre, comme les problèmes d'élastodynamique (voir par exemple [65, 42, 60]). Une méthode alternative qui a été proposée par l'équipe de Farhat [66] puis reformulée et analysée par Gander et Petcu [72, 73] consiste à construire un espace de type Krylov à partir des prédictions fines, puis à projeter sur cet espace la prédiction grossière lors de la phase de correction. Cette approche donne des résultats convaincants, mais elle se limite aux problèmes linéaires. Nous avons introduit une extension de cette idée à des problèmes d'interaction fluide-structure simplifiés, qui permet de lever l'hypothèse de linéarité sur la partie fluide, et qui présente des meilleures propriétés de stabilité que la méthode standard.

Ce travail a été publié dans des actes de conférence [29].

3.1.2 Application au couplage éléments finis – lattice Boltzmann

Dans un deuxième travail avec Matteo Astorino et Alfio Quarteroni (EPFL, Lausanne) nous avons proposé une méthode parallèle en temps de type "Pararéelle" pour le couplage multi-échelles entre éléments finis (échelle macroscopique) et lattice Boltzmann (échelle mesoscopique), qui permet de profiter des caractéristiques intéressantes de l'une et de l'autre méthode sur chaque portion d'un domaine où évolue un fluide. Des expériences numériques avec le logiciel FreeFEM++ pour un problème parabolique modèle (équation de la chaleur) sont venues illustrer l'intérêt d'une telle stratégie, qui permet en particulier de s'affranchir de certaines limitations liées à la méthode de lattice Boltzmann, par exemple des difficultés pour traiter des bords courbes, et pour imposer des conditions limites autres que Dirichlet.

Ce travail a fait l'objet d'un article en cours de révision [12] et a été présenté en congrès [34].

3.2 Méthode d'éléments finis pour les équations RNS/P

Les équations de Navier-Stokes Réduites/Prandtl (RNS/P) sont obtenues asymptotiquement à partir des équations de Navier-Stokes incompressibles lorsque la longueur caractéristique du domaine dans la direction principale d'écoulement est prédominante sur les autres. Elles présentent un intérêt tout particulier pour les écoulements dans des tubes longs ou pour des surfaces libres de faible épaisseur [86]. Bien que cela ne soit pas leur seule motivation, elles ont principalement servi pour la modélisation d'écoulements en biomécanique, comme les écoulements sanguins [86], et elles intervenaient également dans mes travaux de thèse pour la description de l'écoulement d'air dans les voies aériennes supérieures [2].

Les équations RNS/P peuvent être formulées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u\,\partial_x u + v\,\partial_y u + \partial_x p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\partial^2_{yy} u & = & g & \text{dans}\,\Omega, \\ -\partial_y p & = & 0 & \text{dans}\,\Omega, \\ \partial_x u + \partial_y v & = & 0 & \text{dans}\,\Omega. \end{array} \right.$$

Ici Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et les inconnues (u, v) représentent les composantes longitudinales (en x) et transverses (en y) du champ de vitesse du fluide. L'inconnue p représente le champ de pression, g est le terme source (par exemple la gravité), et Re est le nombre de Reynolds. Il faut bien sûr rajouter des conditions limites qui sont classiques dans le cadre de la modélisation fluide (adhérence aux parois, débit imposé à l'entrée, et sortie libre par exemple). On remarquera que ces équations présentent seulement les termes contenus dans les équations de Navier-Stokes incompressibles qui sont significatifs pour les types d'écoulement étudiés, et que ces équations RNS/P sont proches des équations primitives de l'océan [38]. La différence majeure avec les équations primitives, sous leur forme la plus répandue, est l'anistropie forte du terme de diffusion, qui ne contient plus les dérivées secondes en x. Cette différence est à l'origine de difficultés mathématiques et numériques sérieuses, et il n'existe pas à notre connaissance de résultats d'existence et d'unicité des solutions pour ces équations.

Avec Gabriel Barrenechea (Université de Concepción, Chili) nous avons mis au point une méthode éléments finis pour la résolution de ces équations, plus robuste et plus souple que les méthodes existantes basées sur les différences finies. Notre approche s'appuie sur une discrétisation d'ordre peu élevé (pression constante par morceaux) combinée à un terme de stabilisation optionnel de type grad-div. Une analyse partielle de la méthode a été effectuée, et nous avons pu montrer une condition inf-sup discrète entre l'espace pour la pression et celui pour la vitesse. Nous avons également un résultat d'existence de solutions pour le problème discret, non-linéaire. Des tests numériques à l'aide du logiciel FreeFEM++ sont venus appuyer ces résultats, tout en montrant l'intérêt et les limites du modèle et de la méthode pour différentes géométries de conduites, ainsi que l'influence du terme de stabilisation.

Ensuite, avec Pierre-Yves Lagrée (Institut d'Alembert, Paris), nous avons travaillé à la validation de cette méthode éléments finis dans le cadre théorique de la double couche / triple couche. Dans ce cadre pertinent du point de vue de la mécanique des fluides, la méthode proposée a pu être comparée avec succès à des solutions analytiques et/ou calculées à l'aide d'autres méthodes (différences finies). Un point intéressant est que la nouvelle méthode éléments finis permet d'effectuer des prédictions dans des situations où il n'y a plus de solution analytique disponible et où les autres méthodes numériques échouent : par exemple dans des conduites où un obstacle sur la paroi présente une hauteur relative importante.

