

# THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE  
FRANCHE-COMTÉ  
Spécialité Sciences pour l'Ingénieur

## **DE L'ELABORATION D'UN MODELE NUMERIQUE A LA PREDICTION DU COMPORTEMENT DE STRUCTURES MINCES EN ALLIAGE A MEMOIRE DE FORME**

par

Benoit VIEILLE

soutenue le 2 décembre 2003 devant la commission d'examen :

Rapporteurs	F. LEBON	Professeur, Université de Provence Aix-Marseille 1
	E. PATOOR	Professeur, ENSAM Metz
Examineurs	G. CAILLETAUD	Professeur, Ecole des Mines de Paris
	N. CHAILLET	Professeur, Université de Franche-Comté
Directeurs de thèse	M.L. BOUBAKAR	H.D.R. - Maître de Conférences, ENSMM Besançon
	C. LEXCELLENT	Professeur, ENSMM Besançon



“Un intellectuel assis va moins loin qu’un con qui marche...”

Michel Audiard

*à la Madré et au Padré  
à Christelle*

---

# Remerciements

---

Quand on partait de bon matin, quand on partait sur les chemins, à bicyclette ! Comme je n'avais pas d'avenir dans la chanson... alors je suis parti dare-dare à vélo sur les routes de la science. Des routes de quelques millions d'années, jalonnées de bornes en marbre, en diamant, en béton armé, en or, en craie ou en ferraille qui sonne creux. Où l'on croise des borgnes, des aveugles, des rois, des jardiniers, des fous, des jongleurs et des ménestrels en quête de leurs vérités. Ils se répartissent en deux catégories. Ceux qui croient détenir la vérité. Ils prennent les autoroutes. Ceux qui la cherchent. Ils musardent sur des sentiers parfois sans issue. Mais la science a des racines que seule l'innocence sait arroser.

J'étais tranquille, j'étais peinard, le cycliste ne fréquente pas les autoroutes. Je me suis retrouvé en rase-campagne. J'avancais peu mais sûrement. J'ai commencé à apprendre. Newton, c'est un mec, que si les pommes elles tombent par terre, que c'est grâce à lui ! Pythagore aimait les triangles bien rectangles. Hypocrate a fait des serments hypocrites sur les docks tard le soir. L'eau mouille. Le ciel est bleu. Les femmes ont des secrets. 1515, c'est Marignan. In vino veritas. Un et un font deux. Tant va la cruche à l'eau, qu'un jour, elle se casse ! La tome de savoie est constituée d'atomes, il faut le savoir ! Dans les circonvolutions du cerveau, s'amoncellent une foule de souvenirs et de connaissances. Un gros courant d'air suffit juste parfois à débloquer tout ça. Le cerveau : comment ça marche ? En résumé, c'est très simple :

Naissance rime avec innocence. L'innocent ne sait rien, il apprend tout. Les sens font carburer le moteur des hommes. Mozart est la musique. Sans les lumières, pas d'images. L'argent n'a pas d'odeur surtout quand on n'en a pas. Et quand on n'a pas de talent, il faut au moins avoir du goût ! Et là peut-être seulement, on commence à effleurer du doigt nos vérités et des vérités propres à tous qui ne nous appartiendront jamais.

Le petit bonhomme que je suis a grandi malgré tout. Il a appris pour la vie à faire du vélo. Ensuite, il a cherché son chemin. S'est perdu parfois. A crevé souvent. Ne voulait pas repartir. Est reparti. Il a capitalisé. A ouvert les yeux sur des choses qu'ils n'avait jamais vues. La vue brouillée de larmes dans les descentes, la vue brouillée de sueur dans les cotes. Autant dire qu'à chaque instant, il risquait la gamelle. Einstein disait de la vie qu'elle est comme une bicyclette : il faut avancer pour ne pas perdre l'équilibre ! Ainsi fut dit, ainsi fut fait. Le petit bonhomme a découvert ses vérités.

Bref, si cette histoire se finit bien, je le dois d'abord à moi-même. Benoit, si tu nous écoutes : Merci ! Pour tous ces coups-de-pieds au derche que tu as sû te mettre, une forme d'élan comme une autre... pour avoir serré les dents malgré les aphtes et les caries au plus dur de la pente, tu as morflé ! Car, comme dit le proverbe Chinois (avant de commencer le repas) : chat-riz-thé bien ordonnée, commence par soie même ! Nombreuses sont les personnes que j'ai rencontrées sur ce chemin de thèse. Certaines ont compté, d'autres moins. Oh ! J'ai souffert. Et quand bien même je souffrais, je n'ai jamais cessé d'espérer. J'ai été porté souvent par la foi que toutes ces personnes ont bien voulu mettre en moi. Pour leur rendre l'hommage qu'ils méritent, il n'y a pas vraiment de mots. Juste une part d'eux mêmes qu'ils m'ont donnée et que je veux rendre maintenant. A défaut d'être grand, permettez-moi d'être fou ! La folie des grandeurs, tout le problème est là :

“Don Salluste : Et maintenant Blaze, flatte-moi !

Blaze : Monseigneur est le plus grand de tous les grands d'Espagne.

Don Salluste : Ce n'est pas une flatterie, c'est la vérité !

Blaze : J'en ai bien une mais j'ose pas....

Don Salluste : Allez-y, allez-y !

Blaze : Monseigneur est beau !

Don Salluste : Vous pensez ce que vous dites ?

Blaze : Bein... je flatte !”

Toute ressemblance avec des lieux, des personnages ou des événements existant ou ayant existé n'est absolument pas fortuite. Elle est vivement souhaitée et ne saurait être le fruit du hasard de quelque façon que ce soit.

Pierrick, le Père Hic, grand amateur de hockey qui n'est jamais d'accord... avec ni vous, ni nous !!! Oh ! Qu'est-ce que vous nagez bien chef ! Pas de doutes, le roi de la mauvaise foi, c'est LUI ! Cet homme est un roc aux mains de fer dans des gants de velours.

Jeff, el tartuffo, le seul Lozèrinois que je connaisse. Il est un vent de libération de l'esprit. Sa sagesse n'a d'égale que son intelligence. Je lui dois certainement beaucoup plus qu'un chapitre de cette thèse !

Cyril, le gazier de Rochefort sur Nenon. Un coeur gros comme ça ! Une clairvoyance hors norme. Avec lui, ça biche toujours un max quand il y a des “bounchs”...

Pascal ou l'aut' Toto, Mister White, qui, malgré les apparences est loin d'être un fantôme. Toujours un exemple à suivre. J'essaye...

Paulo, amateur de demi-pizza. Comme moi, il n'y connaît rien en pinard ! Surtout pas une raison pour le traiter de connard, sauf si on aime les salsifis à la volée...

Christophe, le compagnon de mes débuts dans la recherche. Il avait raison : “c'est pas aussi simple que ça...” surtout quand on porte des lunettes !

Guillaume, pionnier de la Gazette et compagnon cycliste des virées sur les routes de la région. On n'a pas eu l'Alsace et la Lorraine, mais on a eu Guillaume...

Violaine, Séverine et Holi, qui ont apporté leur charme et leur finesse dans ce monde de bons, de brutes et de truands...

Jérôme, M.C. ! Depuis qu'il paternise pour la seconde fois, il rouflaquette, il boit du café mais il est moins speed.

Karl, berrichon calme aux épaules larges, le genre de gars dont on ne voudrait pas qu'il vous hydroforme !

Hugo, Huguy-les-bons-tuyaux, improvisateur qui improvise, quittant ces lieux par un toujours sympathique et jovial "Bonne soirée les amis".

Sébastien, qui m'a permis de me divertir en 24 heures chrono !

David, Gwenaël, notre vieux motard que jamais breton. Il finira bien un jour par nous danser une petite jigüe debout sur une table au Casub, la main sur le coeur en chantant l'hymne Suisse.

Robi, un homme d'expériences ! Il a sû tirer le meilleur des aémèfes sur sa machine de traction.

Fred, pour la relecture, sa bonne humeur et ses tisanes trop chaudes.

Pascal V., sans qui, je n'aurais sûrement pas réussi à obtenir un document d'une qualité typographique exceptionnelle !

Lamine, Zeulamailleu, Ali Bouba, James Boub, Boubalix, Boubaccini, le petit Boubacet. Tous ces personnages qui ont bercé l'enfance du thésard. Dostoïevsky disait des grandes idées qu'elles étaient davantage le fruit d'un grand coeur que d'une grande intelligence. Celles de Lamine trouvent leurs échos dans les deux. Mais, comme tous les grands esprits, c'est un courant d'air !

Christian L'excellent, une des fées qui se sont penchées sur le berceau des aémèfes. Si je suis tombé dans la thèse, c'est sa faute (pour les mauvais moments) ! Ou grâce à lui (pour les bons). Désormais, il se méfiera des ritals à l'oeil choucrouteux. Je me le permets aujourd'hui, moi, le petit impertinent ! Il m'a mis le pied à la pédale. Je lui en suis reconnaissant.

Je remercie également les membres du jury. Les rapporteurs de cette thèse, les Professeurs Frédéric Lebon et Etienne Patoor. Le Président du jury, le Professeur Georges Cailletaud et le Professeur Nicolas Chaillet. Leurs remarques et leurs critiques ont permis de parfaire ce travail.

Arrivé au sommet de cette aventure, je descends de mon vélo et j'admire le paysage. Je reprends mon souffle et j'existe. Mais la route est encore longue...

*Vanitas vanitatum et omnia vanitas.*



---

# Table des matières

---

<b>Notations</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Le Monde des Alliages à Mémoire de Forme</b>	<b>5</b>
1.1 Caractéristiques micromécaniques des alliages à mémoire de forme . . . . .	6
1.1.1 Transitions de phase . . . . .	6
1.1.2 Processus de transition . . . . .	7
1.1.3 Cinétiques de transition . . . . .	9
1.2 Propriétés fonctionnelles des AMF . . . . .	10
1.2.1 L'effet superélastique . . . . .	10
1.2.2 L'effet mémoire simple sens . . . . .	11
1.2.3 L'effet mémoire double sens . . . . .	12
1.2.4 L'effet caoutchoutique . . . . .	12
1.2.5 L'effet amortissant . . . . .	13
1.3 Les différentes familles d'AMF . . . . .	14
1.3.1 Les alliages Nickel-Titane . . . . .	14
1.3.2 Les alliages cuivreux . . . . .	15
1.4 Utilisations technologiques et pratiques des AMF . . . . .	15
1.4.1 Introduction . . . . .	15
1.4.2 Applications médicales . . . . .	16
1.4.3 Applications militaires et dans l'aérospatiale . . . . .	18
1.4.4 Applications industrielles . . . . .	21
1.4.5 Systèmes de sécurité . . . . .	23
1.4.6 Produits de consommation . . . . .	24
1.4.7 Les AMF dans les Micro Systèmes Mécaniques Electroniques (MEMS)	24
1.5 Conclusion . . . . .	25



<b>2</b>	<b>Eléments Finis de Coque</b>	<b>27</b>
2.1	Généralités sur les éléments de coque . . . . .	28
2.2	Eléments de coque 3D dégénérés . . . . .	29
2.3	Le verrouillage . . . . .	30
2.3.1	Différents types de verrouillage . . . . .	30
2.3.2	Des remèdes contre le verrouillage . . . . .	32
2.4	Mesure de déformation dans une configuration intermédiaire . . . . .	34
2.5	Interpolation mixte dans un contexte d'élément fini de coque 3D dégénéré . .	35
2.5.1	Cinématique de Ahmad . . . . .	36
2.5.2	Application à un élément triangulaire à trois noeuds . . . . .	38
2.6	Cadre constitutif hyperélastique . . . . .	41
2.7	Definition des rotations objectives . . . . .	44
2.8	Opérateur tangent . . . . .	47
2.9	Discrétisation du principe des travaux virtuels . . . . .	49
2.10	Validation en petites perturbations . . . . .	54
2.11	Implantation en transformations finies . . . . .	59
2.12	Conclusion . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Modélisation du Comportement Superélastique des AMF</b>	<b>67</b>
3.1	La quête de la modélisation du comportement thermomécanique des AMF . .	67
3.1.1	Modèles thermodynamiques microscopiques . . . . .	68
3.1.2	Modèles macroscopiques basés sur la micromécanique . . . . .	69
3.1.3	Modèles phénoménologiques macroscopiques . . . . .	71
3.1.4	Conclusion . . . . .	77
3.2	Cadre thermodynamique constitutif du modèle . . . . .	78
3.3	Thermodynamique de l'équilibre contraint . . . . .	81
3.4	Superélasticité unidimensionnelle . . . . .	83
3.4.1	Dissipation mécanique et fonctions de charge . . . . .	84
3.4.2	Variables d'histoire et boucles internes . . . . .	89
3.5	Superélasticité tridimensionnelle . . . . .	92
3.6	Application à la famille des modèles RLT : faible dépendance à l'histoire . . .	98
3.7	Modèle représentant une forte dépendance à l'histoire . . . . .	98
3.8	Cinématique en transformations finies . . . . .	101
3.9	Comportement superélastique en transformations finies . . . . .	105
3.10	Conclusion . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Etude Expérimentale</b>	<b>109</b>
4.1	Matériaux testés . . . . .	109
4.2	Essai de traction . . . . .	110

4.2.1	Mise en oeuvre . . . . .	110
4.2.2	Résultats . . . . .	111
4.3	Essai de traction sur plaque trouée . . . . .	113
4.3.1	Mesure des déformations . . . . .	113
4.3.2	Procédure d'utilisation du logiciel . . . . .	114
4.3.3	Zone d'acquisition . . . . .	115
4.3.4	Résultats . . . . .	115
4.4	Essai de gonflement . . . . .	118
4.4.1	Principe . . . . .	118
4.4.2	Dispositif expérimental . . . . .	118
4.4.3	Modèle analytique . . . . .	119
4.4.4	Résultats . . . . .	120
4.5	Identification des paramètres matériaux . . . . .	120
4.5.1	Cas des modèles RLT . . . . .	121
4.5.2	Cas des modèles présentant une forte dépendance à l'histoire . . . . .	123
4.5.3	Résultats de l'identification des paramètres . . . . .	123
4.6	Recalage des paramètres pour la modélisation en transformations finies . . . . .	124
4.7	Conclusion . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Intégration Numérique</b>	<b>127</b>
5.1	A propos des schémas d'intégration numérique . . . . .	128
5.2	A propos de la modélisation numérique des AMF . . . . .	129
5.3	Algorithme de calcul des contraintes . . . . .	130
5.3.1	Définition et propriétés des lois incrémentales . . . . .	130
5.3.2	Lois incrémentales de la superélasticité en transformations finies . . . . .	131
5.3.3	Règle du mi-point généralisée . . . . .	132
5.3.4	Schéma prédicteur-correcteur . . . . .	133
5.3.5	Intégration implicite . . . . .	137
5.3.6	Procédure de résolution implicite d'un modèle de comportement $J_3$ de la superélasticité des AMF . . . . .	140
5.4	Calcul opérateur tangent cohérent . . . . .	142
5.4.1	Transformation directe . . . . .	142
5.4.2	Transformation inverse . . . . .	144
5.5	Validation de la modélisation numérique . . . . .	145
5.5.1	Essai de traction . . . . .	146
5.5.2	Essais traction compression . . . . .	146
5.5.3	Cisaillement . . . . .	148
5.5.4	Boucles internes . . . . .	148
5.5.5	Essai de traction sur plaque trouée . . . . .	149

5.5.6	Essai de gonflement . . . . .	153
5.5.7	Micropince . . . . .	157
5.6	Conclusion . . . . .	158
<b>Perspectives</b>		<b>161</b>
<b>Conclusion</b>		<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>169</b>
<b>Annexe</b>		<b>179</b>
A	Formulation analytique du gonflement des plaques . . . . .	179
A.1	Hypothèses générales . . . . .	179
A.2	Mise en équation du problème . . . . .	180
A.3	Relation $P = f(h)$ . . . . .	182

---

# Notations

---

## Grandeurs tensorielles ou scalaires

---

$\underline{X}$	tenseur d'ordre 2
$\underline{\underline{X}}$	tenseur d'ordre 4
$\underline{I}$	tenseur identité d'ordre 2
$\underline{\underline{I}}$	tenseur identité d'ordre 4
$\underline{X} \otimes \underline{Y} = X_{ij} Y_{kl}$	produit diadique de tenseurs d'ordre 2
$tr(\underline{X})$	trace de $\underline{X}$
${}^T \underline{X}$	transposé de $\underline{X}$
$\underline{X}^{-1}$	inverse de $\underline{X}$
$\underline{X}^{-T}$	inverse de transposé de $\underline{X}$
$\underline{X}^S$	partie symétrique de $\underline{X}$
$\underline{X}^A$	partie anti-symétrique de $\underline{X}$
$\ \underline{X}\  = \sqrt{\underline{X} : \underline{X}}$	norme euclidienne de $\underline{X}$
$\partial_{(\bullet)} X$	dérivée partielle de $X$ par rapport à $(\bullet)$
$D_c \underline{X}$	dérivée convective covariante de $\underline{X}$
$D^c \underline{X}$	dérivée convective contravariante de $\underline{X}$

## Grandeurs géométriques

---

$C_R$	configuration de référence
$C_{In}$	configuration intermédiaire
$C_F$	configuration courante
$C_n$	configuration en début d'incrément

$C_{n+0,5}$	configuration intermédiaire
$C_{n+1}$	configuration en fin d'incrément
${}_n\vec{x}$	vecteur position d'un point matériel dans $C_n$
${}_{n+1}\vec{x}$	vecteur position d'un point matériel dans $C_{n+1}$
$\vec{u} = {}_{n+1}\vec{x} - {}_n\vec{x}$	vecteur déplacement
$\Delta\vec{u}$	vecteur déplacement incrémental
$\delta\vec{u}$	vecteur déplacement virtuel
$(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$	base convective covariante dans $C_F$
$(\vec{g}^1, \vec{g}^2, \vec{g}^3)$	base convective contravariante dans $C_F$
$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$	repère tournant dans $C_F$

## Grandeurs mécaniques

---

$E$	module d'Young
$\nu$	coefficient de Poisson
$\rho$	masse volumique
$\alpha$	coefficient de dilatation thermique
$c_v$	chaleur spécifique
$\underline{\underline{C}}^e$	tenseur de comportement élastique
$\underline{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy dans $C_F$
$dev(\underline{\sigma}) = \underline{S}$	déviateur de $\underline{\sigma}$
$J_2 = \frac{1}{2} dev(\underline{\sigma}) : dev(\underline{\sigma})$	second invariant du déviateur de $\underline{\sigma}$
$J_3 = \frac{1}{3} [dev(\underline{\sigma})]^2 : dev(\underline{\sigma})$	troisième invariant du déviateur de $\underline{\sigma}$
$\underline{q}$	rotation objective
$\underline{M}$	mesure de déformation dans $C_{n+0,5}$
$\underline{F}$	tenseur gradient de déformation totale
$\underline{R}$	tenseur rotation propre
$\underline{S} = (det\underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}$	second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\underline{\tau} = (det\underline{F}) \underline{\sigma}$	tenseur des contraintes de Kirchhoff
$\underline{E} = \frac{1}{2} ({}^T \underline{F} \underline{F} - \underline{I})$	tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\underline{d}$	mesure de déformation tensorielle cumulée dans $C_F$
$\underline{d}_q = {}^T \underline{q} \underline{d} \underline{q}$	mesure de déformation tensorielle cumulée dans $C_{I_n}$
$\underline{d}_q^{tr}$	tenseur de déformation de transformation dans $C_{I_n}$
$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}$	tenseur gradient des vitesses de déformation
$\underline{W} = \underline{L}^A$	tenseur des taux de rotation
$\underline{D} = \underline{L}^S$	tenseur des taux de déformation
$D_q(\bullet)$	dérivée objective rotationnelle de $(\bullet)$ par la rotation $\underline{q}$

$\underline{\underline{K}}_n$	opérateur tangent cohérent élastique
$\underline{\underline{C}}^{\text{tan}}$	opérateur tangent cohérent en transition de phase

## Grandeurs du modèle

$\psi$	énergie libre spécifique d'Helmholtz
$\psi^{di}$	énergie d'interaction entre phases
$T_R$	température de référence
$T$	température courante
$\varepsilon^{tr}$	déformation de transition de phase
$z$	fraction volumique de martensite
$D^{mech}$	dissipation mécanique
$\pi_0 = \Delta u_0 - T \Delta s_0$	force motrice de la transition de phase
$\Delta u_0$	différence d'énergie interne de configuration
$\Delta s_0$	différence d'entropie de configuration
$M_S^0$	température début de transformation martensitique
$A_S^0$	température début de transformation austénitique
$\gamma_\Sigma$	déformation de transformation maximum en cisaillement
$a$	coefficient de dissymétrie traction-compression
$\sigma^\Delta, \hat{\sigma}^\Delta$	param. matériaux comportement forte dépendance histoire
$\varphi_{am}$	fonction écoulement pour transf. martensitique
$\varphi_{ma}$	fonction écoulement pour transf. austénitique
$\Sigma(\underline{\sigma})$	contrainte équivalente
$\Sigma_{am}$ et $\Sigma_{ma}$	fonctions seuils
$\sigma_{Yam}$ et $\sigma_{Yma}$	contraintes de début de transformation
$f_{am}$ et $f_{ma}$	fonctions d'écrouissage
$h_{am}$ et $h_{ma}$	ensemble de variables d'histoire
$\kappa$	potentiel de dissipation
$\underline{N}$	direction de l'écoulement



---

# Introduction

---

La volonté constante de la communauté scientifique de voir progresser la science s'est toujours traduite par une démarche élémentaire héritée des premiers hommes : pour faire avancer les choses, on doit pousser à tous les vents et même parfois contre. Ainsi, cette quête se résuma souvent à une histoire d'élan, le temps fit le reste. Aujourd'hui, cette logique demeure intacte. Bénéficiant des acquis de millénaires d'évolution, l'homme de sciences moderne sapiens sapiens ne doit jamais oublier d'où vient tout ce qu'il sait. Il le doit à homo erectus découvrant le feu, aux mésopotamiens inventant l'écriture, à toute innovation mineure ou majeure, aux compositeurs de la science autant qu'à ses interprètes, en somme, à tous ces hommes ayant contribué de façons diverses à sa réalisation. En un sens, la connaissance des matériaux s'inscrit dans cette évolution. Les matériaux auront toujours une place privilégiée dans la vie des hommes car ils sont le support de toutes leurs idées. Comprendre les matériaux pour les utiliser, tel a été, est et sera le cheminement perpétuel de l'ingénieur ou du chercheur dans notre domaine. Mais longue est la route qui mène le scientifique de l'observation de phénomènes physiques sur un matériau soumis à des sollicitations thermomécaniques à la simulation de ces phénomènes par un modèle de comportement.

Motivés moins par la nécessité que par l'envie de découvrir ou de révéler de nouveaux matériaux, certains scientifiques ont participé à l'émergence des matériaux "intelligents" au cours du siècle dernier. D'un point de vue technique, cette "intelligence" peut être assimilée à une aptitude du matériau à répondre d'une certaine façon à des sollicitations extérieures de différentes natures. En résumé, le matériau possède trois fonctions : capteur-processeur-actionneur. Ces matériaux sont directement à l'origine des structures intelligentes telles que les structures adaptatives. Les alliages à mémoire de forme appartiennent à cette catégorie de matériaux que l'on peut "programmer" à réagir à une contrainte donnée. Leurs propriétés thermomécaniques singulières les prédestinent particulièrement au contrôle actif ou passif de structures hybrides. Si les AMF n'ont pas encore atteint un niveau d'exploitation digne de leur potentiel, l'explication se trouve probablement dans la complexité du mode de fabrication, la difficulté de modéliser les multiples facettes de leur comportement, leur temps de réponse ou encore leur inertie thermique. Puisque qu'il n'est de problèmes sans solutions, l'activité de recherche intense autour des AMF contribue à surmonter ces obstacles et à combler ces



lacunes. Ce travail de thèse a pour objectif le développement d'outils numériques pour assister une conception optimale de ce type de structure intégrant des AMF comme éléments de commande. Ce mémoire s'articule autour de cinq chapitres s'inscrivant dans cette logique.

La *première partie* s'intéresse à la description des caractéristiques micromécaniques des AMF, notamment la transformation martensitique, changement thermoélastique de phase, et le phénomène de réorientation de la martensite, conférant à ces matériaux leurs remarquables propriétés : effet mémoire simple ou double, superélasticité, contrainte de restauration et effet caoutchoutique. Pour bien persuader les sceptiques de l'intérêt réel des AMF, ce chapitre offre également un tour d'horizon des nombreux domaines d'applications des AMF. La revue bibliographique des différents types de modèles de comportement des AMF terminant cette première partie est intéressante pour deux raisons : elle met en évidence la richesse de la recherche sur la question des AMF et elle permet de définir l'intérêt de la modélisation développée par la suite.

Les AMF intégrés dans des mécanismes ou des structures se trouvent généralement sous la forme de fils, tubes ou structures minces. Le *second chapitre* concerne la définition d'un élément de coque particulier permettant de surmonter le problème de verrouillage spécifique des structures minces par interpolation mixte des composantes de cisaillement transverse. Cet élément répond notamment à la demande de la microtechnologie de pouvoir modéliser le comportement de films minces en AMF déposés sur un substrat. Cet élément de coque a été implanté dans le code de calcul éléments finis CASTEM 2000 dans l'hypothèse des petites perturbations puis étendu au cas des transformations finies. La réduction du coût de la simulation numérique des structures coques est également une des raisons de ce développement. Cette implantation a été suivie ensuite d'une série d'essais de validation. Le modèle de comportement proposé dans le chapitre suivant a été intégré dans ce contexte de coque spatiale.

La *troisième partie* expose le cadre thermodynamique, base fondamentale de tout modèle de comportement. Cette étude se limite au développement d'un modèle de comportement macroscopique des alliages à mémoire de forme pour des applications de conception. La modélisation est une quête subjective car elle dépend directement des propriétés à décrire ou du degré de sophistication exigé. Elle est fondée sur l'approche des matériaux standards généralisés avec dans un premier temps le choix de variables d'état et l'utilisation de lois de conservation telles que le premier et le second principe de la thermodynamique. Dans un second temps, les lois constitutives sont dérivées de trois fonctions : l'énergie libre (dépendant des variables d'état) et deux pseudo-potentiels de dissipation (un pour chaque transformation et qui dépendent des variables d'état et de leur taux). Le couplage de ces lois fournit un ensemble d'équations constituant le modèle.

La fin de ce chapitre présente la démarche utilisée pour construire une cinématique en grandes transformations ainsi que les grandeurs géométriques associées pour l'étude du comportement thermomécanique des AMF. Elle repose sur une formulation en référentiel tournant non-matériel. Sur la base des lois constitutives établies et par un choix judicieux des variables, les lois constitutives pour la superélasticité en transformations finies présentent un formalisme voisin de celui des lois développées en petites perturbations.

Ces équations dépendent de paramètres physiques devant être identifiés par des essais expérimentaux simples (comme la traction par exemple) avant d'utiliser les outils numériques pour prédire le comportement de structures. Ce travail, principalement orienté vers la mise au point d'un modèle numérique robuste, s'est heurté au manque de résultats expérimentaux sur des essais mécaniques tridimensionnels rapidement exploitables pour valider l'intégration numérique du modèle développé. Ainsi, des essais de gonflement et de traction sur des plaques trouées ont été réalisés. C'est l'objet du *quatrième chapitre*.

Le *dernier chapitre* concerne la mise en oeuvre numérique du modèle de comportement. Le formalisme établi en transformations finies permet l'utilisation d'un schéma de prédiction-corrrection pour le calcul de l'état du matériau. L'intégration numérique des lois constitutives est réalisée en utilisant une méthode implicite. Pour prendre en compte le caractère non-associé de la transformation inverse introduit au chapitre trois et assurer l'unicité de la solution calculée, une étape de correction intermédiaire est ajoutée au schéma d'intégration classique. Cette partie propose également le calcul d'un opérateur tangent cohérent avec l'algorithme de résolution pour chaque transformation. Le modèle de comportement numérique ainsi établi a été implémenté dans le code élément fini CASTEM 2000. Finalement, un ensemble d'essais permettant de confronter résultats expérimentaux et simulations numériques a permis de valider cette implémentation en transformations finies.

En termes de perspectives, ce travail est ouvert à deux niveaux. Le premier concerne l'intégration des AMF dans les structures adaptatives. Une simulation sur une structure composite verre-époxy/CuZnAl a été réalisée pour démontrer l'influence des AMF sur la réponse en flexion. Elle met également en évidence l'interaction entre les différents travaux menés au sein du groupe Modélisation Numérique des Matériaux et Structures, de l'équipe Propriétés Mécaniques des Matériaux du LMARC, portant sur les composites et les lois de comportement viscoplastique. Le second niveau d'ouverture traite de l'évolution de la modélisation des AMF car la plupart des modèles s'intéresse aujourd'hui au phénomène de création puis réorientation de la martensite occasionnés lors de chargements non-proportionnels. Ainsi, une extension du modèle pour ce type de chargement est une perspective dans l'air du temps.



---

## Chapitre 1

# Le Monde des Alliages à Mémoire de Forme

---

L'étude des AMF ne date pas exactement d'hier puisque, précisément, c'est en 1932 que Chang et Read ont enregistré la première observation de transition de phase. Remarquant la réversibilité de la transition dans un alliage AuCd en effectuant des observations métallographiques et en observant des changements de résistivité, la pseudoélasticité était née. Il fallut patienter quelques décennies pour que soit observé, en 1951, pour la première fois l'effet mémoire de forme dans une barre pliée du même alliage [CHA51]. En 1963, Buehler et al. découvrirent ces propriétés dans un NiTi équiatomique [BUE63] et ouvrirent la voie de la commercialisation des AMF avec le nitinol qui allait trouver sa première application industrielle en 1969 sous la forme d'un manchon de raccordement de conduits hydrauliques dans un avion de chasse. Dès lors commença l'engouement pour ce nouveau type de matériau. Cependant, un grand nombre de difficultés furent rencontrées au cours des années 70-80 au niveau de la mise en oeuvre de cette nouvelle technologie. Ainsi, afin de mieux comprendre le comportement de ces alliages, la recherche scientifique débuta réellement dans les années 80 avec des investigations dans le domaine expérimental mais également les premiers pas de la modélisation constitutive des AMF. S'intéressant dans un premier temps aux cas les plus simples de sollicitation mécanique telles que la traction ou la torsion et s'attellant à modéliser le comportement uniaxial, ces travaux ont normalement abouti à une meilleure connaissance des phénomènes à l'échelle microscopique et macroscopique. L'évolution technique aidant, des essais plus complexes tels que la traction-torsion-pression interne ou plus généralement des essais sous chargement non-proportionnels ont été réalisés [ORG98][GALL98] motivant de nouvelles avancées dans la sophistication et la précision des modèles constitutifs.

## 1.1 Caractéristiques micromécaniques des alliages à mémoire de forme

La compréhension du comportement macroscopique des matériaux dans l'optique du développement d'un modèle constitutif passe souvent par la connaissance des phénomènes micromécaniques mis en jeu lors de l'application de chargements thermomécaniques. En ce qui concerne les AMF, la transition de phase austénite-martensite et le processus de réorientation des variantes de martensite sont les clés de voûte des caractéristiques du matériau.

### 1.1.1 Transitions de phase

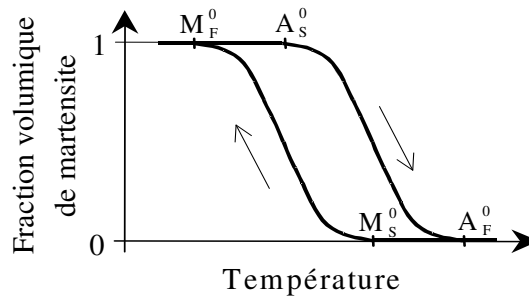
Tout d'abord, le terme martensite est LE terme incontournable quand on aborde les AMF. Il désigne à l'origine le constituant de trempe dans les aciers, il provient du métallurgiste allemand Adolf Martens.

Les alliages à mémoire de forme appartiennent à une classe de matériaux qui peuvent subir des changements réversibles dans leur structure cristallographique. Dans le cas des AMF, de tels changements sont directement liés à la transition martensitique : transition de phase solide-solide entre une phase très symétrique, appelée austénite ( $a$ ) ou phase mère, et une phase moins symétrique, appelée martensite ( $m$ ). Cette transition est qualifiée de displacive car elle se réalise sans diffusion (sans déplacement d'ensemble des atomes), il n'y a pas modification de la composition chimique du matériau. On peut noter également que la transition directe ( $a \rightarrow m$ ) est exothermique tandis que la transition inverse ( $m \rightarrow a$ ) est endothermique.

Typiquement, l'austénite est stable à haute température et pour un faible niveau de contraintes. La martensite est, quant à elle, stable à basse température et pour un niveau de contraintes élevé.

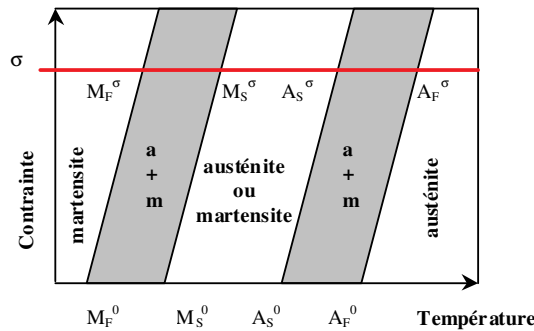
Généralement, la fraction volumique de martensite est définie comme étant le rapport du volume de martensite sur le volume total de matériau considéré. Cette fraction sert à représenter l'avancée de la transition martensitique et constitue une variable interne largement utilisée dans la plupart des modèles macroscopiques. En outre, considérant un état libre de contraintes, on peut définir les températures suivantes constituant certains des paramètres physiques des AMF (cf figure 1.1) :

- $M_S^0$  est la température de début de transformation martensitique
- $M_F^0$  est la température de fin de transformation martensitique, température en dessous de laquelle la martensite est stable (fraction volumique de martensite égale à un)
- $A_S^0$  est la température de début de transformation austénitique
- $A_F^0$  est la température de fin de transformation austénitique, température au dessus de laquelle l'austénite est stable (fraction volumique de martensite égale à zéro)



**Fig. 1.1 :** Transformation martensitique pilotée par la température à l'état libre de contrainte

Les AMF ont un comportement différent des matériaux usuels et un matériau à mémoire de forme est caractérisé par un diagramme d'état contrainte-température également appelé diagramme de phase dans lequel on retrouve les températures de transformation introduites auparavant (cf figure 1.2).



**Fig. 1.2 :** Diagramme de phase idéal des matériaux à mémoire de forme : températures de transformations à l'état libre de contrainte et sous contrainte

### 1.1.2 Processus de transition

On distingue différents processus de formation de la martensite :

#### Formation d'un monocristal de martensite

En général, les monocristaux de martensite possèdent la forme d'une plaquette. Des observations expérimentales de la formation d'un monocristal de martensite à partir d'un monocristal de phase mère permettent d'affirmer que la formation de plaquettes est accompagnée d'une déformation macroscopique appelée changement de forme. Par ailleurs, il existe des plans de contact, ou interfaces, parfaitement définis entre l'austénite et la martensite appelés plans d'habitat qui sont des plans privilégiés du réseau cristallographique. A chaque plan d'habitat, caractérisé par une normale et une direction de déplacement, correspond une variante de martensite. D'un point de vue cristallographique, on peut noter que la majorité des phases mères des AMF présente une maille dont la structure est cubique centrée et appartient

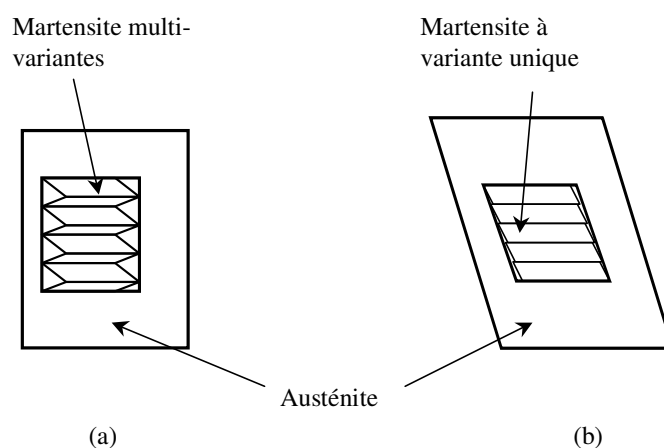
à la catégorie des alliages à phase  $\beta$ . Les cristaux de martensite possèdent une structure par empilement périodique. Puisque les atomes de martensite de différents rayons sont arrangés sans symétrie apparente, la structure de la maille de phase mère tend à se déformer légèrement pour se retrouver dans une configuration monoclinique. La martensite se forme dans les plans d'habitat qui sont au nombre de six dans le réseau cubique centrée. Deux directions de cisaillement par plan et deux directions de "shuffle" donnent au total 24 variantes possibles pour créer la martensite, soient autant de possibilités de former le réseau monoclinique à partir du réseau cubique centré.

### Auto-accommodation et variantes de martensite

La formation des plaquettes de martensite ne suit pas le mécanisme de formation d'un monocristal de martensite présentée auparavant [BAI24]. En réalité, ce mécanisme implique un problème d'accommodation majeur lié à l'incompatibilité entre la martensite et l'austénite environnante.

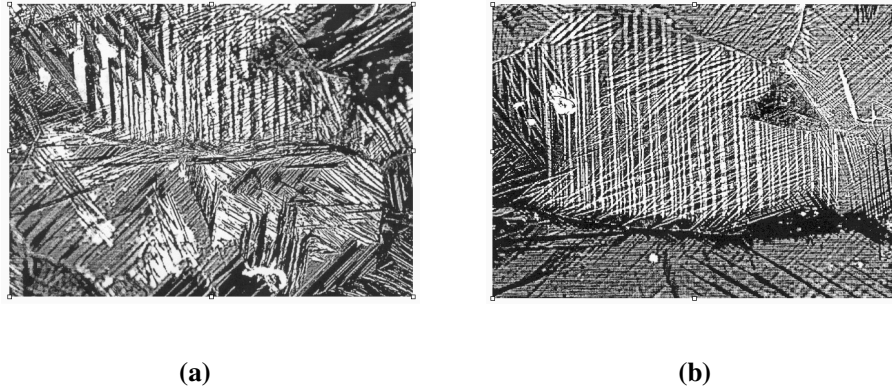
Ainsi, en l'absence de directions privilégiées lors de la transition (état libre de contrainte), la martensite tire bénéfice de l'existence des différents plans d'habitat possibles, formant alors une série de variantes équivalentes cristallographiquement. La phase produite est alors appelée martensite multi-variantes ou martensite auto-accommodante. Elle est caractérisée par une structure "twinnée" qui minimise l'incompatibilité entre la martensite et l'austénite environnante (cf figure 1.3).

D'autre part, s'il existe une direction privilégiée (souvent associée à un état de contrainte) lors de la transition, tous les cristaux de martensite tendent à se former selon le plan d'habitat le mieux orienté. La phase "produit" est alors appelée martensite à variante unique ou martensite orientée. Elle est caractérisée par une structure "détwinnée" qui minimise également l'incompatibilité entre la martensite et l'austénite environnante (cf figure 1.3).



**Fig. 1.3** : Production de variantes de martensite : (a) structure martensitique "twinnée" (b) structure martensitique "détwinnée"

En considérant l'existence de différentes variantes de martensite, la conversion de chaque variante de martensite en martensite orientée est rendue possible par le processus de réorientation sous l'effet d'une contrainte. Ce genre de processus est caractéristique des chargements non-proportionnels. La figure suivante (figure 1.4) présente la martensite auto-accommodante et la martensite orientée dans un polycristal de CuAlNiMn par observation au microscope électronique à balayage avec un grossissement de 500 [BOU01a]. On distingue nettement les plaquettes de martensite dans les deux cas.



**Fig. 1.4** : Martensite (a) auto-accommodante (b) orientée dans un polycristal de CuAlNiMn

### **transitions martensite-martensite**

En fonction de l'alliage considéré, différentes variantes de martensite peuvent progressivement se former à partir de l'austénite lors d'un refroidissement. Ces variantes possèdent toutes une structure par empilement ordonnée avec un même plan de base mais différent au niveau des séquences d'empilement.

### **1.1.3 Cinétiques de transition**

Elles représentent le processus d'évolution de la transition de phase. Les transitions martensitiques se produisent par nucléation et croissance. En fonction de la réponse d'accommodation entre les phases "parent" et "produit", elles sont qualifiées de thermoélastique ou de non-thermoélastique.

Pour les transitions thermoélastiques, l'accommodation des plaquettes de martensite au sein de la phase mère est essentiellement élastique, sans génération de dislocations, l'interface est capable de mouvements inverses et la transition inverse se réalise par résorption des plaquettes de martensite. L'amplitude de l'hystérésis est généralement faible (cf figures 1.1 et 1.5). La majorité des AMF présentent des transitions thermoélastiques martensitiques, garantissant ainsi la réversibilité des transitions de phase.

Les cinétiques de transition de phase sont en général grandement influencées par une combinaison complexe des paramètres internes et externes. Les paramètres internes regroupent



la composition de l'alliage et la structure de maille incluant des défauts. Les paramètres externes sont représentés par le traitement thermomécanique. Enfin, pour chaque alliage, doit être effectuée une caractérisation macroscopique minutieuse des cinétiques du matériau grâce à des observations expérimentales.

## 1.2 Propriétés fonctionnelles des AMF

Les AMF sont essentiellement des matériaux fonctionnels présentant un comportement singulier par rapport à d'autres matériaux classiques dits de structure. Leur principale propriété, la mémoire de forme, est dépendante de la nature, du nombre et de la séquence des cycles de chargement thermomécanique. La transition martensitique introduite précédemment confère aux AMF un certain nombre de propriétés : la pseudoélasticité également connue sous le nom de superélasticité, les effets mémoire de forme simple et double sens, contrainte de restauration et enfin les effets caoutchoutique et amortissant.

### 1.2.1 L'effet superélastique

Considérant un alliage à une température  $T > A_F^0$  i.e. dans un état austénitique pur, cet effet doit son appellation au fait que le matériau peut se déformer de façon réversible de plusieurs %, à des niveaux variables selon la composition de l'alliage, lors d'un cycle de charge-décharge en contrainte. Il est caractérisé par une courbe contrainte-déformation (figure 1.5) qui se décompose en différentes zones :

- lors de la charge : comportement élastique de l'austénite [OA] puis transition martensitique [AB] et enfin comportement élastique de la martensite [BC],
- lors de la décharge : comportement élastique de la martensite [CD] puis transition austénitique [DE] et finalement comportement élastique de l'austénite [EO].

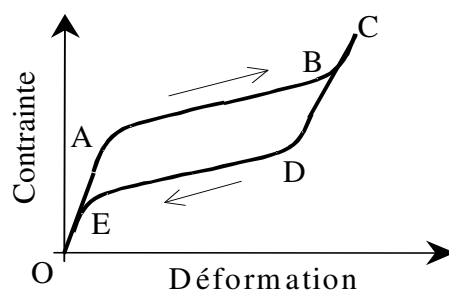


Fig. 1.5 : Effet superélastique

On peut ajouter que les contraintes relatives aux points A et B sont notées  $\sigma_S^{AM}$  et  $\sigma_F^{AM}$  et représentent respectivement les contraintes de début et de fin de transition martensitique. De la même manière, les contraintes relatives aux points D et E sont notées  $\sigma_S^{MA}$  et  $\sigma_F^{MA}$  et représentent respectivement les contraintes de début et de fin de transition austénitique.

Dans le cas d'une éprouvette polycristalline, les transitions de phases sont moins nettes que dans le cas monocristallin. De plus, la déformation réversible admissible est moins grande (cf figure 1.6).

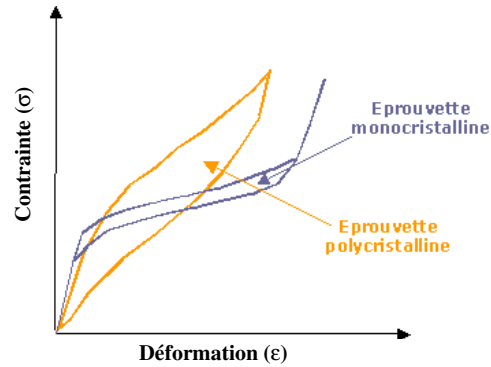


Fig. 1.6 : Influence de la structure sur la superélasticité

### 1.2.2 L'effet mémoire simple sens

Considérant un alliage à une température  $T_i > A_F^0$ , un refroidissement est appliqué au matériau jusqu'à une température  $T_f < M_F^0$  i.e. correspondant à état martensitique pur (trajet (a) sur la figure 1.7). La martensite présente alors au sein du matériau est de type multi-variantes (auto-accommodante). Soumettant le matériau à un cycle de charge-décharge (trajet (b) sur la figure 1.7), la charge va permettre de réorienter certaines variantes de martensite pour obtenir de la martensite dite orientée et une déformation macroscopique. A la fin de la décharge subsiste une déformation résiduelle  $\epsilon_R$  assimilable à une déformation plastique.

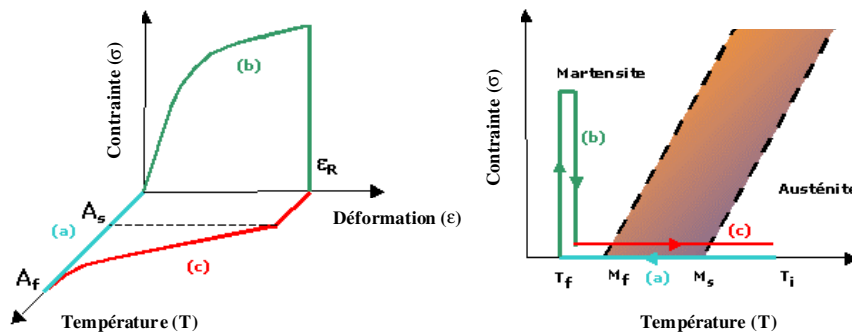


Fig. 1.7 : Effet mémoire simple sens : cycle thermomécanique

Enfin, comme on peut l'observer lors du trajet (c), on applique un chauffage au matériau, au cours duquel la déformation résiduelle va se résorber, pour atteindre une température

$T_i > A_F^0$  à laquelle le matériau va se retrouver dans un état austénitique pur. Ce type de chargement thermomécanique est caractéristique de l'effet mémoire simple sens.

### 1.2.3 L'effet mémoire double sens

Le matériau est soumis préalablement à un traitement thermomécanique particulier consistant à répéter un cycle thermomécanique. Ce traitement appelé éducation génère au sein du réseau cristallin des changements microstructuraux sous la forme de défauts qui vont être à l'origine de contraintes internes dans le matériau. Cette éducation va conférer au matériau la propriété appelée effet mémoire double sens : celui-ci peut passer spontanément d'une forme géométrique haute température (état austénitique) à une forme géométrique basse température (état martensitique) par un simple cyclage thermique entre les températures  $T_i > A_F^0$  et  $T_f < M_F^0$  en l'absence de toute contrainte mécanique.

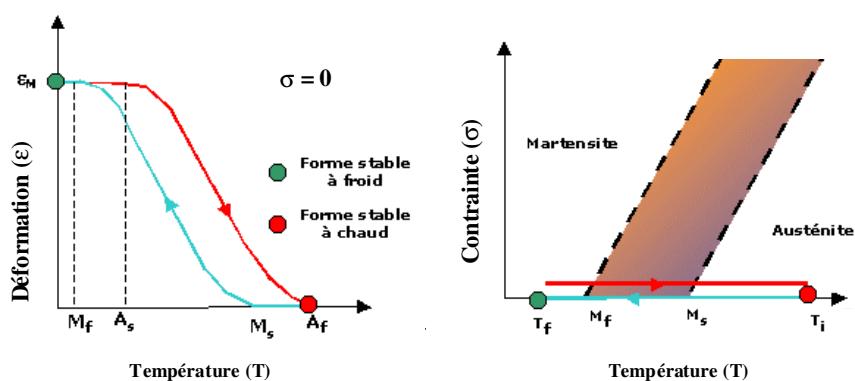


Fig. 1.8 : Effet mémoire double sens : cycle thermomécanique

L'orientation de certaines variantes de martensite par le champ de contraintes internes générées dans le matériau lors de l'éducation va permettre au matériau d'atteindre une déformation  $\varepsilon_M$  lors du refroidissement, déformation qui va se résorber lors du chauffage.