Deux articles ont été publiés sur cette thématique [4, 6].

3.3 Interaction fluide-structure pour les plis vocaux

Les plis vocaux, ou cordes vocales, constituent une entité essentielle en production de parole. Afin de mieux comprendre les fondements physiologiques et biomécaniques de la phonation, et d'aider ultérieurement à l'amélioration des traitements médico-chirurgicaux des pathologies des plis vocaux (kystes, polypes, etc), il est intéressant de mettre au point des outils numériques permettant de simuler leur comportement en vibration lors d'un acte de phonation.

Ainsi, avec Xavier Pelorson (GIPSA-Lab, Grenoble) et Fabrice Richard (FEMTO-ST, Besançon), nous avons étudié diverses approches pour la simulation par éléments finis du comportement en vibration d'une structure mince remplie d'un fluide incompressible, cette structure schématisant un pli vocal.

Un premier travail a donc consisté à effectuer l'analyse modale d'une structure élastique linéaire couplée à un fluide interne, en utilisant un modèle simplifié décrit dans l'ouvrage de Morand et Ohayon [90] (voir aussi [48]). Dans ce modèle, on considère un fluide parfait incompressible régi par les équations d'Euler. Celles-ci sont linéarisées car on étudie des petites vibrations autour d'un état d'équilibre puis reformulées en utilisant le potentiel du déplacement fluide. Ceci permet d'aboutir à une formulation particulièrement simple et élégante, de type *masse ajoutée*, où l'effet du fluide est uniquement d'ordre inertiel. Ainsi le problème discrétisé à résoudre possède la même structure qu'un problème aux valeurs propres généralisé obtenu pour l'analyse modale d'une structure élastique. L'effet du fluide s'y traduit uniquement par une modification de la matrice de masse.

Des premiers calculs effectués sous FreeFEM++ en 2D et en 3D ont donné des résultats encourageants, et permettront ultérieurement d'analyser des expériences réalisées au GIPSA-

Lab sur une maquette in-vitro des plis vocaux.

Ce travail est principalement réalisé avec Nicolas Hermant, qui effectue sa thèse sous la direction de Xavier Pelorson (GIPSA-Lab, Grenoble). Solenne Piart (ISIFC) y a contribué, lors de son stage de 3e année d'école d'ingénieur sous la supervision de Fabrice Richard et moi-même. Les premiers résultats ont été présentés en congrès [32].

Chapitre 4

Encadrement et responsabilités en recherche

Ce chapitre détaille ma participation à des encadrements d'étudiants dans le cadre de mes recherches, ainsi que d'autres aspects, tels que l'implication dans des projets et diverses responsabilités liées à la recherche.

4.1 Encadrement et co-encadrement d'étudiants

– **Thèses :**

1. **(09/2012–)** Co-directeur (*à 50 %*) de la thèse de Michel Duprez (Université de Franche-Comté), avec Farid Ammar-Khodja. Sujet : "Contrôlabilité d'équations paraboliques : aspects théoriques, numériques et application à la cancérologie". Bourse de la Région Franche-Comté.

   Le travail de Michel Duprez consiste actuellement à étudier un problème de contrôle optimal pour un système de type réaction-diffusion, comportant trois équations paraboliques non-linéaires couplées. Ce système intervient entre autres lors de la modélisation de l'effet d'un médicament lorsqu'il est délivré à une tumeur cancéreuse. Michel Duprez, lors de sa première année, s'est dédié a une étude approfondie des propriétés mathématiques du problème de contrôle optimal que nous lui avons proposé, et a déjà obtenu des premiers résultats très encourageants.

   Par la suite, il s'intéressera à la résolution numérique de ce problème, en essayant de proposer des méthodes efficaces, et en effectuant l'analyse mathématique de ces méthodes.

2. **(09/2011–)** Participation à la thèse de Nicolas Hermant (Grenoble-INP). Directeur de thèse : Xavier Pelorson (GISPA-Lab, Grenoble). Sujet : "Modélisation physique de pathologies des cordes vocales".

   Nicolas Hermant est déjà venu passer plusieurs séjours courts (pour un total de deux semaines environ) au Laboratoire de Mathématiques de Besançon pour travailler sur les aspects modélisation et simulation. Les résultats préliminaires que nous avons obtenus ont été présentés à la conférence ICVPB en 2012 (voir §3.3).

- **Stages de Master :**
  1. **(01/2012–06/2012)** Co-encadrant (*à 50 %*) du Stage de Master (M2 Mathématiques Approfondies) de Michel Duprez, avec Farid Ammar-Khodja. Sujet : "Contrôlabilité approchée, optimisation et résolution numérique d'équations de diffusion linéaires".
  2. **(01/2012–05/2012)** Encadrant (*à 100 %*) du Stage de Master (M1 Mathématiques Approfondies) d'Ester Baruffini. Sujet : "Quelques aspects mathématiques de la méthode des éléments finis".
  3. **(11/2011–03/2012)** Co-encadrant (*à 50 %*) du Stage de Fin d'Etudes (ISIFC, 3e année) de Solenne Piart, avec Fabrice Richard (FEMTO-ST, Besançon). Sujet : "Modélisation mécanique des cordes vocales".
- **Projets en Ecole d'Ingénieur (ISIFC) :**
  1. **(03/2013–06/2013)** Co-encadrant (*à 33 %*) du Projet de 2e Année "Cellule R&D" d'Alexis Roux et de Cécile Lamy, avec Fabrice Richard et Arnaud Lejeune. Sujet : "Un modèle éléments finis simplifié des cordes vocales".
  2. **(09/2012–12/2012)** Co-encadrant (*à 50 %*) du Projet de 3e Année "Cellule R&D" de Julie Buccheri, avec Fabrice Richard. Sujet : "Modélisation mécanique des cordes vocales".
  3. **(03/2012–06/2012)** Co-encadrant (*à 50 %*) du Projet de 2e Année "Cellule R&D" de Julie Buccheri, avec Fabrice Richard. Sujet : "Modélisation mécanique des cordes vocales".
  4. **(09/2011–11/2011)** Co-encadrant (*à 50 %*) du Projet de 3e Année "Cellule R&D" de Solenne Piart, avec Fabrice Richard. Sujet : "Modélisation mécanique des cordes vocales".
  5. **(03/2011–06/2011)** Encadrant (*à 100 %*) du Projet d'étude bibliographique 1re Année de Maxime Lelièvre, Adèle Nowak, Divya Pathack. Sujet : "Interaction neuromusculaire dans les voies aériennes supérieures".

4.2 Implication dans des projets de recherche avec financements

1. Membre du Groupe de Recherche (GdR) EGRIN - Ecoulements Gravitaires et RIsques Naturels. 192 membres au niveau national. Responsables scientifiques : Stéphane Cordier, Jacques Sainte-Marie.
2. BQR en 2013, obtenu à l'Université de Franche-Comté : "METEE. Modélisation en Eco-Toxicologie et Eco-Epidémiologie". Projet impliquant le Laboratoire de Mathématiques de Besançon (autre membre : Ulrich Razafison) et le Laboratoire Chrono-Environnement à Besançon (membres impliqués : Clémentine Fritsch, Patrick Giraudoux, Antoine Perasso, Francis Raoul, Renaud Scheifler). 5k euros.
3. BQR en 2013, obtenu à l'Université de Franche-Comté : "Méthodes efficaces de décomposition de domaine basées sur la relaxation d'ondes. Application à des problèmes multi-physiques", avec Pauline Klein. 8k euros.
4. Correspondant au Laboratoire de Mathématiques de Besançon du Projet régional PEG ("Prédiction de l'Evolution du Génome") financé par la Région Franche-Comté, et ayant débuté en Septembre 2012. 7 participants au sein du laboratoire. Responsables du projet :

Antoine Perasso (Chrono-Environnement, Besançon) et Christophe Guyeux (FEMTO-ST, Besançon). 5.5k euros (uniquement pour le LMB en 2013).

5. Projet ECOS-Sud/CONICYT (projet de coopération et d'échanges France-Chili), pour la période 2012 à 2014, financé par le comité ECOS-Sud : "FLUISP : Fluid-structure interaction in speech and its pathologies". Avec Yohan Payan (TIMC, Grenoble), Pascal Perrier (GIPSA-Lab, Grenoble), Erwin Hernández (USM, Chili) et Claudio Lobos (USM, Chili).
6. "Bourse de professeur invité" financée par l'Université de Franche-Comté pour inviter Gabriel Barrenechea (University of Strathclyde, Glasgow, Royaume-Uni) lors d'un séjour d'un mois en Avril 2013.
7. Projet PEPII (Projet Exploratoire Pluridisciplinaire Inter-Instituts) de 2011 à 2012, financé par le CNRS : "SIM2E : Simulation et identifiabilité de modèles en écologie : relation proie-prédateur et transmission d'*Echinococcus multilocularis*". Projet impliquant le Laboratoire de Mathématiques de Besançon (autre membre : Ulrich Razafison) et le laboratoire Chrono-Environnement à Besançon (membres impliqués : Patrick Giraudoux, Antoine Perasso, Francis Raoul). 11k euros.
8. BQR de 2011 à 2012, financé par l'Université de Franche-Comté : "Méthodes parallèles en temps pour les équations de Saint-Venant", avec Mihaï Bostan et Ulrich Razafison. 8k euros.

4.3 Responsabilités administratives

4.3.1 Au Laboratoire de Mathématiques de Besançon

1. **(2011–2013)** Responsable des séminaires de l'équipe ANCS.
2. **(2011–2013)** Responsable suppléant de l'équipe ANCS à la Commission Bibliothèque.
3. **(06/2012)** Participation au processus de sélection pour des postes d'ATER.
4. **(06/2012)** Membre du comité organisateur de la "Journée Numérique de Besançon" (1er Juin 2012, Besançon).
5. **(2010, 2011)** Participation au processus de sélection d'un ingénieur de recherche pour le LMB.

4.3.2 Laboratoire TIMC, équipe GMCAO

1. **(2003–2004)** Responsable de l'organisation des groupes de travail hebdomadaires.
2. **(2002, 2004)** Participation à l'organisation des conférences Surgetica (Grenoble 2002, Chambery 2004).

4.4 Rôle d'expertise scientifique

J'ai été sollicité pour les revues d'articles, de chapitre d'ouvrage et de projet suivantes :

1. un chapitre pour un ouvrage sur la réduction de modèles (conférences CECAM, Springer MS&A, 2013).