### 1.2.4 L'effet caoutchoutique

Soit un alliage à une température  $T < M_F^0$  i.e. sous la forme de martensite multi-variantes initialement à l'état libre de contrainte. En appliquant un chargement mécanique au matériau, les différentes variantes de martensite vont s'orienter pour donner quelques variantes bien orientées par rapport à la contrainte externe. Cette situation correspond au point A sur la courbe contrainte-déformation de la figure 1.9. Le déplacement des interfaces martensite-martensite peut avoir un caractère réversible ou irréversible. Dans le cas réversible, la déformation macroscopique  $\varepsilon$  résulte d'une déformation élastique  $\varepsilon^e$  et d'une déformation réversible  $\varepsilon^{re}$  associée au mouvement réversible des interfaces. Comme  $\varepsilon^{re}$  est nettement supérieure à  $\varepsilon^e$  alors on obtient un module de rigidité largement inférieur au module d'élasticité d'où cette

effet caoutchoutique. Ce dernier est donc directement lié au phénomène de réorientation de la martensite.

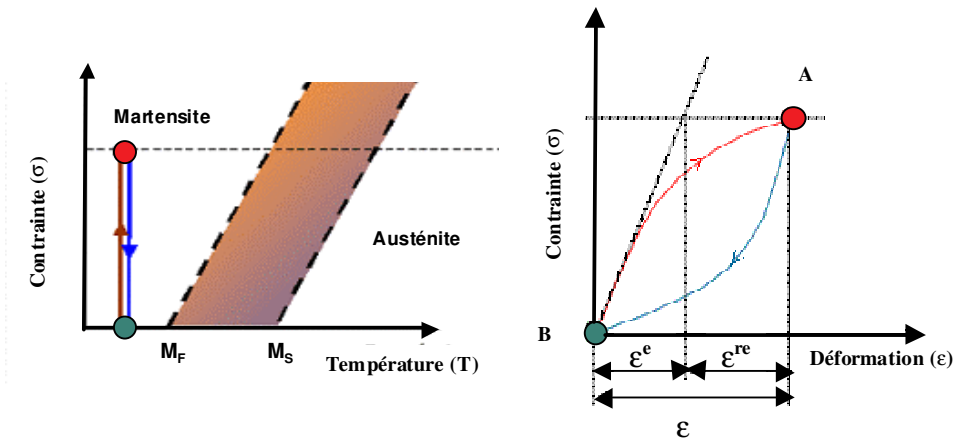


Fig. 1.9 : Effet caoutchoutique

### 1.2.5 L'effet amortissant

Il représente la capacité des AMF à transformer de l'énergie mécanique en énergie thermique par dissipation. Cette propriété est utilisée pour amortir les vibrations dans les systèmes mécaniques. Selon l'état de phase et la déformation dans le matériau, on distingue trois domaines dans lesquels le frottement intérieur  $f$ , représentatif du pouvoir amortissant du matériau  $Q$ , prend des valeurs très différentes (cf figure 1.10) :

- dans l'état austénitique, ce frottement est faible ( $f \simeq 10^{-4}$ ) et il est dû au mouvement réversible des dislocations et des défauts ponctuels.
- dans l'état martensitique, il est associé au mouvement réversible des interfaces entre variantes de martensites ( $f \simeq 10^{-3}$ )
- lors de la transition de phase, le frottement est élevé ( $f \simeq 10^{-2}$ ) et il est associé au mouvement des plans d'habitat.

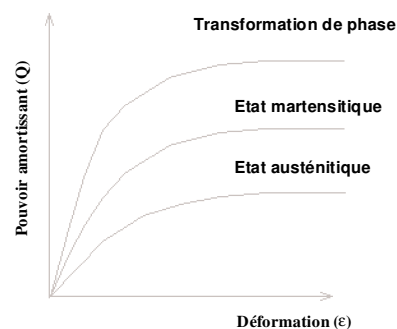


Fig. 1.10 : Effet amortissant

### 1.3 Les différentes familles d'AMF

Parmi les matériaux présentant une transition martensitique thermoélastique, on peut définir deux grands groupes : les alliages Nickel-Titane et les alliages cuivreux. Ces deux systèmes d'alliage ont atteint une exploitation commerciale courante. Les propriétés de ces deux familles d'alliages à mémoire de forme sont relativement différentes comme l'atteste le tableau suivant (cf figure 1.11). Dans ce tableau, on peut noter toutefois que le module d'Young des matériaux de type NiTi se situe davantage autour de 60 GPa.

Propriétés	Unités	Ni-Ti	Cu-Zn-Al	Cu-Al-Ni	Cu-Al-Be
Point de fusion	°C	1260-1310	950-1020	1000-1050	970-990
Densité	Kg/m <sup>3</sup>	6400-6500	7800-8000	7100-7200	7300
Résistivité électrique (aust-mart)	$\Omega.m \times 10^{-6}$	0,5-1,1	0,7-0,12	0,1-0,14	0,07-0,09
Conductivité thermique à l'ambiante	W/(m.K)	10-18	120	75	
Coefficient de dilatation (aust-mart)	$10^{-6}K^{-1}$	6,6-10	17	17	
Chaleur spécifique	J/(Kg.k)	490	390	440	
Enthalpie de transformation	J/Kg	28000	7000	9000	7200
Module de Young	Gpa	95	70-100	80-100	90
Résistance à la traction	Mpa	800-1000	800-900	1000	900-1000
Allongement à rupture (en martensite)	%	30-50	15	8-10	15
Limite de fatigue en austénite	Mpa	350	270	350	
Taille de grain	$\mu m$	20-100	50-300	30-300	100-500
Domaine de transformation	°C	-100 à 100	-100 à 100	-100 à 170	-200 à 150
Hystérésis ( $A_s-M_s$ )	°C	20-40	10-20	20-25	20-25
Étalement ( $A_s-A_c$ )	°C	30	10-20	20-30	15-20
Déformation maximale: - mémoire simple effet - mémoire double effet	%	8	3-5	3-6	3-5
Cycle (N)= 10 <sup>2</sup>		5	1	1,2	
Cycle (N)= 10 <sup>5</sup>		2	0,8	0,8	
Cycle (N)= 10 <sup>7</sup>		0,5	0,5	0,5	
Température max. d'utilisation (1 heure)		°C	400	160	300
Déformation superélastique maximale: - polycristal - monocristal	%	4	2	2	3
		10	10	10	10
Amortissement	SDC-%	15	30	10	
Résistance à la corrosion		Excellente	Moyenne	Bonne	Moyenne
Biocompatibilité		Bonne	Mauvaise	Mauvaise	Mauvaise

Fig. 1.11 : Comparaison des propriétés des alliages les plus utilisés [AIM01]

#### 1.3.1 Les alliages Nickel-Titane

Le Nickel-titane ou Nitinol est l'alliage le plus étudié et connaît un développement important, malgré un coût encore élevé. Il possède de bonnes performances, aussi bien en effet mémoire de forme simple sens qu'en super-élasticité. Il s'avère être plus stable thermiquement et il possède une excellente résistance à la corrosion en comparaison avec la moyenne des alliages à base de cuivre. En outre, sa ductilité est beaucoup plus grande que ces derniers. Enfin, leur biocompatibilité autorise leur utilisation dans le domaine biomédical.

### 1.3.2 Les alliages cuivreux

Ils présentent en général un hystérésis moins marqué que les nickel-titane. On les trouve principalement sous la forme d'alliages ternaires CuZnAl, CuAlNi ou CuAlBe ou sous forme quaternaire avec du manganèse.

Les CuZnAl (cuivre-zinc-aluminium) sont faciles à mettre en oeuvre et présentent un coût modéré. Lors d'une utilisation à des températures plus élevées, il existe un problème de stabilisation de la martensite qui occasionne une augmentation de  $A_s^0$ . En ajoutant des affinants tels que le cobalt, le zirconium, le bore ou le titane, il est possible d'atteindre des tailles de grains de 50 à 100  $\mu\text{m}$ .

Les Cu-Al-Ni (cuivre-aluminium-nickel) sont plus difficiles à réaliser, mais ils sont moins sensibles aux phénomènes de stabilisation et de vieillissement. Ce type d'alliage possède d'excellentes propriétés dans un large domaine de températures (de 50°C à 180°C).

Les Cu-Al-Be (cuivre-aluminium-béryllium) sont apparus dans les années 80 et leur étude s'est généralisée depuis. Ils possèdent une grande stabilité thermique. Le béryllium se trouvant en faible quantité permet d'ajuster les températures de transition de -200 °C à +150°C.

En conclusion, les nitinol et les cuivreux possèdent des avantages et des inconvénients devant être considérés en fonction de l'application visée.

## 1.4 Utilisations technologiques et pratiques des AMF

Les AMF possèdent donc des propriétés singulières par rapport aux matériaux habituellement utilisés dans les applications en ingénierie. Par conséquent, leur utilisation a ouvert la voie à de nouvelles possibilités en termes de conception, permettant notamment d'améliorer la performance d'un système mais également de proposer des solutions innovantes. Cette partie fait un tour d'horizon des applications intégrant les AMF.

### 1.4.1 Introduction

La plupart des applications commerciales des AMF peut être répartie en trois grands groupes selon la propriété mise à profit, on distingue ainsi : les systèmes superélastiques, les systèmes d'actionnement à mémoire de forme et les systèmes martensitiques [LEP00] :

- Les systèmes superélastiques sont utilisés pour des applications exigeant une grande flexibilité et une aptitude importante à se déformer. Les AMF peuvent absorber une énergie de déformation importante et la restituer quand la contrainte appliquée est supprimée. L'élasticité des NiTi est approximativement dix fois plus élevée que celle de l'acier. En outre, les alliages NiTi superélastiques fournissent une force constante sur un intervalle de déformation assez large.
- Les systèmes d'actionnement à mémoire de forme exploitent comme leur nom l'indique l'effet mémoire de forme consistant à retrouver une forme particulière par chauffage

au-delà des températures de transition. Ce type de système fonctionne à l'état libre de contrainte, permettant ainsi de revenir librement à la forme d'origine. Par ailleurs, pour un système contraint, les AMF sont capables de développer une force importante visant à restaurer la forme initiale et produisent alors un travail. Les températures de transition du NiTi peuvent être ajustées pour obtenir une activation à une température spécifique. En général, ces températures d'actionnement sont celles du corps humain (applications médicales) ou de l'eau bouillante.

- Les systèmes martensitiques s'appuient sur la transition de phase martensitique qui présente d'excellentes caractéristiques d'amortissement en raison des aptitudes d'absorption d'énergie de la structure de phase twinnée. De plus, la phase martensitique du NiTi possède une résistance à la fatigue remarquable notamment si on utilise la transition  $A \rightleftharpoons R$  phase

Ces différents systèmes, basés sur les caractéristiques fondamentales des AMF, intègrent ces éléments sous diverses formes telles que des fils, des tubes, des ressorts ou des films minces. L'ordre de grandeur de ces systèmes varie du micromètre au mètre.

Ces systèmes s'inscrivent dans des domaines d'exploitation aussi nombreux que variés. Dans un souci de représentativité, les classes d'applications suivantes se dégagent : médical, aérospatiale/militaire, industrie, produits de consommation, systèmes de sécurité et Micro Systèmes Mécaniques Electroniques (MEMS).

### 1.4.2 Applications médicales

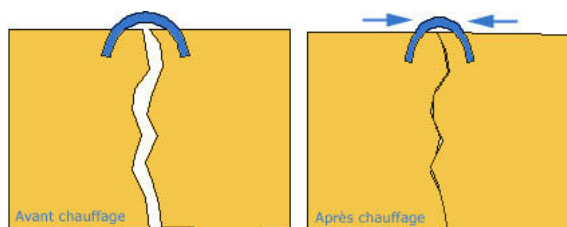
Le succès commercial des AMF trouve principalement son origine dans le domaine médical et la bio-ingénierie. La propriété de superélasticité est dans ce cas largement mise à profit. Parmi les principales applications médicales, on peut citer :

- Arche pour appareil dentaire : c'est une des premières applications les plus réussies des AMF. Un fil en NiTi soumis à une déformation exerce une force faible et quasi-constante sur les dents mal-alignées.
- Instruments micro-chirurgicaux : mettant en avant des qualités telles que la superélasticité et une grande résistance, ces instruments répondent parfaitement aux exigences de précision en chirurgie. De plus, pour des instruments en phase martensitique, les déformations occasionnées lors des opérations sont recouvertes lors de la stérilisation. L'exemple de la micropince est également intéressant (cf figure 1.12). D'une taille d'environ 0,2 par 0,4 mm, cette pince est constituée de silicone sur lequel un film mince de NiTiCu est déposé. Un courant électrique très faible permet d'activer les films qui tendent alors à retrouver leur forme, ce qui va fermer la pince sur les anévrismes. La suppression du courant commande ensuite l'ouverture de la pince. Ce mécanisme est également utilisé pour manipuler de très petits éléments dans des environnements extrêmes (haute ou basse pression, fluides dangereux) [AUR95].



**Fig. 1.12** : Micropinçe en silicone et AMF

- Agrafes : ces agrafes de NiTi sont des implants dont le but est de consolider une fracture osseuse en utilisant l'effet simple sens. Possédant une forme donnée à la température du corps humain (cf figure 1.13), elles permettent à l'os de se ressouder plus facilement [AIM01].



**Fig. 1.13** : Réduction de fracture à l'aide d'une agrafe

- Stents : terme technique indiquant les micro-structures auto-expansives. Fabriqué en Ni-Ti, ce composant utilise l'effet simple sens. Possédant une forme allongée facilitant son introduction dans les artères ou des vaisseaux, il se déploie à la température du corps humain et permet d'en éviter l'obstruction (cf figure 1.14) [LEP00].



**Fig. 1.14** : Stent en NiTi

- Fil de guidage : constitué de NiTi, c'est un long fil fin pouvant être introduit dans l'organisme afin de permettre un guidage sûr de systèmes de diagnostic ou thérapeutiques [AUR95]. La superélasticité permet d'éviter la déformation sous forme de crochet pouvant blesser le patient lors du retrait (cf figure 1.15).



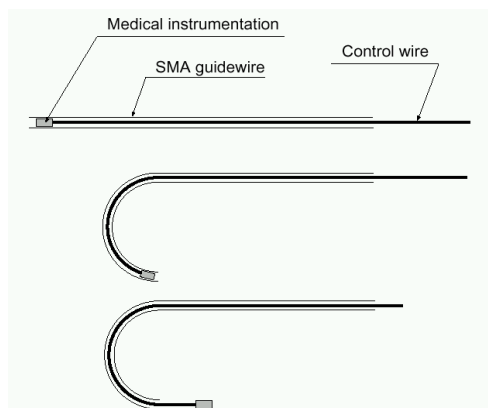


Fig. 1.15 : Fil de guidage d'instruments

- Endoscope : cet appareil possède plusieurs degrés de liberté permettant de diriger la fibre optique dans toutes les directions. Son mouvement est assuré par plusieurs segments d'activateurs en AMF asservis et contrôlés par ordinateur [OTS02].

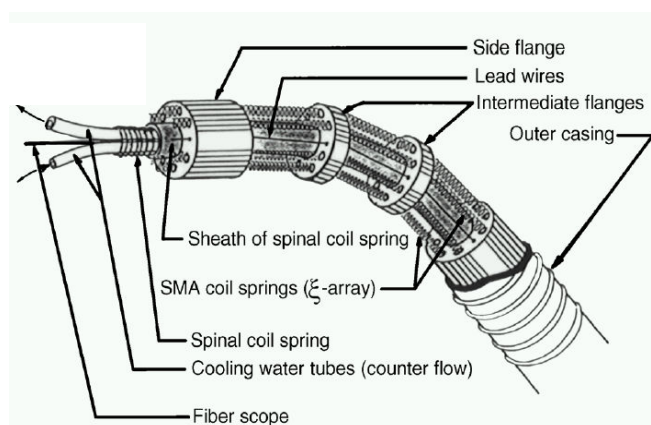


Fig. 1.16 : Application des AMF à un endoscope actif

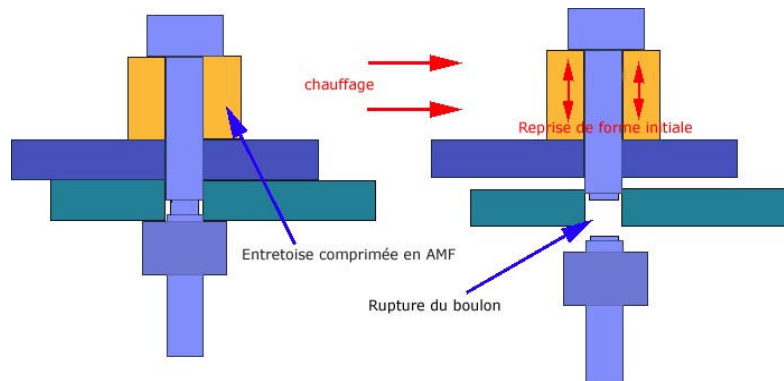
D'une manière générale, les applications des AMF dans le domaine médical sont nombreuses tant au niveau de l'instrumentation que des prothèses ou des implants, du fait notamment de la biocompatibilité avérée du NiTi.

### 1.4.3 Applications militaires et dans l'aérospatiale

La NASA fut pionnière en la matière en utilisant largement les AMF dans différents organes des navettes et engins spatiaux. L'aéronautique et l'industrie militaire se sont également intéressés à ce matériau.

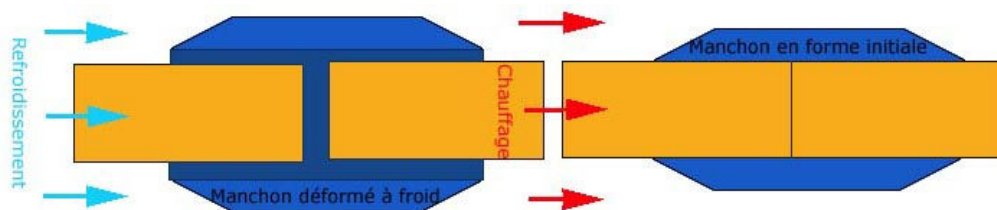
- Dispositif de relachement non-explosif : encore appelé dispositif frangibolt, ce système est utilisé dans l'aérospatiale pour remplacer les mécanismes de désaccouplement pyrotechnique, dangereux pour les structures. Un cylindre percé de NiTi, initialement comprimé de quelques % est soumis à un courant électrique de sorte qu'il va se dilater

et exercer une pression sur un boulon préalablement rainuré, lequel va se rompre et permettre la séparation des structures jointes (cf figure 1.17). Un actionneur de 15 mm de diamètre va ainsi développer une force de l'ordre de  $3 \cdot 10^5$  N [AIM01].



**Fig. 1.17** : Dispositif de relâchement non-explosif

- Déploiement de panneaux solaires : certains panneaux solaires de satellites utilisent l'effet mémoire simple sens de composants en AMF. Dans l'espace le panneau se déploie par activation des éléments en AMF par effet Joule.
- Ouverture d'une trappe sur SOJOURNER : le premier robot envoyé sur Mars possédait un actionneur électrique à mémoire double sens (en nitinol) permettant d'ouvrir une trappe de protection de panneau solaire.
- Manchon d'accouplement : première exploitation des propriétés des AMF, le réel succès des manchons s'explique certainement par le fait que la mémoire de forme était, pour le raccordement de tubes en titane, la seule solution. En effet, les circuits hydrauliques des avions de combat F-14 étant en titane, de nombreux problèmes de raccordement se posaient en raison de la mauvaise soudabilité du matériau. Les manchons en NiTi ont permis de contourner cette difficulté de façon simple et efficace. Au refroidissement, le composant AMF acquiert sa forme basse température (augmentation du diamètre de passage). Avec le retour à température ambiante, l'AMF retrouve sa forme initiale, générant alors une force de contact importante responsable du maintien des tubes avec une parfaite étanchéité (cf figure 1.18) [AIM01].



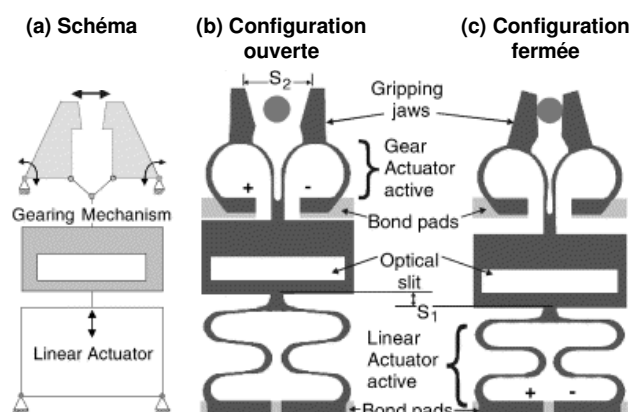
**Fig. 1.18** : Principe de fonctionnement d'un manchon d'accouplement en AMF

- Connecteurs électriques : les systèmes de câblage électrique en aérospatiale et dans les applications militaires sont soumis à un environnement où les conditions sont très sévères (variations de températures importantes, vibrations, humidité, interférence électromagnétique). Le problème se pose au niveau de la connection des câbles qui doit être étanche et résistante. Un anneau de NiTi, dilaté à froid, exerce une force constante sur les connecteurs de câbles quand il est chauffé, assurant ainsi une étanchéité permanente. Le relâchement des connecteurs est réalisé par simple refroidissement (cf figure 1.19) [LEP00].



**Fig. 1.19** : Joint de maintien et d'étanchéité pour connecteurs électriques

- Micropince : un actionneur linéaire et deux mâchoires sont reliés par un mécanisme transformant le mouvement linéaire de l'actionneur en un mouvement rotatif commandant la fermeture des pinces [KOH98]. Entre le mécanisme pivot et l'actionneur linéaire est réalisée une fente "optique", laquelle est associée à un rayon lumineux pour constituer le capteur de position. Cet ensemble a été développé en intégrant des actionneurs AMF en phase totalement martensitique (cf figure 1.20a).



**Fig. 1.20** : Principe d'une micro-pince intégrant des actionneurs en AMF sous forme de structure mince

Le mouvement linéaire est assuré par un actionneur en AMF sous la forme d'une structure poutre pliée dont la géométrie est optimisée [KOH98]. Les joints du mécanisme pivot sont conçus comme des charnières flexibles. Cette partie est réalisée en AMF de

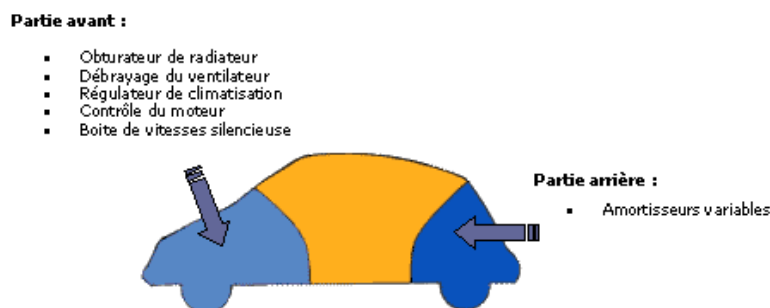
sorte qu'elle se comporte également comme un actionneur. Les actionneurs linéaire et pivot sont prédéformés de  $100 \mu m$ , en considérant leur interaction, avant d'être montés sur un substrat. La déformation résultante des poutres et des charnières peut être contrôlée par effet Joule. Concernant les charnières, cet effet Joule est déterminé afin d'obtenir une température supérieure à la température de transition de phase du mécanisme pivot. Les charnières retrouvent ainsi leur forme non déformée par le jeu de l'effet mémoire simple sens. Dans ce cas de figure, seul l'actionneur linéaire est déformé et les mâchoires de la pince sont en position ouverte (cf figure 1.20b). De même, un réchauffement adéquat de l'actionneur entraîne une déformation des charnières, synonyme d'une fermeture des mâchoires (cf figure 1.20c). La course maximum des mâchoires est égale à  $300 \mu m$ .

Pour cette application, le découplage thermique de chaque type d'actionneur doit être suffisant pour garantir le bon fonctionnement de la micropince. Cette assurance est obtenue grâce à la fente optique intégrée au système. Un rapport donné entre l'écart inter-mâchoires  $S_2$  et le déplacement de la fente permet de réaliser l'asservissement. Cette micropince est usinée par découpage laser de feuilles de NiTi équiatomique de  $230 \mu m$  d'épaisseur. Un traitement thermique sous vide à  $530 \text{ }^\circ\text{C}$  pendant 10 mn permet d'ajuster l'effet mémoire simple sens.

#### 1.4.4 Applications industrielles

En dehors de l'industrie automobile qui utilise largement les propriétés des AMF, les autres secteurs de l'industrie intègrent relativement peu d'éléments en AMF dans les systèmes.

- L'automobile : on distingue une activation thermique des systèmes par contrôle de la température (cf figure 1.21) et une activation électrique (cf figure 1.22). L'intégration de composants en AMF dans le secteur automobile présente plusieurs avantages : encombrement faible, activation silencieuse, nombre peu important de composants pour un système donné [AIM01].



**Fig. 1.21** : Emplacement des actionneurs thermiques sur une automobile

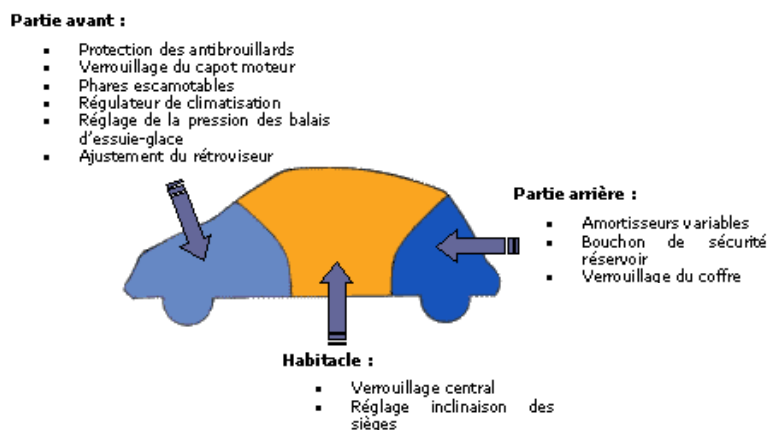


Fig. 1.22 : Emplacement des actionneurs électriques sur une automobile

- Soupapes : une des applications les plus courantes des AMF. Utilisés sous forme de ressort, de film mince ou de fil, certains AMF permettent la fabrication de soupapes pneumatiques, visant à contrôler le débit de fluides ou à réguler une pression (cf figure 1.23) [OTS02].

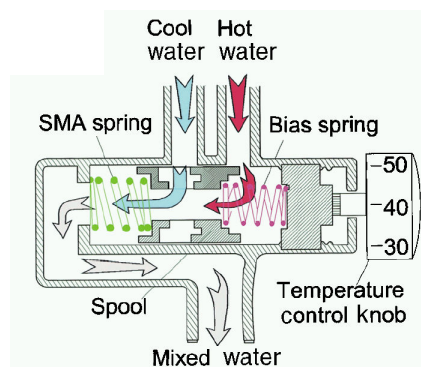


Fig. 1.23 : Application des AMF à une soupape de mélange thermostatique

A l'échelle microscopique, des micro-soupapes constituées de silicone et d'un ressort en NiTi ont été conçues pour des systèmes en microfluidique. D'une taille d'un demi centimètre carré, ces activateurs permettent d'attendre un déplacement de plus de 100  $\mu\text{m}$  pour une force d'un demi newton. Dans le même ordre d'idée, pour l'analyse chimique et les équipements de contrôle de la température et de la pression, un système de soupape emploie un film mince en AMF soumis à un courant pour obstruer un orifice d'écoulement (cf figure 1.24) [LEP00].

- Connecteurs de tuyaux : alternative à la soudure qui peut présenter des problèmes de résistance et de réalisation, de tels connecteurs se trouvent dans la phase martensitique



**Fig. 1.24** : Micro-soupape employant un film mince en NiTi

(dilatée) à une certaine température et, sous l'effet de la chaleur, reviennent à la phase austénitique en se contractant sur les tubes à raccorder.

#### 1.4.5 Systèmes de sécurité

Le changement de phase des AMF, pouvant s'opérer par variation de la température, en fait un candidat idéal pour une exploitation dans les systèmes de sécurité ou de détection.

- Trappe d'évacuation de fumée : un actionneur en AMF double sens déclenche l'ouverture de la trappe dès qu'une température critique est dépassée. Le retour à une température normale commande la fermeture de la trappe.
- Valve de circuit de gaz : la température augmentant au-delà d'un certain seuil, un ressort en AMF simple sens permet de couper l'arrivée de gaz pour éviter toute explosion (cf figure 1.25) [AIM01].



**Position ouverte**



**Position fermée due à l'augmentation de la température**

**Fig. 1.25** : Principe de fonctionnement d'une valve de sécurité utilisant un AMF

- Déclencheur d'extincteur d'incendie : un ressort en AMF se contracte dès qu'une température critique est atteinte, permettant le passage de l'eau.
- Architecture : l'application majeure dans ce domaine est l'utilisation des AMF pour la réalisation de structures anti-sismiques notamment lors de la réfection de monuments historiques situés dans une zone à risque.
- Alimentaire et paramédical : un thermomarqueur en AMF permet de détecter les ruptures de la chaîne de froid. Lors d'une augmentation de chaleur, un ressort éduqué

en AMF se contracte en laissant alors passer une petite bille rouge selon le principe expliqué sur la figure (1.26) [AIM01].

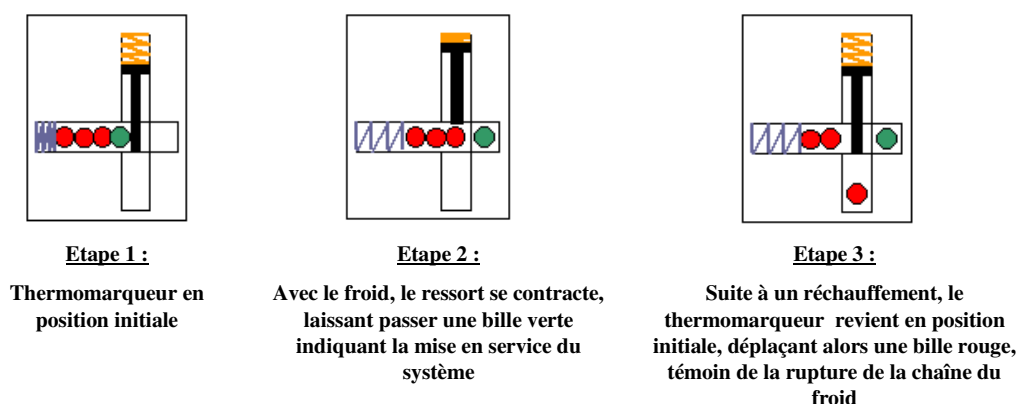


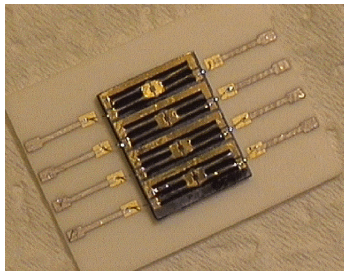
Fig. 1.26 : Principe de fonctionnement du thermomarqueur

#### 1.4.6 Produits de consommation

Les AMF se déclinent également au quotidien. Mettant à profit principalement la caractéristique de superélasticité, les produits de consommation les plus connus sont : les montures de lunettes, les baleines de soutien-gorge, les antennes de téléphone portable, les clubs de golf, les thermostats de cafetière et même certains jouets. Par rapport à des matériaux plus classiques, ces différentes applications des AMF gagnent en résistance et en flexibilité, et retrouvent leur forme sous l'effet d'une source de chaleur.

#### 1.4.7 Les AMF dans les Micro Systèmes Mécaniques Electroniques (MEMS)

Le nickel titane est particulièrement intéressant pour une intégration dans des systèmes de très petites dimensions et notamment les Micro Systèmes Mécaniques Electroniques [LEP00]. Des composants tels que des soupapes, des capteurs et des canaux peuvent être intégrés à un système par fabrication sur un même substrat, donnant la possibilité de réaliser des instruments analytiques miniatures : relais, micropositionneurs, systèmes microrobotiques. Ces perspectives ont élargi le champ d'application des AMF. Divers domaines de l'industrie investissent désormais dans cette nouvelle voix. L'exemple de la synthèse d'ADN parle de lui-même puisqu'elle consiste notamment à analyser des échantillons de l'ordre du nanolitre. Un tel système nécessite un volume interne minimal imposant une taille très petite des soupapes et des pompes pour un encombrement moindre. La figure 1.27 illustre un circuit multi-soupapes conçu dans cette optique. La taille du substrat en silicone est de l'ordre du centimètre carré.



**Fig. 1.27** : Circuit d'activateurs de soupapes en AMF pour l'analyse ADN

## 1.5 Conclusion

Les composants en AMF sous la forme de fils, tubes, ressorts et films minces sont aujourd'hui largement représentés dans de nombreux domaines grâce à leur potentiel. Malgré des débuts modestes, le champ d'action des AMF s'est progressivement élargi au cours des dernières années pour atteindre une véritable dimension technologique. Parallèlement à la diminution du coût de fabrication de ce type d'alliage, parfois assez élevé, l'exploitation a logiquement augmenté.





---

## Chapitre 2

# Eléments Finis de Coque

---

La technologie des micro-actionneurs tels que les MEMS et le développement des structures dites intelligentes projettent durablement les AMF vers l'avenir. Les structures minces telles que la micropince introduite dans le chapitre précédent sont des éléments de commande en AMF en pleine expansion.

Ce travail s'inscrit dans le cadre du développement d'un outil numérique d'aide à la conception optimale de structures ou d'éléments de structures intégrant des AMF. Dans cette perspective, un élément de coque à grandes déformations et pouvant simuler des structures de très faible épaisseur a été développé et implanté dans le code éléments finis CASTEM 2000. Le choix de ce code se justifie de deux façons : ses fichiers sources sont ouverts donc développables et les développements numériques précédents de l'équipe ont été réalisés dans ce code.

Les structures coques sont nombreuses dans les systèmes mécaniques mais posent souvent de nombreux problèmes en termes de comportement et donc de dimensionnement. Ainsi, du point de vue industriel, il est devenu incontournable de maîtriser assez vite la modélisation de ce type de structure afin de pouvoir généraliser leur utilisation. Avec l'avènement de l'outil informatique dont les performances évoluent très rapidement, la méthode des éléments finis, par sa souplesse d'adaptation, a su répondre justement à cette exigence.

Emergents dans les années 60, les éléments de coque se sont complexifiés dans les années 70 avec les éléments de coque curvilignes. Dès lors, le besoin de perfectionner et de fiabiliser ce type d'élément i.e. : insensibilité aux distorsions, invariance par rapport aux référentiels, coût raisonnable en termes de temps de calcul et d'espace mémoire, validité pour les coques épaisses ou minces, adaptation à différents niveaux de la mécanique (dynamique, non-linéaire, composites multicouches) s'est fait sentir. Ainsi, une multitude de méthodes ont vu le jour, sans qu'une ne puisse réellement rallier tous les suffrages, y compris dans des domaines particuliers d'utilisation. Un phénomène a accompagné l'élément de coque au cours de son histoire : le verrouillage de la solution numérique. Décrit plus en détails par la suite, ce

phénomène découle de l'absence de convergence vers la solution théorique des champs calculés. Découvert dans les années 70 puis largement étudié par la suite, il représente l'origine de nombreux développements concernant l'élément de coque.

## 2.1 Généralités sur les éléments de coque

Ce paragraphe n'a pas pour vocation de retracer toutes les évolutions des éléments de coque à travers les principaux travaux qui leurs ont été consacrés. Il prétend juste donner quelques éléments d'information sur l'élément de coque choisi pour la modélisation des structures minces en AMF.

La définition la plus générale d'une coque dans le domaine des éléments finis peut s'énoncer de la manière suivante : une coque est une structure tridimensionnelle mince dans une direction. On peut toutefois compléter cette définition en spécifiant les deux hypothèses suivantes :

- les contraintes normales à la surface moyenne, i.e. suivant l'épaisseur de la coque, sont généralement considérées nulles.
- les particules matérielles formant initialement une droite perpendiculaire à la surface moyenne de la coque restent sur une droite après déformation.

Les deux principales théories de coque, Kirchhoff-Love (sans prise en compte du cisaillement transverse) et Reissner-Mindlin (prise en compte du cisaillement transverse), respectent la première hypothèse. En ce qui concerne la deuxième, elle est vérifiée par ces deux théories, toutefois, pour la théorie de Mindlin, la droite ne reste pas perpendiculaire à la surface moyenne après déformation.

On peut alors donner une définition plus précise d'une coque qui apparaît donc comme étant un corps solide limité par deux surfaces proches et généralement courbes. On définit alors les surfaces supérieure et inférieure entre lesquelles vient s'intercaler la surface de référence. En outre, l'épaisseur de la coque en un point est définie comme la distance entre ces deux surfaces le long d'une "pseudo-normale".

Ainsi, la modélisation des structures coques peut être réalisée au moyen de nombreux éléments finis. Ce grand nombre d'éléments disponibles s'explique d'abord par la coexistence des deux grandes théories des coques du premier ordre présentées auparavant prenant en considération ou non le cisaillement transverse. Ensuite, la diversité des éléments finis de coque se justifie également par le fait que, pour l'une ou l'autre de ces théories, il peut être difficile de développer une approximation nodale. Ainsi, différents concepts sont utilisés pour régler ce problème mais tous les éléments de coque ne s'appuient pas sur une description de coque stricte au sens des milieux curvilignes. Par ailleurs, l'approximation nodale peut engendrer des phénomènes de verrouillage (en cisaillement transverse et en membrane) lesquels peuvent

être contournés de diverses façons comme il en sera question ultérieurement. Globalement, on peut définir trois grandes familles d'éléments finis de coque spatiale :

- éléments de coque de type plaque : l'utilisation de tels éléments permet d'étendre n'importe quel élément de plaque à une géométrie de coque. Au niveau du maillage d'une structure de type coque, cette famille nécessite de nombreux éléments pour obtenir une précision acceptable des résultats.
- éléments de coque curviligne : l'utilisation de tels éléments conduit à des formulations souvent complexes, présentant un grand nombre de degrés de liberté, et finalement entraînent généralement un problème de verrouillage en membrane car le plan moyen est courbe. Néanmoins, en pratique, ils sont intéressants puisque peu d'éléments suffisent pour modéliser avec précision une structure curviligne. Ces différentes remarques justifient un recours assez rare à ces éléments.
- éléments de coque 3D dégénérés (dits éléments de Ahmad) : l'utilisation de tels éléments est un compromis entre les deux familles précédentes car ils combinent plusieurs avantages. En effet, ils décrivent la coque avec une pseudocourbure et proposent une formulation assez simple. Les pseudo-normales permettent de rendre compte de la géométrie de coque d'une structure tout en ayant un nombre limité d'éléments pour le maillage. D'un point de vue pratique, ces éléments sont les plus utilisés. D'ailleurs, c'est le type d'élément que nous avons développé dans cette étude.

## 2.2 Éléments de coque 3D dégénérés

Les éléments 3D dégénérés sont apparus à la fin des années 60 pour l'analyse linéaire des coques d'épaisseur modérée. Ils sont isoparamétriques et de continuité  $C^0$ . Leur simplicité et leurs avantages ont motivé de nombreux travaux visant à les améliorer : extension aux coques minces, prise en compte des effets non-linéaires, extension aux grandes rotations et aux matériaux composites [AHM71][BAT86a][BAT86b][DVO84].

L'utilisation de ce type d'élément n'est pourtant pas dénuée d'un certain nombre de problèmes. En effet, la restriction de la coque à sa surface de référence n'est pas prise en compte de manière analytique mais numériquement avec une intégration dans l'épaisseur de la coque quelle que soit la nature du problème considéré (élastique, plastique, linéaire ou non). Ainsi, la formulation des éléments implique un coût en termes de temps de calcul, du fait de cette intégration, que sa simplicité parvient à compenser partiellement. Mais la vraie lacune des éléments dégénérés se situe au niveau du verrouillage qui altère considérablement leurs performances.

## 2.3 Le verrouillage

Ce type de problème fut posé à la fin des années 60 avec l'essor d'éléments fondés sur des modèles de type Reissner, en particulier l'élément 3D isoparamétrique dégénéré, introduisant des cisaillements transverses. Ce paragraphe vise à expliquer ce phénomène et ne donnera pas une revue bibliographique des différentes techniques élaborées pour remédier au problème du verrouillage. Le lecteur intéressé se reportera au travail de synthèse de Kerber sur le sujet [KER90] mais également à l'analyse de Bucalem et Bathe [BUC97].

Rappelons tout d'abord la définition du verrouillage : c'est un phénomène se manifestant par une rigidité excessive de l'élément quand d'une part le rapport de l'épaisseur sur les dimensions de l'élément atteint une valeur limite, et d'autre part quand l'interpolation est de faible degré.

### 2.3.1 Différents types de verrouillage

On distingue plusieurs types de verrouillage correspondant à des situations spécifiques :

- verrouillage de cisaillement : il est associé au développement d'une déformation de cisaillement transverse fictive
- verrouillage de membrane : il est associé au développement d'une déformation de membrane fictive

Pour expliquer les mécanismes des verrouillages de cisaillement et de membrane, on s'appuie sur la description de Belytschko et al [BEL85] et l'exemple d'une poutre courbe à laquelle on applique la théorie des coques minces [STO83]. On note  $u$ ,  $v$  et  $w$  les déplacements d'un point quelconque de la poutre. Ainsi, la déformation de la poutre peut être décomposée en une composante de membrane  $\varepsilon_m$ , une de flexion  $\chi$  (la courbure) et une de cisaillement  $\gamma$ . L'énergie de déformation  $U$  de la poutre s'écrit alors :

$$U(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D_F \chi^2 + D_M \varepsilon_m^2 + D_C \gamma^2) d\Omega \quad (2.1)$$

Où  $\Omega$  représente la ligne moyenne de la poutre,  $D_F$ ,  $D_M$  et  $D_C$  sont respectivement les constantes de flexion, de membrane et de cisaillement.

On note  $E$  et  $G$  les modules d'Young et de cisaillement.

Si la poutre a une épaisseur constante  $h$  et une largeur égale à l'unité alors :

$$D_F = \frac{1}{12} E h^3 \quad D_M = E h \quad D_C = k G h \quad (2.2)$$

Où  $k$  est un facteur correcteur tenant compte du fait que le cisaillement n'est pas constant dans l'épaisseur (en général  $k = 5/6$  pour obtenir une variation quadratique dans l'épaisseur dans le cas d'une section rectangulaire).

Cette énergie  $U$ , à laquelle est en réalité associée le travail des forces appliquées et les conditions aux limites, doit être minimisée par rapport à  $u$ ,  $v$  et  $w$ .

En supposant que  $h$  devient de plus en plus petite, toutes choses restant égales par ailleurs, le problème de minimisation de  $U$  est résolu pour chaque valeur de  $h$ . Ainsi, les relations de l'équation (2.2) permettent de faire le constat suivant :  $D_F$ , proportionnel à  $h^3$ , devient de plus en plus petit par rapport à  $D_M$  et  $D_C$ , proportionnels à  $h$ .

Dans le cas de figure où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont calculés par une méthode élément fini, les déformations de cisaillement et de membrane ne s'annulent pas nécessairement. Ces termes étant affectés de coefficients multiplicateurs très grands, une légère approximation des déplacements et donc des déformations peut entraîner une grande variation des énergies correspondantes.

Un tel comportement est mis en évidence lors d'un essai de flexion pure où les déformations de membrane et de cisaillement sont nulles partout. Le champ de déplacement obtenu est dit inextensionnel ( $\varepsilon_m = 0$ ) et de Kirchhoff ( $\gamma = 0$ ).

Par conséquent, un élément fini ne pouvant représenter ce comportement va générer des énergies de déformation excédentaires qui peuvent dominer l'énergie de flexion. L'élément se comporte alors de façon trop rigide, c'est le verrouillage.

Les contraintes de cisaillement et de membrane associées à ces énergies excédentaires sont nommées contraintes parasites ou contraintes fictives. Éliminer ces contraintes revient à supprimer le verrouillage correspondant.

Pour un problème quelconque, le phénomène est plus difficile à mettre en évidence. Imposer un champ de cisaillement ou de membrane permettant de dominer la flexion quand  $h$  tend vers zéro n'est pas suffisant car le résultat obtenu à la limite dépend à la fois des conditions limites et des efforts appliqués.

Par ailleurs, la discrétisation joue également un rôle important dans ces deux types de verrouillage. De façon générale, l'impossibilité d'annuler les termes de cisaillement transverse et de membrane se produira dans les approches isoparamétriques car les fonctions d'interpolation devant se compenser ne sont pas du même ordre. En outre, quand le degré des fonctions d'interpolation augmente, le phénomène de verrouillage diminue.

Les verrouillages de cisaillement et de membrane augmentent continûment et régulièrement avec la diminution de l'épaisseur. Au contraire, le verrouillage machine apparaît brutalement quand l'épaisseur devient très petite. Ce problème résulte d'un problème strictement numérique lié à la précision de la machine et il se produit indépendamment de l'apparition de contraintes fictives.

On envisage dans ce travail d'utiliser un élément fini à trois noeuds à interpolation linéaire afin de réduire efficacement le coût de la simulation numérique. Pour ce type d'élément, le verrouillage en cisaillement transverse est très important et conduit au fait que l'élément ne fonctionne pas quelle que soit l'épaisseur de la coque pour des interpolations classiques à partir des champs de déplacement. Pour des éléments 3D dégénérés, le verrouillage en membrane

est inexistant car la surface moyenne reste plane.

### 2.3.2 Des remèdes contre le verrouillage

Les solutions proposées pour régler le verrouillage sont nombreuses. D'ailleurs, une grande partie des travaux consacrés aux éléments finis depuis le début des années 70 s'est concentrée sur l'élimination du verrouillage, principalement de cisaillement. L'élément retenu pour la modélisation du comportement des structures minces en AMF est un terrain favorable à ce type de verrouillage. C'est pourquoi, l'exposé suivant des principales méthodes palliant ce problème se limitera au cas du verrouillage en cisaillement transverse. L'historique de chaque méthode n'est pas donné mais peut être trouvé dans la référence [KER90].

#### Méthodes hybrides et mixtes

Dans ces méthodes, plusieurs champs sont introduits comme inconnues : en plus des variables primales (déplacements et rotations), on garde des variables duales (déformations ou contraintes). C'est pourquoi on les appelle également méthodes multi-champs.

L'approche mixte fait intervenir une formulation mêlant les techniques suivantes : les méthodes primales (déplacements) construites sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle et les méthodes duales (contraintes) basées sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle complémentaire.

L'approche hybride peut se faire de deux façons : les méthodes hybrides primales où les déplacements sont définis à l'intérieur des éléments, et leur continuité  $C^1$  inter-éléments est imposée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange qui sont des contraintes définies sur les bords des éléments. Les méthodes hybrides duales où les contraintes sont définies à l'intérieur des éléments et l'équilibre des forces inter-éléments est imposé par des multiplicateurs de Lagrange qui sont des déplacements définis sur les bords des éléments.