2. les revues *Applied Numerical Mathematics*, *Computers and Fluids*, *Medical & Biological Engineering & Computing*, *SIAM Journal on Scientific Computing.*

3. l'institution chilienne *Conicyt* (1 projet Fondecyt en 2009).

J'ai été également sollicité par l'American Mathematical Society en 2013 pour faire des revues sur la base de données MathSciNet.

Chapitre 5

Publications et communications

5.1 Publications

5.1.1 Revues internationales avec comité de lecture

Acceptées

[1] F. Chouly, A. Van Hirtum, P.-Y. Lagrée, J.-R. Paoli, X. Pelorson, and Y. Payan, *Simulation of the retroglossal fluid-structure interaction during obstructive sleep apnea*, Lecture Notes in Computer Science, 4072 (2006), pp. 48–57.

[2] F. Chouly, A. Van Hirtum, P.-Y. Lagrée, X. Pelorson, and Y. Payan, *Numerical and experimental study of expiratory flow in the case of major upper airway obstructions with fluid–structure interaction*, Journal of Fluids and Structures, 24 (2008), pp. 250–269.

[3] ——, *Modelling the human pharyngeal airway : validation of numerical simulations using in vitro experiments*, Medical and Biological Engineering and Computing, 47 (2009), pp. 49–58.

[4] G. R. Barrenechea and F. Chouly, *A finite element method for the resolution of the reduced Navier-Stokes/Prandtl equations*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 89 (2009), pp. 54–68.

[5] M. Astorino, F. Chouly, and M. A. Fernández, *Robin based semi-implicit coupling in fluid-structure interaction : stability analysis and numerics*, SIAM Journal on Scientific Computing, 31 (2009/10), pp. 4041–4065.

[6] F. Chouly and P.-Y. Lagrée, *Comparison of computations of asymptotic flow models in a constricted channel*, Applied Mathematical Modelling, 36 (2012), pp. 6061–6071.

[7] F. Chouly and N. Heuer, *A Nitsche-based domain decomposition method for hypersingular integral equations*, Numerische Mathematik, 121 (2012), pp. 705–729.

[8] G. R. Barrenechea and F. Chouly, *A local projection stabilized method for fictitious domains*, Applied Mathematics Letters, 25 (2012), pp. 2071–2076.

[9] F. Chouly and P. Hild, *On convergence of the penalty method for unilateral contact problems*, Applied Numerical Mathematics, 65 (2013), pp. 27–40.

[10] ——, *A Nitsche-based method for unilateral contact problems : numerical analysis*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 51 (2013), pp. 1295–1307.

[11] F. Chouly, *An adaptation of Nitsche's method to the Tresca friction problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (2013). To appear. http ://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.09.019.

Soumises

[12] M. Astorino, F. Chouly, and A. Quarteroni, *Multiscale coupling of finite element and lattice Boltzmann methods for time dependent problems*, (2012). hal-00776619. Under revision in Journal of Computational Physics.

[13] F. Chouly, P. Hild, and Y. Renard, *Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche's method for contact problems in elasticity : theory and numerical experiments*, (2013). hal-00776619. Under revision in Mathematics of Computation.

5.1.2 Note aux Comptes-Rendus

[14] M. Astorino, F. Chouly, and M. A. Fernández, *An added-mass free semi-implicit coupling scheme for fluid-structure interaction*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 347 (2009), pp. 99–104.

5.1.3 Chapitre de livre

[15] A. Van Hirtum, F. Chouly, P.-Y. Lagrée, J.-R. Paoli, Y. Payan, and X. Pelorson, *When a fluid-structure interaction keeps you awake : a physical approach to Obstructive Sleep Apnea.*, in Progress in Sleep Apnea Research, R. T. Ferber, ed., Nova Science Publishers, 2007, pp. 41–76.

5.1.4 Comptes-rendus de colloques

[16] C. Marécaux, M. Chabanas, V. Luboz, A. Pedrono, F. Chouly, P. Swider, Y. Payan, and F. Boutault, *Maxillofacial computer aided surgery : a 5 years experience and future*, in Proceedings of the First International Conference Surgetica'2002. Computer-Aided Medical Interventions : tools and applications, Sauramps Medical Editors, 2002, pp. 185–190.

[17] M. Chabanas, C. Marécaux, F. Chouly, Y. Payan, and F. Boutault, *Evaluating soft tissue simulation for computer-aided orthognatic surgery using pre and post-operative CT scan*, Computer Aided Surgery, 8 (2003), pp. 157–158. Proceedings of the First International Symposium on Computer Aided Surgery around the Head, CAS-H, 2003.

[18] C. Marécaux, B.-M. Sidjilani, M. Chabanas, F. Chouly, Y. Payan, and F. Boutault, *A new 3D cephalometric analysis for planning in computer aided orthognatic surgery*, Computer Aided Surgery, 8 (2003), p. 217. Proceedings of the First International Symposium on Computer Aided Surgery around the Head, CAS-H, 2003.

[19] A. Van Hirtum, F. Chouly, A. Teulé, Y. Payan, and X. Pelorson, *In-vitro study of pharyngeal pressure losses at the origin of obstructive sleep apnea*, in Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE Engineering In Medicine And Biology Society, IEEE, 2003, pp. 371–374.

[20] A. Van Hirtum, F. Chouly, A. Teulé, C. Vilain, Y. Payan, and X. Pelorson, *Obstructive sleep apnea syndrome. Part 1 : In-vitro study of the fluid-structure interaction*, Archives of Physiology and Biochemistry, 111 (2003), p. 60. Actes de la conférence de la Société Française de Biomécanique (SFB), 2003.

[21] F. Chouly, A. Van Hirtum, X. Pelorson, and Y. Payan, *Obstructive sleep apnea syndrome. Part 2 : computer simulation of the fluid-structure interaction*, Archives of Physiology and Biochemistry, 111 (2003), p. 54. Actes de la conférence de la Société Française de Biomécanique (SFB), 2003.

[22] M. Chabanas, C. Marécaux, F. Chouly, F. Boutault, and Y. Payan, *Evaluating soft tissue simulation in maxillofacial surgery using pre and post-operative CT scan*, in Proceedings of the 18th International Conference on Computer Assisted Radiology and Surgery, CARS 2004. International Congress Series (ICS), vol. 1268, Elsevier, 2004, pp. 419–424.

[23] F. Chouly, A. Van Hirtum, P.-Y. Lagrée, X. Pelorson, and Y. Payan, *Reproduction of hypopnea phenomenon using a physical and numerical model*, in Proceedings of the 6th International Symposium on Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering, CMBBE 2004, J. Middleton, N. Shrive, and M. Jones, eds., FIRST Numerics Ltd, ISBN 0-9549670-0-3 (CD ROM, 6 pages), 2004.

[24] F. Chouly, Y. Payan, and J.-R. Paoli, *Simulation de l'interaction entre air inspiré et tissus pharyngés pour l'aide au planning en chirurgie maxillo-faciale*, Revue de Stomatologie et de Chirurgie Maxillo-Faciale, 106 (2005), pp. 1S11–1S12. Actes du 41e Congrès Français et 2e Congrès International Francophone de Stomatologie et Chirurgie Maxillo-Faciale, 2005.

[25] F. Chouly, Y. Payan, M. Tiberge, and J.-R. Paoli, *Simulation de l'interaction entre air inspiré et tissus pharyngés lors d'un épisode apnéique pour l'aide au planning en chirurgie maxillo-faciale*, in Actes du 20e congrès de la Société Française de Recherche sur le Sommeil, 2005, p. 87.

[26] F. Chouly, A. Van Hirtum, P.-Y. Lagrée, X. Pelorson, and Y. Payan, *Fluid-structure interaction in Obstructive Sleep Apnea : validation of numerical simulations using in-vitro measurements*, Journal of Biomechanics, 39 (Suppl. 1) (2006), p. S441. Proceedings of the 5th World Congress of Biomechanics, 2006.

[27] M. Astorino, F. Chouly, and M. A. Fernández, *An added-mass free semi-implicit coupling scheme for fluid-structure interaction*, in Proceedings of the Fourth Meeting on Numerical Analysis of Partial Differential Equations, Santiago Numerico I, 2009, p. 11.

[28] ——, *An added-mass free semi-implicit coupling scheme for fluid-structure interaction arising in blood flows*, in Proceedings of the International Conference "Fluid and Elasticity", 2009, p. 68.

[29] F. Chouly and M. A. Fernández, *An enhanced Parareal algorithm for partitioned parabolic-hyperbolic coupling*, in International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2009, vol. 1168 of AIP Conference Proceedings, AIP, 2009, pp. 1517–1520.

[30] M. Astorino, F. Chouly, and M. A. Fernández, *Fast numerical methods for fluid-structure interaction problems arising in blood flows*, in Proceedings of the Third Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations, WONAPDE, 2010. (abstract available on HAL : hal-00865205).

[31] F. Chouly and N. Heuer, *A Nitsche-based domain decomposition for hypersingular integral equations*, in Proceedings of the Fifth Meeting on Numerical Analysis of Partial Differential Equations, Santiago Numerico II, 2010, p. 29.

[32] N. Hermant, X. Pelorson, F. Chouly, and F. Richard, *Finite element model of a vocal fold replica*, in 8th International Conference on Voice Physiology and Biomechanics, ICVPB, 2012. (abstract available on HAL : hal-00826523).

[33] F. Chouly, P. Hild, and Y. Renard, *A Nitsche-based method for contact and friction problems*, in Proceedings of The 3rd International Conference on Computational Contact Mechanics, ICCCM, 2013, pp. 141–142.

[34] F. Chouly, M. Astorino, A. Lozinski, and A. Quarteroni, *A parareal multiscale coupling of finite element and lattice Boltzmann methods*, in Proceedings of The International Conference on Scientific Computation And Differential Equations, SciCADE, 2013, pp. 90–91.

5.2 Communications

5.2.1 Conférences sur invitation personnelle

1. 5e Conférence Internationale “World Congress of Biomechanics” WCB 2006. Munich, Allemagne. Juillet 2006.

   Invitation à la session “Respiratory Mechanics FSI – Aerodynamics and vibrations” organisée par Matthias Heil et Chris Bertram.

2. 7e Conférence Internationale “International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics” ICNAAM 2009. Rethymno, Grèce. Septembre 2009.

   Invitation au mini-symposium “Recent Advances on the Parareal in Time Algorithms” organisé par Yvon Maday.