Les éléments basés sur ces méthodes sont appelés éléments hybrides ou mixtes et doivent respecter certaines hypothèses : au-delà de l'utilisation du principe variationnel de Hellinger-Reissner, on doit choisir un champ de contrainte satisfaisant a priori les équations d'équilibre et un champ de déplacement indépendant le long des bords de l'élément. Cependant, l'extension de ces formulations aux éléments de coque est particulièrement difficile car il est quasiment impossible de trouver un champ de contrainte 3D satisfaisant les équations complexes de la théorie générale des coques. Ce problème peut être surmonté en utilisant des multiplicateurs de Lagrange comme variables du problème afin d'imposer un champ de contraintes. Ce principe constitue alors une version améliorée du principe variationnel de Hellinger-Reissner.

En résumé, les méthodes multi-champs décrites reposent sur des bases mathématiques solides et présentent plusieurs avantages : une grande précision pour les différents champs, avec la possibilité d'obtenir de bonnes approximations des contraintes, ce qui est essentiel pour éviter le verrouillage en cisaillement transverse. D'autre part, il est possible d'employer

des champs  $C^0$  seulement pour assurer la continuité de la description géométrique. Néanmoins, ces méthodes présentent également certaines limites : présence de degrés de liberté supplémentaires impliquant des systèmes plus grands et présence de modes d'énergie nulle fictifs dans certains modèles.

### L'intégration réduite

Elles consistent à intégrer numériquement les termes de la matrice de rigidité avec une sous-intégration, ce qui a pour effet de diminuer la rigidité de telle sorte que le verrouillage est contre-balancé. On distingue plusieurs méthodes : URI (Uniform Reduced Integration) dans lesquelles tous les termes de l'énergie sont sous-intégrés de façon similaire, et les méthodes SRI (Selective Reduced Integration) où seuls les termes de cisaillement le sont. En comparaison avec les méthodes mixtes, ces techniques sont d'une formulation simple et souvent efficaces, y compris au niveau du temps de calcul. Toutefois, elles peuvent poser problème du fait de l'introduction de modes fictifs d'énergie nulle ce qui est gênant du point de vue de leur fiabilité. Des méthodes de stabilisation peuvent être utilisées pour éliminer ces modes fictifs. Elles consistent à rajouter des termes supplémentaires de stabilisation aux matrices de rigidité sous-intégrées. Cette méthode appelée intégration sélective stabilisée est efficace mais ne fonctionne pas dans certains cas tels que le triangle linéaire et pour un maillage grossier soumis à de grands déplacements.

### Méthodes à déformations supposées (Assumed Strains Methods)

Egalement appelées méthodes  $\bar{B}$ , elles s'attaquent de front au problème de verrouillage. Elles consistent à remplacer directement la matrice d'interpolation des déformations  $B$  par une autre matrice d'interpolation  $\bar{B}$  obtenue par le biais d'une projection.  $\bar{B}$  est choisie pour le cisaillement et éventuellement pour la déformation de membrane de sorte que les mouvements de type Kirchhoff ( $\gamma = 0$ ) et inextensionnels ( $\varepsilon_m = 0$ ) soient représentables. Ainsi,  $\bar{B}$  peut s'annuler contrairement à  $B$ .

Parmi les méthodes ASM, on peut spécifier rapidement les méthodes MD (Mode Decomposition) dans lesquelles on effectue des projections de  $B$  sur les degrés de liberté de sorte que l'on puisse avoir  $\gamma = 0$  et  $\varepsilon_m = 0$ , découplant ainsi les modes de flexion de ceux de cisaillement et de membrane.

Ces méthodes sont assez efficaces pour éliminer le verrouillage et sont en général utilisées avec l'élément dégénéré [BEL85].

Pour l'élément à construire, la méthode utilisée pour circonscrire le verrouillage est une méthode d'interpolation mixte des composantes de cisaillement transverse [BAT86a][BAT86b].

Avant d'aborder cet aspect, on commence par définir une mesure de déformation pour une analyse en transformations finies.



## 2.4 Mesure de déformation dans une configuration intermédiaire

Un problème en transformations finies est par nature non linéaire ce qui nécessite une approche incrémentale pour sa résolution. Cette approche consiste schématiquement à partager le chargement appliqué en incréments de chargement. Dans le cadre d'une méthode incrémentale pour la résolution des équations d'équilibre, on considère la décomposition suivante du gradient de déformation incrémentale  $\underline{\Delta F}$  :

$$\underline{\Delta F} = \underline{F}_2 \underline{F}_1^{-1} ; \quad d({}_n \vec{x}) = \underline{F}_1^{-1} d({}_{n+0,5} \vec{x}) \quad , \quad d({}_{n+1} \vec{x}) = \underline{F}_2 d({}_{n+0,5} \vec{x}) \quad (2.3)$$

$d({}_n \vec{x})$ ,  $d({}_{n+0,5} \vec{x})$  et  $d({}_{n+1} \vec{x})$  représentent respectivement un vecteur matériel élémentaire dans les configurations de référence  $C_n$ , intermédiaire  $C_{n+0,5}$  et courante  $C_{n+1}$ , la configuration de référence  $C_n$  correspondant à celle obtenue à la fin de l'incrément convergent précédent.

Une mesure de déformation incrémentale dans la configuration intermédiaire  $C_{n+0,5}$  peut être dérivée de la variation de longueur classique d'une ligne matérielle. Ainsi :

$${}^T d({}_{n+1} \vec{x}) d({}_{n+1} \vec{x}) - {}^T d({}_n \vec{x}) d({}_n \vec{x}) = {}^T d({}_{n+0,5} \vec{x}) (2\underline{M}) d({}_{n+0,5} \vec{x})$$

Soit :

$$\underline{M} = \frac{1}{2} ({}^T \underline{F}_2 \underline{F}_2 - {}^T \underline{F}_1^{-1} \underline{F}_1^{-1}) \quad (2.4)$$

En utilisant une interpolation linéaire de la transformation géométrique sur l'incrément i.e. la position d'un point matériel dans  $C_{n+0,5}$  est donnée par  ${}_{n+0,5} \vec{x} = ({}_n \vec{x} + {}_{n+1} \vec{x})/2$ , alors la mesure de déformation peut s'écrire :

$$\underline{M} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ {}^T \underline{F}_1^{-1} + {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) \right] \left[ \underline{F}_1^{-1} + \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) \right] - \left[ {}^T \underline{F}_2 - {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) \right] \left[ \underline{F}_2 - \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) \right] \right\} \quad (2.5)$$

En considérant l'expression du déplacement incrémental  $\vec{u} = {}_{n+1} \vec{x} - {}_n \vec{x}$ , la relation précédente devient alors :

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[ {}^T \underline{F}_1^{-1} + {}^T \underline{F}_2 \right] \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) + {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) \left[ \underline{F}_1^{-1} + \underline{F}_2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ {}^T \left[ \frac{\partial ({}_n \vec{x} + {}_{n+1} \vec{x})}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right] \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) + {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right) \left[ \frac{\partial ({}_n \vec{x} + {}_{n+1} \vec{x})}{\partial ({}_{n+0,5} \vec{x})} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5}\vec{x})} \right) + {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial ({}_{n+0,5}\vec{x})} \right) \right\} \quad (2.6)$$

Les composantes covariantes  $M_{kl}$  de  $\underline{M}$  par rapport à la base matérielle duale  ${}_{n+0,5}\vec{g}^k \otimes {}_{n+0,5}\vec{g}^l$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) donnée par :

$${}^T {}_{n+0,5}\vec{g}^l \cdot {}_{n+0,5}\vec{g}_k = \begin{cases} 1 & \text{if } l = k \\ 0 & \text{if } l \neq k \end{cases}; \quad {}_{n+0,5}\vec{g}_k = \frac{\partial ({}_{n+0,5}\vec{x})}{\partial \theta_k} \quad (2.7)$$

avec  $\{\theta_k, k = 1, 2, 3\}$  un système de coordonnées curvilignes naturelles, sont obtenues en utilisant les relations suivantes dans (2.4) :

$$\underline{E}_1^{-1} = {}_n \vec{g}_k \otimes {}_{n+0,5} \vec{g}^k \quad \underline{E}_2 = {}_{n+1} \vec{g}_k \otimes {}_{n+0,5} \vec{g}^k; \quad {}_n \vec{g}_k = \frac{\partial ({}_n \vec{x})}{\partial \theta_k} \quad {}_{n+1} \vec{g}_k = \frac{\partial ({}_{n+1} \vec{x})}{\partial \theta_k} \quad (2.8)$$

Donc :

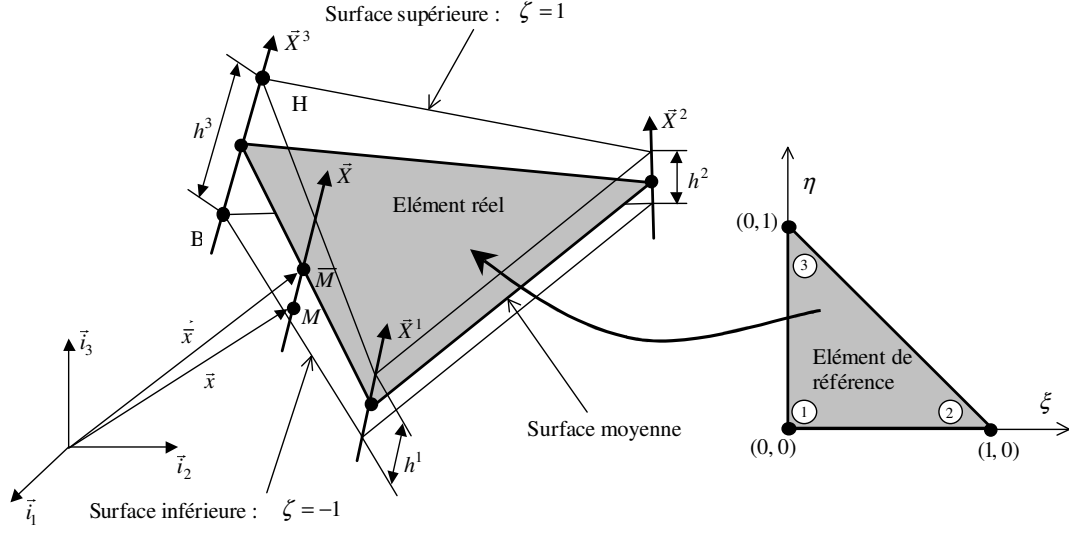
$$M_{kl} = \frac{1}{2} [{}^T {}_{n+1} \vec{g}_k \cdot {}_{n+1} \vec{g}_l - {}^T {}_n \vec{g}_k \cdot {}_n \vec{g}_l] \\ = \frac{1}{2} \left\{ {}^T \left[ {}_n \vec{g}_k + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_k} \right] \cdot \left[ {}_n \vec{g}_l + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_l} \right] - {}^T \left[ {}_{n+1} \vec{g}_k - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_k} \right] \cdot \left[ {}_{n+1} \vec{g}_l - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_l} \right] \right\} \quad (2.9)$$

L'interpolation linéaire sur l'incrément i.e.  ${}_{n+0,5}\vec{g}_k = ({}_n \vec{g}_k + {}_{n+1} \vec{g}_k)/2$  ( $k = 1, 2, 3$ ) donne finalement :

$$M_{kl} = \frac{1}{2} \left[ {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_k} \right) \cdot {}_{n+0,5} \vec{g}_l + {}^T {}_{n+0,5} \vec{g}_k \cdot \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_l} \right) \right] \quad (2.10)$$

## 2.5 Interpolation mixte dans un contexte d'élément fini de coque 3D dégénéré

La cinématique des coques d'Ahmad permet de définir une famille d'éléments finis de coque  $C^0$  isoparamétriques pour laquelle la continuité de la description géométrique est assurée [BAT96][BAT90b]. Ces éléments dits dégénérés permettent l'analyse de structures de coque minces et épaisses [AHM71] (cf figure 2.1).



**Fig. 2.1** : Élément triangulaire à trois noeuds : élément réel et élément de référence

### 2.5.1 Cinématique de Ahmad

Cette cinématique permet de définir la position  $\vec{x}$  de n'importe quel point  $M$  dans l'épaisseur de la coque à partir de la position du point correspondant  $\vec{M}$  sur la surface moyenne de la coque et de sa position le long d'une pseudonormale  $\vec{X}$  à la surface moyenne en ce point :

$$\vec{x} = \sum_i N^i(\xi, \eta) \vec{x}^i + \varsigma \sum_i N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} \vec{X}^i ; \quad \varsigma \in [-1, +1] \quad (2.11)$$

$N^i$  étant les fonctions d'interpolation dépendant des coordonnées naturelles dans le plan  $(\xi, \eta)$  et  $\vec{x}^i$  la position d'un noeud  $i$  où l'épaisseur de la coque et la pseudonormale sont respectivement  $h^i$  et  $\vec{X}^i$  ( $\|\vec{X}^i\| = 1$ ). Les vecteurs pseudonormaux assurent la continuité de la description géométrique, ils sont définis en chaque noeud à partir des points haut ( $H$ ) et bas ( $B$ ) correspondants. Pour un noeud  $i$  appartenant à plusieurs éléments,  $\vec{X}^i$  est la résultante des vecteurs pseudonormaux définis sur chaque élément pour un même noeud.

Une base matérielle covariante au point  $M$  peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \sum_i \frac{\partial N^i}{\partial \xi} \vec{x}^i + \varsigma \sum_i \frac{\partial N^i}{\partial \xi} \frac{h^i}{2} \vec{X}^i \\ \vec{g}_2 &= \sum_i \frac{\partial N^i}{\partial \eta} \vec{x}^i + \varsigma \sum_i \frac{\partial N^i}{\partial \eta} \frac{h^i}{2} \vec{X}^i \\ \vec{g}_3 &= \sum_i N^i \frac{h^i}{2} \vec{X}^i \end{aligned} \quad (2.12)$$

Lorsque  $M$  se déplace de la configuration de référence  $C_n$  vers la configuration courante  $C_{n+1}$ , son déplacement  $\vec{u} = {}_{n+1}\vec{x} - {}_n\vec{x}$  où  ${}_{n+1}\vec{x}$  et  ${}_n\vec{x}$  sont donnés par l'équation (2.11) est interpolé de la façon suivante :

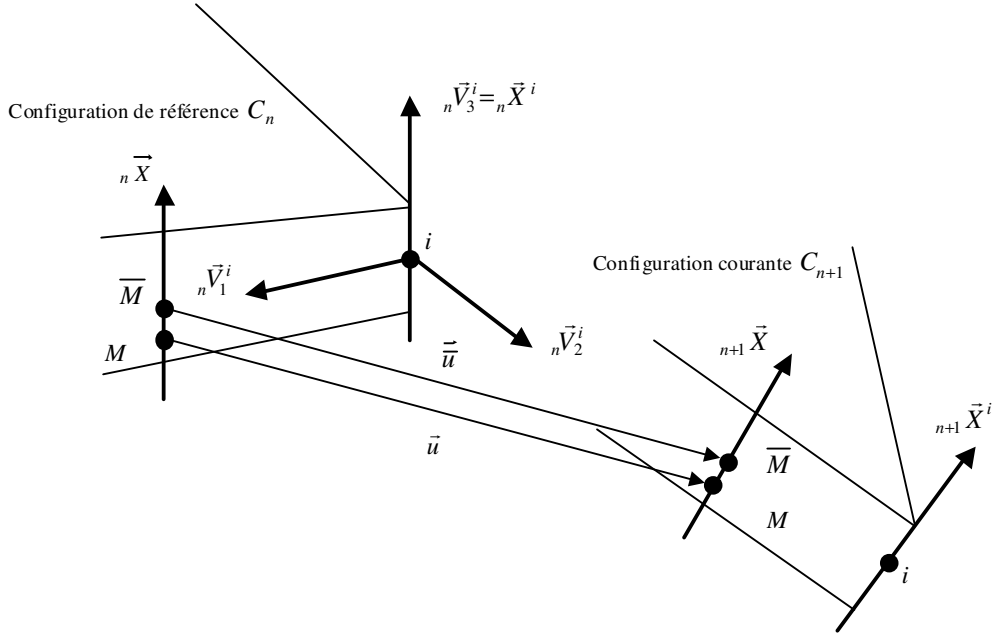
$$\vec{u} = \sum_i N^i(\xi, \eta) \vec{u}^i + \varsigma \sum_i N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} (\underline{R}^i - \underline{I}) {}_n\vec{X}^i \quad (2.13)$$

$\vec{u}^i$  étant le déplacement d'un noeud  $i$  et  $\underline{R}^i$  un tenseur orthogonal définissant en ce noeud la rotation incrémentale de sa pseudonormale  ${}_n\vec{X}^i$  en  $C_n$  i.e.  ${}_{n+1}\vec{X}^i = \underline{R}^i {}_n\vec{X}^i$ .

Dans le cas de faibles rotations incrémentales, on obtient alors :

$$\vec{u} = \sum_i N^i(\xi, \eta) \vec{u}^i + \varsigma \sum_i N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} \vec{\alpha}^i \wedge {}_n\vec{X}^i \quad (2.14)$$

$\vec{\alpha}^i$  étant le vecteur rotation au noeud  $i$ .



**Fig. 2.2** : Déplacement d'un point matériel dans l'épaisseur de la coque

Définissant en chaque noeud une base orthonormée de vecteurs dans  $C_n$  ( ${}_n\vec{V}_1^i, {}_n\vec{V}_2^i, {}_n\vec{V}_3^i \equiv {}_n\vec{X}^i$ ), on peut introduire un vecteur rotation à deux composantes tel que  $\vec{\alpha}^i = \alpha_1^i {}_n\vec{V}_1^i + \alpha_2^i {}_n\vec{V}_2^i$  (cf figure 2.2). Ainsi l'équation précédente peut s'écrire :

$$\vec{u} = \sum_i N^i(\xi, \eta) \vec{u}^i + \varsigma \sum_i N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} (\alpha_2^i {}_n\vec{V}_1^i - \alpha_1^i {}_n\vec{V}_2^i) \quad (2.15)$$

Par conséquent, cet élément possède cinq degrés de liberté par noeud : trois translations par rapport au repère global de référence  $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$  et deux rotations par rapport aux vecteurs  ${}_n\vec{V}_1^i$  et  ${}_n\vec{V}_2^i$ . Afin de fixer l'orientation de ces deux vecteurs arbitraires,  ${}_n\vec{V}_1^i$  se situe initialement dans le plan  $(\vec{i}_1, \vec{i}_3)$ .

### 2.5.2 Application à un élément triangulaire à trois noeuds

Exploitant la cinématique définie précédemment (2.15) et l'expression de la mesure de déformation donnée par (2.10), on peut en déduire l'interpolation des composantes de déformation de membrane-flexion  $M_{kl}$  ( $k, l = 1, 2$ ) :

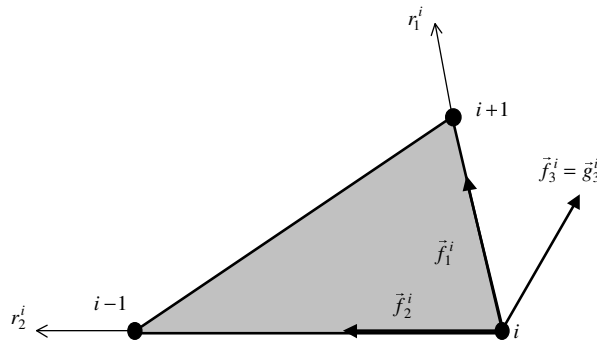
$$M_{kl} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \left[ \begin{matrix} T \\ n+0,5 \end{matrix} \vec{g}_l \frac{\partial N^i}{\partial \theta_k} + \begin{matrix} T \\ n+0,5 \end{matrix} \vec{g}_k \frac{\partial N^i}{\partial \theta_l} \right] \vec{u}^i + \zeta \sum_i \left[ \begin{matrix} T \\ n+0,5 \end{matrix} \vec{g}_l \frac{\partial N^i}{\partial \theta_k} + \begin{matrix} T \\ n+0,5 \end{matrix} \vec{g}_k \frac{\partial N^i}{\partial \theta_l} \right] \frac{h^i}{2} \left( (\alpha_2^i \vec{V}_1^i - \alpha_1^i \vec{V}_2^i) \right) \right\} \quad (2.16)$$

$N^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) étant les fonctions d'interpolation linéaires :  $N^1 = 1 - \xi - \eta$ ,  $N^2 = \xi$  et  $N^3 = \eta$ . Les coordonnées curvilignes  $\theta_k$  ( $k = 1, 2$ ) sont telles que  $\theta_1 = \xi$  et  $\theta_2 = \eta$ .

Comme il en a été question auparavant, l'élément de coque à trois noeuds isoparamétrique est caractérisé par le verrouillage en cisaillement transverse. Phénomène d'autant plus prononcé que ses fonctions d'interpolation sont linéaires. Ainsi, quelle que soit l'épaisseur de la coque, un calcul s'appuyant sur cet élément fini ne peut pas fonctionner. Pour circonscrire ce type de verrouillage, on utilise une méthode d'interpolation mixte des déformations de cisaillement transverse [DVO84][BAT86a][BAT86b][BRE89] [BAT90b]. Cette approche consiste à différencier l'interpolation des composantes de cisaillement de celle des composantes de membrane-flexion. Adoptant l'approche préconisée dans [BOI94],[BOI96] et [DAN98], les composantes de cisaillement  $M_{k3}$  ( $k = 1, 2$ ) sont interpolées à partir des valeurs nodales  $M_{k3}^i$  :

$$M_{k3} = \sum_i N^i(\xi, \eta) M_{k3}^i \quad (2.17)$$

ces valeurs étant obtenues en supposant constantes les déformations de cisaillement transverse le long des côtés de l'élément.

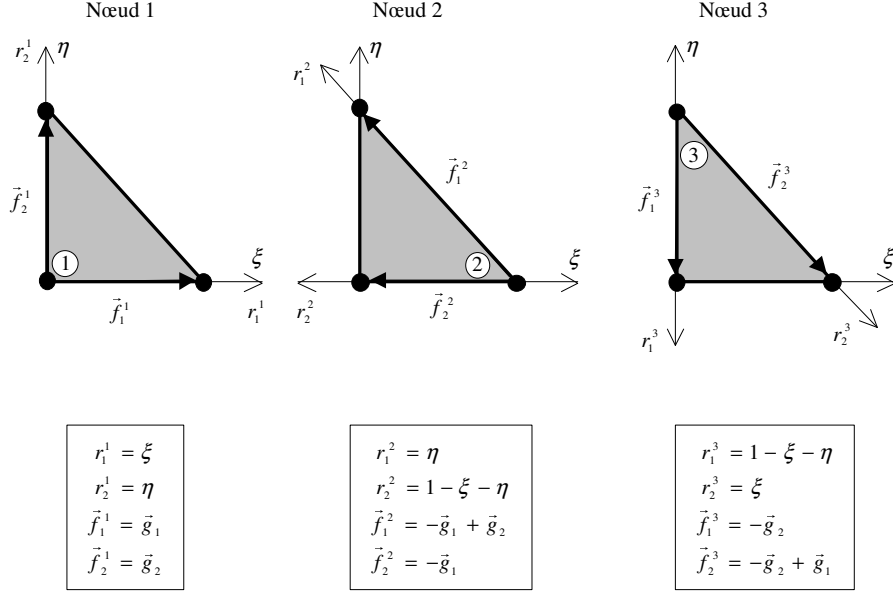


**Fig. 2.3** : Base covariante nodale pour le calcul des cisaillements transverses

Si l'on considère  $r_1^i$  ( $r_1^i \in [0, 1]$ ) et  $r_2^i$  ( $r_2^i \in [0, 1]$ ) les coordonnées naturelles de deux côtés adjacents ( $i, i + 1$ ) et ( $i, i - 1$ ), on peut définir une base covariante  $(\vec{f}_1^i, \vec{f}_2^i, \vec{f}_3^i)$  au noeud  $i$  et relative à ces côtés (cf. figure 2.3) :

$$\vec{f}_1^i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r_1^i} \quad \vec{f}_2^i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r_2^i} \quad \vec{f}_3^i = \vec{g}_3^i \quad (2.18)$$

La figure suivante donne les relations existant entre  $(r_1^i, r_2^i)$  et les coordonnées naturelles dans le plan  $(\xi, \eta)$  mais également celles liant  $(\vec{f}_1^i, \vec{f}_2^i)$  avec  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$ .



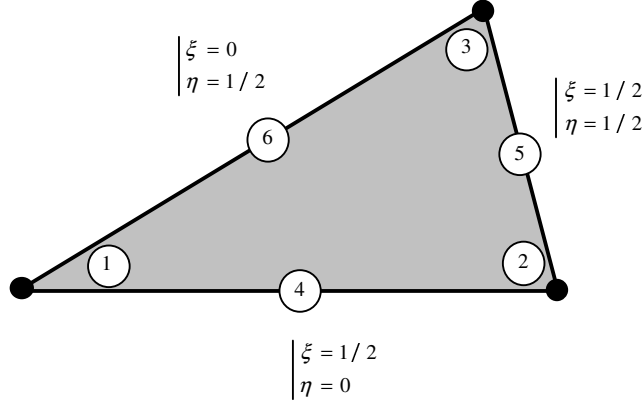
**Fig. 2.4** : Base covariante nodale

La connaissance des bases covariantes nodales au début  $({}_n \vec{f}_{1,n}^i, {}_n \vec{f}_{2,n}^i, {}_n \vec{f}_{3,n}^i)$  et à la fin  $({}_{n+1} \vec{f}_1^i, {}_{n+1} \vec{f}_2^i, {}_{n+1} \vec{f}_3^i)$  d'un incrément et l'utilisation d'une interpolation linéaire de la transformation géométrique sur l'incrément permettent d'écrire la base covariante dans la configuration intermédiaire  $C_{n+0,5}$  :

$${}_{n+0,5} \vec{f}_k^i = \frac{1}{2} \left[ {}_n \vec{f}_k^i + {}_{n+1} \vec{f}_k^i \right]; \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.19)$$

En reprenant les équations (2.9) et (2.10), les composantes nodales de déformation de cisaillement transverse par rapport à la base contravariante  ${}_{n+0,5} \vec{f}^{i,k} \otimes {}_{n+0,5} \vec{g}^{i,3}$  ( $k = 1, 2$ ) peuvent alors s'exprimer :

$$\begin{aligned} {}^* M_{k3}^i &= \frac{1}{2} \left[ {}^T_{n+1} \vec{f}_k^i \quad {}_{n+1} \vec{g}_3^i \quad -{}^T_n \vec{f}_k^i \quad {}_n \vec{g}_3^i \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial r_k^i} \right) \quad {}_{n+0,5} \vec{g}_3^i + {}^T_{n+0,5} \vec{f}_k^i \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$


**Fig. 2.5** : Numérotation des points milieux d'un élément

Supposées constantes le long des côtés de l'élément, ces composantes sont calculées au milieu des côtés  $m = 4, 5, 6$  (cf figure 2.5) :

$${}^*M_{k3}^i = \frac{1}{2} \left[ {}^T \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial r_k^i} \right)_m \quad {}_{n+0,5} \vec{g}_3^m + {}^T {}_{n+0,5} \vec{f}_k \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \right)_m \right] \quad (2.21)$$

Où  $(\bullet)_m$  signifie la valeur de  $(\bullet)$  en  $m$ .

En reprenant les équations (2.11), (2.12), (2.15) avec des fonctions d'interpolation linéaires, on obtient pour  ${}_{n+0,5} \vec{g}_3^m$  :

$$\begin{aligned} {}_{n+0,5} \vec{g}_3^4 &= \frac{1}{8} \left[ h^1 \left( {}_n \vec{X}^1 + {}_{n+1} \vec{X}^1 \right) + h^2 \left( {}_n \vec{X}^2 + {}_{n+1} \vec{X}^2 \right) \right] \\ {}_{n+0,5} \vec{g}_3^5 &= \frac{1}{8} \left[ h^2 \left( {}_n \vec{X}^2 + {}_{n+1} \vec{X}^2 \right) + h^3 \left( {}_n \vec{X}^3 + {}_{n+1} \vec{X}^3 \right) \right] \\ {}_{n+0,5} \vec{g}_3^6 &= \frac{1}{8} \left[ h^1 \left( {}_n \vec{X}^1 + {}_{n+1} \vec{X}^1 \right) + h^3 \left( {}_n \vec{X}^3 + {}_{n+1} \vec{X}^3 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Et pour  $(\partial \vec{u} / \partial \zeta)_m$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \right)_4 &= \frac{1}{4} \left[ h^1 \left( \alpha_2^1 {}_n \vec{V}_1^1 - \alpha_1^1 {}_n \vec{V}_2^1 \right) + h^2 \left( \alpha_2^2 {}_n \vec{V}_1^2 - \alpha_1^2 {}_n \vec{V}_2^2 \right) \right] \\ \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \right)_5 &= \frac{1}{4} \left[ h^2 \left( \alpha_2^2 {}_n \vec{V}_1^2 - \alpha_1^2 {}_n \vec{V}_2^2 \right) + h^3 \left( \alpha_2^3 {}_n \vec{V}_1^3 - \alpha_1^3 {}_n \vec{V}_2^3 \right) \right] \\ \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \right)_6 &= \frac{1}{4} \left[ h^1 \left( \alpha_2^1 {}_n \vec{V}_1^1 - \alpha_1^1 {}_n \vec{V}_2^1 \right) + h^3 \left( \alpha_2^3 {}_n \vec{V}_1^3 - \alpha_1^3 {}_n \vec{V}_2^3 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Et enfin pour  $(\partial \vec{u} / \partial r_k^i)_m$  en prenant  $\zeta = 0$  dans l'équation (2.15) :

$$\left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial r_1^i} \right)_m = \vec{u}^{i+1} - \vec{u}^i, \quad \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial r_2^i} \right)_m = \vec{u}^{i-1} - \vec{u}^i; \quad \vec{u}^0 \equiv \vec{u}^3 \quad (2.24)$$

Ces relations permettent alors d'effectuer l'interpolation suivante des composantes de déformation  ${}^*M_{k3}^i$  à partir de l'équation (2.21) :

$$\begin{pmatrix} {}^*M_{13}^i \\ {}^*M_{23}^i \end{pmatrix} = L^i u_n^e \quad (2.25)$$

Où  $L^i$  représente la matrice d'interpolation au noeud  $i$  et  $u_n^e$  le vecteur des déplacements nodaux.

Dans la base  ${}_{n+0,5} \vec{g}^k \otimes {}_{n+0,5} \vec{g}^{i,3}$  ( $k = 1, 2$ ) :

$$\begin{pmatrix} M_{13}^i \\ M_{23}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k {}^*M_{k3}^i \begin{pmatrix} T \\ n+0,5 \end{pmatrix} \vec{f}^{\vec{i},k} \quad n+0,5 \vec{g}_1 \\ \sum_k {}^*M_{k3}^i \begin{pmatrix} T \\ n+0,5 \end{pmatrix} \vec{f}^{\vec{i},k} \quad n+0,5 \vec{g}_2 \end{pmatrix} = \bar{L}^i (L^i) u_n^e \quad (2.26)$$

L'utilisation d'une intégration réduite [BOI92] dans (2.17) permet alors d'écrire :

$$\begin{pmatrix} M_{13} \\ M_{23} \end{pmatrix} = \sum_i N^i \bar{L}^i (L^i) u_n^e = \frac{1}{3} \sum_i \bar{L}^i (L^i) u_n^e = B_\gamma u_n^e \quad (2.27)$$

L'interpolation mixte se traduit par l'obtention d'une matrice d'interpolation des déformations de cisaillement transverse  $B_\gamma$  correspondant au même vecteur des déplacements nodaux  $u_n^e$  que pour un élément basé sur le déplacement.

Finalement, l'interpolation des déformations est obtenue par assemblage des matrices d'interpolation des déformations de membrane-flexion  $B_{mf}$  dérivée de (2.16) et de la matrice d'interpolation des déformations de cisaillement transverse  $B_\gamma$  tel que  $\underline{M} = (B_{mf} \oplus B_\gamma) u_n^e = B u_n^e$  où  $B$  est indépendante de  $u_n^e$  malgré le caractère non-linéaire de la déformation.

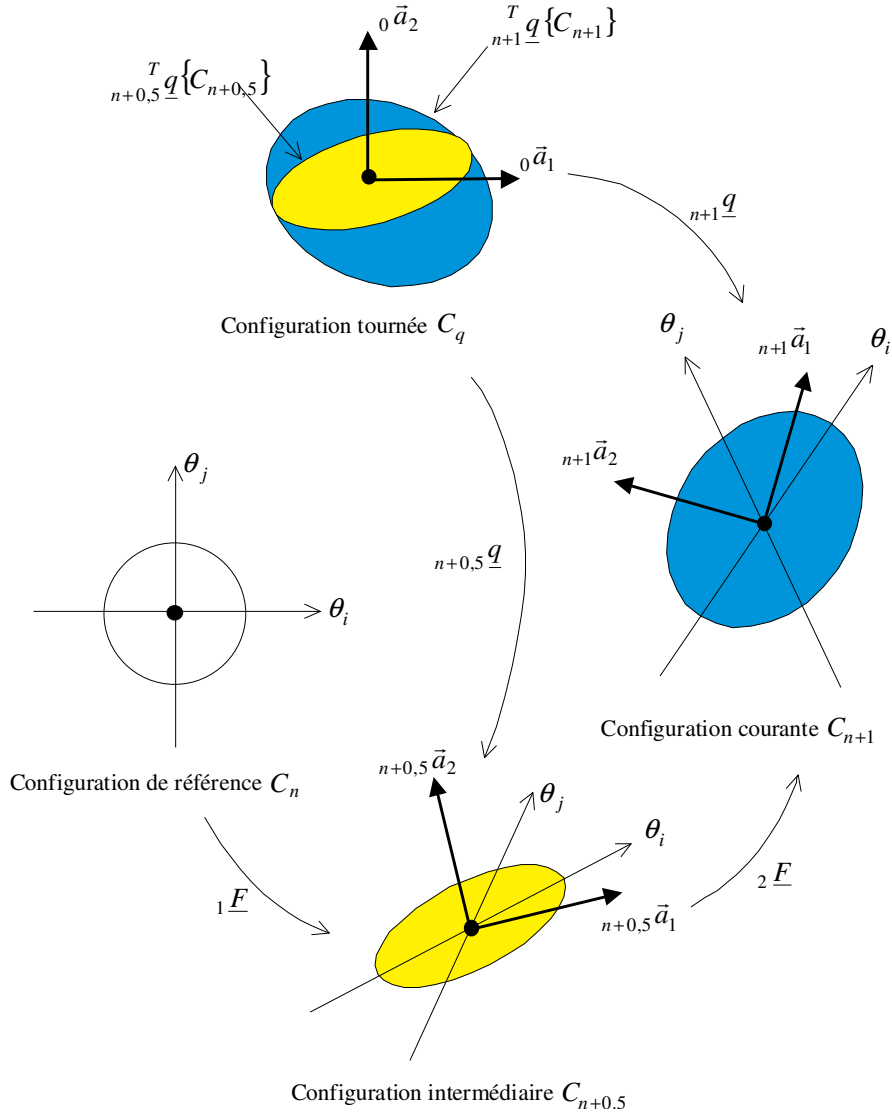
## 2.6 Cadre constitutif hyperélastique

$\underline{F}$  étant le gradient de transformation totale, de la configuration initiale  $C_0$  à la configuration courante  $C_{n+1}$ , et  $\underline{D} = \left( \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \right)^S$  le tenseur des taux de déformation matérielle associé, on introduit une mesure de déformation  $\underline{d}$  telle que :

$$\underline{D} = \dot{\underline{d}} - \underline{w} \underline{d} + \underline{d} \underline{w}; \quad \underline{w} = \dot{\underline{q}}^T \underline{q}, \quad \underline{q}|_{t=0} = \underline{I}, \quad \underline{q}^T \underline{q} = \underline{I} \quad (2.28)$$

i.e.  $\underline{D}$  est défini comme la dérivée rotationnelle  $D_q(\bullet)$  de  $\underline{d}$  par rapport à une rotation  $\underline{q}$ . Dépendant de cette rotation,  $\underline{d}$  peut être considérée comme une déformation tensorielle cumulée dans le sens introduit dans [GIL93].




**Fig. 2.6** : Configurations intermédiaire et tournée

Dans la configuration tournée  $C_q = {}^T \underline{q} \{C_{n+1}\}$  (cf figure 2.6) :

$$\dot{\underline{d}}_q = {}^T \underline{q} \underline{D} \underline{q}; \quad \underline{d}_q = {}^T \underline{q} \underline{d} \underline{q} \quad (2.29)$$

Supposant l'état du matériau comme complètement décrit dans cette configuration par  $\underline{d}_q$ , on dérive classiquement une relation contrainte-déformation de l'équation d'équilibre suivante :

$${}^T \underline{D} \underline{\sigma} - \rho {}^T \dot{\underline{d}}_q \frac{\partial \psi(\underline{d}_q)}{\partial \underline{d}_q} = {}^T \dot{\underline{d}}_q \left[ \underline{\sigma}_q - \rho \frac{\partial \psi(\underline{d}_q)}{\partial \underline{d}_q} \right] = 0 \quad \forall \dot{\underline{d}}_q; \quad \underline{\sigma}_q = {}^T \underline{q} \underline{\sigma} \underline{q} \quad (2.30)$$

Où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes vraies de Cauchy,  $\rho$  est la densité de masse courante et  $\psi$  l'énergie libre spécifique. Ainsi :

$$\underline{\sigma}_q = \rho \frac{\partial \psi(\underline{d}_q)}{\partial \underline{d}_q} \quad (2.31)$$

La principale caractéristique des quantités tournées  $(\underline{d}_q, \dot{\underline{d}}_q, \underline{\sigma}_q)$  réside dans la conservation du contenu physique des quantités eulériennes associées. En particulier, les composantes de  $\dot{\underline{d}}_q$  sont celles de  $\underline{D}$  par rapport au repère tournant par la rotation  $\underline{q}$  (en particulier  $tr \underline{D} = tr \dot{\underline{d}}_q$ ) (cf figure 2.6) :

$$\dot{\underline{d}}_q = \Delta_{ij} {}_0\vec{a}_i \otimes {}_0\vec{a}_j \quad \text{si} \quad \underline{D} = \Delta_{ij} {}_{n+1}\vec{a}_i \otimes {}_{n+1}\vec{a}_j \quad \text{avec} \quad {}_0\vec{a}_k = {}^T \underline{q} {}_{n+1}\vec{a}_k; \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.32)$$

Donc :

$$\underline{d}_q = \int_t \dot{\underline{d}}_q dt = \int_t \Delta_{ij} dt {}_0\vec{a}_i \otimes {}_0\vec{a}_j = \delta_{ij} {}_0\vec{a}_i \otimes {}_0\vec{a}_j \quad (2.33)$$

En exploitant l'équation (2.29) combinée à une intégration numérique sur l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ , on obtient :

$$\Delta \underline{d}_q = {}^T_{n+\varsigma} \underline{q} (\Delta t {}_{n+\varsigma} \underline{D}) {}_{n+\varsigma} \underline{q} = \Delta \delta_{ij} {}_0\vec{a}_i \otimes {}_0\vec{a}_j; \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad \varsigma \in [0, 1] \quad (2.34)$$

${}_{n+\varsigma} \underline{q}$  étant la rotation donnant la configuration tournée  $C_q$  à partir d'une configuration intermédiaire  $C_{n+\varsigma}$  i.e.  $C_q = {}^T_{n+\varsigma} \underline{q} \{C_{n+\varsigma}\}$  (cf figure 2.6). On en déduit alors :

$$\Delta \delta_{ij} = (\Delta t \underline{D}_{n+\varsigma})_{ij}$$

Pour une interpolation linéaire de la transformation géométrique sur l'intervalle de temps considéré i.e.  ${}_{n+\varsigma} \vec{x} = (1 - \varsigma) {}_n \vec{x} + \varsigma {}_{n+1} \vec{x}$ , une approximation précise au second ordre de  $\Delta \delta_{ij}$  est obtenue en utilisant l'équation (2.10) :

$$\Delta \delta_{ij} = \sum_l \sum_m M_{lm} \left( {}^T_{n+0,5} \vec{g}^l {}_{n+0,5} \vec{a}_i \right) \left( {}^T_{n+0,5} \vec{g}^m {}_{n+0,5} \vec{a}_j \right); \quad {}_{n+0,5} \vec{a}_k = {}_{n+0,5} \underline{q} {}_0 \vec{a}_k; \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.35)$$

Des chemins d'interpolation plus compliqués peuvent être utilisés. En particulier, le chemin exponentiel proposé dans [NAG84] est basé sur l'hypothèse d'un taux de déformation constant sur l'intervalle de temps. Il suggère que les directions principales des déformations conservent une orientation constante lors de la transformation incrémentale. De ce fait, une interpolation exacte est obtenue pour n'importe quelle transformation triaxiale. Par ailleurs,

plus la distorsion des directions matérielles est sensible, plus l'erreur est importante pour un intervalle de temps donné.

Dans le cadre d'une méthode incrémentale associée au schéma itératif de Newton pour la résolution des équations d'équilibre globales, les déformations incrémentales  $\Delta\delta_{ij}$  sont utilisées pour la mise à jour des composantes de  $\underline{\sigma}_q$  (equation 2.31) qui sont également celles de  $\underline{\sigma}$  par rapport au repère tournant par la rotation  $\underline{q}$ .

## 2.7 Définition des rotations objectives

Pour une rotation arbitraire  $\underline{r}$  imposée à une transformation donnée  $\underline{F}$ , le taux de rotation  $\underline{w} = \dot{\underline{q}}^T \underline{q}$  est changé en  $\dot{\underline{r}}^T \underline{r} + \underline{r} \underline{w}^T \underline{r}$  dans le cas d'une rotation objective  $\underline{q}$ .  $\underline{w}$  étant de même nature que le tenseur des taux de rotation matérielle  $\underline{W} = \left(\dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}\right)^A$ , l'objectivité de  $\underline{W} - \underline{w}$  implique alors celle de  $\underline{q}$ .

Une famille de rotations cinématiques objectives  $\underline{q}$  peut être définie par la résolution du problème différentiel suivant [FRE83][BOU94] :

$$\dot{\underline{q}} = \left[ (1 - \varsigma) \underline{W} + \varsigma \dot{\underline{R}}^T \underline{R} \right] \underline{q}, \quad \underline{q}|_{t=0} = \underline{I}; \quad \varsigma \in [0, 1] \quad (2.36)$$

Où  $\underline{R}$  est la rotation propre associée à  $\underline{F}$ .

Le choix de quelque rotation que ce soit est dicté classiquement, pour les matériaux isotropes, par la qualité de la réponse obtenue.

En particulier, les deux cas limites  $\varsigma = 0$  ( $\dot{\underline{q}}^T \underline{q} = \underline{W}$ ) et  $\varsigma = 1$  ( $\underline{q} = \underline{R}$ ) définissent respectivement la rotation du repère corotationnel et celle du repère tournant en rotation propre.

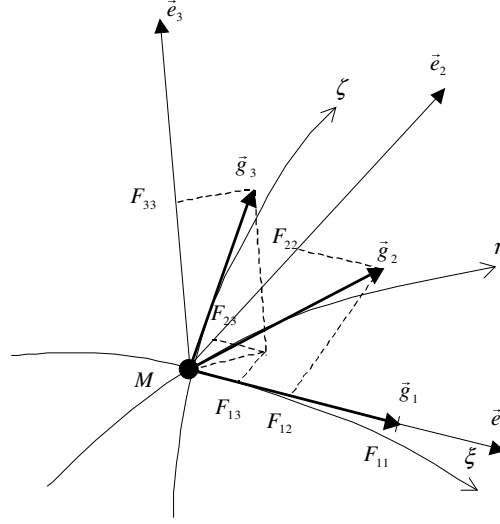
Dans le cas de l'anisotropie, le choix doit être également fait selon les critères de cohérence phénoménologique en l'absence de données concernant la microstructure [BOU94].

La cinématique d'Ahmad, présentée dans un paragraphe précédent, mène à une formulation de coque prenant en compte les effets de cisaillement transverse dans la mesure où elle introduit une pseudo-courbure à travers la définition des vecteurs pseudo-normaux, quand bien même la surface moyenne de la coque reste plane. Ainsi, en travaillant avec un repère de référence  $\vec{e}_i$  dont l'un des axes est construit à partir d'une direction matérielle lors de la transformation, la forme intrinsèque de  $\underline{F}$  est alors :

$$\underline{F} = F_{ij} \, {}_{n+1}\vec{e}_i \otimes {}_0\vec{e}_j; \quad [F_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ 0 & F_{22} & F_{23} \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

en considérant que  $\vec{g}_1$  est cette direction matérielle (cf figure 2.7) :

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|} \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2}{\|\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2\|} \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \quad (2.38)$$



**Fig. 2.7** : Transformation 3-D autour du voisinage d'un point matériel : description intrinsèque

En négligeant en première approximation, dans le cas des coques très minces, les composantes de cisaillement transverse  $F_{13}$  et  $F_{23}$  par rapport aux autres, on peut prendre la restriction de  $\underline{F}$  au plan et la transformation plane homogène locale résultant permet d'écrire [DOG88] :

$$\underline{W} = W_{ij} \, {}_{n+1}\vec{e}_i \otimes {}_{n+1}\vec{e}_j; \quad [W_{ij}] = \frac{1}{2} f \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad f = \frac{F_{11}}{F_{22}}; \quad \gamma = \frac{F_{12}}{F_{11}} \quad (2.39)$$

et :

$$\underline{R} = R_{ij} \, {}_{n+1}\vec{e}_i \otimes {}_0\vec{e}_j; \quad [R_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \beta = \arctan \left( \frac{F_{12}}{F_{11} + F_{22}} \right) \quad (2.40)$$

Avec :

$$\begin{aligned} F_{11} &= ({}^T_{n+1}\vec{g}_1 \, {}_{n+1}\vec{e}_1) ({}^T_0\vec{g}_1 \, {}_0\vec{e}_1) \\ F_{22} &= ({}^T_{n+1}\vec{g}_2 \, {}_{n+1}\vec{e}_2) ({}^T_0\vec{g}_2 \, {}_0\vec{e}_2) \\ F_{12} &= ({}^T_{n+1}\vec{g}_1 \, {}_{n+1}\vec{e}_1) ({}^T_0\vec{g}_1 \, {}_0\vec{e}_2) + ({}^T_{n+1}\vec{g}_2 \, {}_{n+1}\vec{e}_1) ({}^T_0\vec{g}_2 \, {}_0\vec{e}_2) \end{aligned} \quad (2.41)$$

si l'on considère la restriction de  $\underline{F}$  au plan i.e.  $\underline{F}_{m-c} = {}_{n+1}\vec{g}_1 \otimes {}_0\vec{g}_1 + {}_{n+1}\vec{g}_2 \otimes {}_0\vec{g}_2$ .

Ce qui amène à une famille de rotations objectives (3.54) définie par un angle  $\alpha$  unique tel que :

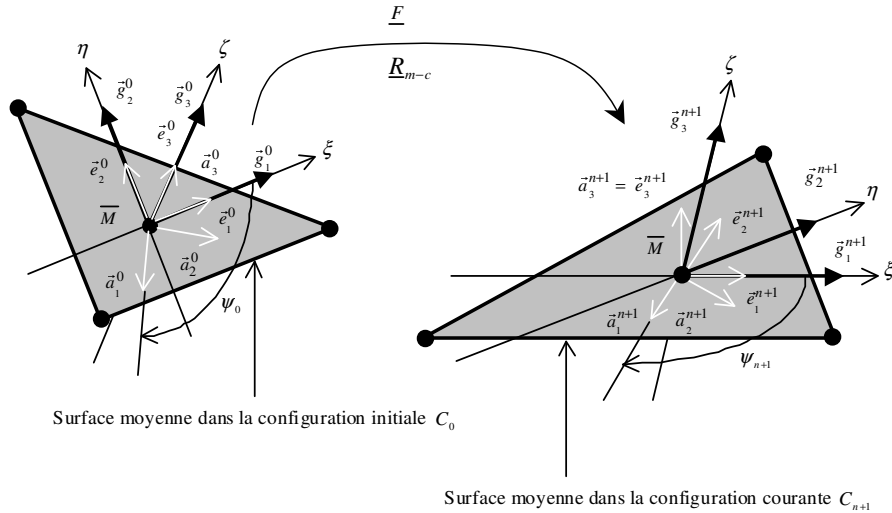
$$\dot{\alpha} = (1 - \zeta) \frac{1}{2} f \dot{\gamma} + \zeta \dot{\beta} \quad (2.42)$$

Où  $\alpha$  varie, pour un temps donné, entre la moyenne lagrangienne ( $\zeta = 0$ ) et eulérienne ( $\zeta = 1$ ) des taux de rotations des directions matérielles [DOG89].

La qualité de la réponse obtenue avec n'importe quel repère tournant dépend fortement de son taux par rapport à une référence matérielle. Cependant, dans le cas d'une grande distorsion des lignes matérielles (plus de 100 %), tous les repères tournant donnés par la relation (2.42) restent équivalents. En particulier, ils sont équivalents au repère appelé repère triaxial [DOG89] pour lequel  $\underline{d} = \ln \underline{V}$  où  $\underline{V} = \underline{F}^T \underline{R}$ . Un choix simple pourrait donc être la rotation propre.

$\psi_0$  étant l'orientation initiale du repère tournant par rapport à  ${}_0\vec{e}_1$ , l'expression de l'orientation courante  $\psi_{n+1}$  de ce même repère par rapport à  ${}_{n+1}\vec{e}_1$  s'obtient facilement (cf figure 2.8) :

$$\psi_{n+1} = \psi_0 + \alpha \quad (2.43)$$



**Fig. 2.8** : Réactualisation du repère tournant

La réactualisation du repère tournant, obtenue en considérant la restriction de  $\underline{F}$  au plan, permet de rendre compte directement de l'hypothèse de contrainte normale nulle à travers

l'épaisseur de la coque. Par ailleurs, l'utilisation de repères attachés d'une certaine façon à une direction matérielle assure une objectivité incrémentale inconditionnelle.

## 2.8 Opérateur tangent

Dans le cas d'une formulation lagrangienne réactualisée lors de la résolution du problème d'équilibre global [BOU94][GAA93][BOU98a], un opérateur tangent admissible  $\underline{T}_n$  doit être associé dans la configuration de référence  $C_n$  au couple conjugué déformations de Green-Lagrange  $\underline{E}$ - contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{S}$  tel que :

$$d(\underline{S}_{n+1}) = \underline{T}_n d(\underline{E}_{n+1}) \quad (2.44)$$

Puisque les composantes de  $d(\underline{\bullet})_R / dt$ ;  $(\underline{\bullet})_R = {}^T \underline{R}(\underline{\bullet})\underline{R}$ , dans la configuration tournée  $C_R$  sont également celles de la dérivée rotationnelle  $D_R(\underline{\bullet}) = d(\underline{\bullet}) / dt - \underline{w}(\underline{\bullet}) + (\underline{\bullet})\underline{w}$ ;  $\underline{w} = \dot{\underline{R}}^T \underline{R}$  dans la configuration courante  $C_{n+1}$  par rapport au repère tournant par la rotation propre  $\underline{R}$ , il vient alors :

$$\begin{aligned} d(\underline{\sigma}_R^{n+1}) &= (D_R \underline{\sigma})_{ij} dt \, {}_0 \vec{a}_i \otimes {}_0 \vec{a}_j \\ d(\underline{d}_R^{n+1}) &= (D_R \underline{d})_{ij} dt \, {}_0 \vec{a}_i \otimes {}_0 \vec{a}_j \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ainsi, dans  $C_n$  :

$$\begin{aligned} \underline{R}_n [d(\underline{\sigma}_R^{n+1})] {}^T \underline{R}_n &= (D_R \underline{\sigma})_{ij} dt \, {}_n \vec{a}_i \otimes {}_n \vec{a}_j \\ \underline{R}_n [d(\underline{d}_R^{n+1})] {}^T \underline{R}_n &= (D_R \underline{d})_{ij} dt \, {}_n \vec{a}_i \otimes {}_n \vec{a}_j \end{aligned} \quad (2.46)$$

De la même façon, les composantes de  $d(\underline{E}_{n+1}) / dt$  dans  $C_n$  sont également celles du tenseur des taux de déformation matérielle dans  $C_{n+1}$  par rapport à un repère convectif contravariant, et les composantes de  $d(\underline{S}_{n+1}) / dt$  dans  $C_n$  sont également celles de la dérivée contravariante des contraintes de Kirchhoff  $D^c \underline{\tau} = \dot{\underline{\tau}} - (\dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}) \underline{\tau} - \underline{\tau}^T (\dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1})$ ;  $\underline{\tau} = (\det \underline{F}) \underline{\sigma}$  dans  $C_{n+1}$  par rapport à un repère convectif covariant. Ainsi :

$$d(\underline{S}_{n+1}) = (D^c \underline{\tau})^{ij} dt \, {}_n \vec{g}_i \otimes {}_n \vec{g}_j; \quad {}_n \vec{g}_k = \Delta \underline{F}^{-1} {}_{n+1} \vec{g}_k; \quad k = 1, 2, 3$$

$$d(\underline{E}_{n+1}) = D_{ij} dt \, {}_n \vec{g}^i \otimes {}_n \vec{g}^j; \quad {}_n \vec{g}^k = {}^T \Delta \underline{F} \, {}_{n+1} \vec{g}_k \quad (2.47)$$

Avec :

$$D_{ij} dt = \sum_k \sum_l (D_R \underline{d})_{kl} dt \, ({}^T_{n+1} \vec{a}_k \, {}_{n+1} \vec{g}_i) ({}^T_{n+1} \vec{a}_l \, {}_{n+1} \vec{g}_j); \quad (D_R \underline{d})_{kl} dt = d(\underline{d}_R^{n+1})_{kl} \quad (2.48)$$

En exprimant  $d(\underline{E}_{n+1})$  par rapport au repère tournant dans  $C_n$ , il vient alors :

$$d(\underline{E}_{n+1}) = \sum_k \sum_l D_{kl} dt \, ({}^T_n \vec{g}^k \, {}_n \vec{a}_i) ({}^T_n \vec{g}^l \, {}_n \vec{a}_j) \, {}_n \vec{a}_i \otimes {}_n \vec{a}_j \quad (2.49)$$

En prenant en compte l'équation (2.48), on peut alors en dériver la relation suivante :

$$d(\underline{E}_{n+1}) = \underline{\underline{\Lambda}}_1 d(\underline{d}_R^{n+1}) \quad (2.50)$$

En considérant l'approximation suivante de la dérivée contravariante des contraintes de Kirchhoff, suggérant une variation de volume modérément faible lors de la transformation :

$$D^c \underline{\sigma} \approx D^c \underline{\sigma} = \dot{\underline{\sigma}} - \left( \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \right) \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^T \left( \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \right) \quad (2.51)$$

Cette hypothèse est vérifiée en première approximation dans le cas des comportements élasto-dissipatifs des matériaux métalliques.

En utilisant l'identité :

$$\underline{W} = \left( \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \right)^A = \underline{\dot{R}} \, {}^T \underline{R} + \underline{R} \left( \dot{\underline{U}} \underline{U}^{-1} \right)^A \, {}^T \underline{R}; \quad \underline{U} = {}^T \underline{R} \underline{F} \quad (2.52)$$

Il vient alors :

$$D^c \underline{\sigma} = D_R \underline{\sigma} - \left[ \underline{D} + \underline{R} \left( \dot{\underline{U}} \underline{U}^{-1} \right)^A \, {}^T \underline{R} \right] \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \left[ \underline{D} - \underline{R} \left( \dot{\underline{U}} \underline{U}^{-1} \right)^A \, {}^T \underline{R} \right] \quad (2.53)$$

Ainsi, en supposant des rotations matérielles modérément faibles sur chaque incrément de temps, on peut en déduire que les directions principales de  $\dot{\underline{U}}$  et  $\underline{U}^{-1}$  peuvent être confondues :

$$\left( \dot{\underline{U}} \underline{U}^{-1} \right)^A \approx \underline{0}, \quad D^c \underline{\sigma} = D_R \underline{\sigma} - \underline{D} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{D} \quad (2.54)$$

Et donc :

$$(D^c \underline{\sigma})^{ij} dt = \sum_k \sum_l (D^c \underline{\sigma})_{kl} dt \begin{pmatrix} T \\ n+1 \end{pmatrix} \vec{a}_k \begin{pmatrix} T \\ n+1 \end{pmatrix} \vec{g}^i \begin{pmatrix} T \\ n+1 \end{pmatrix} \vec{a}_l \begin{pmatrix} T \\ n+1 \end{pmatrix} \vec{g}^j \quad (2.55)$$

Avec :

$$(D^c \underline{\sigma})_{kl} dt = (D_R \underline{\sigma})_{kl} dt - (D_R \underline{d})_{kp} dt \sigma_{pl} - \sigma_{kp} (D_R \underline{d})_{pl} dt \quad (2.56)$$

En exprimant  $d(\underline{S}_{n+1})$  par rapport au repère tournant dans  $C_n$ , alors :

$$d(\underline{S}_{n+1}) = \sum_k \sum_l (D^c \underline{\sigma})^{kl} dt \begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix} \vec{g}_k \begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix} \vec{a}_i \begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix} \vec{g}_l \begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix} \vec{a}_j \begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix} \vec{a}_i \otimes \begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix} \vec{a}_j \quad (2.57)$$

Et en prenant en compte les équations (2.45) et (2.56), on en déduit la relation suivante :

$$d(\underline{S}_{n+1}) = \underline{\Lambda}_2 [d(\underline{\sigma}_R^{n+1}) - \underline{T}(\underline{\sigma}_R^{n+1}) d(\underline{d}_R^{n+1})] \quad (2.58)$$

En désignant  $\underline{T}_R$  l'opérateur de comportement tangent dans la configuration tournée tel que :

$$d(\underline{\sigma}_R^{n+1}) = \underline{T}_R(\underline{d}_R^{n+1}) \quad (2.59)$$

On obtient finalement :

$$\underline{T}_n = \underline{\Lambda}_2 \left[ \underline{T}_R - \underline{T}(\underline{\sigma}_R^{n+1}) \right] \underline{\Lambda}_1^{-1} \quad (2.60)$$

Dans le cas où la configuration tournée par la rotation propre  $C_R$  est utilisée pour la description du comportement du matériau, l'opérateur tangent  $\underline{T}_R$  est obtenu à partir de l'équation (2.31) tel que :

$$\underline{T}_R = \rho \frac{\partial}{\partial(\underline{d}_R)} \left[ \frac{\partial \psi(\underline{d}_R)}{\partial(\underline{d}_R)} \right] \quad (2.61)$$

## 2.9 Discrétisation du principe des travaux virtuels

Dans le cadre d'une stratégie incrémentale associée au schéma itératif de Newton, le problème de l'équilibre global du domaine étudié est résolu suivant une approche lagrangienne réactualisée. Cette approche consiste à résoudre l'équation non-linéaire suivante, expression



du Principe des travaux virtuels en transformations finies, dans la configuration en début d'incrément pour l'incrément en cours :

$$F \left( \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial \vec{x}_n} \right) = \int_{V_n} \underline{S} : \delta \underline{E} dV - \delta W_{ext} \quad (2.62)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{u} \text{ représente un incrément de déplacement} \\ \vec{x}_n \text{ vecteur position dans configuration début d'incrément} \\ V_n \text{ volume du domaine en début d'incrément} \\ \underline{S} \text{ second tenseur de Piola-Kirchhoff} \\ \delta \underline{E} \text{ variation des déformations de Green-Lagrange par rapport à } \Delta \vec{u} \\ \delta W_{ext} = \int_{S_{t_n}} (\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot \Delta \vec{u} dS \text{ avec } \underline{\sigma} \text{ tenseur des contraintes de Cauchy} \end{array} \right.$$

La méthode de Newton permet de remplacer un problème non-linéaire par une suite de problèmes linéaires. Dans le cas de  $F$ , la dérivation doit avoir lieu par rapport à une fonction. Si l'on fait l'hypothèse de charges mortes sur l'incrément, la quantité  $\delta W_{ext}$  est constante. Ainsi :

$$\delta F \left( \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial \vec{x}_n} \right) = \int_{V_n} \delta \underline{S} : \delta \underline{E} dV + \int_{V_n} \underline{S} : \delta(\delta \underline{E}) dV \quad (2.63)$$

Où  $\delta$  désigne un opérateur de variation de fonctionnelle.

Si  $N$  désigne la matrice d'interpolation des déplacements et  $\Delta \vec{u}_{noeud}^e$  le vecteur des déplacements incrémentaux aux noeuds de chaque élément  $e$ , alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{u}^e = N \Delta \vec{u}_{noeud}^e \\ \delta \Delta \vec{u}^e = N \delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e \end{array} \right. \quad (2.64)$$

On en déduit :

$$\delta \underline{E}^e = \left( \frac{\partial(\delta \Delta \vec{u}^e)}{\partial \vec{x}_n} \right)^S + \left[ {}^T \left( \frac{\partial(\Delta \vec{u}^e)}{\partial \vec{x}_n} \right) \frac{\partial(\delta \Delta \vec{u}^e)}{\partial \vec{x}_n} \right]^S = \underline{B}(\Delta \vec{u}_{noeud}^e) \delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e \quad (2.65)$$

La matrice d'interpolation  $\underline{B}(\Delta \vec{u}_{noeud}^e)$  est constituée d'une partie linéaire  $\underline{B}_L$  et d'une partie non-linéaire  $\underline{B}_{NL}(\Delta \vec{u}_{noeud}^e)$  qui vient de l'interpolation du second terme. Compte tenu de la relation précédente, en notant  $A$  l'opérateur d'assemblage sur tous les éléments, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{V_n} \delta \underline{S} : \delta(\delta \underline{E}) dV &= A \int_{V_n^e} \left( \frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{E}^e} : \delta \underline{E}^e \right) : \delta \underline{E}^e dV^e \\ &= A^T (\delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e) \left[ \int_{V_n^e} {}^T \underline{B}(\Delta \vec{u}_{noeud}^e) \underline{T}_n \underline{B}(\Delta \vec{u}_{noeud}^e) dV^e \right] \delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e \end{aligned}$$

$$=^T (\delta \Delta \vec{u}_{noeud}) [A\underline{\underline{K}}^e] \delta \Delta \vec{u}_{noeud} \quad (2.66)$$

Où  $\underline{\underline{K}}^e = \int_{V_n^e} {}^T \underline{\underline{B}} (\Delta \vec{u}_{noeud}^e) \underline{\underline{T}}_n \underline{\underline{B}} (\Delta \vec{u}_{noeud}^e) dV^e$  est la matrice de rigidité élémentaire.  $\underline{\underline{T}}_n = \partial \underline{\underline{S}} / \partial \underline{\underline{E}}^e$  est un opérateur tangent cohérent avec l'algorithme de calcul des contraintes (cf paragraphe précédent sur le calcul de l'opérateur tangent) et sa forme dépend de la loi de comportement choisie. Son utilisation permet de conserver la convergence du schéma de Newton.

D'autre part, la seconde partie de  $\delta F \left( \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial \vec{x}_n} \right)$  dans la relation (2.63) peut s'écrire :

$$\int_{V_n} \underline{\underline{S}} : \delta(\delta \underline{\underline{E}}) dV = A \int_{V_n^e} \underline{\underline{S}} : \left[ {}^T \left( \frac{\partial (\delta \Delta \vec{u}^e)}{\partial \vec{x}_n} \right) \frac{\partial (\delta \Delta \vec{u}^e)}{\partial \vec{x}_n} \right] dV^e \quad (2.67)$$

En posant :

$$\begin{cases} \frac{\partial (\delta \Delta \vec{u}^e)}{\partial \vec{x}_n} = \underline{\underline{G}} \delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e \\ \underline{\underline{H}} (\underline{\underline{S}}^e) = [H_{kilj}] = [S_{ij}^e \delta_{kl}] \end{cases} \quad \text{avec} \quad \delta_{kl} \text{ symbole de Kronecker}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{V_n} \underline{\underline{S}} : \delta(\delta \underline{\underline{E}}) dV &= A^T (\delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e) \left[ \int_{V_n^e} {}^T \underline{\underline{G}} \underline{\underline{H}} (\underline{\underline{S}}^e) \underline{\underline{G}} dV^e \right] \delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e \\ &=^T (\delta \Delta \vec{u}_{noeud}) [A\underline{\underline{K}}_\sigma^e] \delta \Delta \vec{u}_{noeud} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Où  $\underline{\underline{K}}_\sigma^e = \int_{V_n^e} {}^T \underline{\underline{G}} \underline{\underline{H}} (\underline{\underline{S}}^e) \underline{\underline{G}} dV^e$  est la matrice de raideur géométrique élémentaire. C'est une particularité des grandes transformations. L'ignorer n'empêche pas a priori la convergence du schéma de Newton mais la ralentit.

Finalement, on peut écrire l'expression du Principe des Travaux Virtuels en grandes transformations sous forme discrétisée :

$$\delta F \left( \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial \vec{x}_n} \right) =^T (\delta \Delta \vec{u}_{noeud}) [A\underline{\underline{K}}^e + A\underline{\underline{K}}_\sigma^e] \delta \Delta \vec{u}_{noeud} \quad (2.69)$$

D'autre part, en considérant l'équation (2.62), l'expression de  $\delta \underline{\underline{E}}$  établie auparavant puis l'assemblage des composantes des différents éléments, on peut écrire :

$$F \left( \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial \vec{x}_n} \right) = A^T (\delta \Delta \vec{u}_{noeud}^e) \left[ \int_{V_n^e} {}^T \underline{\underline{B}} (\Delta \vec{u}_{noeud}^e) \underline{\underline{S}}^e dV^e - \left( \vec{F}_{noeud}^e \right)_{ext} \right]$$

$$= {}^T (\delta \Delta \vec{u}_{noeud}) \left[ A \vec{F}_{int}^e - A \left( \vec{F}_{noeud}^e \right)_{ext} \right] \quad (2.70)$$

Où  $\vec{F}_{int}^e$  et  $\left( \vec{F}_{noeud}^e \right)_{ext}$  représentent respectivement les efforts élémentaires intérieures et extérieures.

Par conséquent, en considérant les relations (2.69) et (2.70), il faut résoudre à chaque itération de la méthode de Newton le système linéaire suivant :

$$\delta F \left( \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial \vec{x}_n} \right) = -F \left( \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial \vec{x}_n} \right)$$

$$\left[ A \left( \underline{\underline{K}}^e \right)^i + A \left( \underline{\underline{K}}_\sigma^e \right)^i \right] \delta \Delta \vec{u}_{noeud}^i = - \left[ A \left( \vec{F}_{int}^e \right)^i - A \left( \vec{F}_{noeud}^e \right)_{ext}^i \right] \quad (2.71)$$

Avec :

$$\begin{cases} \left( \underline{\underline{K}}^e \right)^i = \int_{V_n^e} {}^T \underline{\underline{B}} (\Delta \vec{u}_{noeud}^{ei}) \underline{\underline{T}}_n^i \underline{\underline{B}} (\Delta \vec{u}_{noeud}^{ei}) dV^e \\ \left( \underline{\underline{K}}_\sigma^e \right)^i = \int_{V_n^e} {}^T \underline{\underline{G}} \underline{\underline{H}} (\underline{\underline{S}}^{ei}) \underline{\underline{G}} dV^e \\ \left( \vec{F}_{int}^e \right)^i = \int_{V_n^e} {}^T \underline{\underline{B}} (\Delta \vec{u}_{noeud}^{ei}) \underline{\underline{S}}^{ei} dV^e \end{cases}$$

On en déduit alors le déplacement incrémental et le déplacement total à l'itération  $i + 1$  :

$$\begin{cases} \Delta \vec{u}_{noeud}^{i+1} = \Delta \vec{u}_{noeud}^i + \delta \Delta \vec{u}_{noeud}^i \\ \vec{u}_{n+1}^{i+1} = \vec{u}_n + \Delta \vec{u}_{noeud}^{i+1} \end{cases} \quad (2.72)$$

Ce qui permet de calculer les contraintes  $(\underline{\underline{S}}^e)^{i+1}$  dans chaque élément et le déséquilibre correspondant :

$$R^{i+1} = A \left( \vec{F}_{int}^e \right)^{i+1} - A \left( \vec{F}_{noeud}^e \right)_{ext} \quad (2.73)$$

Si le critère de convergence est vérifié alors on passe à l'incrément suivant en actualisant la configuration de référence  $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta \vec{u}_{noeud}^{i+1}$ .

L'algorithme de résolution est résumé sur la figure (2.9) suivante.

■ **Boucle sur les incréments de chargement**

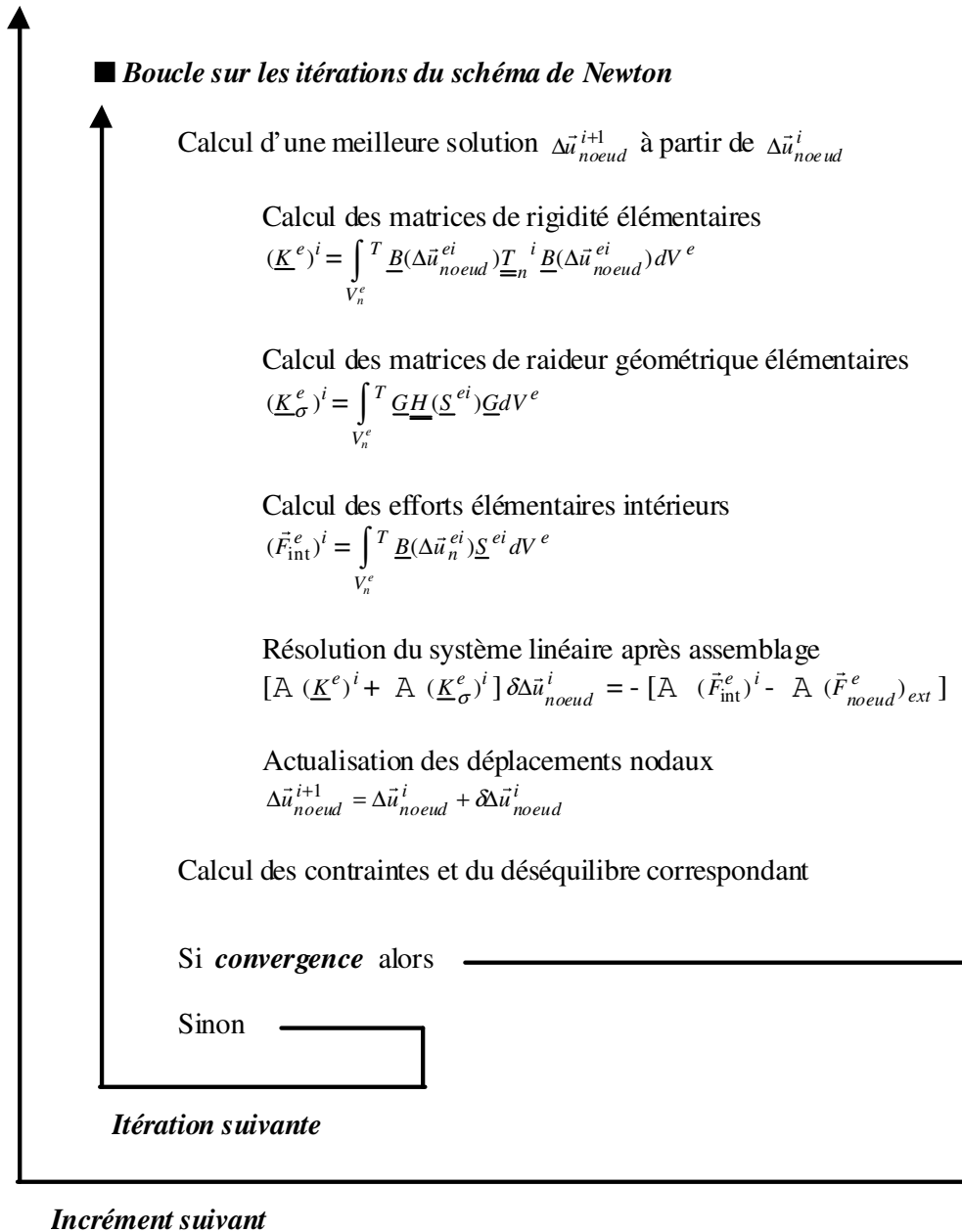


Fig. 2.9 : Algorithme de résolution de l'équilibre global en transformations finies

## 2.10 Validation en petites perturbations

L'élément de coque dégénéré introduit précédemment a été implanté dans le code élément fini CASTEM 2000. Dans le but de valider cette implantation numérique et de tester les performances de l'élément, une série d'essais caractéristiques a été menée. Ces essais mettent en évidence les performances de l'élément en comportement linéaire élastique pour des problèmes classiques en matière de validation d'élément de coque [BAT90a][BAT90b][BOI93][BOI94][BOI96]. En outre, les résultats obtenus sont comparés, pour la majorité des essais, avec l'élément quadrangulaire MITC4 développé par Dvorkin et Bathe [DVO84]. Dans la plupart des essais, on évalue également l'influence du maillage en effectuant la simulation pour un maillage distordu (appelé *A* par la suite) et un maillage cross-diagonal non distordu (appelé *CD* par la suite).

### “Patch test”

Parmi les tests élémentaires classiques pour les éléments de coque, on trouve le patch test pour les éléments triangulaires. Défini par Robinson, il permet notamment de tester l'élément pour des sollicitations en cisaillement ou en torsion. La géométrie de ce test, les propriétés matérielles et le maillage (non symétrique) sont données sur la figure (2.10a). Dans cette même figure, on peut également trouver les conditions limites correspondant à chaque essai.

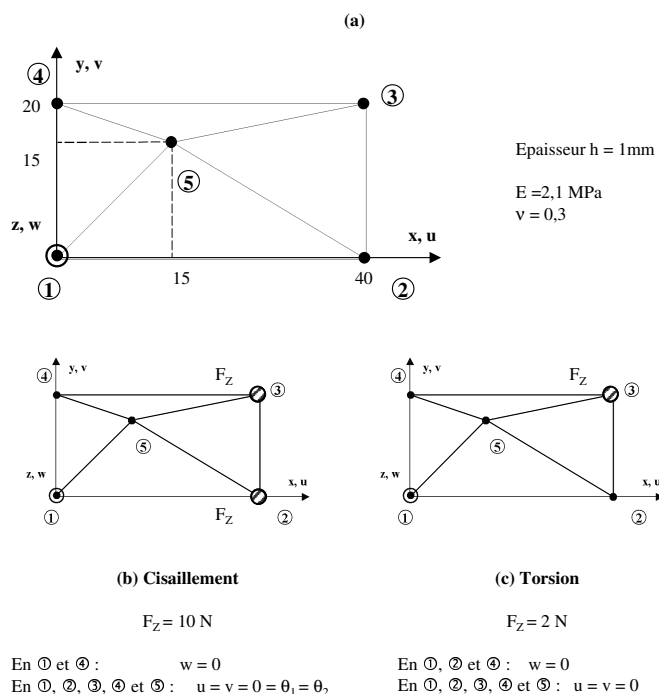


Fig. 2.10 : “Patch test” : caractéristiques et configuration

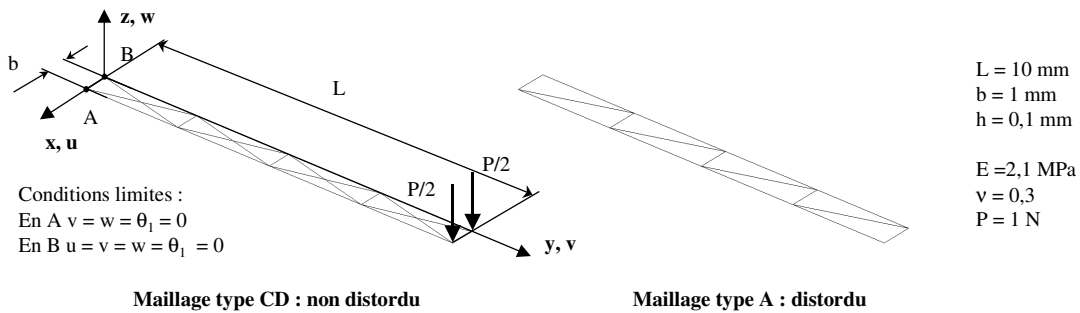
Dans le cas du cisaillement (cf figure 2.10b), les rotations sont imposées nulles en tous les

noeuds et un effort de cisaillement  $F_z$  est appliqué aux extrémités de la structure. On observe une répartition linéaire du déplacement transverse, lequel est conforme au résultat théorique.

Dans le cas de la torsion (cf figure 2.10c), on sollicite une seule des extrémités de la structure avec un effort  $F_z$ . La théorie montre que le moment  $M_{xy}$  est constant et égal à 1. Toutefois, dans les conditions présentées, la simulation indique une légère variation de ce moment autour de cette valeur. Mais, quand le maillage devient symétrique ou pour une épaisseur décroissante, ce problème disparaît.

### “Cantilever” en flexion

Un cantilever dont la géométrie et les propriétés matérielles sont données sur la figure 2.11, est soumis à une force concentrée  $P$  répartie à son extrémité.

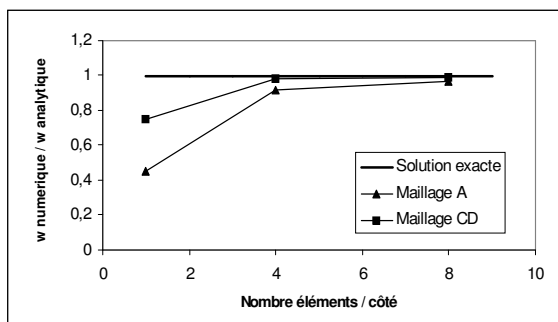


**Fig. 2.11** : Cantilever en flexion : caractéristiques et configuration

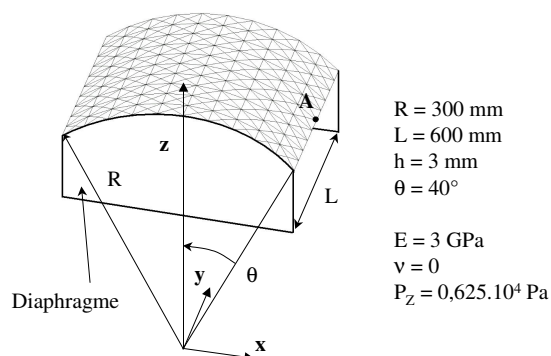
On observe alors l'évolution du déplacement  $w$  des points d'application des efforts à l'extrémité du cantilever en fonction du nombre d'éléments sur le côté (cf figure 2.12). Les résultats analytiques donnés par la théorie des poutres servent de base de comparaison pour les résultats numériques obtenus. Globalement, un maillage non distordu (de type *CD*) donne une flèche plus précise que dans le cas d'un maillage distordu (du type *A*). Par ailleurs, pour ce dernier maillage, on note une très légère dissymétrie (presque insensible) entre les flèches des deux noeuds des extrémités, conséquence de la distorsion du maillage. Par contre, il est intéressant de souligner que les contraintes de cisaillement transverse diffèrent sensiblement. Quand le maillage devient symétrique (cas du maillage *CD*), cette différence disparaît.

### Panneau cylindrique soumis à son propre poids

Egalement appelé test de Scordelis-Lo, ce test s'intéresse à un panneau cylindrique, dont les bords droits sont libres et dont les bords courbes reposent sur des diaphragmes rigides dans leurs plans, soumis à son propre poids  $P_Z$ . Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont indiquées sur la figure (2.13).

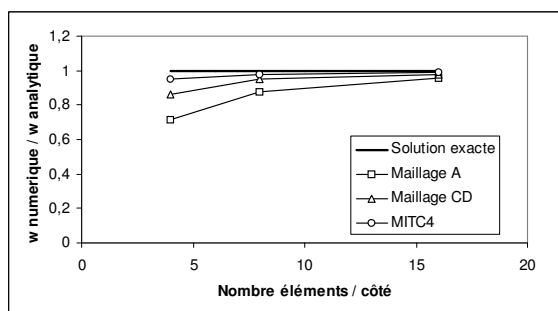


**Fig. 2.12** : Evolution de la flèche avec le type et la finesse du maillage : convergence de l'élément



**Fig. 2.13** : Panneau cylindrique soumis à son propre poids : caractéristiques et configuration

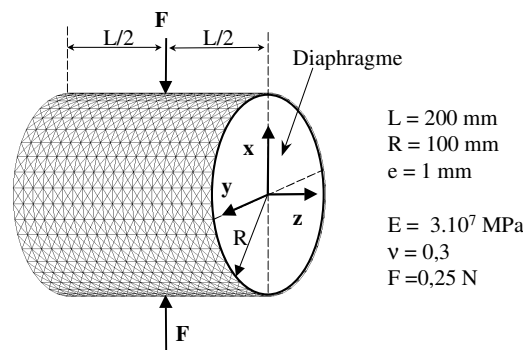
En raison de la symétrie du problème (géométrie, conditions limites et chargement appliqué), on peut considérer un quart du panneau. On observe l'évolution du déplacement  $w$  du point A, milieu du bord droit libre, en fonction de la finesse du maillage. Une solution analytique basée sur la théorie des coques profondes est utilisée pour la comparaison avec le résultat numérique. Les déformations de cisaillement transverse sont négligeables et les déformations de membrane sont importantes par rapport à celles de flexion. La rapidité de convergence de l'élément sur ce test est moins bonne que celle du quadrangles MITC4 même si un maillage cross-diagonal fin permet de réduire significativement la différence (cf figure 2.14).



**Fig. 2.14** : Evolution du déplacement du point A avec le type et la finesse du maillage : convergence de l'élément

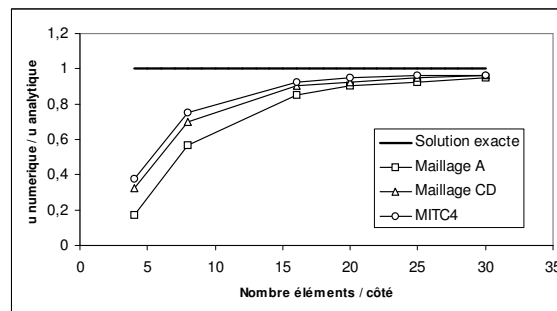
### Cylindre pincé avec diaphragme

Un cylindre, dont les deux extrémités reposent sur un diaphragme rigide dans son plan, est soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées. Les données géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure (2.15). Les rapports  $L/R = 2$  et  $R/h = 100$  sont identiques à ceux du panneau soumis à son propre poids. Cet exemple constitue un des tests les plus sévères pour étudier la capacité d'un élément de coque à décrire des champs de déformation de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne. En raison des diaphragèmes, les déformations sont localisées près du point d'application de la charge, de sorte qu'un maillage assez fin est requis pour obtenir la solution du problème, notamment lorsque des éléments linéaires sont utilisés.



**Fig. 2.15** : Cylindre pincé avec diaphragme : caractéristiques et configuration

On observe alors l'évolution du déplacement  $u$  de ce point avec une finesse de maillage croissante. Avec un maillage cross-diagonal, la solution atteinte à la convergence est très proche de celle obtenue avec des quadrangles MITC4 (cf figure 2.16).

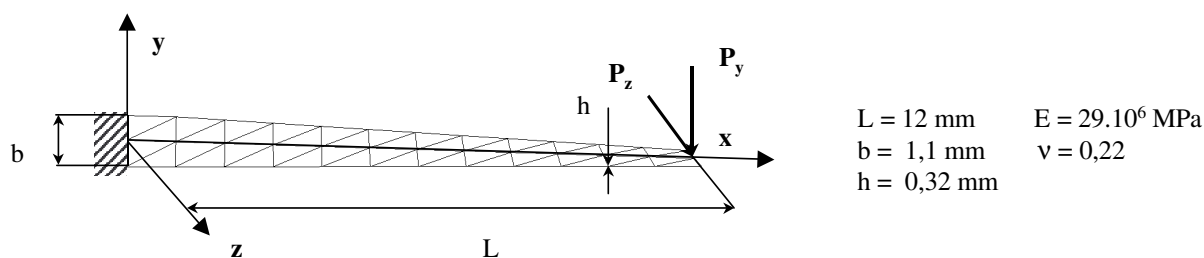


**Fig. 2.16** : Evolution du déplacement du point d'application de la force avec le type et la finesse du maillage : convergence de l'élément

### Coque hélicoïdale sous charges concentrées

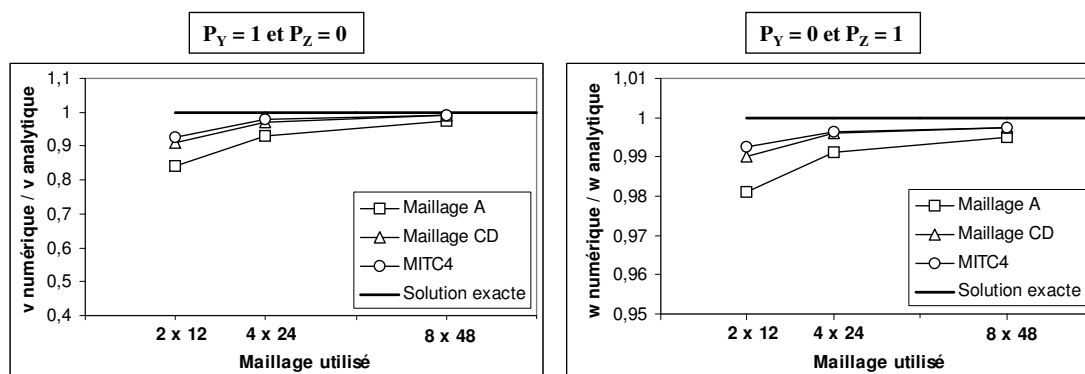
Une coque hélicoïdale encastée à une extrémité est soumise à des charges concentrées à l'autre extrémité. Les dimensions et les caractéristiques mécaniques sont données sur la figure (2.17).





**Fig. 2.17** : Coque hélicoïdale sous charges concentrées : caractéristiques et configuration

Les solutions de référence s'appuient sur la théorie des poutres incluant ou non les effets de cisaillement transverse. Pour la géométrie considérée, ces effets sont négligeables. On considère deux types de chargement : un chargement dans le plan correspondant à  $(P_Z = 1, P_Y = 0)$  et un chargement hors plan correspondant à  $(P_Z = 0, P_Y = 1)$ . Relativement au type de chargement (suivant  $\vec{y}$  ou  $\vec{z}$ ), on observe l'évolution du déplacement  $v$  (selon  $\vec{y}$ ) ou  $w$  (selon  $\vec{z}$ ) du point d'application de la force en fonction de la finesse du maillage (cf figure 2.18). De même que précédemment, un maillage cross-diagonal permet d'obtenir des résultats très proches de ceux de l'élément MITC4.

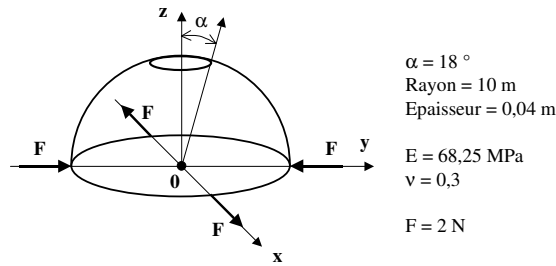


**Fig. 2.18** : Evolution du déplacement du point d'application de la force avec le type et la finesse du maillage : convergence de l'élément

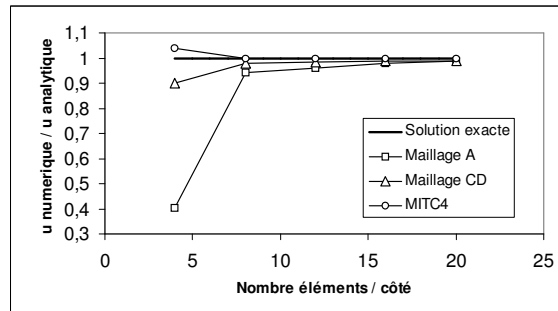
### Hémisphère sous charges diamétralement opposées

Le test d'un hémisphère mince ( $R/h = 250$ ) percé sur sa surface supérieure et soumis à la base à quatre charges concentrées est utilisé pour vérifier l'absence de verrouillage en membrane et la bonne représentation des mouvements de corps rigides. La géométrie et les caractéristiques mécaniques sont présentées figure (2.19).

Du fait de la symétrie du problème, on peut considérer juste un quart de la coque hémisphérique. On observe l'évolution du déplacement radial aux points de chargement pour différentes finesses de maillage. La convergence de l'élément dégénéré est bonne même si moins rapide que celle de l'élément MITC4 (cf figure 2.20).



**Fig. 2.19** : Hémisphère sous charges diamétralement opposées : caractéristiques et configuration



**Fig. 2.20** : Evolution du déplacement du point d'application de la force avec le type et la finesse du maillage : convergence de l'élément

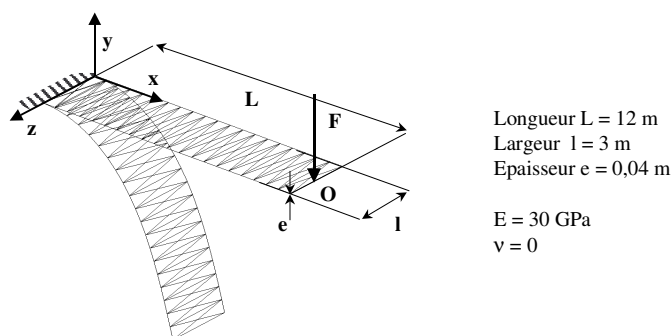
## 2.11 Implantation en transformations finies

L'extension en transformations finies de l'élément de coque triangulaire introduit précédemment a été réalisée dans le même code élément fini. Différents tests en grandes transformations élastiques permettent de valider la modélisation mécanique et numérique proposées en mettant en évidence l'efficacité de l'élément dans des cas non-linéaires. Chaque courbe résultant de la simulation numérique d'un essai donné est comparée avec la courbe réponse analytique correspondante. Pour les exemples considérés, les réponses obtenues sont indépendantes du choix du repère tournant (distorsions matérielles modérées). Néanmoins, le choix du repère tournant par la rotation propre constitue un excellent compromis entre simplicité et qualité de la réponse. Les tests effectués impliquent une combinaison de grands déplacements-rotation-déformations permettant d'évaluer l'efficacité de l'élément dans de telles situations.

### Poutre en flexion

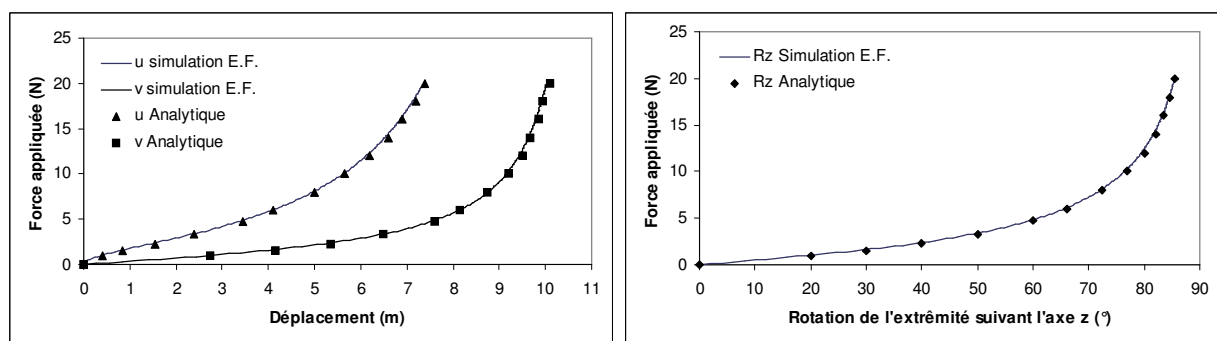
Une poutre encastree à une de ses extrémités est soumise à une force verticale  $F$  à l'autre extrémité laissée libre. Un maillage "cross-diagonal" comptant 20 éléments sur la longueur est utilisé. Les dimensions de cette poutre ainsi que ses caractéristiques matérielles sont données sur la figure 2.21.

Le nombre d'incrément de chargement (pour ce calcul égal à 100) est choisi de sorte que



**Fig. 2.21** : Poutre en flexion : caractéristiques, configuration et déformée

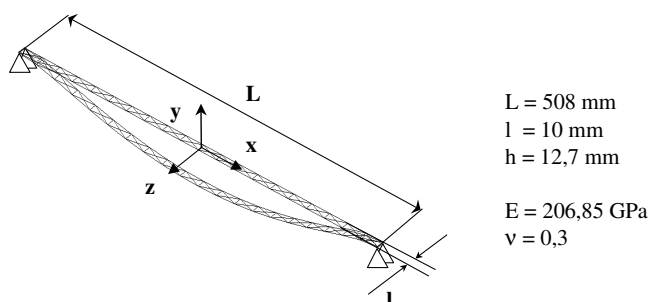
l'hypothèse concernant les faibles rotations incrémentales reste valable. Ce type d'exemple permet de prouver la précision de la simulation pour de grandes rotations puisque la rotation du point d'application de la force atteint  $85^\circ$ . Les déplacements et la rotation de ce point sont comparées aux valeurs analytiques proposées dans [DIN89] et présentés figure 2.22.



**Fig. 2.22** : Poutre en flexion : comparaison solutions E.F. vs solutions analytiques

### Ruban simplement appuyé sous pression

Une plaque de type ruban simplement appuyée à ses deux extrémités est soumise à une pression normale uniformément répartie sur sa surface supérieure. Cette plaque est supposée de dimension transversale infinie. Les dimensions de ce ruban ainsi que ses caractéristiques matérielles sont données sur la figure 2.23.



**Fig. 2.23** : Ruban sous pression : caractéristiques, configuration et déformée

Le maillage adopté comme l'indique la figure suivante est de type "cross-diagonal" comptant 20 éléments sur la longueur. Une solution analytique prenant en compte les non-linéarités géométriques est donnée par Timoshenko [TIM61] pour déterminer la flèche au milieu du ruban en fonction de la pression appliquée (cf. figure 2.24). Les résultats sont obtenus avec 25 incréments de chargement.

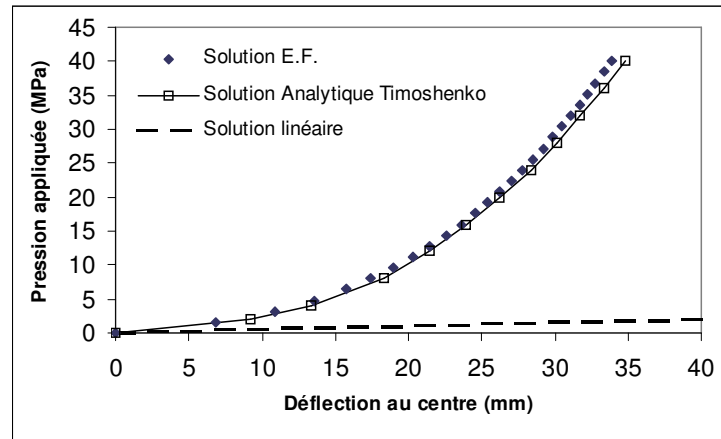


Fig. 2.24 : Ruban sous pression : comparaison solution E.F. vs solution analytique

### Plaque carrée encadrée sous pression

Une plaque carrée encadrée sur ses quatre côtés est soumise à une pression normale uniformément répartie sur sa surface supérieure. Les dimensions de cette plaque ainsi que ses caractéristiques matérielles sont données sur la figure 2.25. En raison de la symétrie du problème (géométrie, conditions limites et chargement appliqué), on peut considérer un quart de la plaque.