3. 3e Conférence Internationale “Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations” WONAPDE 2010. Concepción, Chili. Janvier 2010.

   Invitation au mini-symposium “Numerical Methods in Life Sciences Modeling” organisé par Mauricio Sepúlveda.

4. Conférence Internationale “International Conference on Scientific Computation and Differential Equations” SciCADE 2013. Valladolid, Espagne. Septembre 2013.

   Invitation au mini-symposisum “Recent advances on parareal algorithms” organisé par Frédéric Legoll et Yvon Maday.

5.2.2 Communications à des colloques, avec sélection sur résumés

Internationaux

1. 6e Conférence Internationale “Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering” CMBBE 2004. Madrid, Espagne. Février 2004.

2. 3e Conférence Internationale "Symposium on Biomedical Simulation" ISBMS 2006. Zurich, Suisse. Juillet 2006.
3. 4e Conférence Internationale "Fourth Meeting on Numerical Analysis of Partial Differential Equations" Santiago Numerico I. Santiago, Chili. Janvier 2009.
4. 1re Conférence Internationale "Fluid and Elasticity" 2009. Carry-Le-Rouet, France. Juin 2009.
5. 3e Conférence Internationale "International Conference on Computational Contact Mechanics" ICCCM 2013. Lecce, Italie. Juillet 2013.

Nationaux

1. 28e Congrès de la Société Française de Biomécanique (SFB). Poitiers, Septembre 2003. *(poster)*
2. 41e Congrès Français et 2e Congrès International Francophone de Stomatologie et Chirurgie Maxillo-Faciale. Marseille. Septembre 2005.
3. 20e Congrès de la Société Française de Recherche sur le Sommeil. Lyon. Novembre 2005. *(poster)*

5.2.3 Communications diverses

Communication à un colloque, sans sélection

1. 10e Congrès "European Finite Element Fair 2012". Bilbao, Espagne. Juin 2012.

Communications à des journées thématiques

1. "Journée des Thésards en Mathématiques Appliquées" au Laboratoire de Modélisation et Calcul. Université Joseph Fourier et Grenoble-INP, Grenoble. Avril 2003.
2. Journée de Séminaires Croisés LMB/FEMTO. Laboratoire de Mathématiques de Besançon. Université de Franche Comté, Besançon. Décembre 2012.

Communications orales à des séminaires de laboratoires

1. Séminaire à l'Institut de la Communication Parlée. Grenoble-INP et Université Stendhal, Grenoble. Avril 2005.
2. Séminaire au Département de Génie Mathématique. Universidad de Concepción, Concepción, Chili. Avril 2007.
3. Séminaire du Projet REO. INRIA CRI Paris-Rocquencourt. Juillet 2008.
4. Séminaire au GIPSA-Lab, Département Parole et Cognition. Grenoble-INP et Université Stendhal, Grenoble. Avril 2009.
5. Séminaire au Département de Génie Mathématique. Universidad de Concepción, Concepción, Chili. Mai 2009.
6. Séminaire au Département de Mécanique des Structures et de Géotechnique. Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chili. Mai 2009.
7. Séminaire au Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Equipe ANCS. Université de Franche-Comté, Besançon. Mai 2010.

8. Séminaire au Laboratoire TIMC, équipe GMCAO. Université Joseph Fourier et Grenoble-INP, Grenoble. Janvier 2011.
9. Séminaire d'Analyse Numérique au Département de Mathématiques et Statistiques. Université de Strathclyde, Glasgow, Royaume Uni. Octobre 2011.
10. Séminaire au GIPSA-Lab, Département Parole et Cognition. Grenoble-INP et Université Stendhal, Grenoble. Avril 2012.
11. Séminaire à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, Equipe MIP. Université Paul Sabatier, Toulouse. Juin 2013.

Communications orales à des groupes de travail

1. Groupes de travail de l'équipe GMCAO du Laboratoire TIMC, Université Joseph Fourier et Grenoble-INP, Grenoble. Trois exposés en Mai 2003, en Avril 2004 et Mai 2005.
2. Groupes de travail du projet ANR PITAC ("Parallélisation Incluant le Temps pour Accélérer les Calculs"). Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris. Deux exposés en Avril et Juillet 2008.

Références externes

[35] P. Alart and A. Curnier, *A generalized Newton method for contact problems with friction*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 7 (1988), pp. 67–82.

[36] S. Amdouni, M. Moakher, and Y. Renard, *A local projection stabilization of fictitious domain method for elliptic boundary value problems*, hal-00845770, (2013). Submitted.

[37] D. Arnold, *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 19 (1982), pp. 742–760.

[38] P. Azérad and F. Guillén, *Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 33 (2001), pp. 847–859.

[39] F. P. T. Baaijens, *A fictitious domain/mortar element method for fluid-structure interaction*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 35 (2001), pp. 743–761.

[40] I. Babuška, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numerische Mathematik, 20 (1972/73), pp. 179–192.

[41] ——, *The finite element method with penalty*, Mathematics of Computation, 27 (1973), pp. 221–228.

[42] G. Bal and Q. Wu, *Symplectic parareal*, in Domain decomposition methods in science and engineering XVII, vol. 60 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, Berlin, 2008, pp. 401–408.