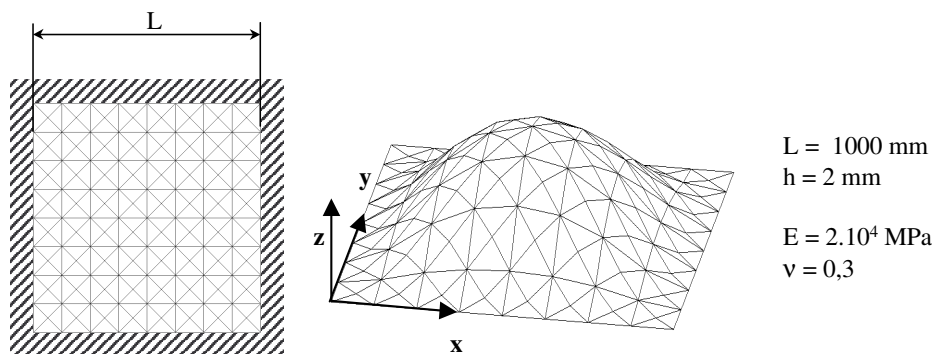
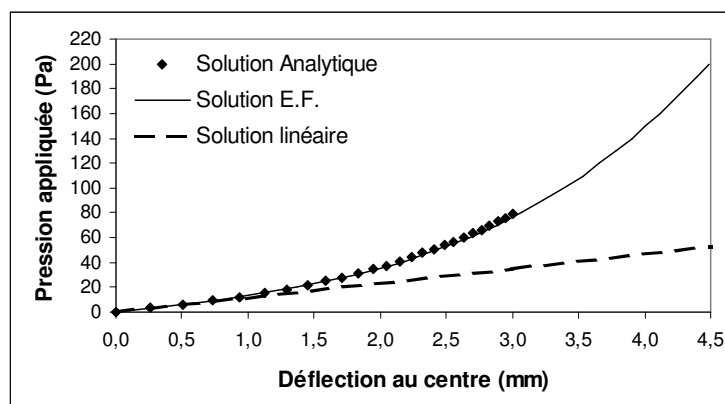


Fig. 2.25 : Membrane carrée sous pression : caractéristiques, configuration et déformée

La solution analytique de Timoshenko [TIM61][ZIE77] donne la flèche au centre de la plaque en fonction de la pression appliquée en prenant en compte les non-linéarités géométriques. Elle a été recalée par Bonnotte [BON94] et permet la comparaison avec les résultats

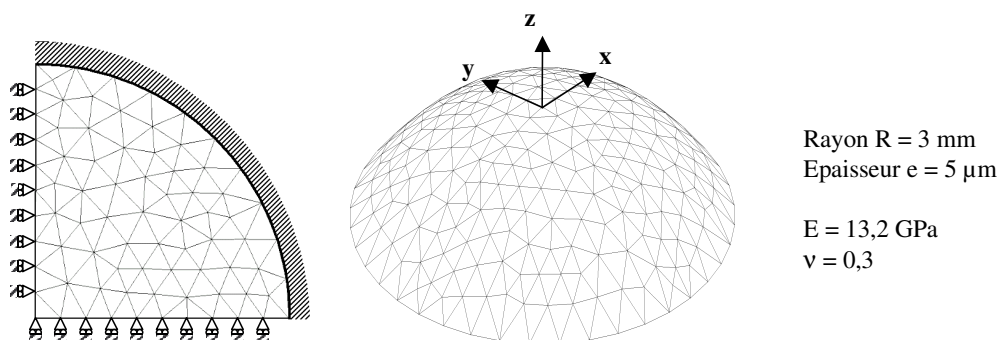
obtenus (cf. figure 2.26). On peut également noter l'importance des effets de bord dus à l'encastrement. Pour observer la déformée, on applique un facteur 80 selon l'axe  $z$ . Les résultats sont obtenus pour 20 incréments de chargement.



**Fig. 2.26** : Membrane carrée sous pression : comparaison solution E.F. vs solution analytique

### Plaque circulaire encastrée sous pression

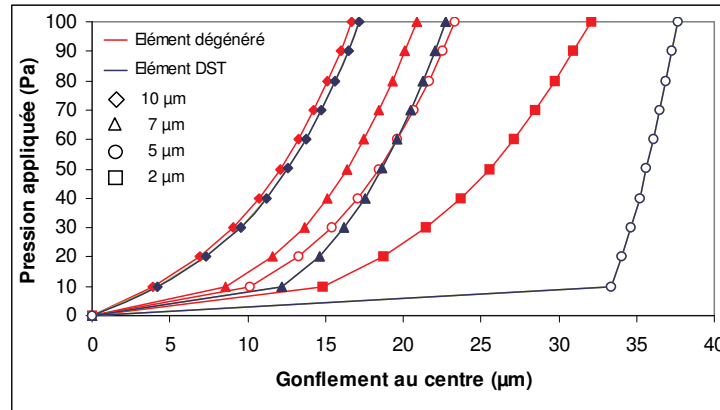
Cet essai consiste à étudier la réponse d'une membrane encastrée sur son pourtour et soumise à une pression hydrostatique  $P$ . La géométrie de cet essai, les propriétés matérielles et le maillage sont données sur la figure 2.27. En raison de la symétrie du problème, on peut considérer un quart de la plaque. Les résultats sont obtenus avec 40 incréments de chargement.



**Fig. 2.27** : Membrane circulaire sous pression : configuration et déformée

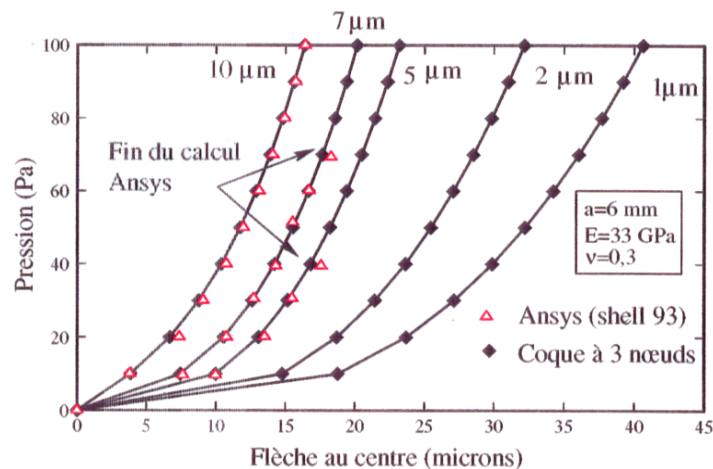
On observe lors de cette simulation l'évolution de la flèche au centre de la membrane en fonction de la pression appliquée. Dans un premier temps, afin d'évaluer le comportement de l'élément vis à vis du verrouillage en cisaillement transverse pour de faibles épaisseurs, on observe l'effet de l'augmentation de l'élancement (i.e. le rapport du rayon sur l'épaisseur de la membrane). Pour mettre en évidence les performances de l'élément dégénéré, présenté auparavant, face à ce problème, des simulations ont été réalisées avec un autre élément de coque appelé DST, disponible dans Castem 2000. L'élément DST (Discrete Shear Triangle) prend en compte également le cisaillement transverse. L'essai de gonflement a été simulé sur

une membrane circulaire pour ces deux éléments et pour des épaisseurs variant de 10 à 2  $\mu\text{m}$ . On constate alors que le problème de verrouillage se manifeste assez rapidement pour l'élément DST tandis que l'élément dégénéré répond bien (cf. figure 2.28).



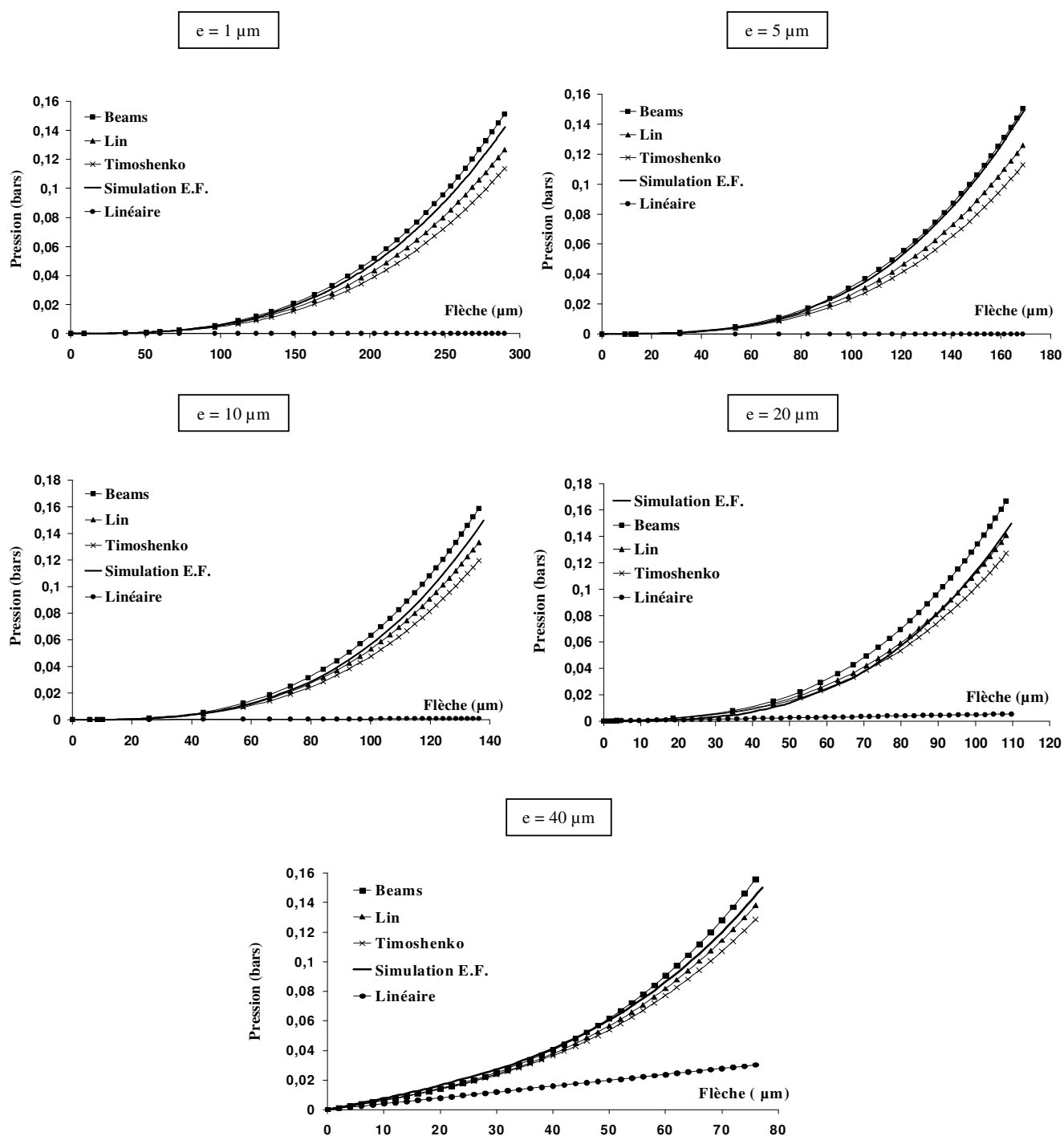
**Fig. 2.28** : Mise en évidence du verrouillage lors d'un essai de gonflement de membrane pour différentes épaisseurs - Comparaison élément dégénéré / élément DST

On compare également l'élément de coque dégénéré à trois noeuds à l'élément de coque SHELL93 du code élément fini Ansys [MOY98]. Ce dernier verrouille à partir d'une épaisseur de 7  $\mu\text{m}$  (cf figure 2.29).



**Fig. 2.29** : Mise en évidence du verrouillage lors d'un essai de gonflement de membrane pour différentes épaisseurs - Comparaison élément dégénéré / élément Shell 93 Ansys

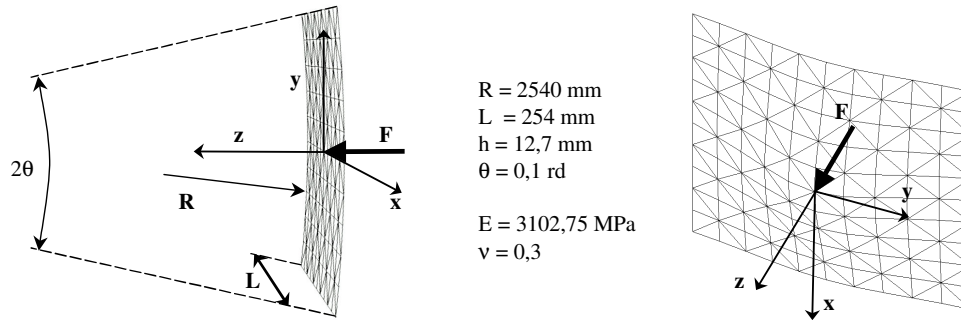
Dans l'annexe A, l'essai de gonflement de membrane est expliqué en détails permettant notamment de démontrer la relation liant la pression  $P$  à la déflexion au centre d'une membrane circulaire  $h$ . Plusieurs types de formulation ont alors été proposés selon la valeur d'une constante  $C$  dans la relation générale  $P = f(h)$  [BON94]. Ainsi, les différentes formulations analytiques ont été comparées aux résultats de la simulation éléments finis pour plusieurs épaisseurs (cf. figure 2.30).



**Fig. 2.30** : Membrane circulaire sous pression : comparaison solution E.F. vs solutions analytiques pour différentes épaisseurs

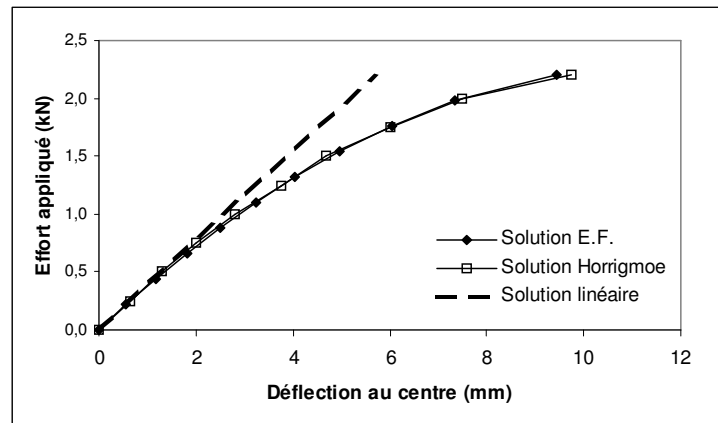
### Coque cylindrique articulée

Une coque cylindrique articulée sur ses côtés droits (liaison de type charnière) est sollicitée par un effort ponctuel  $F$  en son centre. Les dimensions de cette coque ainsi que ses caractéristiques matérielles et son maillage sont données sur la figure 2.31. La force maximum avant le flambage est égale à 2,2kN. Les résultats sont obtenus avec 10 incréments de chargement.



**Fig. 2.31** : Coque cylindrique articulée : caractéristiques, configuration et déformée

On observe alors la flèche au centre de la coque en fonction de l'effort appliqué. Les résultats analytiques utilisés pour la comparaison sont tirés de [HOR77] (cf. figure 2.32).



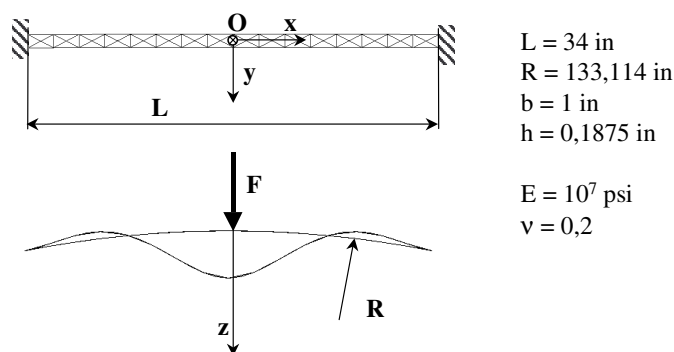
**Fig. 2.32** : Coque cylindrique articulée : comparaison solution E.F. vs solution analytique

### Arche circulaire encastrée

Une arche circulaire encastrée à ses extrémités est soumise à un effort ponctuel  $F$  en son milieu. Les dimensions de cette arche ainsi que ses caractéristiques matérielles et son maillage sont données sur la figure 2.33. Un maillage "cross-diagonal" comptant 16 éléments sur la longueur est utilisé.

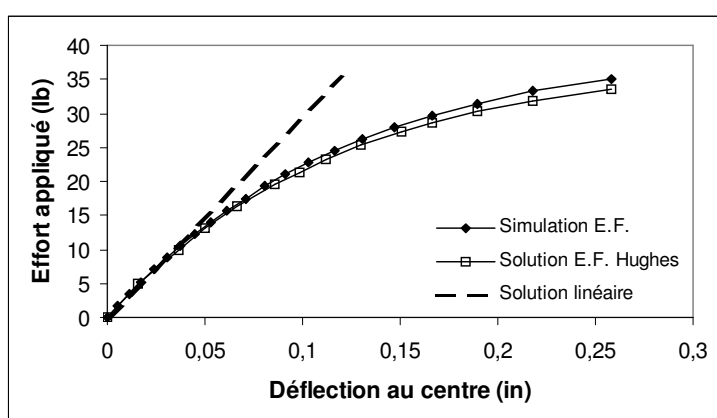
On observe la flèche au centre de l'arche en fonction de la force appliquée. La courbe numérique est ensuite comparée à celle obtenue par Hughes et Liu [HUG81] avec des éléments quadrangle à quatre noeuds (cf. figure 2.34). Les résultats sont obtenus avec 10 incréments





**Fig. 2.33** : Arche circulaire encastrée : caractéristiques, configuration et déformée

de chargement.



**Fig. 2.34** : Arche circulaire encastrée : comparaison solution E.F. vs solution analytique

## 2.12 Conclusion

Utilisant une formulation en référentiel tournant non-matériel, une modélisation numérique a été développée afin de réaliser des calculs de structures coques en transformations finies. Cette modélisation exploite les caractéristiques d'un élément de coque  $C^0$  à faible degré d'interpolation et s'appuie sur l'introduction d'une mesure de déformation tensorielle cumulée associée au tenseur du taux de déformation. Une interpolation mixte des composantes de cisaillement transverse permet alors de surmonter le problème de verrouillage caractéristique des coques de faible épaisseur. Pour être cohérent avec une formulation lagrangienne réactualisée des équations d'équilibre, un opérateur tangent a été déterminé dans la configuration de référence en début de chaque incrément. Suite à une implantation de cet élément dans le code éléments finis CASTEM 2000, plusieurs exemples en transformations finies élastiques mettent en évidence la précision des résultats obtenus. Cette modélisation peut être directement combinée avec un modèle de comportement des AMF pour le calcul de structures superélastiques dans le contexte de coques spatiales.

---

## Chapitre 3

# Modélisation du Comportement Superélastique des AMF

---

Ce travail de thèse vise, en partie, à construire un modèle phénoménologique général du comportement thermomécanique des AMF sous chargement proportionnel. La modélisation phénoménologique introduit des variables caractéristiques des phénomènes étudiés, l'état d'un milieu matériel étant une fonction de l'histoire de ces variables. La température  $T$  et la déformation totale  $\varepsilon$  sont généralement définies comme étant des variables observables tandis que la fraction volumique de martensite, la déformation de transformation, etc... seront définies comme étant des variables internes. La modélisation recherchée s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles associée à l'hypothèse de l'état local. La connaissance d'un potentiel thermodynamique permet, d'une part de définir les forces thermodynamiques associées à partir des variables observables et internes, et d'autre part d'obtenir les lois d'état. Enfin, la connaissance d'un pseudo-potentiel de dissipation permet d'écrire les lois d'évolution des différentes variables internes.

La production et la diversité des travaux concernant les AMF sont d'une grande richesse. Dans cette forêt dense, il est difficile de retenir un type de modèle simulant parfaitement le comportement des AMF. Les modèles exposés dans la revue bibliographique suivante ne prétendent pas représenter parfaitement la réalité mais cherchent davantage à en dévoiler certains aspects.

### 3.1 La quête de la modélisation du comportement thermomécanique des AMF

Afin d'éclaircir un peu la situation en matière de modèles, on peut distinguer trois catégories majeures : les modèles microscopiques, les modèles micro-macro et enfin les modèles

macroscopiques.

### 3.1.1 Modèles thermodynamiques microscopiques

Appartiennent à cette catégorie, les modèles s'appuyant sur la thermodynamique afin de décrire un volume infinitésimal dans un domaine infini. Basés sur le comportement à l'échelle microscopique caractérisé par la nucléation, le mouvement des interfaces, la croissance des variantes de martensite, les modèles microscopiques permettent de prendre en compte plus précisément ces phénomènes. Toutefois, ils sont souvent difficiles à mettre en oeuvre dans des codes de calcul éléments finis.

Ce type de modèles ne considère pas a priori la fraction volumique de martensite comme une variable interne mais davantage comme le résultat du mouvement des interfaces. Afin de simplifier l'approche, la plupart des modèles micros ne traite qu'une interface unique là où la réalité des processus de transition est généralement caractérisée par un grand nombre de sites de nucléation. Ce type d'approche est intéressant d'un point de vue fondamental mais ne permet pas la description quantitative des effets macroscopiques.

Parmi les principaux travaux menés dans ce domaine ressortent principalement l'approche développée par Falk [FAL80], pour n'en citer qu'une, qui a proposé un modèle phénoménologique de l'énergie libre basé sur la théorie de Landau et permettant de rendre compte de l'effet mémoire de forme. Cette théorie fournit un modèle analytique simple pour une transition de phase. Falk a suggéré que les transitions directes et inverses se produisent à contrainte constante mais, dans un premier temps, il a omis de prendre en compte l'énergie d'interaction entre l'austénite et la martensite.

L'autre grande mouvance en la matière s'est intéressée directement aux changements dans le groupe de symétrie cristallographique associé aux transitions de phase en mettant à profit des outils mathématiques avancés. Les pères fondateurs de l'approche cristallographique sont Weschler et al. [WES53] qui ont développé une théorie géométrique linéaire de la transition martensitique.

Abeyaratne et Knowles se sont appuyés sur la transition de phase martensitique induite sous contrainte dans une interface simple et ont proposé la définition de barrières de nucléations pour chaque transition de phase [ABE93]. Considérant juste deux barrières de nucléation, il devenait alors impossible de simuler au moyen de ce modèle les processus complexes à l'intérieur de la boucle d'hystérésis.

Ball, James et Bhattacharya ont repris les travaux de Weschler et al. afin de construire une théorie géométrique non-linéaire de la transition martensitique avec des outils mathématiques tels que la minimisation d'énergie (examen des conditions de compatibilité des interfaces).

A l'échelle du grain peuvent être observées la microstructure de la martensite, les interfaces entre austénite et martensite mais également les interfaces entre les différentes variantes de

martensite. Ball et James [BAL92] ont utilisé des approches de minimisation de l'énergie afin de prédire la formation de ces microstructures et l'orientation des interfaces.

Bhattacharya [BHA99] a développé un modèle démontrant l'influence de la texture sur les effets observés dans les polycristaux d'AMF. Utilisant également une approche de minimisation de l'énergie, cette formulation permet de déterminer la présence d'une interface entre l'austénite et la martensite en considérant les paramètres de maille.

La plupart des modèles micros utilisent principalement les notions suivantes : fonction énergie libre multi-puits, un critère de nucléation basé sur le concept de barrière d'énergie et une loi cinétique d'interface basée sur la théorie d'activation thermique.

### 3.1.2 Modèles macroscopiques basés sur la micromécanique

Ce groupe de modèles utilise l'approche de la thermodynamique pour décrire la transition et exploite la micromécanique (plans d'habitat, variantes de martensite) pour estimer l'énergie d'interaction liée à la transition dans le matériau, laquelle est la clé de voûte du mécanisme de transition.

Ce type de modèle introduit l'énergie libre d'Helmholtz sous la forme :

$$\psi = \Delta G^{chem} + W^{surf} + W^{mech} \quad (3.1)$$

Où :

- $\Delta G^{chem} = B(T - T_0)z$  représente la variation d'énergie chimique associée à la transition de phase.  $B$  est une constante matériau,  $T_0$  est la température d'équilibre thermo-chimique pouvant être également considérée comme une constante matériau et finalement  $z$  est la fraction volumique de martensite.
- $W^{surf} = A^{surf}\gamma^{surf}$  représente l'énergie de surface i.e. l'énergie associée à la présence d'une interface entre martensite et austénite.  $A^{surf}$  est l'aire totale de la surface de l'interface et  $\gamma^{surf}$  est l'énergie de surface par unité d'aire.
- $W^{mech} = W^{ext} + W^{int}$  représente l'énergie mécanique.  $W^{ext}$  est le travail mécanique externe (ou macro) correspondant à la charge appliquée et  $W^{int}$  est le travail mécanique interne (ou micro) relatif à l'énergie d'interaction entre phases.

Une formulation appropriée de cette énergie d'interaction est essentielle pour la pertinence du modèle et passe par la connaissance de l'évolution de la microstructure. Ce type de modèle, à l'initiative de Patoor et al. [PAT88], étant établi à deux niveaux d'échelle nécessite une distinction entre les quantités micro (locales) et macro (globales) en termes de contrainte et de déformation par exemple. Par ailleurs, l'utilisation de techniques d'homogénéisation adéquates permet de déterminer les quantités macro à partir des quantités micro. Dans ce cas, l'énergie d'interaction du monocristal peut être séparée en deux parties : une première

partie relative à l'interaction entre la martensite et l'austénite et une deuxième partie relative à l'interaction entre les différentes variantes de martensite.

Dans [PAT93] est suggérée l'utilisation de la déformation de transition dans un monocristal basée sur les paramètres cristallographiques. Au lieu d'utiliser l'approche d'Eshelby-Kröner, une matrice d'interaction simplifiée a permis de formuler l'énergie d'interaction. Le comportement du polycristal peut être obtenu ensuite grâce à une technique d'homogénéisation.

En suivant une démarche similaire, Goo et LExcellent [GOO97], ont développé un modèle de comportement pour AMF monocristallin. Supposant que chaque plaquette de martensite est constituée d'une seule variante de martensite, la forme générale de l'énergie libre et l'énergie de surface aux interfaces présentées précédemment a été conservée. En outre, une forme quadratique en termes de fraction volumique de martensite a été proposée pour  $W^{int}$ . En considérant une énergie libre non convexe, leur modèle permet de représenter l'effet mémoire double sens dans le cas de chargements tridimensionnels proportionnels et non-proportionnels.

Sun et Hwang [SUN93a][SUN93b] ont proposé un modèle basé sur l'analyse du mécanisme physique microstructural lors de la transition. L'influence de ces mécanismes sur le comportement macroscopique lors du processus de transition ou de réorientation est prise en compte, rendant possible la description et l'interprétation de phénomènes telles que la pseudoélasticité et l'effet mémoire de forme par ce modèle. Par contre, dans le cas de chargements plus complexes combinant transition et réorientation (non-proportionnels), le modèle atteint ses limites.

Huang et Brinson [HUA98] ont développé un modèle 3D général multi-variantes dans le cas d'un monocristal. Basé sur une approche d'Eshelby-Kröner afin de déterminer l'énergie d'interaction entre les différentes variantes, il modélise la pseudoélasticité et l'effet mémoire de forme. Leur approche est originale en ce sens qu'elle intègre la présence de variantes de martensite auto-accommodante, lesquelles ne contribuent pas à l'énergie d'interaction, améliorant ainsi l'évaluation quantitative de cette énergie dont l'importance est capitale pour la description des propriétés des AMF. Utilisant les relations établies entre paramètres de maille et transition de phase pour différents types d'AMF, Huang [HUA99] a proposé une formule générale permettant de décrire les surfaces de transition à partir des contraintes de début de transition en traction et en compression en calculant l'énergie de "pilotage" de la transition de phase. Cette approche se limite au cas des NiTi.

Boyd et Lagoudas [BOY96a] ont mis à profit certaines techniques d'homogénéisation telles que la méthode auto-cohérente pour obtenir les équations constitutives implicites d'un polycristal en se basant sur les données d'un monocristal. Toutefois, une telle technique n'est

efficace qu'à l'échelle macro d'où la nécessité d'utiliser le problème à l'échelle micro comme fil directeur pour élaborer un modèle macro phénoménologique adéquat. Bo et Lagoudas [BO99a][BO99b][BO99c] ont étudié les effets de l'hétérogénéité initiale du matériau, caractéristique essentielle de l'initiation de la transition de phase, et de phénomènes plastiques locaux sur l'écrouissage global. Cette formulation permet de modéliser d'une même façon la réponse thermomécanique des AMF éduqués et recuits dans le cas de sollicitations mécaniques et thermiques mais également l'effet mémoire double sens et les boucles internes d'hystérésis. Cette approche est intéressante car elle autorise la prise en compte de chargements cycliques mais n'est pas validée par une confrontation avec l'expérience.

Cette liste, loin d'être exhaustive, se limite à une description sommaire des principaux courants suivis en matière de modèles macroscopiques basés sur la micromécanique. La limitation actuelle de ce type d'approche réside dans le fait que l'effet des contraintes sur la géographie de l'interface n'est pas examinée.

### 3.1.3 Modèles phénoménologiques macroscopiques

Construits dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, la plupart des modèles macroscopiques sont basés sur le diagramme de Clapeyron contrainte-température des AMF où les régions de transition de la martensite à la phase mère ou de la phase mère à la martensite sont déterminées expérimentalement. Ce premier type d'approche s'appuie directement sur des paramètres matériaux. La seconde approche n'implique pas l'exploitation directe du diagramme mais utilise des paramètres matériaux plus fondamentaux. Ce type de modèle convient généralement bien pour le dimensionnement de structures et la conception, notamment en raison de leur simplicité et de leur précision, les diagrammes de phase étant établis à partir des données expérimentales.

A l'heure actuelle, une large partie des modèles macros traite seulement du cas uniaxial. En effet, le manque de données expérimentales multiaxiales est rédhibitoire à l'extension des modèles phénoménologiques en 3D. Parmi les très nombreuses contributions apportées au domaine de la modélisation macroscopique, il est difficile de faire ressortir un modèle. Mais il est intéressant de faire un tour d'horizon des différentes écoles à travers un certain nombre de travaux majeurs. Par ailleurs, on peut remarquer deux catégories de modèles : les modèles macros théoriques ne développant pas complètement l'aspect intégration numérique des lois de comportement et d'autres détaillant des schémas numériques robustes. Cette dernière catégorie sera explorée plus en détails en introduction de la partie s'intéressant à l'implémentation numérique des lois de comportement. C'est pourquoi, certains travaux importants ne sont pas présentés dès maintenant pour éviter une certaine redondance. On peut ajouter qu'aucun modèle général permettant de simuler le comportement thermomécanique des AMF ne fait l'unanimité pour l'instant. De nombreux travaux utilisent régulièrement des relations constitutives des plus simples combinant deux relations différentes basées sur la plasticité

représentant respectivement la charge et la décharge. La transition de phase s'opérant dans le matériau est associée à un critère d'écoulement comme en plasticité. La raison de cette connection entre plasticité et comportement superélastique des AMF trouve son origine dans la transition de phase elle-même, son effet étant en quelque sorte similaire à celui de l'écoulement plastique. A partir de là, une relation plastique appropriée doit être définie en prenant en compte l'importance de l'effet de la température.

Ce paragraphe s'intéresse à quatre modèles constitutifs phénoménologiques décrivant la réponse thermomécanique macroscopique des AMF polycristallins. Ces modèles significatifs sont brièvement exposés et critiqués dans cette section. On y souligne également certains aspects essentiels de la description de chargements proportionnels. Dans tous les cas, ni le concept d'instabilité thermodynamique générant les transitions de phase martensitique, ni la dépendance à l'histoire du comportement ne sont pris en compte.

**Modèle de Lubliner J. et Auricchio F. [LUB96]** Puisque la généralité d'un modèle élastoplastique permet de décrire le comportement d'un solide pouvant être différent d'un modèle élastique-plastique classique, un modèle de plasticité généralisé est proposé par ces auteurs dans le cadre d'une application à la pseudoélasticité des AMF sous chargement proportionnel. Cette première tentative de construction d'un modèle de comportement des AMF s'inspirant de la plasticité est principalement basée sur la particularité du processus élastique (élasticité-transition de phase-élasticité). Les lois d'état et la dissipation intrinsèque, définie comme une fonction des variables d'état et de leurs taux, sont dérivées de l'inégalité de Clausius-Duhem. Toutefois, les propriétés et la forme de la fonction énergie libre spécifique ne sont pas présentées.

Les surfaces de charge sont définies à partir d'un diagramme de phase contrainte-température par des fonctions indépendantes des variables internes de la forme  $F = \sigma - \tan \theta T$ .

Ainsi, la transformation directe est effective entre les droites d'équation  $\sigma = \tan \theta (T - M_S^0)$  et  $\sigma = \tan \theta (T - M_F^0)$ , et par conséquent seulement si  $\sigma - \tan \theta T$  augmente. De la même façon, la transformation inverse est effective entre les droites d'équation  $\sigma = \tan \theta (T - A_S^0)$  et  $\sigma = \tan \theta (T - A_F^0)$ , et seulement si  $\sigma - \tan \theta T$  diminue. Les équations des cinétiques de transformation, reliant la fraction volumique de martensite à la contrainte pour une température de référence  $T_R$ , sont choisies telles que :

$$\begin{cases} \dot{z} = b_M \frac{\dot{\sigma}}{[\sigma - \tan \theta (T_R - M_F^0)]^2} (1 - z) & \text{pour} & (A \rightarrow M) \\ \dot{z} = b_A \frac{\dot{\sigma}}{[\sigma - \tan \theta (T_R - A_F^0)]^2} z & \text{pour} & (M \rightarrow A) \end{cases} \quad (3.2)$$

Où  $b_M$  et  $b_A$  sont des paramètres matériaux.

Le traitement général de la charge-décharge partielle par adaptation des droites de transformation avec le chargement n'est pas clairement exposé. A notre connaissance, les modèles

formulés en utilisant le diagramme contrainte-température (qui relève de la première importance dans la compréhension du processus de transformation martensitique dans les AMF) sont illustrés par des bandes de transformation fixes, i.e. indépendantes de l’histoire de chargement, et des fonctions de conversion de l’austénite en martensite “détwinnée” sous une forme algébrique exponentielle ou cosinus.

Pour des calculs 3D, une contrainte équivalente de type  $J_2 - I_1$  ( $J_2$  et  $I_1$  représentant respectivement le deuxième et premier invariants du déviateur des contraintes) est utilisée afin de prendre en compte la dissymétrie traction-compression et les changements de volume lors de la transition de phase.

### Modèle de Boyd J.G. and Lagoudas D.C. [BOY96a]

Ces auteurs ont fait le choix de l’énergie de Gibbs ( $G$ ) plutôt que l’énergie libre d’Helmholtz pour le potentiel thermodynamique. Pour l’analyse d’un monocristal, cette énergie est définie comme la somme des énergies de Gibbs des espèces constituantes et d’une énergie de mélange  $G^{di}$  (terme de cohérence). En considérant, lors de la transition de phase directe, les variantes de martensite comme des inclusions non-homogènes i.e. des non-homogénéités qui représentent des déformations inélastiques ou des déformations de transformation dans la matrice austénitique, l’énergie de mélange est constituée d’une énergie négligeable stockée à l’interface entre l’austénite et la martensite et d’une énergie de déformation inélastique telle que  $G^{di} \approx G^{eig}$ .

Dans la formulation d’un modèle phénoménologique à deux phases (austénite-martensite détwinée), l’énergie de déformation inélastique est approximée par un développement en séries, les constantes ( $b_i$ ;  $i = 1, 2, \text{ etc...}$ ) des séries étant évaluées à partir de l’expérience. En considérant la fraction volumique de martensite  $z$  et le tenseur des déformations de transformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}$  comme variables internes en l’absence de réorientation, la forme proposée pour  $G^{eig}$  est similaire à la forme utilisée en plasticité pour des écrouissages isotropes et cinématiques linéaires dans laquelle  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}$  constitue la variable d’écrouissage cinématique :

$$G^{eig} = \frac{1}{2}b_1z^2 + \frac{1}{2}b_2 \text{ }^T \underline{\underline{\varepsilon}}^{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^{tr} \quad (3.3)$$

La dissipation mécanique est alors :

$$D^{mech} = \text{}^T \underline{\underline{\varepsilon}}^{tr} \underline{\underline{\sigma}}^{eff} - \rho \frac{\partial G}{\partial z} \dot{z} \geq 0; \quad \underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial G^{eig}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}} \quad (3.4)$$

Par le fait, en considérant le tenseur du taux de déformation de transformation  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr}$  comme étant proportionnel à  $\dot{z}$  tel que  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr} = \underline{\underline{\Lambda}}\dot{z}$ , on obtient :



$$D^{mech} = \Pi \dot{z} \geq 0; \quad \Pi = {}^T \underline{\Lambda} \underline{\sigma}^{eff} - \rho \frac{\partial G}{\partial z} \quad (3.5)$$

Alors que la transformation directe est pilotée par la contrainte appliquée, la transformation inverse est supposée pilotée par  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  (considérations cinématiques). En effet, le processus suivi par la martensite pour retourner à l'état de phase "parent" dépend du processus de transformation précédent. Ce postulat original entraîne les relations suivantes :

$$\underline{\Lambda} = \begin{cases} \underline{\Lambda}(\underline{\sigma}^{eff}, \underline{\sigma}_{eq}^{eff}); & \underline{\sigma}_{eq}^{eff} = \sqrt{\frac{3}{2}} {}^T (dev \underline{\sigma}) dev \underline{\sigma} & \text{si } \dot{z} > 0 \\ \underline{\Lambda}(\underline{\varepsilon}^{tr}, \underline{\varepsilon}_{eq}^{tr}); & \underline{\varepsilon}_{eq}^{tr} = \sqrt{\frac{2}{3}} {}^T \underline{\varepsilon}^{tr} \underline{\varepsilon}^{tr} & \text{si } \dot{z} < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Ces mêmes relations ont été établies dans ce travail de thèse par extension de l'application du principe de dissipation maximum au cas de la transformation inverse.

Une valeur non-nulle du taux  $\dot{z}$  est obtenue seulement lorsque la force thermodynamique  $\Pi$  atteint une valeur seuil constante. La fonction d'écoulement suivante est alors introduite :

$$\phi = \frac{1}{2} \Pi^2 - Y \leq 0; \quad \begin{cases} \Pi = 2Y & \text{si } \dot{z} > 0 \\ -\Pi = 2Y & \text{si } \dot{z} < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

à partir de laquelle la loi d'évolution de la transition de phase est dérivée :

$$\dot{z} = \dot{\lambda} \partial_{\Pi} \phi = \dot{\lambda} \Pi \quad (3.8)$$

Comme cela a été mis en évidence dans [AUR01b], l'étude analytique du modèle réalisée par les auteurs ne permet pas d'apprécier son efficacité.

Dans des publications récentes [BO99b] et [LAG99], une forme générique de l'énergie de mélange  $G^{di}$  est obtenue par une analyse micromécanique d'un volume représentatif en présence de déformations plastiques. En notant  $\eta$  et  $\underline{X}$ , représentant respectivement les contraintes "drag" et "back" (variables d'écrouissage cinématique), dues aux interactions de la transformation de phase avec des contraintes résiduelles locales induites à la fois par des déformations inélastiques plastiques et de transformation, cette énergie s'écrit :

$$G^{di} = -\frac{1}{\rho} \int_0^z [\eta(z) + {}^T \underline{X}(z) \partial_z \underline{\varepsilon}^{tr}] dz \quad (3.9)$$

Expression pouvant être grossièrement approximée par :

$$G^{di} = -\frac{1}{\rho} [\eta(z) + {}^T \underline{X}(z) \partial_z \underline{\varepsilon}^{tr}] z \quad (3.10)$$

Une description fonctionnelle de  $\eta$  et  $\underline{X}$  est introduite dans [BO99b]. En supposant des déformations plastiques constantes lors de la transition de phase, l'évolution de  $z$  et de  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  est toujours donnée par les relations (3.6) et (3.8). Les résultats obtenus pour une transition de phase induite thermiquement sous une charge appliquée constante sont en accord avec les résultats expérimentaux.

### Modèle de Souza A.C., Mamiya E.N. et Zouain N. [SOU98]

Ce modèle phénoménologique décrit le comportement mécanique tridimensionnel de solides polycristallins subissant une transition de phase induite sous contrainte. Il a été développé dans le cadre de la théorie des matériaux standards généralisés en supposant la contrainte de verrouillage suivante pour la transition de phase :

$$I_\gamma(\underline{\varepsilon}^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\underline{\varepsilon}^{tr}\| < \gamma \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.11)$$

Où  $\gamma$  est la déformation de transformation uniaxiale maximum.

Les effets cinématiques macroscopiques de la transition de phase étant décrits par le tenseur de déformation de transformation  $\underline{\varepsilon}^{tr}$ , la forme suivante de l'énergie libre spécifique est proposée :

$$\psi = \psi^{el}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{tr}) + \tau_M(T) \|\underline{\varepsilon}^{tr}\| + \frac{b}{2} T \underline{\varepsilon}^{tr} \underline{\varepsilon}^{tr} + I_\gamma(\underline{\varepsilon}^{tr}) \quad (3.12)$$

Où  $\tau_M(T)$  est une fonction positive et monotone croissante de la température et  $b$  un paramètre matériau relié à l'écroutissage.

Cette expression permet d'obtenir une force de pilotage de la transition de phase  $\underline{\sigma}^{eff}$  appartenant au sous-différentiel  $-\partial_{\underline{\varepsilon}^{tr}}\psi$  puisque  $\psi$  est convexe mais pas nécessairement différentiable :

Pour  $0 < \|\underline{\varepsilon}^{tr}\| < \gamma$ ,  $\underline{\sigma}^{eff}$  est donnée par :

$$\underline{\sigma}^{eff} = dev \underline{\sigma} - b \underline{\varepsilon}^{tr} - \tau_M(T) \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\|\underline{\varepsilon}^{tr}\|} \quad (3.13)$$

Une valeur non-nulle du taux  $\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr}$  est obtenue seulement lorsque  $\|\underline{\sigma}^{eff}\|$  atteint une valeur seuil  $Y$  constante. La fonction d'écoulement suivante est alors introduite :

$$\varphi = \|\underline{\sigma}^{eff}\| - Y \leq 0 \quad (3.14)$$

à partir de laquelle la loi d'évolution de la transition de phase est dérivée :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \dot{\lambda} \partial_{\underline{\underline{\sigma}}^{eff}} \varphi = \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^{eff}}{\|\underline{\underline{\sigma}}^{eff}\|} \quad (3.15)$$

Basé sur la définition d'une fonction d'écoulement unique pour le traitement à la fois des transformations directes et inverses, ce modèle s'inspirant de la plasticité ne permet pas la modélisation des boucles internes et aboutit à des réponses non réalistes dans le cas de la pseudoélasticité idéale ( $b = 0$ ). En considérant, par exemple, un essai de traction pure, la transformation inverse pour une décharge partielle quelconque et pour une température de référence  $T = T_R > A_F^0$ , se produit pour une contrainte négative puisque la transition de phase a lieu lorsque  $|\underline{\underline{\sigma}}| = \sqrt{3/2} (\tau_M(T_R) + Y)$ .

### Modèle de Qidwai M.A. et Lagoudas D.C. [QID00b]

Ce modèle thermomécanique de transition de phase induite sous contrainte dans les AMF polycristallins est basé sur deux potentiels (potentiel de Gibbs  $G$  et potentiel de transformation). Il utilise une formulation lagrangienne et représente les changements dans la microstructure du matériau au moyen du tenseur de déformation de transformation lagrangien  $\underline{\underline{E}}^{tr}$  et de la fraction volumique de martensite  $z$ . La dissipation intrinsèque est donnée par :

$$D^{mech} = {}^T \underline{\underline{E}}^{tr} \underline{\underline{S}} - \rho_0 \partial_z G(\underline{\underline{S}}, T, z) \dot{z} \geq 0 \quad (3.16)$$

Où  $\rho_0$  est la densité massique dans la configuration lagrangienne et  $\underline{\underline{S}}$  le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

En considérant des taux proportionnels et en supposant une même mesure de dissipation pour chaque transformation, deux fonctions d'écoulement sont introduites telles que :

$$\begin{aligned} \varphi_{am}(\underline{\underline{S}}, T, z) &= \Sigma(\underline{\underline{S}}) - \rho_0 \partial_z G(\underline{\underline{S}}, T, z) - Y \leq 0 \\ \varphi_{ma}(\underline{\underline{S}}, T, z) &= \Sigma(\underline{\underline{S}}) - \rho_0 \partial_z G(\underline{\underline{S}}, T, z) + Y \geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Afin de rendre compte des différents comportements d'écrouissage dus à l'interaction entre martensite, austénite et variantes de martensite elles-mêmes (terme de cohérence), deux énergies de mélange  $G^{di}$  différentes sont proposées :

$$\begin{aligned} G^{di} &= \frac{1}{3} \rho_0 b_3^M z^3 + \frac{1}{2} \rho_0 b_2^M z^2 + (b_1 + b_2) z & \text{pour } (a \rightarrow m) \\ G^{di} &= \frac{1}{3} \rho_0 b_3^A z^3 + \frac{1}{2} \rho_0 b_2^A z^2 + (b_1 - b_2) z & \text{pour } (m \rightarrow a) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où  $b_3^{A,M}$ ,  $b_2^{A,M}$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont des paramètres matériaux. Cette initiative implique une dépendance au trajet de chargement de l'énergie de Gibbs, ce qui n'est pas acceptable.

Comme  $\partial_z G$  dépend de  $\underline{S}$  en raison de la forme proposée pour l'énergie de Gibbs, un cadre constitutif non-associé a été adopté afin de dériver les lois d'évolution de la transformation du principe de dissipation maximum. L'évolution de la déformation de transformation se révèle être dépendante de l'évolution de la fraction volumique de martensite telle que :

$$\dot{\underline{E}}^{tr} = \dot{z} \partial_{\underline{S}} \Sigma(\underline{S}) \quad (3.19)$$

Cette expression suggère une direction d'écoulement normale aux fonctions potentiel suivantes :

$$\begin{aligned} \kappa_{am}(\underline{S}, T, z) &= \Sigma(\underline{S}) - \Sigma_{am}(T, z) \\ \kappa_{ma}(\underline{S}, T, z) &= \Sigma(\underline{S}) - \Sigma_{ma}(T, z) \end{aligned} \quad (3.20)$$

définissant ainsi une région contrainte pour chaque transition de phase. Comme cela a été mis en évidence par les auteurs, une région contrainte convexe correspondant au domaine élasto-dissipatif est nécessaire pour assurer l'existence d'un minimum global de la dissipation inverse  $D^{mech}$ . Cette condition n'est pas vérifiée lors de la transformation inverse car le domaine délimité par une même fonction pour les transformations directe et inverse est non-convexe.

Une fonction de transformation généralisée pour laquelle  $\Sigma(\underline{S})$  est basée sur les trois invariants du déviateur des contraintes ( $J_2 - J_3 - I_1$ ) est introduite afin de rendre compte de la dissymétrie traction-compression et de la déformation de transformation volumique. La dépendance à la pression de la transition de phase des AMF i.e. l'augmentation de la contrainte effective avec celle de la pression hydrostatique demeure un sujet controversé.

En outre, une formulation lagrangienne doit être utilisée avec prudence car la trace  $tr \dot{\underline{E}}^{tr}$  n'exprime pas le changement de volume lors de la transition de phase dans le cas général et la contrainte équivalente  $\Sigma(\underline{S})$  comparée à la fonction seuil de transformation expérimentale doit être définie dans l'espace des contraintes vraies.

### 3.1.4 Conclusion

La présentation des AMF faite dans le premier chapitre met en évidence la variété et la complexité des phénomènes opérant dans le matériau à l'échelle microscopique. Par conséquent, la construction d'un modèle de comportement constitutif des AMF directement basé sur la micromécanique des transitions de phase semble être un travail "titanesque". C'est pourquoi la plupart des auteurs ont recours à une théorie continue thermomécanique fondée sur un formalisme à variables internes.

La cinématique des transitions de phase martensitique des AMF donne quelques indications à propos de la structure des variables internes. Selon le niveau de description voulu, les

variables internes doivent permettre de décrire la présence et les caractéristiques des différentes phases et devraient, dans ce sens, représenter la fraction respective de chaque phase et leur orientation.

La cinétique des transitions de phase martensitique des AMF fournit des renseignements quant à la définition des équations d'évolution des variables internes pour la construction d'un modèle constitutif. Notamment, ce dernier doit être en mesure de rendre compte des spécificités suivantes :

- phénomène d'hystérésis témoignant de processus propres à chaque transition de phase,
- dépendance de l'état thermomécanique à l'histoire du matériau,
- éventuelle dépendance à la pression hydrostatique de certaines transitions de phase en termes de conditions initiales et d'équations d'évolution,
- possibilité de réaliser une transition inverse complète au moyen de cycles thermomécaniques appropriés
- prise en compte des charges et décharges partielles.

En outre, plusieurs études expérimentales ont indiqué que les transitions de phase s'opérant dans plusieurs AMF sont indépendantes des vitesses. De surcroît, la transition de phase peut être séquentielle. Par exemple, le NiTi peut subir une transition austénite  $\rightarrow R$  phase (phase rhomboédrale) quasi-réversible mécaniquement i.e. sans hystérésis suivi de la transition martensitique, irréversible. La restriction des modèles de type RLT [RAN92][RAN98] au cas d'une faible dépendance à l'histoire pour des charges et décharges partielles est directement à l'origine du modèle proposé par la suite.

## 3.2 Cadre thermodynamique constitutif du modèle

Le comportement des AMF est associé à une transformation de phase solide-solide de l'austénite vers la martensite. Le caractère biphasique des AMF nécessite la prise en compte d'une énergie d'interaction dans la définition de la fonction énergie libre spécifique d'Helmholtz. Ainsi, la modélisation du comportement des AMF dépend grandement de la définition de cette énergie d'interaction. En l'absence d'une connaissance suffisante de la nucléation et de la croissance de la martensite dans l'austénite permettant d'aboutir à une forme exacte de cette énergie, une modélisation phénoménologique construite sur le modèle de la plasticité est une alternative intéressante. Les lois d'évolution de transition de phase sont dérivées par extension du principe de dissipation maximum au cas de la superélasticité. La modélisation proposée ici prétend également rendre compte de la dépendance à l'histoire du matériau des AMF et s'appuie sur une formulation non-associée de la transformation inverse tridimensionnelle [BOU02a][BOU02b].

Du point de vue de la thermodynamique, le processus de transition de phase induit sous contrainte est irréversible. Une modélisation cohérente peut être envisagée dans le cadre de

la thermodynamique des processus irréversibles en utilisant le concept d'équilibre contraint [RIC71]. Cette notion suggère que le taux des variables d'état ou les lois d'écoulement correspondant à certaines forces thermodynamiques peuvent s'annuler même si ces forces sont non-nulles.

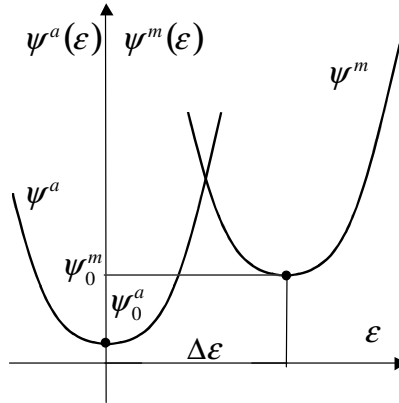
Afin de définir une fonction énergie libre spécifique d'Helmholtz pour les AMF à l'équilibre contraint, l'énergie libre spécifique d'un mélange de deux phases solides avec interaction entre phases est utilisée [MUL89][MUL91][HUO93] :

$$\psi(\varepsilon, z, T) = (1 - z)\psi^a + z\psi^m + \psi^{di} \quad (3.21)$$

Où  $z$  représente la fraction volumique de martensite,  $\psi^a$  et  $\psi^m$  sont respectivement les énergies libres spécifiques de l'austénite pure et de la martensite pure et  $\psi^{di}$  représente une énergie d'interaction.

En supposant que les deux phases possèdent les mêmes propriétés suivantes : masse volumique  $\rho$ , module d'Young  $E$ , coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  et chaleur spécifique  $c_v$ ,  $\psi^a$  et  $\psi^m$  peuvent s'exprimer (cf figure 3.1) :

$$\begin{aligned} \psi^a(\varepsilon^a, z, T) &= \psi_0^a + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E}{2} (\varepsilon^a) - \alpha (T - T_R) \right] \varepsilon^a \\ \psi^m(\varepsilon^m, z, T) &= \psi_0^m + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E}{2} (\varepsilon^m - \Delta\varepsilon) - \alpha (T - T_R) \right] (\varepsilon^m - \Delta\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.22)$$



**Fig. 3.1** : Fonction énergie libre spécifique de chaque phase à la température de référence  $T_R$

Où  $(T - T_R)$  est l'écart de température entre la température courante  $T$  et une température de référence  $T_R$ ,  $\Delta\varepsilon$  est la déformation associée à la formation de martensite,  $\varepsilon^a$  et  $\varepsilon^m$  sont respectivement les déformations totales de l'austénite et de la martensite, et les expressions des énergies libres spécifiques de chaque phase à l'état libre de contrainte sont données par :

$$\begin{aligned}\psi_0^a &= u_{oR}^a - T s_{oR}^a + c_v \left[ (T - T_R) - T \ln \frac{T}{T_R} \right] \\ \psi_0^m &= u_{oR}^m - T s_{oR}^m + c_v \left[ (T - T_R) - T \ln \frac{T}{T_R} \right]\end{aligned}\quad (3.23)$$

Où  $u_{oR}^a$ ,  $u_{oR}^m$ ,  $s_{oR}^a$  et  $s_{oR}^m$  sont les valeurs des énergies internes et des entropies à la température de référence choisie  $T_R$ .

Etant donné que la transition de phase est sans diffusion, la composition chimique des phases reste inchangée.

Pour une déformation macroscopique totale donnée  $\varepsilon$ , on suppose que  $\varepsilon^a$  et  $\varepsilon^m$  satisfont la relation suivante :

$$\varepsilon = (1 - z) \varepsilon^a + z \varepsilon^m \quad (3.24)$$

Pour ce modèle d'arrangement interne austénite-martensite, les conditions d'équilibre thermodynamique du milieu biphasé sont obtenues à partir des conditions d'optimalité de la fonction lagrangienne suivante :

$$L_\psi = \psi + \tau [\varepsilon - (1 - z) \varepsilon^a + z \varepsilon^m] \quad (3.25)$$

où  $\tau = \sigma / \rho$  est la contrainte macroscopique de Kirchhoff jouant le rôle de multiplicateur de Lagrange ( $\tau [\varepsilon - (1 - z) \varepsilon^a + z \varepsilon^m] = 0$ ).

Pour un ensemble  $(\varepsilon, z, T)$  donné, ces conditions montrent que les contraintes dans les deux phases i.e.  $\sigma^a = \rho \partial_{\varepsilon^a} \psi^a$  et  $\sigma^m = \rho \partial_{\varepsilon^m} \psi^m$  sont égales aux contraintes vraies de Cauchy  $\sigma$  telles que [RAN92] :

$$\sigma = E [\varepsilon - \varepsilon^{tr} - \alpha (T - T_R)] \quad (3.26)$$

Où  $\varepsilon^{tr} = z \Delta \varepsilon$  représente la déformation de transition de phase macroscopique laquelle est prépondérante devant la déformation élastique correspondante.

La relation  $\varepsilon^{tr} = z \Delta \varepsilon$  simplifie considérablement l'approche car elle ignore le fait que la martensite peut présenter de nombreuses orientations ou variantes.

L'énergie libre spécifique d'Helmholtz d'un système biphasé est définie à l'équilibre contraint comme étant une fonction potentiel pour  $\sigma$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon, z, T) &= \frac{E}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon - z \Delta \varepsilon) - \alpha (T - T_R) \right] (\varepsilon - z \Delta \varepsilon) \\ &+ u_{oR}^a - T s_{oR}^a + c_v \left[ (T - T_R) - T \ln \frac{T}{T_R} \right] - z \pi_0 + \psi^{di}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Où  $\pi_0 = \Delta u_0 - T \Delta s_0 = \psi^a - \psi^m$  force motrice de la transition de phase induite thermiquement à l'état libre de contrainte avec  $\Delta u_0 = u_{oR}^a - u_{oR}^m$  et  $\Delta s_0 = s_{oR}^a - s_{oR}^m$ .

La dissipation intrinsèque dans le cas particulier de processus isothermes pilotés en contrainte à une température de référence  $T = T_R$  s'exprime alors :

$$D^{mech} = \sigma \dot{\epsilon}^{tr} + \rho \left( \pi_0 - \partial_z \psi^{di} \right) \dot{z} \geq 0 \quad (3.28)$$

Les états d'équilibre thermodynamique sont ceux pour lesquels la dissipation s'annule pour n'importe quel changement d'état admissible. Dépendants de la forme de l'énergie d'interaction  $\psi^{di}$ , ces états définissent le lieu des points de retournement pour les charges et décharges partielles, indiquant alors une certaine forme d'instabilité. En effet, le système biphasé étant en état d'équilibre instable, tend à trouver l'état le plus stable (cf figure 3.2). L'instabilité aux états d'équilibre est la source principale de la formation des boucles d'hystérésis [HUO93] i.e. la thermodynamique des transitions de phase doit être basée sur la définition d'une fonction énergie libre non-convexe. En l'absence d'une connaissance suffisante de la nucléation et de la croissance de la martensite dans l'austénite menant à une forme exacte de l'énergie d'interaction  $\psi^{di}$ , Müller et al. [MUL89] ont introduit la fonction la plus simple de  $z(1-z)$  satisfaisant  $\psi^{di} = 0$  lorsque  $z = 0$  (austénite pure) ou lorsque  $z = 1$  (martensite pure). Cette forme limite la modélisation au type de comportement décrit figure (3.2a) où les états d'équilibre instable sont localisés le long d'une droite diagonale à l'intérieur de la boucle d'hystérésis. Dans la continuité, Raniecki et al. ont défini une énergie d'interaction dépendant de la température [RAN92][RAN98] en utilisant le concept "d'entropie et d'énergie interne configurationnelles".

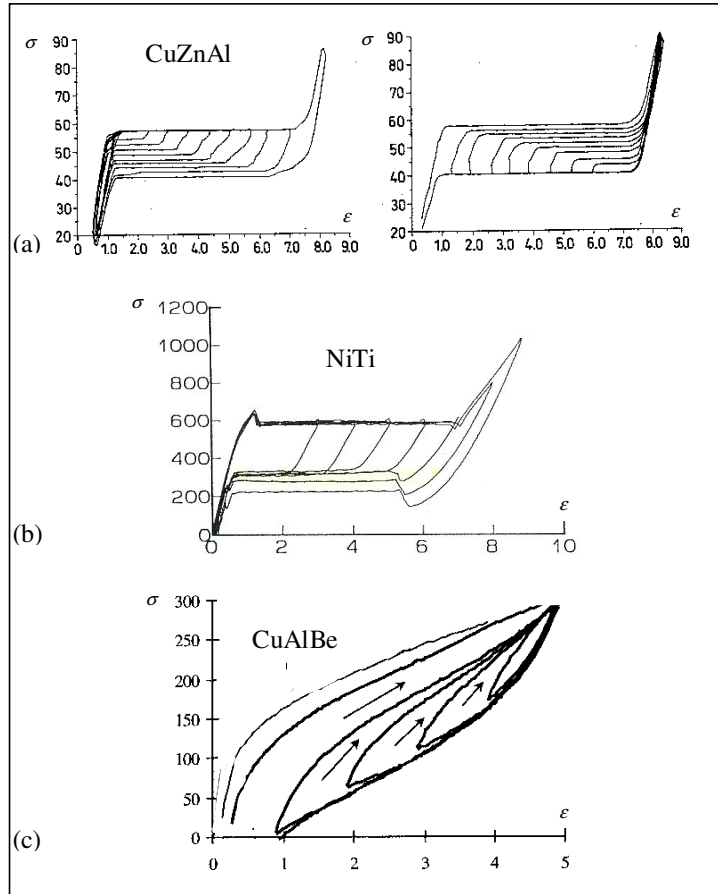
L'approche présentée ici est une modélisation phénoménologique. Elle permet de prendre en compte différentes configurations de lieux d'états d'équilibre instable (cf figures 3.2b et 3.2c). Exploitant la notion d'équilibre contraint, la description thermodynamique proposée repose d'une part sur une fonction énergie libre spécifique supposée non-convexe mais non-explicitée et d'autre part sur deux processus dissipatifs normaux indépendants, un pour la transformation directe ( $a \rightarrow m$ ) et l'autre pour la transformation inverse ( $m \rightarrow a$ ). Les lois d'évolution de chaque transition de phase sont obtenues par extension du principe de dissipation maximum. La validité de l'hypothèse de dissipation maximum peut être vérifiée par examen de la prédiction du modèle ainsi établi.

Initiée dans les travaux [BOU98b][BOU99] proposant une cinématique en transformations finies pour la classe des modèles  $R_L$ , cette modélisation permet également de prendre en compte la dépendance du comportement à l'histoire du matériau. Les modèles dit  $RLT$  (Raniecki L'excellent Tanaka) sont des cas particuliers qui s'inscrivent directement dans cette classe.

### 3.3 Thermodynamique de l'équilibre contraint

Les progrès réalisés en matière de modélisation des comportements plastiques des matériaux au cours des dernières décennies doivent beaucoup à l'exploitation et à l'application des





**Fig. 3.2** : (a) CuZnAl [HUO93], (b) NiTi [LEX95] and CuAlBe [BOUV01]

outils mathématiques modernes à la mécanique des milieux continus par Germain [GER71], Edelen [EDE74], Halphen et Nguyen [HAL75].

L'approche envisagée adopte le point de vue soutenu par Rice [RIC71] et discuté par Germain et al [GER83] puis Lubliner [LUB90], lequel postule l'existence d'un équilibre contraint. Ce dernier permet la description des processus thermodynamiques basés sur la définition de deux potentiels : le potentiel thermodynamique donnant les lois d'état et le potentiel de dissipation donnant les lois d'évolution pour un ensemble de variables internes associé aux processus irréversibles par le biais de l'hypothèse de normalité généralisée.

La suite de ce paragraphe rappelle brièvement les équations de base de la thermodynamique pour un milieu continu inélastique avec variables internes, utilisant l'énergie libre d'Helmholtz comme potentiel thermodynamique dans le cas de processus isothermes.

Dans un premier temps, on suppose que l'état thermodynamique local est déterminé par le tenseur de déformation total  $\underline{\epsilon}$ , défini comme la partie symétrique du gradient du champs de déplacement dans l'hypothèse des petites perturbations, sa partie inélastique  $\underline{\epsilon}^{in}$ , la température  $T$  et un ensemble de variables internes  $\{(\alpha_j, p_k); j, k \in \mathbf{N}\}$ . L'énergie libre spécifique ou énergie libre par unité de masse est alors définie par la fonction constitutive

$\psi = \psi(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{in}, \underline{\alpha}_j, p_k, T)$ . Pour la plupart des solides, on considère le découplage des réponses élastiques et inélastiques (dissipatif), l'énergie libre s'exprime alors sous la forme :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{in}, \underline{\alpha}_j, p_k, T) = \psi^{el}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{in}, T) + \psi^{di}(\underline{\alpha}_j, p_k, T) \quad (3.29)$$

En faisant l'hypothèse de la théorie infinitésimale, la différence de déformation  $\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{in}$  peut être identifiée comme étant égale à la déformation élastique  $\underline{\varepsilon}^{el}$ .

Le second principe de la thermodynamique exprimé par l'inégalité de Clausius-Duhem [MAL69][MAU92] permet d'aboutir d'une part à la loi d'état :

$$\underline{\sigma} = \rho \partial_{\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{in}} \psi^{el}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{in}, T) \quad (3.30)$$

où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes vraies de Cauchy et  $\rho$  est la masse volumique ; et d'autre part à l'expression de la fonction de dissipation locale, qui, exprimée sous la forme duale, s'écrit :

$$D^{mech}(\underline{\sigma}, \underline{X}_j, R_k; \underline{\varepsilon}^{in}, \dot{\underline{\alpha}}_j, \dot{p}_k) = {}^T \underline{\varepsilon}^{in} \underline{\sigma} - \sum_j {}^T \dot{\underline{\alpha}}_j \underline{X}_j - \sum_k R_k \dot{p}_k \geq 0 \quad (3.31)$$

où  $\underline{X}_j = \rho \partial_{\underline{\alpha}_j} \psi^{di}$  et  $R_k = \rho \partial_{p_k} \psi^{di}$  sont les forces thermodynamiques.

Pour les matériaux standards généralisés au sens introduit par Halphen et Nguyen [HAL75], les lois d'évolution associées ou les taux de variables internes sont dérivées de l'hypothèse de normalité de l'écoulement inélastique par rapport à une surface d'écoulement, laquelle est définie comme une fonction constitutive de  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{X}_j$  et  $p_k$ .

### 3.4 Superélasticité unidimensionnelle

Le comportement superélastique ou pseudoélastique des AMF, décrit dans la partie introductive est un comportement réversible mais dissipatif associé aux transitions de phase ( $a \longleftrightarrow m$ ) induites mécaniquement.

Dans le cadre d'une modélisation thermodynamique, on peut utiliser la fonction énergie libre spécifique d'Helmholtz proposée dans l'équation (3.27) :

$$\psi = \psi(\varepsilon - \varepsilon^{tr}, z, T) = \psi^{el}(\varepsilon - \varepsilon^{tr}, T) + \psi^{ch-th}(z, T) + \psi^{di}(z, T) \quad (3.32)$$

Où  $\psi^{el}$  est la partie thermoélastique donnée par :

$$\psi^{el}(\varepsilon - \varepsilon^{tr}, T) = \frac{E}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) - \alpha (T - T_R) \right] (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \quad (3.33)$$

et  $\psi^{ch-th}$  est la partie chimique-thermique telle que :

$$\psi^{ch-th}(z, T) = u_{0R}^a - T s_{0R}^a + c_v \left[ (T - T_R) - T \ln \frac{T}{T_R} \right] - z \pi_0 \quad (3.34)$$

### 3.4.1 Dissipation mécanique et fonctions de charge

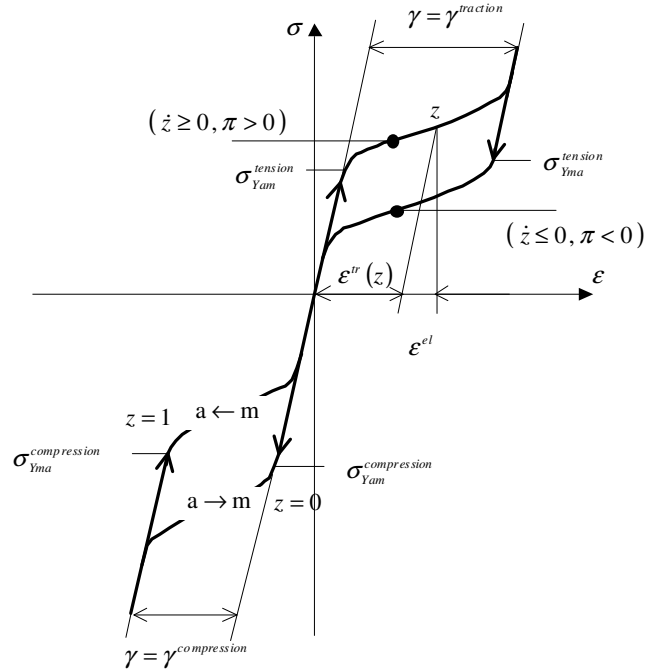
Des mesures électriques “in-situ” effectuées lors d’essais de traction ont permis d’établir une relation de proportionnalité entre  $\varepsilon^{tr}$  et la fraction volumique de martensite  $z$  [VAC90] :

$$\varepsilon^{tr} = \gamma z, \quad \dot{\varepsilon}^{tr} = \gamma \dot{z} \quad (3.35)$$

Cette relation permet alors d’obtenir l’expression suivante de la dissipation mécanique :

$$D^{mech} = \pi \dot{z} \geq 0; \quad \pi = \gamma \sigma + \rho \pi_0 - \rho \partial_z \psi^{di} \quad (3.36)$$

Le facteur de proportionnalité  $\gamma$  représente la déformation de transformation maximum prenant deux valeurs différentes en raison de la dissymétrie du comportement en traction-compression (cf figure 3.3).



**Fig. 3.3** : Réponse superélastique : dissymétrie traction-compression

La transformation directe ( $a \rightarrow m$ ) est caractérisée par ( $\dot{z} > 0$  et  $\pi > 0$ ) tandis que la transformation inverse ( $m \rightarrow a$ ) est caractérisée par ( $\dot{z} < 0$  et  $\pi < 0$ ) où  $\pi$  est la force de pilotage de la transition de phase.

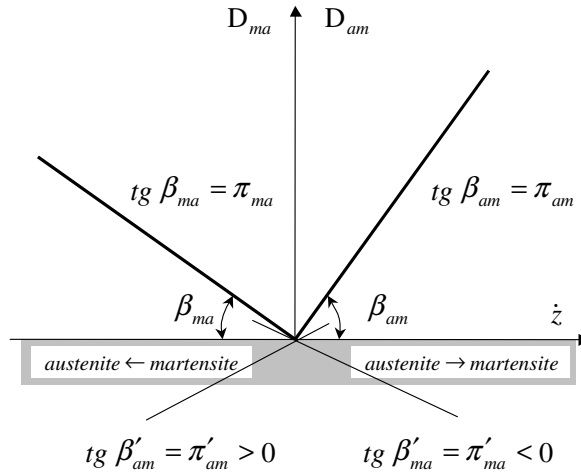
Afin d'établir les lois d'évolution superélastique dans le contexte d'une modélisation à deux potentiels, un processus dissipatif normal indépendant est envisagé pour chaque transformation. Dans cette optique, la superélasticité est définie par l'énergie libre spécifique supposée non-convexe (relation 3.32) et deux mécanismes dissipatifs normaux associés [BOU00], i.e. que pour tout instant le produit  $\pi \dot{z}$  est donné par deux fonctions indépendantes de  $\dot{z}$ , les variables d'état étant utilisées comme paramètres :

$$\begin{aligned} D^{mech} &= D_{am}(\dot{z}; z, T) & \text{si} & \dot{z} > 0 \\ D^{mech} &= D_{ma}(\dot{z}; z, T) & \text{si} & \dot{z} < 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans le cas particulier d'un comportement indépendant des vitesses (comportement identique à la plasticité), ces fonctions sont convexes, positivement homogènes d'ordre un. Un choix simple pour ces fonctions (cf figure 3.4) :

$$\begin{aligned} D_{am}(\dot{z}; z, T) &= \pi_{am}(z, T) \dot{z}; & \pi_{am}(z, T) &> 0 \\ D_{ma}(\dot{z}; z, T) &= \pi_{ma}(z, T) \dot{z}; & \pi_{ma}(z, T) &< 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

permet de définir des fonctions non-négatives et continues telles que  $D_{am}(0; z, T) = 0$  et  $D_{ma}(0; z, T) = 0$ .



**Fig. 3.4** : Fonctions de dissipation

En suivant le formalisme des matériaux standards généralisés, le mécanisme dissipatif ainsi considéré est caractérisé par les forces de pilotage  $\pi_{am}(z, T)$  et  $\pi_{ma}(z, T)$  respectivement pour la transformation directe et inverse. Ces forces appartiennent au sous-différentiel  $\partial D_{am}$  et  $\partial D_{ma}$ , respectivement de  $D_{am}$  et  $D_{ma}$ . La variable associée  $\dot{z}$  appartient quant à elle au sous-différentiel des transformées de Legendre  $D_{am}^*$  et  $D_{ma}^*$  caractérisant les domaines élastiques en transformations directes et inverses.

Les transformations de Legendre-Fenchel de  $D_{am}$  et  $D_{ma}$  étant définies par :

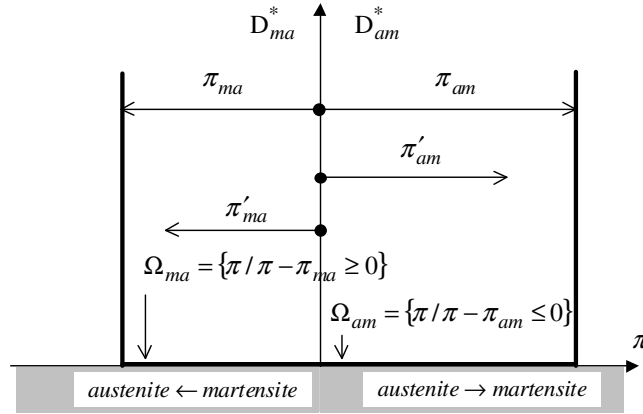
$$\begin{aligned} D_{am}^* (\pi; z, T) &= \mathop{Sup}_{\dot{z} \geq 0} \{ \pi \dot{z} - D_{am} (\dot{z}; z, T) \} \\ D_{ma}^* (\pi; z, T) &= \mathop{Sup}_{\dot{z} \leq 0} \{ \pi \dot{z} - D_{ma} (\dot{z}; z, T) \} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} D_{am}^* (\pi; z, T) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \pi - \pi_{am} (z, T) \leq 0 \\ +\infty & \text{si } \pi - \pi_{am} (z, T) > 0 \end{cases} \\ D_{ma}^* (\pi; z, T) &= \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi + \pi_{ma} (z, T) \leq 0 \\ +\infty & \text{si } -\pi + \pi_{ma} (z, T) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$D_{am}^*$  et  $D_{ma}^*$  sont les fonctions indicatrices respectivement des domaines convexes  $\Omega_{am} = \{ \pi \geq 0 / \pi - \pi_{am} \leq 0 \}$  et  $\Omega_{ma} = \{ \pi \leq 0 / \pi - \pi_{ma} \geq 0 \}$ .

$D_{am}$  et  $D_{ma}$  n'étant pas dérivables à l'origine ( $\dot{z} = 0$ ), le comportement est élastique si  $\pi < \pi_{am}$  ou si  $\pi > \pi_{ma}$  (cf figure 3.5).



**Fig. 3.5** : Domaines d'écoulement

La transformation directe se produit lorsque  $\pi = \pi_{am}$  tandis que la transformation inverse se produit pour  $\pi = \pi_{ma}$ ,  $\dot{z}$  appartenant aux sous-différentiels  $\partial D_{am}^*$  et  $\partial D_{ma}^*$  respectivement de  $D_{am}^*$  et  $D_{ma}^*$  [MOR67][ROC72] i.e. :

$$(\pi - \hat{\pi}) \dot{z} \geq 0 \quad \forall (\pi, \hat{\pi}) \in \Omega_{am} \text{ ou } \Omega_{ma} \quad (3.41)$$

Par extension du principe de dissipation maximum aux comportements superélastiques, cette inégalité se traduit par le fait que parmi toutes les forces motrices admissibles de transition de phase, celle associée à une valeur de  $\dot{z}$  donnée maximise la dissipation. Dès lors :

$$D^{mech} = \mathop{Max}_{\hat{\pi} \leq \pi_{am}} \{ \hat{\pi} \dot{z} \} = \mathop{Min}_{\hat{\pi} \leq \pi_{am}} \{ -\hat{\pi} \dot{z} \} \quad (3.42)$$

pour la transformation directe et pour la transformation inverse :

$$D^{mech} = \underset{\hat{\pi} \geq \pi_{ma}}{Max} \{ \hat{\pi} \dot{z} \} = \underset{\hat{\pi} \geq \pi_{ma}}{Min} \{ -\hat{\pi} \dot{z} \} \quad (3.43)$$

L'utilisation de fonctions lagrangiennes permet de transformer ces problèmes contraints en problèmes non contraints [BER82] :

$$\begin{aligned} L_{am} \left( \hat{\pi}, \dot{\lambda}_{am} \right) &= -\hat{\pi} \dot{z} + \dot{\lambda}_{am} \phi_{am}(\hat{\pi}; z, T); & \phi_{am}(\hat{\pi}; z, T) &= \hat{\pi} - \pi_{am}(z, T) \\ L_{ma} \left( \hat{\pi}, \dot{\lambda}_{ma} \right) &= -\hat{\pi} \dot{z} - \dot{\lambda}_{ma} \phi_{ma}(\hat{\pi}; z, T); & \phi_{ma}(\hat{\pi}; z, T) &= \hat{\pi} - \pi_{ma}(z, T) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Les conditions d'optimalité de ces fonctions aboutissent classiquement aux lois d'évolution superélastique et aux conditions d'écoulement. On obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{\pi}} L_{am} &= -\dot{z} + \dot{\lambda}_{am} \partial_{\hat{\pi}} \phi_{am} = 0, & \partial_{\dot{\lambda}_{am}} L_{am} &= \phi_{am} = 0, & \dot{\lambda}_{am} &\geq 0, & \dot{\lambda}_{am} \phi_{am} &= 0 \\ \partial_{\hat{\pi}} L_{ma} &= -\dot{z} - \dot{\lambda}_{ma} \partial_{\hat{\pi}} \phi_{ma} = 0, & \partial_{\dot{\lambda}_{ma}} L_{ma} &= \phi_{ma} = 0, & \dot{\lambda}_{ma} &\geq 0, & \dot{\lambda}_{ma} \phi_{ma} &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

A partir des conditions d'écoulement  $\phi_{am} = 0$  et  $\phi_{ma} = 0$ , on peut établir que  $\hat{\pi} = \pi$ . Les multiplicateurs de Lagrange  $\dot{\lambda}_{am}$  et  $\dot{\lambda}_{ma}$  sont dérivés des conditions d'interaction  $\dot{\phi}_{am} = 0$  et  $\dot{\phi}_{ma} = 0$ .

En reprenant la relation (3.36), on peut alors en déduire les contraintes seuils des transformations directes et inverses telles que :

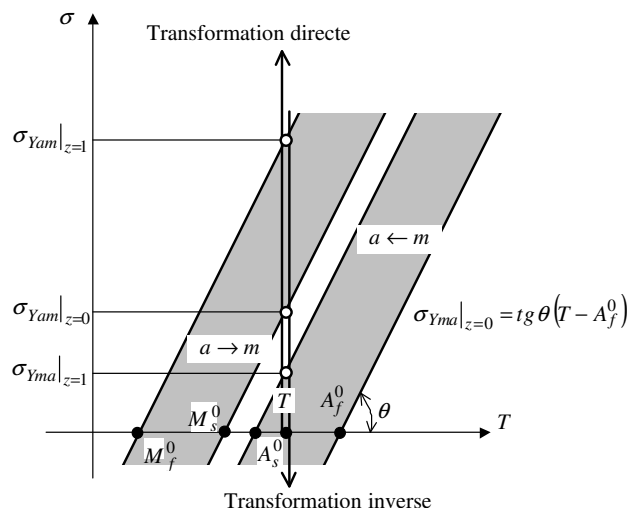
$$\begin{aligned} \varphi_{am} &= \frac{\phi_{am}}{\gamma} = \sigma - \sigma_{am}(z, T) \leq 0; & \gamma \sigma_{am} &= -\rho \pi_0 + \rho \partial_z \psi^{di}(z, T) + \pi_{am}(z, T) \\ \varphi_{ma} &= \frac{\phi_{ma}}{\gamma} = \sigma - \sigma_{ma}(z, T) \geq 0; & \gamma \sigma_{ma} &= -\rho \pi_0 + \rho \partial_z \psi^{di}(z, T) + \pi_{ma}(z, T) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dans le cadre d'une approche phénoménologique où l'énergie d'interaction  $\psi^{di}$  n'est pas nécessairement définie, des lois d'écrouissage sont utilisées pour donner ces contraintes seuils mais également pour représenter un chargement en boucle externe (cf figure 3.7) :

$$\begin{aligned} \sigma_{am}(z, T) &= \sigma_{Y_{am}}|_{z=0}(T) + f_{am}(z) \\ \sigma_{ma}(z, T) &= \sigma_{Y_{ma}}|_{z=1}(T) + f_{ma}(z) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les fonctions  $\sigma_{Y_{am}}|_{z=0}(T)$  et  $\sigma_{Y_{ma}}|_{z=1}(T)$  dépendantes de la température sont les contraintes d'écoulement initiales correspondant aux contraintes de début de chaque transformation :

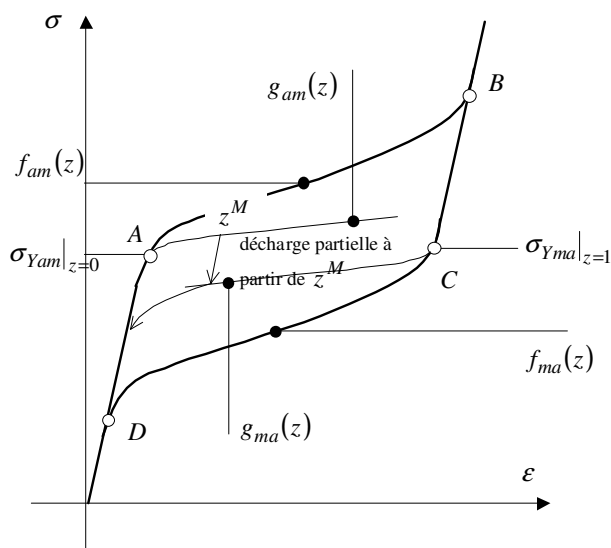
$$\begin{aligned} \sigma_{Y_{am}}|_{z=0}(T) &= \tan \theta (T - M_s^0) \\ \sigma_{Y_{ma}}|_{z=1}(T) &= \tan \theta (T - A_s^0) \end{aligned} \quad (3.48)$$



**Fig. 3.6** : Diagramme d'état : températures et contraintes des transitions de phase

Selon le diagramme d'état contrainte-température idéalisé (cf figure 1.2), pour une température croissante, on observe une augmentation linéaire des contraintes seuils tandis que la taille de l'hystérésis reste inchangée.

A ce stade, les fonctions constitutives  $f_{am}(z)$  et  $f_{ma}(z)$  définissent les lignes frontières des boucles pour les AMF polycristallins. Elles traduisent l'effet d'une incompatibilité entre les grains (cf figure 3.7).



**Fig. 3.7** : Fonctions constitutives pour une modélisation phénoménologique de la superélasticité

Dans le cas où l'on opère de la manière suivante : le processus de chargement est interrompu avant la transformation complète à un niveau où la fraction volumique de martensite

est telle que  $z = z^M < 1$ , puis suivi d'une décharge. Lorsque la droite d'équilibre instable est atteinte, le matériau biphasé, dans un état instable, tend à trouver un état d'équilibre plus stable le long de la droite de comportement élastique. Le point rencontré sur la droite d'équilibre instable est le point de retournement de la décharge interne. Il est donné par la valeur de la fonction constitutive  $g_{ma}(z)$  en  $z = z^M$  (cf figure 3.7) ce qui signifie que cette fonction  $g_{ma}(z)$  définit le lieu des points de retournement des décharges internes. De la même façon,  $g_{am}(z)$  définit le lieu des points de retournement des charges internes. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma_{am}(z, T) &= \sigma_{am}(z, T; z^M) = \sigma_{am}[\sigma_{Yam}(T), f_{am}(z), g_{am}(z^M)] \\ \sigma_{ma}(z, T) &= \sigma_{ma}(z, T; z^M) = \sigma_{ma}[\sigma_{Yma}(T), f_{ma}(z), g_{ma}(z^M)]\end{aligned}\quad (3.49)$$

Contraintes seuils qui peuvent être généralisées sous la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{am} &= \sigma_{am}(z, T; h_{am}) \\ \sigma_{ma} &= \sigma_{ma}(z, T; h_{ma})\end{aligned}\quad (3.50)$$

Où  $h_{am}$  et  $h_{ma}$  représentent un ensemble de paramètres d'histoire.

En considérant ces relations et l'équation (3.46), on constate donc une dépendance à l'histoire des fonctions de dissipation établies en (3.38) telles que :

$$\begin{aligned}D_{am} &= \pi_{am}(z, T; h_{am}) \dot{z}; & \pi_{am}(z, T; h_{am}) &> 0 \\ D_{ma} &= \pi_{ma}(z, T; h_{ma}) \dot{z}; & \pi_{ma}(z, T; h_{ma}) &< 0\end{aligned}\quad (3.51)$$

### 3.4.2 Variables d'histoire et boucles internes

L'énergie dissipée lors de la transition de phase dépend donc d'un ensemble de paramètres d'histoire. Le caractère dépendant à l'histoire des AMF est illustré sur la figure (3.2) où le matériau retrouve le point atteint lors de l'interruption de la charge juste avant la décharge, comme s'il avait mémorisé ce point.

Du premier principe de la thermodynamique, on peut tirer l'expression du taux de chaleur associé à une source interne :

$$\dot{q} = \rho \dot{u} - \sigma \dot{\varepsilon}\quad (3.52)$$

Où  $u$  est l'énergie interne spécifique du mélange de phases telle que :

$$u = \psi + Ts\quad (3.53)$$

L'entropie spécifique  $s$  est tirée de la loi d'état  $s = -\partial_T \psi(\varepsilon - \varepsilon^{tr}, z, T)$ . L'exploitation combinée des relations (3.32), (3.33) et (3.34) permet d'écrire dans le cas d'un processus de charge-décharge isotherme :



$$\begin{aligned} \dot{q} = & -\rho [(u_{oR}^a - u_{oR}^m) + T\partial_{Tz}^2\psi^{di}] \dot{z} - \sigma\dot{\varepsilon}^{tr} + \rho\partial_z\psi^{di}\dot{z} \\ & + E\alpha T (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{tr}) + \rho c_v \dot{T} - \rho T\partial_{TT}^2\psi^{di}\dot{T} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Où  $E$  est le module d'Young et  $c_v$  la chaleur spécifique du matériau.

Avec les relations (3.34) et (3.51), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{q} = & -\rho T [(s_{oR}^a - s_{oR}^m) + T\partial_{Tz}^2\psi^{di}] \dot{z} - \pi_x(z, T; h_x) \dot{z} \\ & + E\alpha T (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{tr}) + \rho c_v \dot{T} - \rho T\partial_{TT}^2\psi^{di}\dot{T} \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec  $x = am$  pour la transformation directe et  $x = ma$  pour la transformation inverse. Cette relation représente le taux de chaleur impliqué par les transitions de phase. Le cumul d'énergie dissipée est alors déterminé par intégration de  $-\pi_x(z, T; h_x) \dot{z}$ .

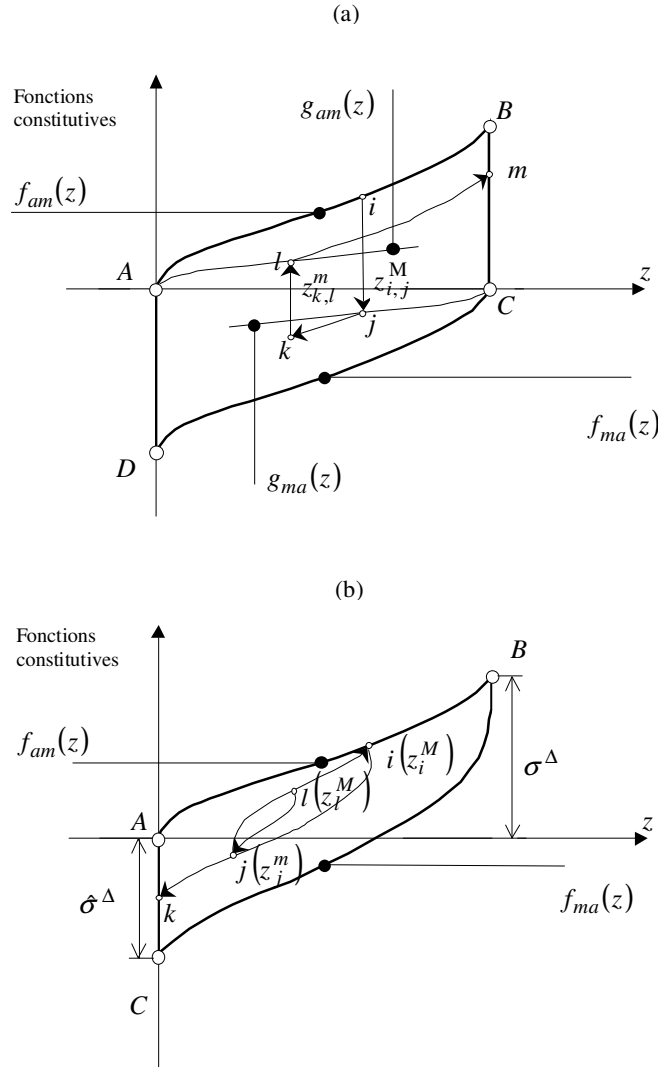
On peut distinguer deux types de dépendance à l'histoire des AMF. Certains alliages présentent une faible dépendance à l'histoire (cf. figure 3.2a et 3.2b) i.e. que les décharges ou recharges partielles suivent d'abord une réponse élastique. Au contraire, les alliages dépendant fortement de l'histoire sont caractérisés par l'absence de transition élastique (cf. figure 3.2c).

Afin d'expliquer une faible dépendance à l'histoire, on considère le chemin de chargement représenté sur la figure 3.8a où  $f_{am}(z)$  et  $f_{ma}(z)$  sont respectivement les fonctions d'écrouissage des transformations directes et inverses. Si l'on décharge au point  $i$ , la fraction volumique de martensite correspondante  $z_i^M$  est mémorisée de sorte que  $h_{ma} = \{z_i^M\}$ . Le point  $j$  est alors donné par  $g_{ma}(z_i^M)$ , le comportement étant élastique entre  $i$  et  $j$ . Si l'on effectue une recharge avant d'atteindre le point  $j$ , l'échantillon retourne alors au point  $i$  et le paramètre d'histoire  $z_i^M$  est annulé de sorte que  $h_{ma} = \{\emptyset\}$ . Par contre, si l'on décharge jusqu'au point  $k$  en suivant la loi d'écrouissage  $f_{ma}(z)$ , puis l'on recharge, la fraction volumique de martensite correspondante  $z_k^m$  est mémorisée telle que  $h_{am} = \{z_k^m\}$ . Le point  $l$  est alors donné par  $g_{am}(z_k^m)$ , le comportement étant élastique entre  $k$  et  $l$ . Si l'on effectue une décharge avant d'avoir atteint le point  $l$ , l'échantillon retourne alors au point  $k$  et le paramètre d'histoire  $z_k^m$  est annulé de sorte que  $h_{am} = \{\emptyset\}$  tandis que  $h_{ma} = \{z_i^M\}$ . Quand le point  $l$  est dépassé, le paramètre d'histoire  $z_i^M$  est annulé de sorte que  $h_{ma} = \{\emptyset\}$  tandis que  $h_{am} = \{z_k^m\}$ .

Ensuite, pour expliquer une forte dépendance à l'histoire, on considère le chemin de chargement représenté sur la figure (3.8b). On introduit la fonction d'écrouissage suivante pour la transformation directe :

$$f_{am}(z) = \sigma^\Delta f(z) \quad (3.56)$$

Où  $\sigma^\Delta$  est un paramètre matériau (cf. figure 3.8b) et  $f$  une fonction de la fraction volumique de martensite vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Le choix de  $f$  correspond à un polynôme



**Fig. 3.8** : Fonctions constitutives de la modélisation phénoménologique de la pseudoélasticité : (a) faible dépendance à l'histoire, (b) forte dépendance à l'histoire

permettant de représenter la forme des boucles externes et internes dans le cas d'une forte dépendance à l'histoire. Afin de simplifier la modélisation proposée, on choisit  $f$  telle que  $f(1-z) = 1-f(z)$  :

$$f(z) = \left(1 - \frac{n}{4}\right)z + n \left[ \left(z - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{8} \right]; \quad n \in [0, 4] \quad (3.57)$$

Si l'on effectue une décharge au point  $i$ , la fraction volumique de martensite correspondante  $z_i^M$  est mémorisée de sorte que  $h_{ma} = \{z_i^M\}$ . Entre les points  $i$  et  $j$ , la fonction d'écroutissage est donnée par :

$$f_{ma}(z) = f_{ma}^i + f\left(\frac{z}{z_i^M}\right) [f_{am}(z_i^M) - f_{ma}^i]; \quad f_{ma}^i = -\hat{\sigma}^\Delta z_i^M \quad (3.58)$$

Où  $\hat{\sigma}^\Delta$  est un paramètre matériau (cf. figure 3.8b).

Si l'on recharge au point  $j$ , la fraction volumique de martensite correspondante  $z_j^m$  est mémorisée avec  $z_i^M$  de sorte que  $h_{am} = \{z_i^M, z_j^m\}$ . Entre les points  $j$  et  $l$ , la fonction d'écroissage est donnée par :

$$f_{am}(z) = f_{ma}(z_j^m) + f\left(\frac{z - z_j^m}{z_i^M - z_j^m}\right) [f_{am}(z_i^M) - f_{ma}(z_j^m)] \quad (3.59)$$

En partant du point  $l$  et en rechargeant jusqu'à  $i$ , la boucle interne ( $iji$ ) est refermée et les paramètres d'histoire  $z_i^M$  et  $z_j^m$  sont alors annulés de sorte que  $h_{am} = h_{ma} = \{\emptyset\}$ . Au delà du point  $i$ , la transition de phase est pilotée par l'équation (3.56).

Toutefois, si l'on effectue une décharge au point  $l$ , la fraction volumique de martensite correspondante  $z_l^M$  est mémorisée de sorte que  $h_{ma} = \{z_i^M, z_j^m, z_l^M\}$  et la fonction d'écroissage s'écrit :

$$f_{ma}(z) = f_{am}(z_l^M) + f\left(\frac{z_l^M - z}{z_l^M - z_j^m}\right) [f_{ma}(z_j^m) - f_{am}(z_l^M)] \quad (3.60)$$

En suivant ce schéma, la forme des fonctions d'écroissage peut être généralisée par récurrence.

### 3.5 Superélasticité tridimensionnelle

L'énergie libre spécifique d'Helmholtz dans le cas d'une formulation tridimensionnelle du comportement superélastique est donnée par les relations (3.32), (3.33) et (3.34) dans lesquelles on remplace les variables scalaires  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^{tr}$  par les variables tensorielles  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\varepsilon}^{tr}$  représentant respectivement le tenseur de déformation totale et le tenseur de déformation de transformation. Ainsi :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{tr}, z, T) = \psi^{el}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{tr}, T) + \psi^{ch-th}(z, T) + \psi^{di}(z, T) \quad (3.61)$$

Avec  $\psi^{el}$  représentant la partie thermoélastique :

$$\psi^{el}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{tr}, T) = \frac{1}{2\rho} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{tr}) \underline{\underline{C}}^e (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{tr}) - \frac{1}{\rho} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{tr}) \underline{\alpha} (T - T_R) \quad (3.62)$$

$\underline{\underline{C}}^e$  et  $\underline{\alpha} = \underline{I}\alpha$  étant respectivement les tenseurs de comportement élastique et des coefficients de dilatation thermique.

La dissipation mécanique est alors :

$$D^{mech} = {}^T \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr} \underline{\sigma} - R \dot{z} \geq 0; \quad R = -\rho \left[ \pi_0 - \partial_z \psi^{di}(z, T) \right] \quad (3.63)$$

La transformation directe est caractérisée par  $\dot{z} > 0$  et la transformation inverse par  $\dot{z} < 0$ .

En supposant, comme dans le cas unidimensionnel, un processus dissipatif normal indépendant pour chaque transformation,  $D^{mech}$  est donné pour tout instant par deux fonctions indépendantes de  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr}$  et  $\dot{z}$  :

$$\begin{aligned} D^{mech} &= D_{am} \left[ (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr}, \dot{z}); (z, T; h_{am}) \right] & \text{si} & \quad \dot{z} > 0 \\ D^{mech} &= D_{ma} \left[ (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr}, \dot{z}); (z, T; h_{ma}) \right] & \text{si} & \quad \dot{z} < 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dans le cas particulier d'un comportement indépendant du temps (comportement de type plastique), ces fonctions sont convexes, positivement homogènes d'ordre un.