[43] H. J. C. Barbosa and T. J. R. Hughes, *The finite element method with Lagrange multipliers on the boundary : circumventing the Babuška-Brezzi condition*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 85 (1991), pp. 109–128.

[44] ——, *Boundary Lagrange multipliers in finite element methods : error analysis in natural norms*, Numerische Mathematik, 62 (1992), pp. 1–15.

[45] J. W. Barrett and C. M. Elliott, *Finite element approximation of the Dirichlet problem using the boundary penalty method*, Numerische Mathematik, 49 (1986), pp. 343–366.

[46] R. Becker, P. Hansbo, and R. Stenberg, *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids*, M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 37 (2003), pp. 209–225.

[47] F. Ben Belgacem, *The mortar finite element method with Lagrange multipliers*, Numerische Mathematik, 84 (1999), pp. 173–197.

[48] A. Bermúdez, R. Rodríguez, and D. Santamarina, *A finite element solution of an added mass formulation for coupled fluid-solid vibrations*, Numerische Mathematik, 87 (2000), pp. 201–227.

[49] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera, *Domain decomposition by the mortar element method*, in Asymptotic and numerical methods for partial differential equations with critical parameters (Beaune, 1992), vol. 384 of NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, pp. 269–286.

[50] ——, *A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method*, in Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XI (Paris, 1989–1991), vol. 299 of Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, pp. 13–51.

[51] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle, Série Rouge : Analyse Numérique, 8 (1974), pp. 129–151.

[52] F. Brezzi and M. Fortin, *A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods*, Numerische Mathematik, 89 (2001), pp. 457–491.

[53] E. Burman, *Pressure projection stabilizations for Galerkin approximations of Stokes' and Darcy's problem*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 24 (2008), pp. 127–143.

[54] ——, *A penalty-free nonsymmetric Nitsche-type method for the weak imposition of boundary conditions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 50 (2012), pp. 1959–1981.

[55] ——, *Projection stabilisation of Lagrange multipliers for the imposition of constraints on interfaces and boundaries*, ArXiv e-prints, (2012).

[56] P. Causin, J.-F. Gerbeau, and F. Nobile, *Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194 (2005), pp. 4506–4527.

[57] M. Chernov, A. Maischak and E. Stephan, *A priori error estimates for hp penalty bem for contact problems in elasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering, 196 (2007), pp. 3871–3880.

[58] A. Chorin, *On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations*, Mathematics of Computation, 23 (1969), pp. 341–353.

[59] M. Costabel, *Boundary integral operators on Lipschitz domains : elementary results*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 19 (1988), pp. 613–626.

[60] X. Dai and Y. Maday, *Stable parareal in time method for first- and second-order hyperbolic systems*, SIAM Journal on Scientific Computing, 35 (2013), pp. A52–A78.

[61] A. Dervieux, *Fluid-structure interaction*, Hermes, Paris, 2000.

[62] M. Discacciati and A. Quarteroni, *Navier-Stokes/Darcy coupling : modeling, analysis, and numerical approximation*, Revista Matemática Complutense, 22 (2009), pp. 315–426.

[63] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.

[64] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, vol. 159 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2004.

[65] C. Farhat and M. Chandesris, *Time-decomposed parallel time-integrators : theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid-structure applications*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 58 (2003), pp. 1397–1434.

[66] C. Farhat, J. Cortial, C. Dastillung, and H. Bavestrello, *Time-parallel implicit integrators for the near-real-time prediction of linear structural dynamic responses*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 67 (2006), pp. 697–724.

[67] M. A. Fernández, *Coupling schemes for incompressible fluid-structure interaction : implicit, semi-implicit and explicit*, S$\vec{e}$MA Journal, no. 55, (2011), pp. 59–108.

[68] M. A. Fernández, L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, and A. Quarteroni, *The derivation of the equations for fluids and structure*, in Cardiovascular mathematics, vol. 1 of MS&A. Model. Simul. Appl., Springer Italia, Milan, 2009, pp. 77–121.

[69] M. A. Fernández and J.-F. Gerbeau, *Algorithms for fluid-structure interaction problems*, in Cardiovascular mathematics, vol. 1 of MS&A. Model. Simul. Appl., Springer Italia, Milan, 2009, pp. 307–346.

[70] M. A. Fernández, J.-F. Gerbeau, and C. Grandmont, *A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 69 (2007), pp. 794–821.

[71] A. Fritz, S. Hüeber, and B. I. Wohlmuth, *A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity*, Calcolo, 41 (2004), pp. 115–137.

[72] M. Gander and M. Petcu, *Analysis of a modified parareal algorithm for second-order ordinary differential equations*, in CP936, Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference, 2007.

[73] M. Gander and M. Petcu, *Analysis of a Krylov subspace enhanced parareal algorithm for linear problems*, in Paris-Sud Working Group on Modelling and Scientific Computing 2007–2008, vol. 25 of ESAIM Proc., EDP Sci., Les Ulis, 2008, pp. 114–129.

[74] G. N. Gatica, M. Healey, and N. Heuer, *The boundary element method with lagrangian multipliers*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 25 (2009), pp. 1303–1319.

[75] V. Girault and R. Glowinski, *Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem*, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 12 (1995), pp. 487–514.

[76] R. Glowinski and P. Le Tallec, *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*, vol. 9 of SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989.

[77] R. Glowinski, T. Pan, and J. Périaux, *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 111 (1994), pp. 283–303.

[78] J. L. Guermond, P. Minev, and J. Shen, *An overview of projection methods for incompressible flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195 (2006), pp. 6011–6045.

[79] P. Hansbo, *Nitsche's method for interface problems in computational mechanics*, GAMM-Mitteilungen, 28 (2005), pp. 183–206.

[80] J. Haslinger, I. Hlaváček, and J. Nečas, *Handbook of Numerical Analysis (eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions)*, vol. IV, North Holland, 1996, ch. 2. "Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics", pp. 313–385.

[81] M. Healey and N. Heuer, *Mortar boundary elements*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 48 (2010), pp. 1395–1418.

[82] P. Hild and Y. Renard, *An improved a priori error analysis for finite element approximations of Signorini's problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 50 (2012), pp. 2400–2419.

[83] T. J. R. Hughes and L. P. Franca, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions : symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 65 (1987), pp. 85–96.

[84] N. Kikuchi and J. T. Oden, *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, vol. 8 of SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1988.

[85] N. Kikuchi and Y. J. Song, *Penalty-finite-element approximation of a class of unilateral problems in linear elasticity*, Quarterly of Applied Mathematics, 39 (1981), pp. 1–22.

[86] P.-Y. Lagrée and S. Lorthois, *The RNS/Prandtl equations and their link with other asymptotic descriptions : application to the wall shear stress scaling in a constricted pipe*, International Journal of Engineering Science, 43 (2005), pp. 352–378.

[87] J.-L. Lions, Y. Maday, and G. Turinici, *Résolution d'EDP par un schéma en temps "pararéel"*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique, 332 (2001), pp. 661–668.

[88] Y. Maday, *Analysis of coupled models for fluid-structure interaction of internal flows*, in Cardiovascular mathematics, vol. 1 of MS&A. Model. Simul. Appl., Springer Italia, Milan, 2009, pp. 279–306.

[89] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[90] H. J.-P. Morand and R. Ohayon, *Interactions fluides-structures*, vol. 23 of Recherches en Mathématiques Appliquées, Masson, Paris, 1992.

[91] J. Nitsche, *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 36 (1971), pp. 9–15.

[92] J. Oden and N. Kikuchi, *Finite element methods for constrained problems in elasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18 (1982), pp. 701–725.

[93] J. Oden and S. Kim, *Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics*, Computers & Mathematics with Applications, 8 (1982), pp. 35–56.

[94] K. Perktold, M. Prosi, and P. Zunino, *Mathematical models of mass transfer in the vascular walls*, in Cardiovascular mathematics, vol. 1 of MS&A. Model. Simul. Appl., Springer Italia, Milan, 2009, pp. 243–278.

[95] C. S. Peskin, *The immersed boundary method*, Acta Numerica, 11 (2002), pp. 479–517.

[96] J. Pitkäranta, *Boundary subspaces for the finite element method with Lagrange multipliers*, Numerische Mathematik, 33 (1979), pp. 273–289.

[97] ——, *Local stability conditions for the Babuška method of Lagrange multipliers*, Mathematics of Computation, 35 (1980), pp. 1113–1129.

[98] Y. Renard, *Generalized Newton's methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 256 (2013), pp. 38–55.

[99] R. Stenberg, *On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 63 (1995), pp. 139–148. International Symposium on Mathematical Modelling and Computational Methods Modelling 94 (Prague, 1994).

[100] R. Temam, *Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 96 (1968), pp. 115–152.

[101] V. Thomée, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, vol. 25 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[102] B. Wohlmuth, *Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems*, Acta Numerica, (2011), pp. 569–734.

Deuxième partie

Articles annexés

Liste des articles annexés

Sont annexés ici les articles suivants, dans l'ordre décrit ci-dessous :

1. pp. 46–70 : "Robin based semi-implicit coupling in fluid-structure interaction : stability analysis and numerics", paru en 2009 dans *SIAM Journal on Scientific Computing* [5].

2. pp. 71–95 : "A Nitsche-based domain decomposition method for hypersingular integral equations", paru en 2012 dans *Numerische Mathematik* [7].

3. pp. 96–109 : "On convergence of the penalty method for unilateral contact problems", paru en 2013 dans *Applied Numerical Mathematics* [9].

4. pp. 110–122 : "A Nitsche-based method for unilateral contact problems : numerical analysis" paru en 2013 dans *SIAM Journal on Numerical Analysis* [10].

5. pp. 123–148 : "Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche's method for contact problems in elasticity : theory and numerical experiments", en révision actuellement dans *Mathematics of Computation* [13].

6. pp. 149–166 : "An adaptation of Nitsche's method to the Tresca friction problem", à paraître dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications* [11].

7. pp. 167–172 : "A local projection stabilized method for fictitious domains", paru en 2012 dans *Applied Mathematics Letters* [8].

8. pp. 173–204 : "Multiscale coupling of finite element and lattice Boltzmann methods for time dependent problems", en révision actuellement dans *Journal of Computational Physics* [12].

9. pp. 205–219 : "A finite element method for the resolution of the Reduced Navier-Stokes / Prandtl equations", paru en 2009 dans *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* [4].

10. pp. 220–230 : "Comparison of computations of asymptotic flow models in a constricted channel", paru en 2012 dans *Applied Mathematical Modelling* [6].