Puisque la transformation directe peut être initiée dans n'importe quelle direction,  $D_{am}$  est une fonction quasi-positivement homogène définissant un cône convexe dans un espace à huit dimensions tel que  $D_{am}[(\underline{0}, 0); (z, T; h_{am})] = 0$ . Selon la théorie des matériaux standards généralisés, les forces thermodynamiques  $\underline{\sigma}$  et  $R$  appartiennent aux sous-différentiels  $\partial D_{am}$  de  $D_{am}$ .

Les variables duales  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr}$  et  $\dot{z}$  appartiennent alors au sous-différentiel  $\partial D_{am}^*$  de la fonction indicatrice du domaine convexe  $\Omega_{am} = \{(\underline{\sigma}, R) / \varphi_{am}(\underline{\sigma}, R) \leq 0\}$  i.e. le domaine élasto-dissipatif.

Ainsi :

$${}^T \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr} (\underline{\sigma} - \hat{\underline{\sigma}}) - (R - \hat{R}) \dot{z} \geq 0 \quad \forall \left[ (\underline{\sigma}, \hat{\underline{\sigma}}), (R, \hat{R}) \right] \in \Omega_{am} \quad (3.65)$$

ce qui signifie que parmi toutes les forces thermodynamiques admissibles, celles associées à un ensemble  $(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr}, \dot{z})$  donné maximisent la dissipation mécanique i.e. :

$$D^{mech} = \underset{(\hat{\underline{\sigma}}, \hat{R}) \in \Omega_{am}}{\text{Max}} \left\{ {}^T \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr} \hat{\underline{\sigma}} - \hat{R} \dot{z} \right\} = \underset{(\hat{\underline{\sigma}}, \hat{R}) \in \Omega_{am}}{\text{Min}} \left\{ - \left( {}^T \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr} \hat{\underline{\sigma}} - \hat{R} \dot{z} \right) \right\} \quad (3.66)$$

Considérant alors le problème classique de minimisation sans contrainte de la fonction de Lagrange suivante :

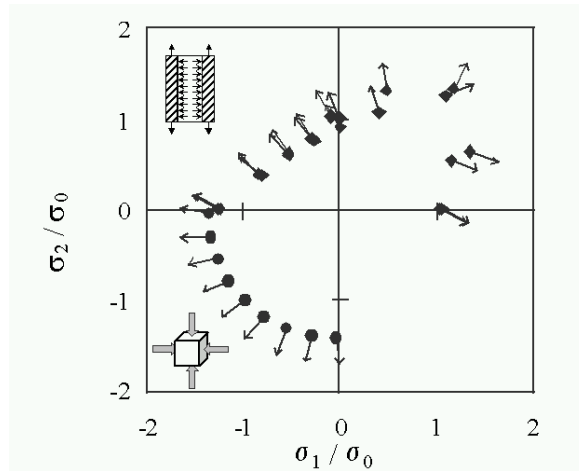
$$L_{am} \left( \hat{\underline{\sigma}}, \hat{R}, \dot{\lambda}_{am} \right) = -{}^T \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr} \hat{\underline{\sigma}} + \hat{R} \dot{z} + \dot{\lambda}_{am} \varphi_{am} \left( \hat{\underline{\sigma}}, \hat{R} \right) \quad (3.67)$$

les lois d'évolution  $\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr}$  et  $\dot{z}$  de la transformation directe sont obtenues à partir des conditions d'optimalité :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \dot{\lambda}_{am} \partial_{\hat{\underline{\sigma}}} \varphi_{am}, \quad \dot{z} = -\dot{\lambda}_{am} \partial_{\hat{R}} \varphi_{am}, \quad \varphi_{am} = 0, \quad \dot{\lambda}_{am} \geq 0, \quad \dot{\lambda}_{am} \varphi_{am} = 0 \quad (3.68)$$

La condition d'écoulement  $\varphi_{am} = 0$  permet d'établir que  $\hat{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma}$  et  $\hat{R} = R$ . Le multiplicateur de Lagrange  $\dot{\lambda}_{am}$  est dérivé de la condition d'interaction  $\dot{\varphi}_{am} = 0$ .

L'hypothèse de normalité contenue dans ces relations a été vérifiée expérimentalement par Bouvet [BOU01a] dans le cas d'un alliage CuAlBe (cf figure 3.9). Sur cette figure, les flèches représentent la direction de la transformation de phase.



**Fig. 3.9** : Surface de début de transformation pour des essais de bicompression et de traction-compression interne sur un CuAlBe [BOU01a]

Par analogie avec le cas unidimensionnel (équation 3.46), on introduit alors la fonction d'écoulement suivante pour la transformation directe :

$$\varphi_{am}(\underline{\sigma}, R) = \Sigma(\underline{\sigma}) - \Sigma_{am}(R) \leq 0 \quad (3.69)$$

Ce qui permet alors d'obtenir :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \dot{\lambda}_{am} \partial_{\underline{\sigma}} \Sigma, \quad \dot{z} = \dot{\lambda}_{am} \partial_R \Sigma_{am} = \frac{\dot{\lambda}_{am}}{\gamma_{\Sigma}} \quad (3.70)$$

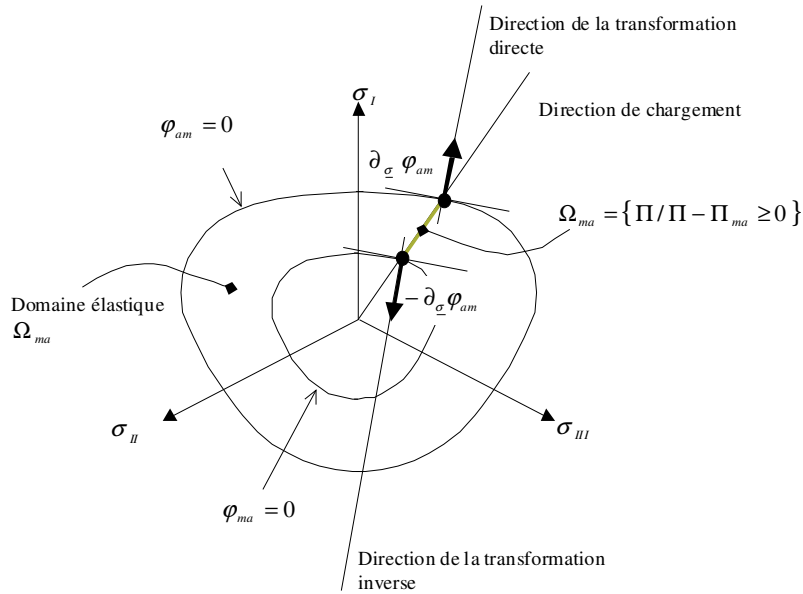
$\gamma_{\Sigma}$  est la déformation de transformation maximum dans la direction de la contrainte seuil  $\Sigma_{am}$ . En accord avec la définition du domaine elastodissipatif  $\Omega_{am}$  dans l'espace des forces thermodynamiques, la contrainte seuil  $\Sigma_{am}$  est définie comme une fonction de  $R$ . Néanmoins, la relation (3.63b) indique que celle-ci peut également être considérée comme une fonction constitutive de  $z$  et de  $T$  décrivant l'effet de l'interaction entre les cristaux orientés différemment dans les alliages polycristallins à mémoire de forme.

Dans le cas d'un comportement isotrope et indépendant des vitesses, la fonction scalaire  $\Sigma$  du tenseur des contraintes de Cauchy ou contrainte effective, est positivement homogène d'ordre un et invariante dans le groupe orthogonal complet i.e. elle doit vérifier  $\Sigma(\underline{q}\underline{\sigma}^T\underline{q}) = \Sigma(\underline{\sigma})$  pour n'importe quelle rotation  $\underline{q}$  telle que  $\underline{q}^T\underline{q} = {}^T\underline{q}\underline{q} = \underline{I}$ . Si la variation de volume est négligeable lors de la transformation alors  $\Sigma$  dépend de  $J_2$  et  $J_3$ , respectivement deuxième et troisième invariants du déviateur des contraintes afin de prendre en compte le caractère dissymétrique de la superélasticité (cf. figure 3.10) :

$$\Sigma = p\sqrt{3J_2}(1 + ay_\sigma)^r; \quad y_\sigma = \frac{27}{2} \frac{J_3}{(3J_2)^{3/2}} \quad (3.71)$$

où  $p, a$  et  $r$  sont des constantes, et  $J_2$  et  $J_3$  sont donnés par les expressions :

$$J_2 = \frac{1}{2} {}^T(\text{dev}\underline{\sigma})\text{dev}\underline{\sigma}, \quad J_3 = \frac{1}{3} {}^T(\text{dev}\underline{\sigma})^2\text{dev}\underline{\sigma} \quad (3.72)$$

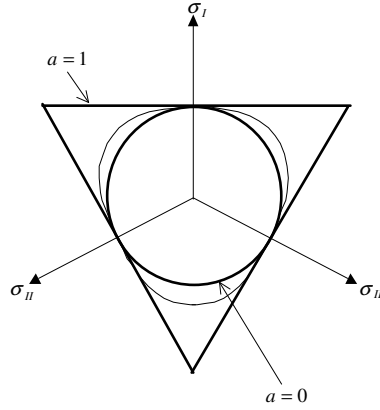


**Fig. 3.10** : Fonctions d'écoulement et directions de transformation pour chaque transition de phase. Cas d'un chargement proportionnel.

La dissymétrie traction-compression peut être mise en évidence pour différentes valeurs de  $r$  [REJ00][GIL99], certaines valeurs de  $a$  pouvant occasionner une perte de la convexité. Ce problème peut être contourné en choisissant une forme alternative de  $\Sigma$ , à savoir [BOU01B] :

$$\Sigma = \sqrt{3J_2} f(y_\sigma); \quad f(y_\sigma) = \cos \left[ \frac{a \cos [1 - a(1 - y_\sigma)]}{3} \right] \quad (3.73)$$

où  $a$  est un paramètre matériau appartenant à  $[0,1]$ . On retrouve ainsi la contrainte effective de Von-Mises pour  $a = 0$  tandis que le rapport maximum de dissymétrie (alors égal à 2) est obtenu pour  $a = 1$ . La figure montre que la surface d'écoulement correspondante dans le plan du déviateur des contraintes est un triangle équilatéral.



**Fig. 3.11** : Surfaces d'écoulement superélastique pour différentes valeurs de  $a$  dans le plan du déviateur des contraintes

Dans le cas des AMF, les valeurs de  $a$  identifiées permettent de conserver la convexité pour la forme générale donnée dans la relation (3.71). En particulier, le choix correspondant à  $p = r = 1$  a été fait dans [LEX99] :

$$f(y_\sigma) = 1 + ay_\sigma \quad (3.74)$$

Cette définition de la contrainte équivalente ne permet pas d'obtenir une dissymétrie traction-compression maximale (dissymétrie comprise entre 1 et 1,286) tout en restant convexe.

Lors de l'interruption de la transformation directe suivie d'une décharge, la transformation inverse ne peut pas se produire dans n'importe quelle direction. Dès lors, la fonction de dissipation  $D_{ma}$  (éq. 3.64) ne peut pas être un cône complet.

La relation (3.70) permet d'établir la relation suivante entre  $\underline{\dot{\epsilon}}^{tr}$  et  $\dot{z}$  lors de la transformation directe :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{tr} = \dot{z}\gamma_\Sigma\partial_\sigma\Sigma \quad (3.75)$$

Puisque les déformations de transformation doivent être récupérables lors de la transformation inverse, on peut alors écrire que  $D_{ma}[(\underline{\dot{\epsilon}}^{tr}, \dot{z}); (z, T; h_{ma})] \equiv D_{ma}[\dot{z}; (z, T; h_{ma})]$ , ce qui permet d'introduire une fonction de dissipation linéaire d'une manière identique au cas unidimensionnel :

$$\begin{aligned} D_{am} [\dot{z}; (z, T; h_{ma})] &= \Pi_{am}(z, T; h_{am}) \dot{z}; & \Pi_{am}(z, T; h_{am}) > 0 & \text{ pour } a \rightarrow m \\ D_{ma} [\dot{z}; (z, T; h_{ma})] &= \Pi_{ma}(z, T; h_{ma}) \dot{z}; & \Pi_{ma}(z, T; h_{ma}) < 0 & \text{ pour } m \rightarrow a \end{aligned} \quad (3.76)$$

La règle de normalité permet d'écrire  $\dot{z} = -\dot{\lambda}_{ma} \partial_{\Pi} \phi_{ma}$  avec :

$$\phi_{ma} = \Pi - \Pi_{ma}(z, T; h_{ma}) \geq 0; \quad \Pi = \gamma_{\Sigma}^T (\partial_{\underline{\sigma}} \Sigma) \underline{\sigma} + \rho \left[ \pi_0 - \partial_z \psi^{di}(z, T) \right] \quad (3.77)$$

Par conséquent, une fonction d'écoulement unique peut être obtenue dans l'espace des déviateurs des contraintes pour toutes les transformations inverses possibles, en considérant des chemins de chargement proportionnels. On entend par chargement proportionnel ou chargement radial, un chargement dont le champs de contraintes appliqué est défini par la relation  $\underline{\sigma} = f(t) \underline{A}$  où  $\underline{A}$  est un tenseur constant et  $f(t)$  une fonction positive du temps.

Finalemnt :

$$\varphi_{ma} = {}^T (\partial_{\underline{\sigma}} \Sigma) \underline{\sigma} - \Sigma_{ma}(z, T; h_{ma}) \geq 0 \quad (3.78)$$

où :

$${}^T (\partial_{\underline{\sigma}} \Sigma) \underline{\sigma} = \Sigma(\underline{\sigma}), \quad \Sigma_{ma}(z, T; h_{ma}) = \frac{1}{\gamma_{\Sigma}} \left[ -\rho \pi_0 + \rho \partial_z \psi^{di}(z, T) + \Pi_{ma}(z, T; h_{ma}) \right] \quad (3.79)$$

Dans le cadre d'une approche phénoménologique, la contrainte seuil  $\Sigma_{ma}$  est définie comme dans le cas unidimensionnel (Relation 3.49b).

En accord avec le formalisme des matériaux standards généralisés, la direction de l'écoulement de la transformation inverse pour un état de contrainte donné doit être normale, au point correspondant de l'espace du déviateur des contraintes, à un domaine convexe  $\Omega_{\kappa}$  contenant  $\Omega_{ma} = \{\Pi / \Pi - \Pi_{ma} \geq 0\}$  et extérieur à ce domaine. En effet, l'utilisation du principe de dissipation maximum nécessite une région contrainte convexe afin de garantir l'unicité des lois d'évolution. Ce constat suggère l'élaboration d'un cadre constitutif non-associé pour les transformations inverses. On envisage alors le potentiel de dissipation  $\kappa(\underline{\sigma}, R)$  telle que :

$$\begin{aligned} \kappa(\underline{\sigma}, R) &> 0 & \text{ si } & \Pi - \Pi_{ma} > 0 \\ \kappa(\underline{\sigma}, R) &= 0 & \text{ si } & \Pi - \Pi_{ma} = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Etant donné que pour un chargement proportionnel on peut écrire :

$$\partial_{\underline{\sigma}} \Sigma = \frac{\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr}}{\|\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr}\|} = \frac{\underline{\varepsilon}^{tr}}{\|\underline{\varepsilon}^{tr}\|} \quad (3.81)$$



on peut alors choisir  $\kappa(\underline{\sigma}, R)$  sous la forme suivante :

$$\kappa(\underline{\sigma}, R) = \frac{T \underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}}{\|\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}\|} \underline{\sigma} - \Sigma_{ma}(R) \geq 0; \quad \Sigma_{ma}(R) \equiv \Sigma_{ma}(z, T; h_{ma}) \quad (3.82)$$

Et finalement :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{tr} = -\dot{\tau} \partial_{\underline{\sigma}} \kappa = -\dot{\tau} \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}}{\|\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}\|}, \quad \dot{z} = \dot{\tau} \partial_R \kappa = -\dot{\tau} \partial_R \Sigma_{ma} = -\frac{\dot{\tau}}{\gamma_{\Sigma}}; \quad \dot{\tau} = \gamma_{\Sigma} \dot{\lambda}_{ma} \quad (3.83)$$

La définition de la norme de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{tr}$  nécessite une étude plus approfondie pour assurer la fermeture de la boucle d'hystérésis, caractéristique de la superélasticité. En outre, la modélisation développée est fondée sur l'hypothèse des petites perturbations mais peut s'étendre facilement au cas des transformations finies comme on le montrera ultérieurement.

### 3.6 Application à la famille des modèles RLT : faible dépendance à l'histoire

En définissant une énergie d'interaction  $\psi^{di}$  relativement simple, la famille des modèles RLT, évoquée dans la partie bibliographie [RAN92][RAN98], permet de rendre compte des configurations de transformation présentées dans la figure (3.2a) où la transition des boucles internes est située le long d'une ligne diagonale encore appelée droite d'équilibre instable et définie par  $\Pi = 0$ . Ainsi, pour une sollicitation donnée, la réponse des alliages possédant une faible dépendance à l'histoire est caractérisée par cette droite. Comme il en a été question dans la partie bibliographie, le choix de Müller concernant  $\psi^{di}$  est une fonction simple de  $z$ , à savoir  $z \cdot (1 - z)$  telle que  $\psi^{di} = 0$  pour  $z = 0$  (austenite pure) et  $z = 1$  (martensite pure). Dans le cadre de l'approche développée, les différentes caractéristiques des modèles RLT peuvent être spécifiés dans la Table (3.1).

### 3.7 Modèle représentant une forte dépendance à l'histoire

Pour les alliages caractérisés par l'absence de transition élastique en décharges ou recharges partielles, i.e. dépendant fortement de l'histoire, la famille des modèles RLT n'est plus appropriée. Dans la partie précédente, un modèle phénoménologique tridimensionnel de la superélasticité des AMF, construit sur une approche identique à celle de la plasticité, a été proposé. Généralisant la plupart des approches proposées à ce jour, ce modèle permet de prendre en compte différentes configurations de réponse (cf figure 3.2) en définissant des lois d'érouissage adéquates en l'absence d'une connaissance suffisante des phénomènes de nucléation et de croissance de la martensite dans l'austénite. La définition d'un ensemble de variables d'histoire permet de représenter la forte dépendance à l'histoire du comportement du matériau. Les différentes caractéristiques de ces modèles sont spécifiées dans la Table (3.2).

Energie d'interaction	$\psi^{di}(z, T) = z(1-z)\phi_{it}(T)$ avec $\phi_{it}(T) = u_0 - Ts_0$  $u_0$ energie interne et $s_0$ entropie de configuration constantes
Loi d'état	$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^{el}}{\partial \underline{\varepsilon}^e} = \underline{\underline{C}}^e \underline{\varepsilon}^e; \quad \dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^e$  $\underline{\underline{C}}^e$ tenseur de comportement élastique
Lois d'évolution	$\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \dot{\lambda}_{am} \partial_{\underline{\sigma}} \Sigma, \quad \dot{z} = \dot{\lambda}_{am} / \gamma_{\Sigma}$ pour $a \longrightarrow m$  $\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = -\dot{\tau} \partial_{\underline{\sigma}} \kappa, \quad \dot{z} = -\dot{\tau} / \gamma_{\Sigma}$ pour $m \longrightarrow a$
Fonctions d'écoulement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\phi_{am} = \gamma_{\Sigma} \varphi_{am} = \Pi - \Pi_{am}(z, T; h_{am}) \leq 0</math>                      où <math>\Pi_{am}(z, T; h_{am}) = k_1(z, h_{am})</math> pour <math>a \longrightarrow m</math></li> <li>• <math>\phi_{ma} = \gamma_{\Sigma} \varphi_{ma} = \Pi - \Pi_{ma}(z, T; h_{ma}) \geq 0</math>                      où <math>\Pi_{ma}(z, T; h_{ma}) = k_2(z, h_{ma})</math> pour <math>m \longrightarrow a</math></li> </ul>
Force thermodynamique	$\Pi = \gamma_{\Sigma} \cdot {}^T(\partial_{\underline{\sigma}} \Sigma) \underline{\sigma} + \rho \pi_0(T) - \rho(1-2z)\phi_{it}(T)$
Fonctions d'écrouissage	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k_1(z) = 2\phi_{it}(M_S^0)z + \frac{s_0 - \Delta s_0 - 2s_0 z}{a_1} \ln(1-z)</math>   <math>M_S^0</math> temp. début transf. directe état libre de contraintes</li> <li>• <math>k_2(z) = -2\phi_{it}(A_S^0)(1-z) + \frac{s_0 + \Delta s_0 - 2s_0(1-z)}{a_2} \ln(z)</math>   <math>A_S^0</math> temp. début transf. inverse état libre de contraintes</li> </ul>
Contrainte équivalente	${}^T(\partial_{\underline{\sigma}} \Sigma) \underline{\sigma} = \Sigma(\underline{\sigma}) = \sqrt{3J_2} \cdot f(y_{\sigma})$  avec $f(y_{\sigma}) = 1 + ay_{\sigma}$  $a$ paramètre de dissymétrie traction-compression

**Tab. 3.1** : Caractéristiques des modèles RLT représentant une faible dépendance à l'histoire

Loi d'état	$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^{el}}{\partial \underline{\varepsilon}^e} = \underline{\underline{C}}^e \underline{\varepsilon}^e; \quad \dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^e$ <p style="text-align: center;"><math>\underline{\underline{C}}^e</math> tenseur de comportement élastique</p>
Fonctions d'écoulement	$\varphi_{am} = \Sigma(\underline{\sigma}) - \Sigma_{am}(z, T; h_{am}) \leq 0 \quad \text{pour } a \longrightarrow m$ $\varphi_{ma} = \Sigma(\underline{\sigma}) - \Sigma_{ma}(z, T; h_{ma}) \geq 0 \quad \text{pour } m \longrightarrow a$
Lois d'évolution	$\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = \dot{\lambda}_{am} \partial_{\underline{\sigma}} \Sigma, \quad \dot{z} = \dot{\lambda}_{am} / \gamma_{\Sigma} \quad \text{pour } a \longrightarrow m$ $\dot{\underline{\varepsilon}}^{tr} = -\dot{\tau} \partial_{\underline{\sigma}} \kappa, \quad \dot{z} = -\dot{\tau} / \gamma_{\Sigma} \quad \text{pour } m \longrightarrow a$
Potentiel de dissipation	$\kappa = \frac{T \underline{\varepsilon}^{tr}}{\ \underline{\varepsilon}^{tr}\ } \underline{\sigma} - \Sigma_{ma}(z; h_{ma}) \geq 0 \quad \text{pour } m \longrightarrow a$
Fonctions seuil	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Sigma_{am}(z, T; h_{am}) = \sigma_{Yam}  _{z=0}(T) + f_{am}(z; h_{am})</math> <p style="margin-left: 20px;"><math>\sigma_{Yam}  _{z=0}(T) = \tan \theta (T - M_s^0)</math> contrainte de début de transformation directe <math>f_{am}(z; h_{am})</math> fonction d'écrouissage transformation directe</p> </li> <li>• <math>\Sigma_{ma}(z, T; h_{ma}) = \sigma_{Yma}  _{z=1}(T) + f_{ma}(z; h_{ma})</math> <p style="margin-left: 20px;"><math>\sigma_{Yma}  _{z=1}(T) = \tan \theta (T - A_s^0)</math> contrainte de début de transformation inverse <math>f_{ma}(z; h_{ma})</math> fonction d'écrouissage transformation inverse</p> </li> </ul>
Contrainte équivalente	${}^T(\partial_{\underline{\sigma}} \Sigma) \underline{\sigma} = \Sigma(\underline{\sigma}) = \sqrt{3J_2} \cdot f(y_{\sigma})$ <p style="text-align: center;">avec <math>f(y_{\sigma}) = 1 + ay_{\sigma}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>a</math> paramètre de dissymétrie traction-compression</p>

**Tab. 3.2** : Caractéristiques des modèles représentant une forte dépendance à l'histoire

### 3.8 Cinématique en transformations finies

Dans la perspective de l'étude du comportement thermomécanique des AMF en transformations finies, on choisit de construire une cinématique s'appuyant sur la notion de configuration intermédiaire déformée introduite par Eckart [ECK48] et la notion de vecteurs directeurs initiée par Cosserat [COS09] et reprise par Mandel [MAN71].

La formulation du comportement pseudoélastique en transformations finies nécessite, comme en petites perturbations, la décomposition de la transformation totale en une partie élastique et une partie relative à la transition de phase.

En généralisant la notion de configuration intermédiaire à des états contraints et en supposant un comportement élastique indépendant de l'état de phase, on introduit la décomposition multiplicative suivante du gradient de la transformation  $\underline{F}$  :

$$\underline{F} = (\underline{I} + \underline{\varepsilon}^e) \underline{q} \underline{F}^{tr} \quad (3.84)$$

$\underline{F}^{tr}$  représente le gradient de la transformation associée à la transition de phase. Il permet de relier une configuration de référence à une configuration intermédiaire dans laquelle au moins un repère directeur  $R_D$ , attaché d'une certaine façon à la structure interne du matériau, conserve son orientation initiale. Au cours du mouvement, ce repère évolue par une rotation  $\underline{q}$  du groupe orthogonal  $\theta = \{\underline{q} / \underline{q}^T \underline{q} = \underline{I}; \det \underline{q} = 1\}$  qui nous permet d'atteindre la configuration finale dans laquelle une mesure de déformation élastique linéaire  $\underline{\varepsilon}^e$  est mesurée (Pour les matériaux métalliques, les déformations élastiques restent petites i.e.  $\|\underline{\varepsilon}^e\| \ll 1$ ).

La notion de directeurs est fondamentale en transformations finies car elle permet d'orienter et donc de fixer la configuration intermédiaire définie comme une frontière entre l'inélasticité et ce qui ne l'est pas.

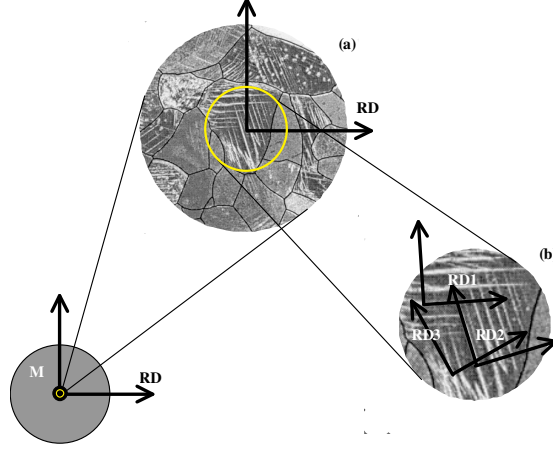
Le comportement pseudoélastique, étant associé à une transformation de phase solide-solide displacive et réversible le long de plans caractéristiques appelés "plans d'habitat", un repère orthonormé direct défini à partir d'un plan d'habitat pourrait être considéré comme directeur. L'activation des plans d'habitat dépend de l'orientation du grain par rapport aux sollicitations. A l'échelle du V.E.R., un repère défini comme une moyenne des repères des directeurs liés aux grains est directeur. En outre, à l'échelle du grain, plusieurs repères directeurs, liés aux variantes de martensite, peuvent être définis.

Le gradient des vitesses est donné par la relation :

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \quad (3.85)$$

Avec :

- $\dot{\underline{F}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e \underline{q} \underline{F}^{tp} + (\underline{I} + \underline{\varepsilon}^e) \dot{\underline{q}} \underline{F}^{tp} + (\underline{I} + \underline{\varepsilon}^e) \underline{q} \dot{\underline{F}}^{tp}$
- $\underline{F}^{-1} = (\underline{F}^{tp})^{-1 T} \underline{q} (\underline{I} + \underline{\varepsilon}^e)^{-1} \approx (\underline{F}^{tp})^{-1 T} \underline{q} (\underline{I} - \underline{\varepsilon}^e)$



**Fig. 3.12** : Repère directeur (RD) pour le VER (a) et repères directeurs liés aux plans d'habitat (b)

En négligeant les termes d'ordre supérieur en  $\underline{\varepsilon}^e$ , on obtient :

$$\underline{L} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\varepsilon}^e \dot{\underline{q}}^T \underline{q} - \dot{\underline{q}}^T \underline{q} \underline{\varepsilon}^e + \underline{q} \left[ \dot{\underline{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^T \underline{q} + \dot{\underline{q}}^T \underline{q} \quad (3.86)$$

On en déduit alors l'expression du taux de déformation  $\underline{D}$  et du taux de rotation  $\underline{W}$  :

$$\underline{D} = \underline{L}^S = D_q \underline{\varepsilon}^e + \underline{q} \left[ \dot{\underline{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^S \underline{q} \quad (3.87)$$

$$\underline{W} = \underline{L}^A = \underline{q} \left[ \dot{\underline{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^A \underline{q} + \dot{\underline{q}}^T \underline{q} \quad (3.88)$$

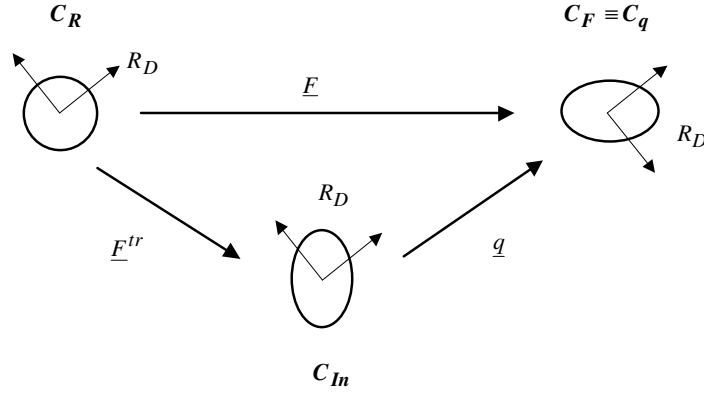
$D_q \underline{\varepsilon}^e$  est la dérivée objective rotationnelle par la rotation  $\underline{q}$  de  $\underline{\varepsilon}^e$  (grandeur eulérienne). Elle consiste à transporter  $\underline{\varepsilon}^e$  de  $C_F$  dans  $C_{In}$ , à dériver le résultat dans cette même configuration puis à effectuer le transport inverse (cf figure 3.13) :

$$D_q \underline{\varepsilon}^e = \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\varepsilon}^e \dot{\underline{q}}^T \underline{q} - \dot{\underline{q}}^T \underline{q} \underline{\varepsilon}^e = \underline{q} \frac{d}{dt} \{ {}^T \underline{q} \underline{\varepsilon}^e \underline{q} \}^T \underline{q} = \underline{q} \dot{\underline{\varepsilon}}_q^{eT} \underline{q} \quad (3.89)$$

Dans la configuration intermédiaire  $C_{In}$ , en considérant la relation (3.87), on obtient alors :

$${}^T \underline{q} \underline{D} \underline{q} = \dot{\underline{\varepsilon}}_q^e + \left[ \dot{\underline{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^S \quad (3.90)$$

Par ailleurs,  $\underline{D}$  décrivant les vitesses de déformation dans la configuration courante  $C_t$ , il est intéressant de savoir quel est son représentant Lagrangien. Les vitesses des déformations



**Fig. 3.13** : Décomposition du gradient de transformation totale pour un matériau à transition de phase

de Green-Lagrange  $\dot{\underline{E}}$  semble être le choix le plus naturel. En considérant le tenseur gradient de transformation  $\underline{F}$ , on peut montrer que ces tenseurs sont reliés par la relation suivante :

$$\dot{\underline{E}} = {}^T \underline{F} \underline{D} \underline{F} \quad (3.91)$$

Ce qui est signifie que le tenseur taux de déformation de Green-Lagrange est défini à partir d'un transport convectif et donc,  $\dot{\underline{E}}$  n'est pas un bon représentant pour les vitesses de déformation. En effet, ses éléments principaux n'ont pas une signification physique directement exploitable, en particulier  $tr(\dot{\underline{E}}) = 0$  n'entraîne pas  $tr(\underline{D}) = 0$ , condition nécessaire pour traduire l'incompressibilité du matériau. Un bon représentant pour les vitesses de déformation serait une quantité semblable à  $\underline{D}$ . Une rotation est un transport permettant d'obtenir une telle quantité. Ainsi, en définissant le taux de déformation  $\underline{D}$  comme la dérivée objective rotationnelle par la rotation  $\underline{q}$  d'une mesure de déformation tensorielle cumulée  $\underline{d}$  [GIL93], on obtient :

$$\underline{D} = D_q \underline{d} = \underline{q} \dot{\underline{d}}_q {}^T \underline{q} \quad (3.92)$$

En outre, on peut noter que  $tr(\underline{D}) = tr(\dot{\underline{d}}_q) = 0$  permet effectivement de traduire l'incompressibilité du matériau.

En définitive, les relations (3.92) et (3.90) donnent la relation suivante dans la configuration intermédiaire  $C_{In}$  :

$$\dot{\underline{d}}_q = \dot{\underline{e}}_q^e + \dot{\underline{d}}_q^{tr} \quad (3.93)$$

Cette relation permet d'étendre au cas des transformations finies la décomposition additive des taux de déformation cumulée  $\dot{\underline{d}}_q$  en une partie élastique  $\dot{\underline{e}}_q^e$  et une partie inélastique

$\underline{\dot{d}}_q^{tr} = \left[ \underline{\dot{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^S$  associée à la transition de phase. On obtient donc dans la configuration intermédiaire  $C_{In}$  un formalisme voisin de celui des petites perturbations.

Pour définir  $C_{In}$  à tout instant au cours de la transformation, on utilise l'expression du taux de rotation  $\underline{W}$ . On peut remanier la relation (3.88) pour écrire :

$$\underline{\dot{q}}^T \underline{q} = \underline{W} - \underline{q} \left[ \underline{\dot{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^A \quad {}^T \underline{q} \quad (3.94)$$

Où :

- $\underline{W}_q = \underline{\dot{q}}^T \underline{q}$  définit la vitesse de rotation du repère directeur  $R_D$  et donc d'une certaine façon celle de la microstructure du matériau,
- $\underline{W}$  définit la vitesse de rotation du milieu matériel. Cette vitesse est complètement connue par la cinématique de la transformation,
- $\underline{q} \left[ \underline{\dot{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^A \quad {}^T \underline{q}$  définit la vitesse relative du milieu matériel par rapport à sa microstructure. Ce qui traduit que le mouvement des grains peut être complètement différent de celui du milieu vu à l'échelle macroscopique.

Pour déterminer  $\underline{W}_q$  et donc  $\underline{q}$ , on peut intégrer la relation suivante :  $\underline{\dot{q}} = \underline{W}_q \underline{q}$  avec  $\underline{q}|_{t=0} = \underline{I}$  en procédant de trois façons :

La première technique est la plus naturelle et consiste à définir  $\underline{q} \left[ \underline{\dot{F}}^{tp} (\underline{F}^{tp})^{-1} \right]^A \quad {}^T \underline{q}$  par une approche micro-macro.

La seconde est moins physique et consiste à utiliser les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles antisymétriques à variables tensorielles représentatives de la cinématique et de la loi de comportement.

La dernière méthode est phénoménologique et consiste à choisir cinématiquement  $\underline{W}_q$  ou  $\underline{q}$  a priori et d'en vérifier qualitativement et/ou quantitativement la validité. Dans le cadre de cette approche, à l'image de la démarche utilisée pour l'extension en transformations finies du comportement élastique de la coque (cf chapitre 2), une famille de rotations cinématiques objectives  $\underline{q}$  peut être obtenue par résolution du problème différentiel suivant :

$$\underline{\dot{q}}^T \underline{q} = \underline{W}_q = (1 - \varsigma) \underline{W} + \varsigma \underline{\dot{R}}^T \underline{R}; \quad \underline{q}|_{t=0} = \underline{I}, \quad \varsigma \in [0, 1] \quad (3.95)$$

Où  $\underline{R}$  est la rotation propre de la décomposition polaire de  $\underline{F}$  :  $\underline{F} = \underline{R}\underline{U} = \underline{V}\underline{R}$

En particulier, les deux cas limites  $\varsigma = 0$  et  $\varsigma = 1$  définissent respectivement la rotation du repère corotationnel et celle du repère tournant en rotation propre.

Pour un polycristal, au niveau du VER, le repère directeur est une moyenne des repères directeurs liés aux grains. On peut donc considérer comme aléatoire ou pseudo-aléatoire la répartition des directions des plans d'habitat, i.e. qu'il n'existe pas de direction privilégiée.

Par conséquent, le comportement est considéré isotrope. Ainsi, n'importe quelle rotation objective peut convenir. Pour des raisons de simplicité et de représentativité qualitative du comportement, on choisira le cas  $\zeta = 1$  soit :

$$\underline{q} = \underline{R} \quad (3.96)$$

Le repère tournant sera le repère directeur  $R_D$  par la rotation propre, représentant une moyenne lagrangienne des rotations matérielles.

### 3.9 Comportement superélastique en transformations finies

Le comportement pseudoélastique des AMF en transformations finies pour des trajets de chargement proportionnels dérive du cadre constitutif établi dans l'hypothèse des petites perturbations. On suppose que l'état du matériau est complètement défini dans la configuration intermédiaire par le tenseur des déformations élastiques  $\underline{\varepsilon}_q^e = \underline{d}_q - \underline{d}_q^{tr}$ , la fraction volumique de martensite  $z$  et la température  $T$ . Dans ce cas, à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient directement la dissipation mécanique en reprenant l'expression établie lors de la construction du cadre thermodynamique :

$$D^{mech} = {}^T \underline{d}_q^{tr} \underline{\sigma}_q - R\dot{z} \geq 0; \quad R = -\rho\pi_0(T) + \rho\partial_z\psi^{di}(z, T) \quad (3.97)$$

Où  $\underline{\sigma}_q = {}^T \underline{q} \underline{\sigma} \underline{q}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy dans la configuration "tournée" intermédiaire.

En suivant la démarche exposée lors de la définition du cadre Petites Perturbations, on obtient les lois d'évolution et les fonctions seuils dans la configuration intermédiaire.

Dans le cas de la transformation directe ( $a \rightarrow m$ ) :

$$\begin{aligned} \underline{d}_q^{tr} &= \dot{z}\gamma_\Sigma\partial_{\underline{\sigma}_q}\Sigma \\ \varphi_{am}(\underline{\sigma}_q, R) &= \Sigma(\underline{\sigma}_q) - \Sigma_{am}(R) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

Où  $\gamma_\Sigma$  est la déformation de transformation maximum dans la direction de la contrainte seuil (en cisaillement)  $\Sigma_{am}(z, T; h_{am}) = \frac{1}{\gamma_\Sigma} [-\rho\pi_0 + \rho\partial_z\psi^{di}(z, T) + \Pi_{am}(z, T; h_{am})]$ .

La contrainte équivalente  $\Sigma(\underline{\sigma}_q)$  est donnée par la relation :

$$\Sigma = \sqrt{3J_2}f(y_\sigma); \quad f(y_\sigma) = 1 + ay_\sigma \quad (3.99)$$

Avec :

$$J_2 = \frac{1}{2} (dev\underline{\sigma}) dev\underline{\sigma}, \quad y_\sigma = \frac{27}{2} \frac{J_3}{(3J_2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad J_3 = {}^T (dev\underline{\sigma})^2 dev\underline{\sigma} \quad (3.100)$$



Dans le cas de la transformation inverse ( $m \longrightarrow a$ ), la loi d'évolution est donnée par la relation :

$$\underline{\dot{d}}_q^{tr} = -\dot{\lambda}_{ma} \partial_{\underline{\sigma}_q} \kappa = -\dot{\lambda}_{ma} \frac{\underline{\dot{d}}_q^{tr}}{\|\underline{\dot{d}}_q^{tr}\|}, \quad \dot{z} = \dot{\lambda}_{ma} \partial_R \kappa \quad (3.101)$$

Où la fonction de charge  $\kappa$  est telle que :

$$\begin{aligned} \kappa(\underline{\sigma}_q, R) &= \frac{T \underline{\dot{d}}_q^{tr}}{\|\underline{\dot{d}}_q^{tr}\|} \underline{\sigma}_q - \Sigma_{ma}(R) \geq 0 \\ \Sigma_{ma}(R) &\equiv \Sigma_{ma}(z, T; h_{ma}) = \frac{1}{\gamma_\Sigma} [-\rho\pi_0 + \rho\partial_z \psi^{di}(z, T) + \Pi_{ma}(z, T; h_{ma})] \end{aligned} \quad (3.102)$$

Dans le cas d'un chargement proportionnel, tout changement d'état courant du système n'est possible uniquement que par changement de la fraction volumique de martensite. Ce que l'on peut résumer par la relation suivante :

$$\underline{\dot{d}}_q^{tr} = \underline{N} \dot{z} \quad (3.103)$$

Où  $\underline{N}$  est le tenseur permettant de déterminer la direction de la transformation considérée :

$$\underline{N} = \begin{cases} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi_{am} & \text{pour la transformation directe } (\dot{z} > 0) \\ \partial_{\underline{\sigma}_q} \kappa & \text{pour la transformation inverse } (\dot{z} < 0) \end{cases} \quad (3.104)$$

### 3.10 Conclusion

Le but recherché et affiché de l'activité intense gravitant autour des AMF demeure évidemment la mise au point d'un modèle de comportement thermomécanique tridimensionnel capable de simuler les propriétés et caractéristiques macroscopiques essentielles des alliages à mémoire de forme, cette formulation devant être directement exploitable pour le développement d'un algorithme d'intégration robuste dans un code élément fini.

Dans cette partie, le formalisme largement utilisé des matériaux standards généralisés a été considéré pour définir un cadre constitutif unifié et cohérent pour la description de la superélasticité des AMF pour des trajets de chargement proportionnels. D'abord appliquée aux AMF polycristallins soumis à des sollicitations uniaxiales, la modélisation proposée est basée sur l'utilisation de l'énergie libre spécifique d'Helmholtz comme potentiel thermodynamique et deux processus dissipatifs normaux indépendants donnant des potentiels de dissipation linéaires pour les transformations directes et inverses. La mesure de dissipation, qui peut être différente pour chaque transformation, comprend un ensemble de variables d'histoire afin de prendre en compte la dépendance à l'histoire de la réponse des AMF lors de décharges-recharges partielles. Les lois d'évolution de la transition de phase sont obtenues en supposant

valide le principe de dissipation maximum. En transition de phase, le cadre constitutif proposé au début de ce chapitre pour de petites perturbations, a été étendu au cas des transformations finies en utilisant les grandeurs adéquates dans la configuration intermédiaire.

La démarche utilisée pour construire une cinématique de grandes transformations pour l'étude du comportement thermomécanique des AMF est basée sur la décomposition multiplicative du gradient de transformation totale et la théorie des milieux à directeurs. On obtient alors une décomposition additive de la mesure de déformation dans un formalisme voisin de celui des petites perturbations. Les lois constitutives obtenues peuvent alors être intégrées dans le cadre d'une méthode incrémentale associée au schéma itératif de Newton.



---

## Chapitre 4

# Etude Expérimentale

---

L'observation des phénomènes physiques résultant de l'application d'un état de contrainte thermomécanique à un matériau est le premier pas vers la modélisation. Les essais expérimentaux permettent de mettre en évidence la réponse du matériau à une sollicitation donnée. La richesse des publications et travaux dans le domaine expérimental n'a d'égale que sa diversité mais ce chapitre n'a pas pour vocation de faire le bilan de cette activité. On distingue deux types d'essais. Les premiers sont des essais homogènes tels que la traction-compression, le cisaillement ou la torsion, ils servent notamment à déterminer les paramètres du modèle développé. Le second type d'essais concerne les essais que l'on appelle généralement essais de structure, lesquels sont non-homogènes. Ils permettent de valider l'intégration numérique des lois de comportement du modèle ou l'implantation d'un élément fini dans un code de calcul. C'est dans cet esprit que cette étude expérimentale a été menée. D'abord tournés vers l'identification des paramètres nécessaires à la simulation numérique, des essais mécaniques simples tels que la traction ont été effectués. La nécessité d'obtenir une base expérimentale de validation combinée à l'existence de bancs d'essais largement éprouvés au sein du laboratoire nous ont poussé à réaliser des essais mécaniques tridimensionnels orientés vers la caractérisation de structures minces avec notamment l'essai de gonflement. Enfin, des essais de traction sur des plaques trouées ont été réalisés. Ces essais visent principalement à évaluer l'efficacité de l'outil numérique développé.

### 4.1 Matériaux testés

L'essai de traction a tout d'abord permis de "prendre connaissance" des matériaux en identifiant leurs paramètres. Ensuite, des essais "structures" ont été effectués. Cette étude expérimentale a été menée sur trois types d'AMF :

- CuZnAl sous la forme de plaque d'épaisseur 0,1 mm (fournit par la société Tréfinmétaux),

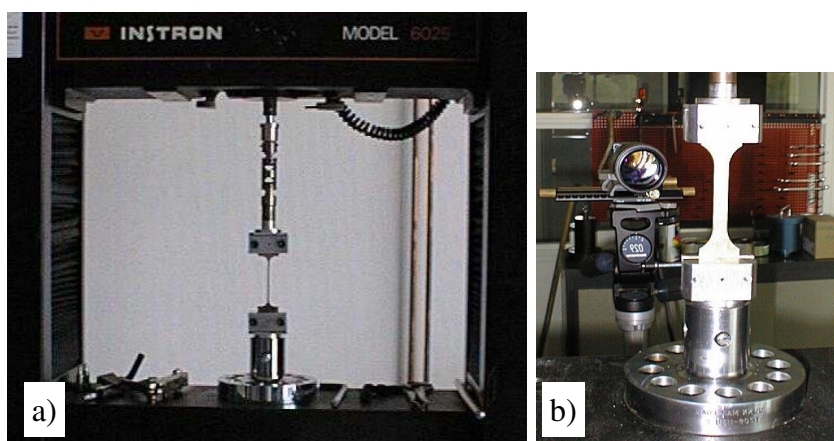
- CuAlBe sous la forme de plaque d'épaisseur 0,1 mm (fournit par la société ai2m),
- NiTi sous la forme de plaque d'épaisseur 0,5 mm (fournit par Istituto per l'Energetica e le Interfasi, Unité de Lecco).

## 4.2 Essai de traction

Une machine de traction-compression électrique INSTRON 6025 a été utilisée pour réaliser les essais de traction, équipée d'une cellule de force de 100 kN. Les essais sont réalisés à déplacement imposé. La vitesse de chargement est suffisamment lente pour éviter l'échauffement de l'éprouvette i.e. 0,05 mm/s.

### 4.2.1 Mise en oeuvre

Les essais de traction sur bandes minces sont confrontés principalement au problème de prise de l'éprouvette dans les mors. Les mors auto-serrants ne sont pas adaptés pour des échantillons de faible épaisseur car le glissement de l'éprouvette voire sa déchirure sont fréquents. Pour éviter ces inconvénients, des mors simples constitués d'une goupille de centrage et de plaques lisses, dont le serrage est assuré par deux vis, permettent un alignement et un maintien satisfaisants de l'éprouvette. En ce qui concerne la mesure des déformations, le traditionnel extensomètre à jauges de déformation ne convient pas pour des bandes minces car son poids modifie l'état de contrainte initial. Pour un essai de traction simple, on peut utiliser le déplacement de la traverse mobile de la machine d'essai en s'assurant toutefois d'une légère mise sous tension de l'ensemble afin d'éviter tout jeu (cf figure (4.1)).

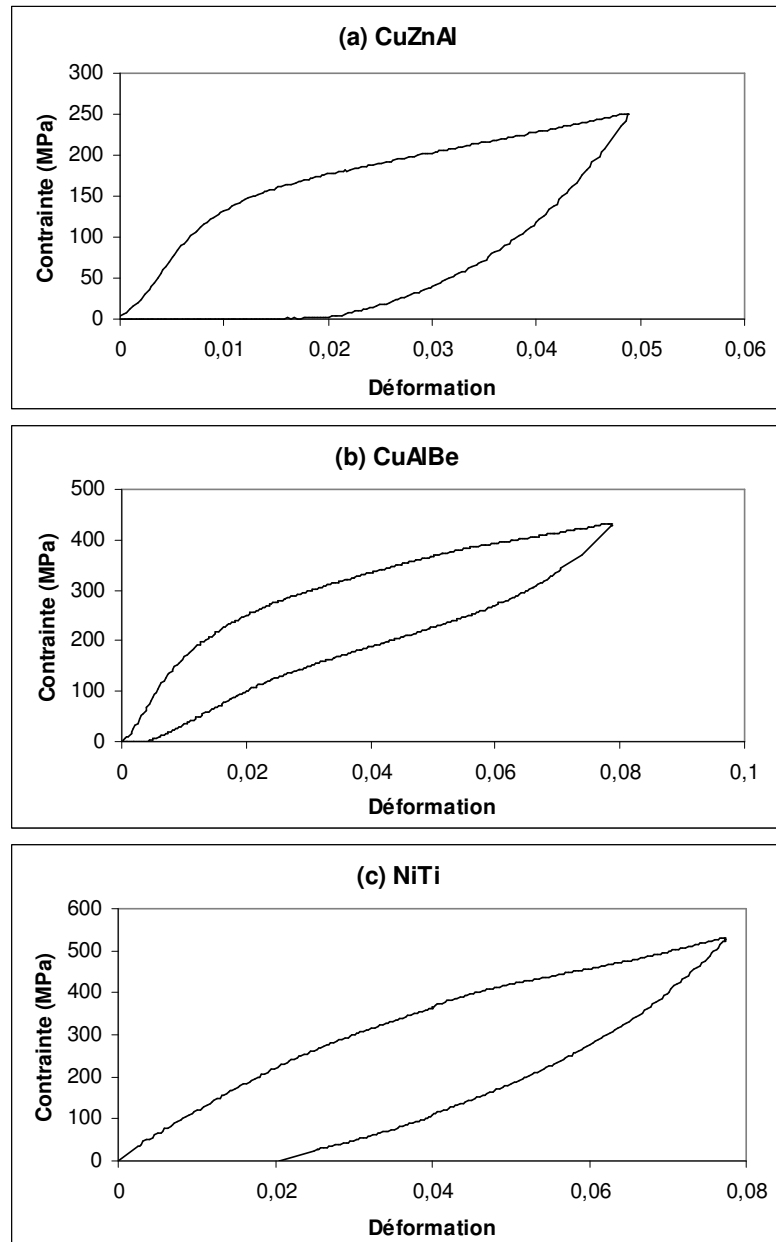


**Fig. 4.1** : Configuration de l'essai de traction : (a) Machine de traction (b) Eprouvette et caméra CCD

Les éprouvettes utilisées sont des bandes minces présentant une zone utile de dimensions 32x18 mm.

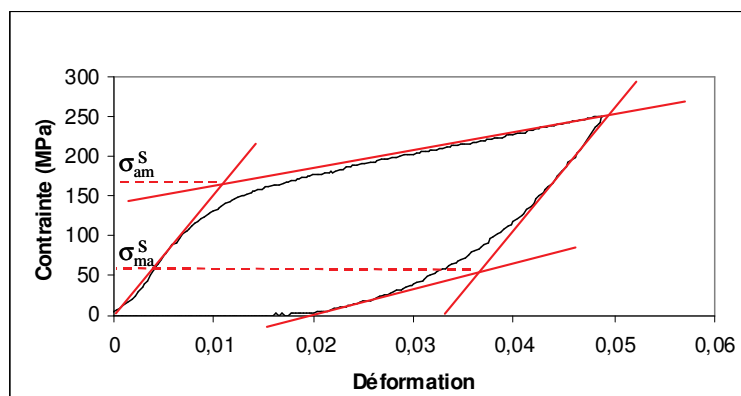
### 4.2.2 Résultats

On obtient alors les courbes de traction contrainte-déformation suivantes pour chaque matériau (cf figure 4.2) à la température  $T=302$  K.



**Fig. 4.2** : Courbe contrainte-déformation essai de traction : (a) CuZnAl, (b) CuAlBe et (c) NiTi

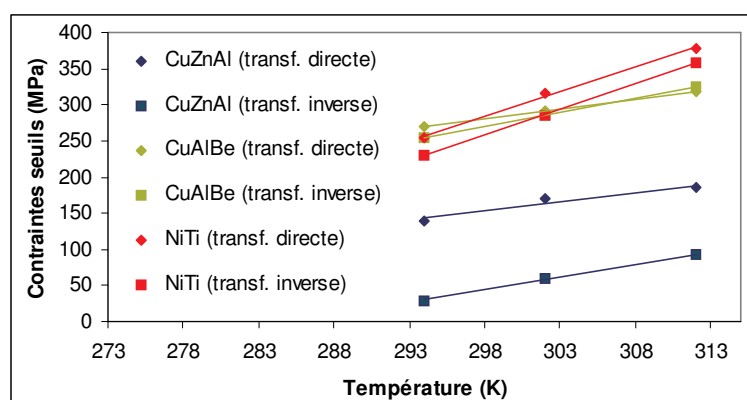
Sur la figure (4.3) est indiquée la méthode utilisée pour détecter les contraintes de début de transformation  $\sigma_{am}^S$  et  $\sigma_{ma}^S$ .


**Fig. 4.3** : Méthode des tangentes pour la détection des contraintes seuils - Cas du CuZnAl

	<i>CuZnAl</i>	<i>CuAlBe</i>	<i>NiTi</i>
$\frac{d\sigma_{am}^S}{dT} (MPa/^\circ K)$	2,44	2,7	6,86
$\frac{d\sigma_{ma}^S}{dT} (MPa/^\circ K)$	3,54	3,9	7,14
$M_s^0 (^\circ K)$	232	194	256
$A_s^0 (^\circ K)$	285	229	262

**Tab. 4.1** : Evolution des contraintes seuils avec la température - Températures de transformation

Les essais de traction ont été effectués à trois températures différentes, respectivement  $T = 293^\circ K$ ,  $T = 302^\circ K$  et  $T = 312^\circ K$ , afin de pouvoir obtenir l'évolution des contraintes seuils de début de transformation directe et inverse avec la température (cf figure 4.4).


**Fig. 4.4** : Evolution des contraintes seuils avec la température pour les trois matériaux testés

Ce diagramme permet de déterminer la variation des contraintes seuils avec la température au moyen d'une régression linéaire mais également les températures de transformation. Les résultats sont regroupés dans le tableau (4.1).

### 4.3 Essai de traction sur plaque trouée

Pour ce type d'essai, la difficulté se situe au niveau de la mesure des déformations. La solution adoptée consiste à utiliser un système d'acquisition vidéo combiné à un logiciel d'analyse d'images. Le dispositif utilisé pour les essais de traction avec acquisition vidéo a été développé au LMARC par J-F. Michel [MIC02]. Dans le cas d'une plaque trouée et donc d'un phénomène de concentration de contrainte, il est évidemment intéressant d'observer l'évolution des déformations autour du trou. L'acquisition vidéo est parfaitement adaptée à ce type d'essai.

Les éprouvettes ont des dimensions identiques au cas précédent et présentent un trou de diamètre 9 mm. Les essais ont été réalisés à la température  $T = 302^\circ K$ . L'essai est réalisé à effort imposé.

#### 4.3.1 Mesure des déformations

Le système de mesure par acquisition d'images évoqué précédemment est représenté sur la figure 4.5. Ce dispositif répond aux exigences du logiciel de traitement d'images Spouch développé par P. Vacher et S. Dumoulin du laboratoire de mécanique de l'ESIA [VAC99]. En effet, ce logiciel ne peut être utilisé que sur des objets plans sollicités dans leur plan. Il est basé sur des images numériques noir et blanc d'un même ensemble à deux instants déterminés permettant alors d'évaluer le champ de déplacement.

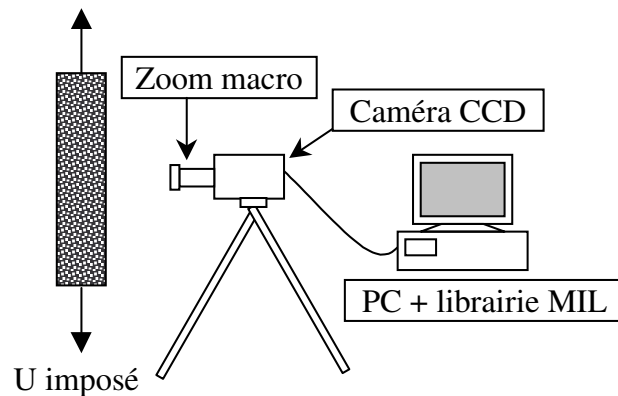
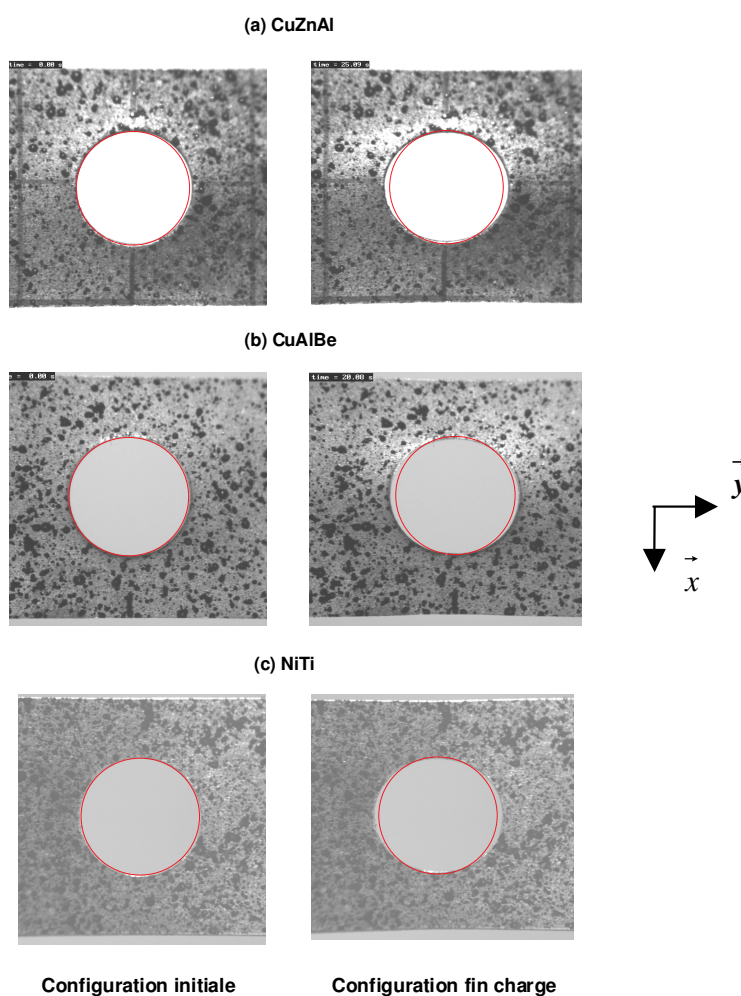


Fig. 4.5 : Schéma du dispositif d'acquisition d'images

La précision du champ de déplacement est étroitement liée à la qualité des images numériques. Celles-ci doivent présenter des niveaux de gris continus et aléatoires. Pour y parvenir, on utilise une caméra numérique CCD (Charged Coupled Device) et un mouchetis de peinture noire. L'acquisition des images est réalisée au moyen d'une carte d'acquisition vidéo. En se basant sur la librairie MIL (Matrox Imaging Library), un programme d'acquisition d'images permet de fixer le temps total d'acquisition et l'intervalle entre chaque image. Pour les essais effectués, l'acquisition est faite à la fréquence de cent images sur la durée de l'essai. La figure suivante (cf figure 4.6) regroupe les clichés réalisés lors de l'essai de traction sur les plaques



trouées pour les différents matériaux étudiés à deux instants précis : au début de l'essai (configuration initiale) et au milieu de l'essai (configuration en fin de charge). On peut observer, au moyen des cercles rouges (configuration initiale du trou), le champs de déplacement autour du trou. Par ailleurs, on peut également noter l'effet de Poisson. Ce sont ces clichés que le logiciel de traitement d'images va analyser pour obtenir le champs de déformation. Les résultats relatifs à l'analyse d'images pour les différents matériaux testés sont présentés dans le chapitre 5 lors de la comparaison expérience vs. simulation de la répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  du tenseur de déformation de Green–Lagrange.



**Fig. 4.6 :** Observation des éprouvettes en début d'essai et en fin de chargement : (a) CuZnAl, (b) CuAlBe et (c) NiTi

### 4.3.2 Procédure d'utilisation du logiciel

L'analyse d'images repose sur la comparaison successive des niveaux de gris entre deux images. Ces niveaux de gris sont interpolés puis corrélés afin de déterminer le champ de

déplacement associé à un niveau de chargement donné. La détermination du champ de déplacement s'appuie sur l'évolution d'une grille virtuelle définie sur l'image de référence au début de l'essai. L'utilisateur choisit la maille de cette grille en fonction de la précision voulue.

L'utilisateur repère un même pixel sur les images initiales et finales. A partir de ce pixel, le logiciel détermine de manière itérative l'évolution d'une maille de la grille. Calculant la différence des niveaux de gris du même pixel entre les deux configurations, il repositionne ce pixel afin de minimiser cette différence. Quand la différence entre deux niveaux de gris est inférieure à une tolérance fixée par l'utilisateur, le processus passe à une autre maille. Cette méthode est appliquée à chaque noeud de chaque maille de la grille. On obtient alors un champ de déplacement pour l'ensemble de la zone d'étude. Ensuite, le logiciel évalue les composantes  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$  et  $E_{xy}$  du tenseur de déformation de Green-Lagrange au point étudié.

### 4.3.3 Zone d'acquisition

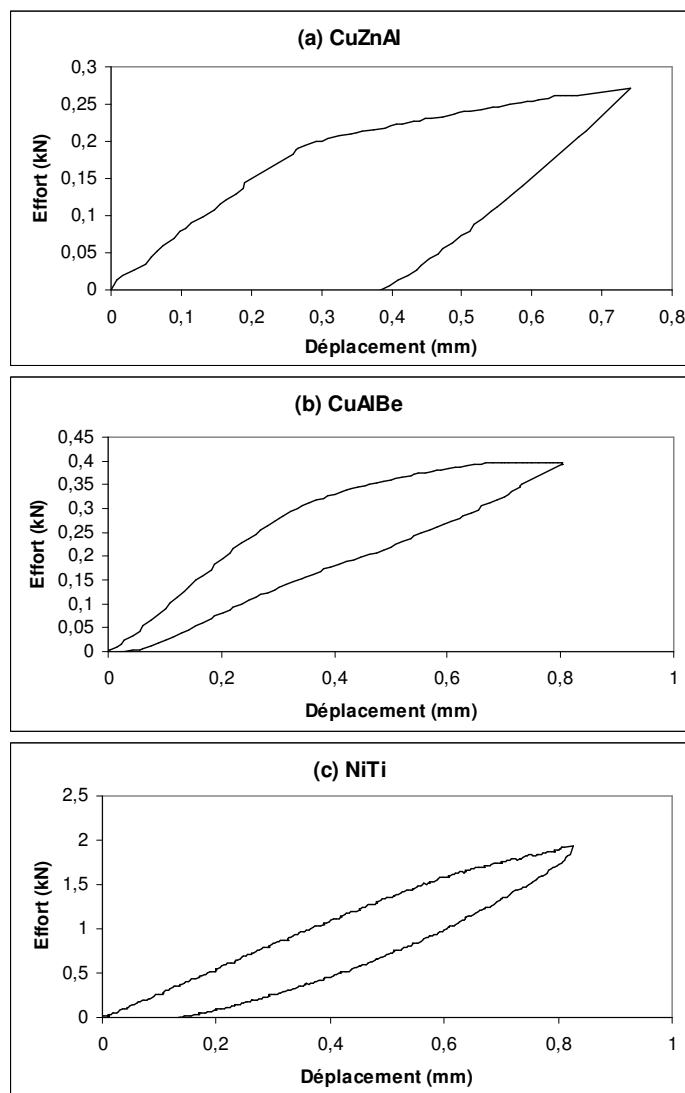
L'analyse d'images permet d'obtenir les champs de déplacement et de déformation sur l'ensemble de l'éprouvette. A l'image du processus utilisé pour une mesure de déformation avec un extensomètre, on définit une zone d'analyse autour du trou. Dans la mesure où le système permet de suivre l'évolution des composantes planes de déformation sur l'éprouvette, il est alors possible de vérifier la répartition du champ de déformation et notamment son homogénéité ou hétérogénéité.

### 4.3.4 Résultats

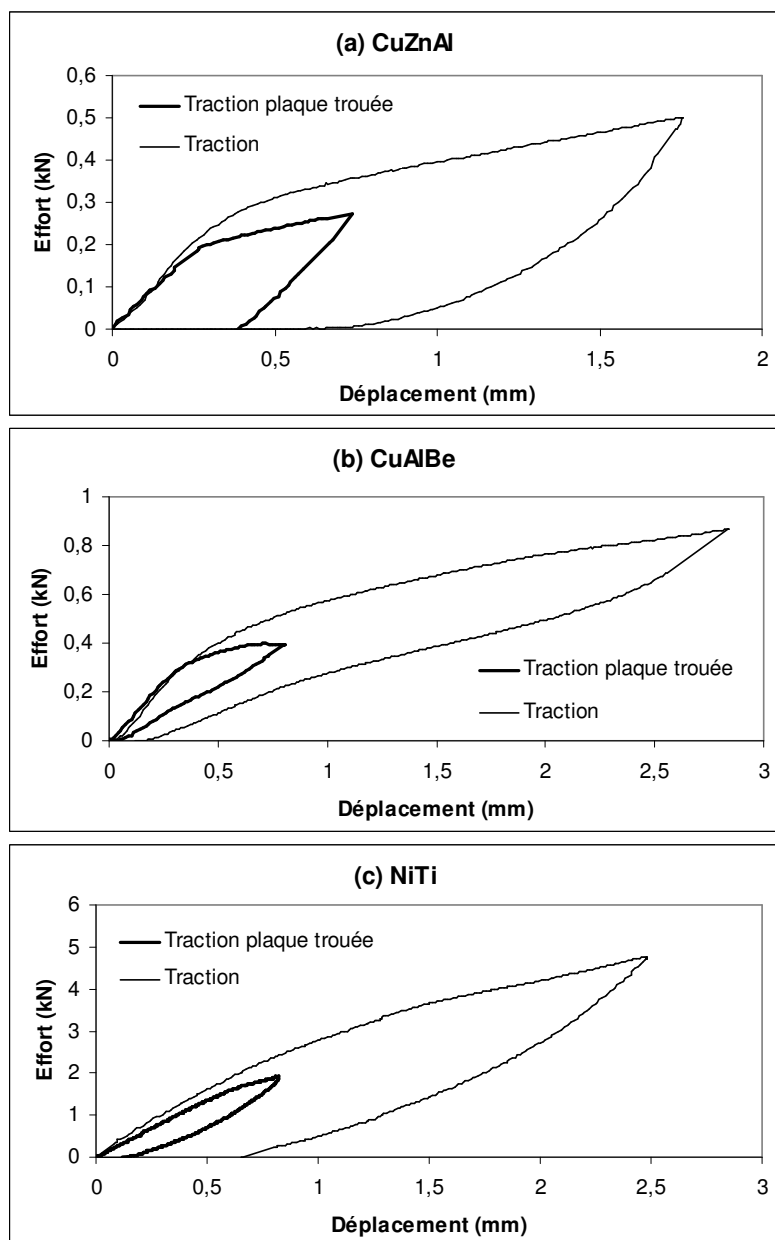
En utilisant le déplacement de la traverse mobile de la machine d'essai à l'extrémité de l'éprouvette en fonction de l'effort appliqué, on obtient les courbes de traction en termes d'effort-déplacement suivantes pour chaque matériau (cf figure 4.7).

Afin d'évaluer l'influence du trou sur la plaque, on peut comparer directement les réponses en traction d'une bande vierge et d'une bande trouée en termes d'effort-déplacement (cf figure 4.8).

Le résultat de l'analyse d'images effectuée sur les essais de traction s'exprime en termes des composantes planes d'une mesure de déformation de type Green-Lagrange :  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$  et  $E_{xy}$ . Ainsi, on obtient la répartition des isovaleurs de telle ou telle composante. Dans le cas des matériaux testés, les isovaleurs expérimentales de la composante  $E_{yy}$  seront comparées à celles obtenues par simulation dans la partie validation du chapitre concernant la validation numérique.



**Fig. 4.7** : Courbe effort-déplacement essai de traction sur bande trouée : (a) CuZnAl, (b) CuAlBe et (c) NiTi



**Fig. 4.8** : Comparaison des courbes réponses en traction sur bande trouée et traction sur bande vierge : (a) CuZnAl, (b) CuAlBe et (c) NiTi

## 4.4 Essai de gonflement

Généralement utilisé dans l'étude du formage des matériaux ductiles, l'essai de gonflement est considéré comme un essai majeur parmi les procédures de mesure des propriétés mécaniques des matériaux de faible épaisseur. Il permet notamment de déterminer :

- les modules élastiques,
- la limite d'élasticité,
- la contrainte à la rupture,
- les contraintes résiduelles.

Dans le contexte de films minces, l'essai de gonflement présente deux avantages par rapport à un essai de traction. Tout d'abord, la taille et la fragilité des échantillons sont des facteurs sensibles à l'alignement dans les mors lors d'un essai de traction. De plus, l'usinage d'une géométrie spécifique des éprouvettes pour l'essai de traction engendre souvent des amorces de fissure. L'essai de gonflement n'est pas confronté à ces problèmes. Par ailleurs, cet essai permet de déterminer le comportement des matériaux pour des déformations beaucoup plus importantes que dans le cas de l'essai de traction.

Toutefois, la manipulation expérimentale de gonflement mise en oeuvre pour ce travail ne permet pas d'atteindre des données telles que la contrainte à la rupture ou les contraintes résiduelles.

### 4.4.1 Principe

On soumet une plaque d'épaisseur  $e$ , encadrée sur son pourtour, à la pression unilatérale d'un fluide (cf figure 4.9) et on étudie le comportement de la plaque. En particulier, on cherche à déterminer la relation  $P = f(h)$  liant la pression  $P$  appliquée par le fluide à la hauteur  $h$  de la déformée de la plaque. Ainsi, on peut effectuer cet essai aussi bien sur des matériaux fragiles que ductiles. Cette étude se limitera à des plaques circulaires.

Toutefois, l'essai de gonflement est plus difficile à analyser au point de vue théorie qu'un essai de traction. Plusieurs modèles permettant l'analyse de la déflexion d'une plaque soumise à une pression hydrostatique existent. S'appuyant sur des conditions limites et des formes de plaque gonflée spécifiques, il en résulte des modèles comportementaux différents.

### 4.4.2 Dispositif expérimental

Le dispositif utilisé pour les essais de gonflement hydraulique a été développé au LMARC par le J-F. Michel [MIC02]. Simple dans sa conception, il est constitué d'un bloc matrice, d'un serre-flan, d'un portique de maintien du capteur de déplacement au centre de la plaque et d'un groupe hydraulique permettant la mise sous pression de la cavité (cf figure 4.9). Un capteur de pression placé dans le circuit hydraulique donne la pression du fluide sous le flan.

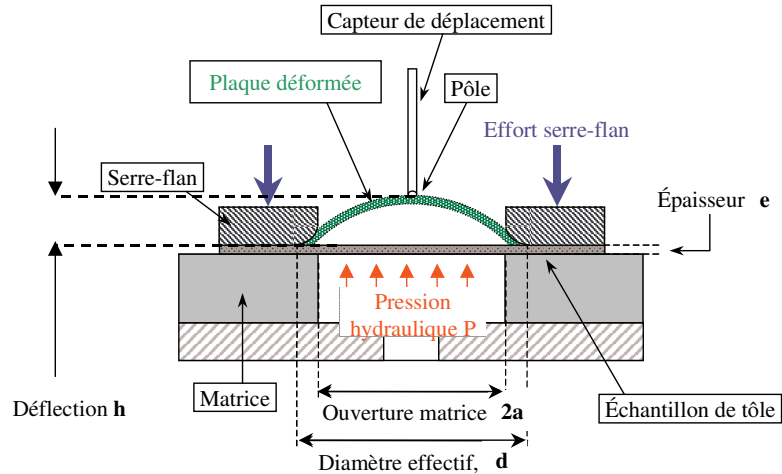


Fig. 4.9 : Principe de l'essai de gonflement

La machine d'essai est équipée d'un capteur de déplacement positionné au centre de la plaque et mesurant la hauteur de gonflement. Ce capteur donne directement la déflexion maximale de la plaque. L'acquisition des données est gérée par une centrale de type SPIDER 8 (cf figure 4.10).

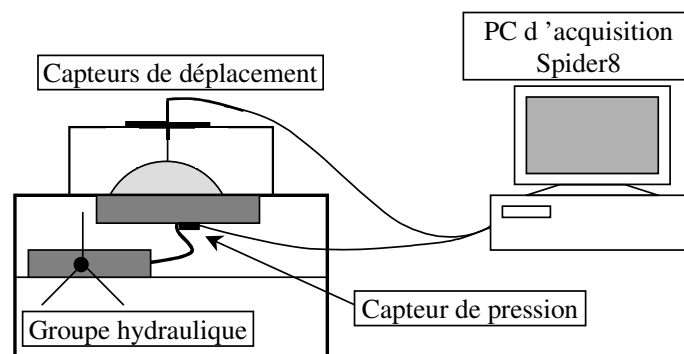


Fig. 4.10 : Système d'acquisition de données pour l'essai de gonflement

Le diamètre du serre-flan utilisé est égal à 55 mm. La mise en place du serre-flan est la partie la plus délicate de l'essai. Le serrage des écrous de maintien pouvant engendrer des efforts de flexion dans le flan, une déformation initiale indésirable peut être observée. Un serrage en étoile permet de diminuer voire de supprimer cet inconvénient.

Les essais ont été réalisés à la température  $T = 302^{\circ}K$ .

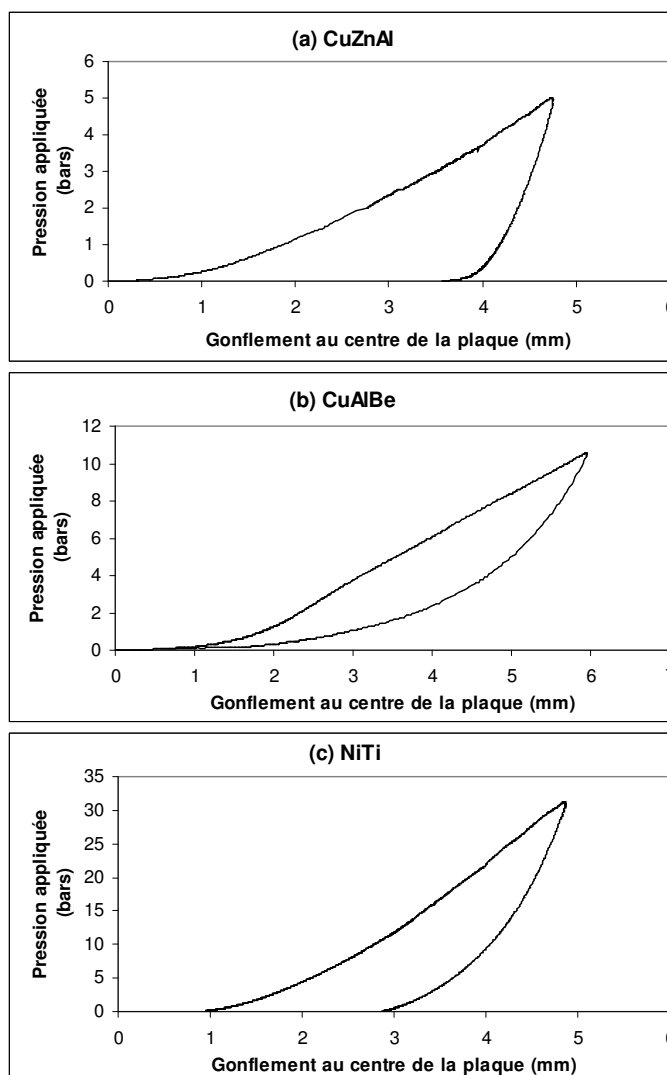
#### 4.4.3 Modèle analytique

L'annexe A présente la formulation analytique du gonflement des plaques. Pour établir le modèle géométrique, plusieurs hypothèses simplificatrices sont utilisées [HIL50]. Le matériau étant supposé isotrope, les déformations circonférentielles et tangentiels au pôle sont identiques. La forme de la calotte est supposée sphérique, c'est pourquoi tout point de la plaque aura une trajectoire en arc de cercle au cours du gonflement. La plaque testée étant de

faible épaisseur, une modélisation de type plaque est envisageable. On utilise l'interprétation géométrique donnée figure (A.3) de l'annexe A.

#### 4.4.4 Résultats

En suivant le principe exposé auparavant, la figure (4.11) donne l'évolution du gonflement au centre de la plaque, encore appelé pôle, en fonction de la pression appliquée pour les différents matériaux présentés au début de ce chapitre.



**Fig. 4.11 :** Essai de gonflement de plaque pour différents matériaux : (a) CuZnAl, (b) CuAlBe et (c) NiTi

#### 4.5 Identification des paramètres matériaux

Dans la perspective de la simulation des essais "structures" i.e. l'essai de gonflement et l'essai de traction sur plaque trouée, les paramètres du matériau sont directement identifiés

à partir de la réponse en traction.

#### 4.5.1 Cas des modèles RLT

Les différents paramètres nécessaires à la simulation numérique sont :  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $\gamma_\Sigma$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a$ ,  $\Delta s_0$ ,  $s_0$ ,  $M_s^0$  et  $A_s^0$ .

Le comportement élastique des différents échantillons testés étant supposé isotrope, le module d'Young  $E$  est déterminé à partir d'un essai de traction à une température  $T$  connue pour chaque essai.

La valeur du coefficient de Poisson est choisie selon la valeur classique utilisée dans la littérature pour chaque matériau.

La masse volumique  $\rho$  est déterminée par une loi des mélanges.

La déformation de transformation maximale  $\gamma_\Sigma$  (en cisaillement) et le paramètre  $a$  représentant la dissymétrie traction-compression sont obtenus à partir des relations :

$$\begin{cases} \gamma_\Sigma(1+a) = \gamma_t \\ \gamma_\Sigma(1-a) = \gamma_c \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $\gamma_t$  et  $\gamma_c$  sont respectivement la déformation de transformation maximale en traction et en compression. Compte tenu de la difficulté de réaliser des essais en compression sur nos éprouvettes, nous avons utilisé un rapport  $k$  entre les contraintes seuils en traction ( $t$ ) et en compression ( $c$ ). Ces contraintes vérifient les relations suivantes ( $\sigma_{Yam}|_{z=0}(T) = \sigma_{am}^S$  et  $\sigma_{Yma}|_{z=1}(T) = \sigma_{ma}^S$ ) :

$$(\sigma_{am}^S)^t \cdot \gamma_t = (\sigma_{am}^S)^c \cdot \gamma_c \quad \text{et} \quad (\sigma_{ma}^S)^t \cdot \gamma_t = (\sigma_{ma}^S)^c \cdot \gamma_c \quad (4.2)$$

Les valeurs classiques de  $k$  correspondant au cas des matériaux massifs sont définies par les relations suivantes :

$$k = \frac{(\sigma_{am}^S)^c}{(\sigma_{am}^S)^t} = \frac{(\sigma_{ma}^S)^c}{(\sigma_{ma}^S)^t} \quad (4.3)$$

Le tableau (4.2) regroupe les valeurs de  $k$  pour différents types d'AMF.

	<i>CuZnAl</i>	<i>CuAlBe</i>	<i>NiTi</i>
<i>k</i>	1,33	1,22	1,5

**Tab. 4.2** : Rapport des contraintes seuils en compression et en traction pour différents types de matériaux massifs [REJ00]

Les relations (4.2) et (4.3) permettent alors d'établir directement la relation suivante :



$$k = \frac{\gamma t}{\gamma_c} \quad (4.4)$$

Cette dernière relation, combinée avec la relation (4.1) permet de déterminer les valeurs  $\gamma_\Sigma$  et  $a$  nécessaires à la simulation (cf tableau 4.3) tels que :

$$a = \frac{k - 1}{k + 1} \quad (4.5)$$

	<i>CuZnAl</i>	<i>CuAlBe</i>	<i>NiTi</i>
<i>a</i>	0,14	0,1	0,2

**Tab. 4.3** : Valeur de la dissymétrie traction-compression pour différents types de matériaux

Les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  relatifs à l'écrouissage sont également identifiés à partir de la courbe réponse en traction.

La valeur des paramètres  $\Delta s_0$ ,  $s_0$ ,  $M_s^0$  et  $A_s^0$  est déterminée à partir des contraintes seuils de début de transformation directe  $\sigma_{am}^S$  et inverse  $\sigma_{ma}^S$  et des variations des ces contraintes seuils avec la température respectivement  $C_m$  et  $C_a$  pour les transformations martensitique et austénitique, variations obtenues en effectuant des essais de traction à différentes températures [BOU01a] :

$$\begin{cases} C_m = \frac{d\sigma_{am}^S}{dT} = \rho \frac{\Delta s_0 - s_0}{\gamma_\Sigma(1+a)} \\ C_a = \frac{d\sigma_{ma}^S}{dT} = \rho \frac{\Delta s_0 + s_0}{\gamma_\Sigma(1+a)} \\ \sigma_{am}^S = \frac{d\sigma_{am}^S}{dT} (T - M_s^0) \\ \sigma_{ma}^S = \frac{d\sigma_{ma}^S}{dT} (T - A_s^0) \end{cases} \quad (4.6)$$

Ces relations permettent donc d'écrire :

$$\begin{cases} \Delta s_0 = \frac{\gamma_\Sigma(1+a)}{2\rho} (C_m + C_a) \\ s_0 = \frac{\gamma_\Sigma(1+a)}{2\rho} (C_a - C_m) \\ M_s^0 = T - \frac{\sigma_{am}^S}{C_m} \\ A_s^0 = T - \frac{\sigma_{ma}^S}{C_a} \end{cases} \quad (4.7)$$

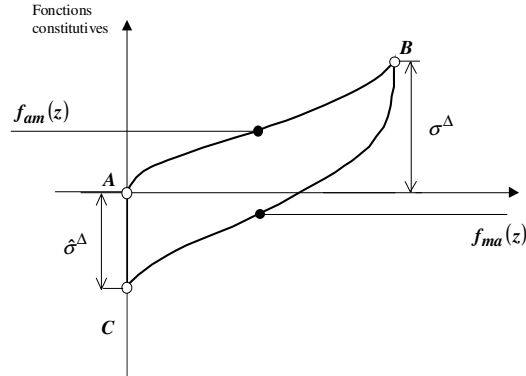
En outre, le modèle *RLT* nécessite également la connaissance de  $\Delta u_0$  et  $u_0$ , lesquels sont accessibles directement en résolvant le système suivant [ROG93] :

$$\begin{cases} M_s^0 = \frac{\Delta u_0 - u_0}{\Delta s_0 - s_0} \\ A_s^0 = \frac{\Delta u_0 + u_0}{\Delta s_0 + s_0} \end{cases} \quad (4.8)$$

Notons que l'unité utilisée pour les paramètres  $\Delta s_0$ ,  $s_0$ ,  $\Delta u_0$  et  $u_0$  est le  $J.kg^{-1}.\text{°}K^{-1}$ .

### 4.5.2 Cas des modèles présentant une forte dépendance à l'histoire

Les différents paramètres nécessaires à la simulation numérique sont :  $E$ ,  $\nu$ ,  $\gamma_\Sigma$ ,  $a$ ,  $\sigma_{Y_{am}}|_{z=0}(T)$ ,  $\sigma^\Delta$ ,  $\hat{\sigma}^\Delta$  et  $n$ .



**Fig. 4.12** : Identification des paramètres matériau : cas des modèles représentant une forte dépendance à l'histoire

$E$ ,  $\nu$ ,  $\gamma_\Sigma$ ,  $a$  sont identifiés en suivant la méthode précédente.

$\sigma_{Y_{am}}|_{z=0}(T)$  est la contrainte de début de transformation martensitique.

$n \in [0, 4]$  est un paramètre matériau permettant de préciser la fonction de la fraction volumique de martensite  $f(z)$  vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  permettant de définir les fonctions d'écrouissage  $f_{am}(z)$  et  $f_{ma}(z)$  (cf paragraphe Variables d'histoire et boucles internes du chapitre 3).

$\sigma^\Delta$  représente la variation de la grandeur cinétique pour la transformation directe (cf figure 4.12).

$\hat{\sigma}^\Delta$  est la différence de la grandeur cinétique entre une charge et décharge complète.

### 4.5.3 Résultats de l'identification des paramètres

En exploitant les courbes de réponse en traction pour chacun des matériaux introduits auparavant, les méthodes d'identification précédentes permettent d'obtenir les paramètres utilisés pour la simulation numérique (cf tableaux 4.4, 4.5 et 4.6).

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_\Sigma$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (°K)	$A_s^0$ (°K)
16,5	0,3	7700	0,06	0,05	0,08	0,14	26,54	4,88	232	285

**Tab. 4.4** : Paramètres matériaux CuZnAl

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_\Sigma$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (°K)	$A_s^0$ (°K)
13,5	0,3	6400	0,048	0,038	0,028	0,2	62,62	1,25	256	262

**Tab. 4.5** : Paramètres matériaux NiTi

$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_{Yam} _{z=0}$ (MPa)	$\sigma^\Delta$ (MPa)	$\hat{\sigma}^\Delta$ (MPa)	$\gamma_\Sigma$	$n$	$a$
18,7	0,3	200	430	350	0,07	2	0,1

**Tab. 4.6** : Paramètres matériaux CuAlBe

## 4.6 Recalage des paramètres pour la modélisation en transformations finies

La plupart des modèles développés pour la superélasticité des AMF sont basés sur un formalisme petites perturbations et leurs paramètres sont identifiés directement dans cette hypothèse (l'identification paramétrique corrige dans ce cas les erreurs de la modélisation quand les déformations deviennent importantes). Les paramètres du modèle RLT sont identifiés à partir d'un essai de traction pure [BOU00] de même que les paramètres du modèle présentant une forte dépendance à l'histoire.

Cependant, dans le cas d'une analyse en transformations finies, l'utilisation de tels paramètres peut être la source d'erreurs de précision. Désireux de mettre à profit la méthode d'identification mise au point dans le contexte des petites perturbations, la nature axiale de l'essai de traction implique une mesure de déformation tensorielle cumulée logarithmique. Cette mesure peut être utilisée pour éviter une réidentification des paramètres en transformations finies. Ainsi, certains de ces paramètres peuvent être rapidement obtenus à partir de ceux identifiés dans l'hypothèse des petites perturbations en appliquant l'approche suivante.

$\gamma_t$  représentant la déformation de transformation maximale en traction, la mesure de déformation tensorielle cumulée logarithmique entraîne directement une relation reliant  $(\gamma_t)_{PP}$  et  $(\gamma_t)_{TF}$  ( $PP$  et  $TF$  représentant respectivement la déformation de transformation maximale en traction dans le cas des Petites Perturbations et des Transformations Finies) :

$$(\gamma_t)_{TF} = \ln [1 + (\gamma_t)_{PP}] \quad (4.9)$$

On peut remarquer, par ailleurs, que les températures de transformation ne changent pas quelle que soit l'approche utilisée, ce qui signifie que les contraintes de début de transformation ne changent pas non plus. Les autres paramètres du modèle suivent le même principe :

$$\begin{cases} (\Delta u_0)_{TF} = \frac{(\gamma_t)_{TF}}{(\gamma_t)_{PP}} (\Delta u_0)_{PP} & \text{et} & (u_0)_{TF} = \frac{(\gamma_t)_{TF}}{(\gamma_t)_{PP}} (u_0)_{PP} \\ (\Delta s_0)_{TF} = \frac{(\gamma_t)_{TF}}{(\gamma_t)_{PP}} (\Delta s_0)_{PP} & \text{et} & (s_0)_{TF} = \frac{(\gamma_t)_{TF}}{(\gamma_t)_{PP}} (s_0)_{PP} \end{cases} \quad (4.10)$$

$\Delta u_0$  et  $\Delta s_0$  représentant respectivement l'énergie interne et la variation d'entropie.

Ainsi, les paramètres recalculés pour les différents matériaux testés sont donnés dans les tableaux suivants.

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_\Sigma$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (°K)	$A_s^0$ (°K)
16,5	0,3	7700	0,058	0,05	0,08	0,14	25,77	4,66	232	285

**Tab. 4.7** : Paramètres matériaux CuZnAl recalés

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_\Sigma$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (°K)	$A_s^0$ (°K)
13,5	0,3	6400	0,047	0,038	0,028	0,2	61,16	1,22	256	262

**Tab. 4.8** : Paramètres matériaux NiTi recalés

$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_{Yam} _{z=0}$ (MPa)	$\sigma^\Delta$ (MPa)	$\hat{\sigma}^\Delta$ (MPa)	$\gamma_\Sigma$	$n$	$a$
18,7	0,3	200	430	350	0,0676	2	0,1

**Tab. 4.9** : Paramètres matériaux CuAlBe recalés

## 4.7 Conclusion

La base expérimentale obtenue suite à ces différents essais vient compléter les résultats expérimentaux disponibles [ORG96] [ORG98] [BOU01a] qui sont utilisés dans la partie numérique. Ainsi, les essais homogènes comme la traction permettent d'identifier les paramètres des matériaux dont on veut simuler le comportement. Quant aux essais expérimentaux de structure tels que la traction sur des plaques trouées et le gonflement, la comparaison des réponses expérimentales et numériques permet de valider à la fois le modèle mécanique et numérique.

Une identification inverse permettant d'identifier les paramètres du matériau est cours de réalisation. Elle combine les performances d'un algorithme génétique et l'efficacité des méthodes de résolution locale. Ce travail s'inscrit également dans le cadre du développement d'un outil pour la conception optimale de structures intégrant les AMF.



---

## Chapitre 5

# Intégration Numérique

---

La généralisation de l'utilisation des AMF et en particulier leur intégration dans des systèmes adaptatifs et autres structures mécaniques passe par le développement d'outils numériques performants permettant la simulation de leurs comportements micro et macro mécaniques complexes. Ce besoin croissant, initié par les processus de conception, repose avant tout sur une modélisation thermomécanique suffisamment générale, i.e. rendant compte de trajets de chargements thermomécaniques complexes. D'autre part, pour répondre à cette demande plus que jamais d'actualité, de nombreux auteurs ont concentré leurs recherches sur l'aspect implémentation numérique des lois de comportement caractéristiques des AMF.

Parallèlement, les essais expérimentaux se sont perfectionnés et consistent, par exemple, à appliquer des chargements proportionnels et non-proportionnels variés combinant traction/pression interne/torsion sur des tubes en AMF [LIM99]. Avec l'enrichissement des résultats et des procédures expérimentales, l'implémentation précise des modèles AMF constitutifs tridimensionnels au moyen d'algorithmes numériques robustes est devenue envisageable.

On ne reviendra pas sur les différentes approches développées pour la modélisation des AMF et exposées dans la première partie. Par contre, la présente partie s'inscrit dans la continuité de cette revue bibliographique des modèles, elle s'affiche comme un complément et s'intéresse principalement à l'aspect implémentation numérique. Cette courte revue des principaux travaux sur le sujet n'a pas pour prétention d'être complète mais vise davantage à donner une description qualitative des différents schémas numériques utilisés. En outre, l'intégration numérique de lois de comportement propres aux AMF se nourrit évidemment des techniques élaborées notamment pour les matériaux possédant un comportement élastoplastique, similaire à celui des AMF comme nous le verrons par la suite tout du moins lors de la phase de charge. C'est pourquoi, certaines des références allant suivre ne traitent pas spécifiquement du cas des AMF mais s'intéressent à l'implémentation des lois de comportement de matériaux élastoplastiques isotropes.

## 5.1 A propos des schémas d'intégration numérique

Parmi les différentes approches évoquées dans la partie introductive, de nombreux travaux ont révélé que la structure des équations représentant le comportement macroscopique constitutif des AMF est relativement similaire à celle des modèles élastoplastiques classiques indépendants du taux de déformation. Ces modèles s'appuient sur la déformation de transformation comme variable interne, sur une fonction de transformation permettant de déterminer le début de transformation et sur une équation d'évolution pour la déformation de transformation. Une telle structure permet d'appliquer directement toutes les techniques numériques utilisées dans le cas de lois de comportement élastoplastiques indépendantes du taux de déformation. Ainsi, les algorithmes de retour sur la surface de charge conviennent pour l'intégration des modèles élastique-transformation thermomécanique des AMF.

Ce type d'algorithme, largement éprouvé ces dernières années dans le cadre de l'élastoplasticité [MAT94][ORT86], est également appelé algorithme de prédiction élastique - correction plastique. Comme son nom l'indique, le principe consiste à effectuer une prédiction d'un état d'essai purement élastique suivie d'une phase de correction (retour sur la surface de charge) plastique (dans le cas des AMF, il s'agit d'une transformation), laquelle permet d'assurer la continuité du schéma itératif de façon cohérente avec les lois d'écoulement établies. Par ailleurs, l'extension au cas des transformations finies de ces algorithmes a été amplement étudiée. Simo a développé un cadre thermodynamique basé sur le principe de dissipation maximum pour l'étude du comportement élastoplastique en transformations finies [SIM88a] utilisant une décomposition multiplicative du gradient de déformation au sens de Lee [LEE69]. Dans un second volet, il s'est penché sur les aspects numériques de cette modélisation limitant son étude à une fonction de charge de type Von Mises [SIM88b] mais démontrant néanmoins la possibilité d'obtenir une implémentation numérique efficace pour la simulation à plus grande échelle du comportement élastoplastique isotrope. Ce travail fut repris ensuite par Moran et al. qui ont analysé différents aspects de l'implémentation numérique en comparant notamment deux schémas d'intégration [MOR90]. Puis Simo et Meschke ont proposé une extension des travaux de Simo sur le sujet à un format plus général de la plasticité multi-surface [SIM93]. Plus récemment, Xiao et al. ont présenté une théorie de l'élastoplasticité finie combinant une décomposition additive du taux de déformation et multiplicative du gradient de déformation et discutant de l'intérêt du choix d'une mesure de déformation logarithmique [XIA97].

Les algorithmes de retour sur la surface de charge peuvent varier selon la discrétisation adoptée pour l'intégration numérique des équations d'évolution et selon la procédure itérative utilisée pour la résolution de l'ensemble des équations algébriques non-linéaires dans la partie correction. Parmi les algorithmes de retour sur la surface de charge présentés dans la littérature, on peut citer le très utilisé algorithme de retour radial basé sur la règle du mi-point. Ce sujet n'étant pas le centre d'intérêt de notre étude, on peut se reporter à l'ouvrage de référence en la matière [SIM98]. Néanmoins, on peut donner quelques caractéristiques

intéressantes des principaux schémas d'intégration.

La plupart des algorithmes de retour s'appuient sur des règles d'intégration, cas particuliers des règles du trapèze et du mi-point, qui, généralisées convenablement permettent de faciliter la vérification de la condition de cohérence plastique également appelée équation de cohérence. La stabilité de ces algorithmes dans le cas de l'inélasticité a été étudiée par Ortiz et Popov [ORT85] (A-stabilité) puis par Simo et Govindjee [SIM91] (B-stabilité). Il ressort de ces travaux les conclusions suivantes : les stratégies orientées vers l'avant (méthodes explicites) limitent incontestablement le choix des pas de temps du fait des conditions de stabilité. Les stratégies d'intégration arrière (méthodes implicites) assurent quant à elle la stabilité de la solution incrémentale. Une précision supplémentaire peut également être obtenue avec les méthodes implicites ou semi-implicites. L'intégration purement implicite est d'une part inconditionnellement stable à condition que la surface de charge soit convexe, et d'autre part, elle est précise au premier ordre. On montre néanmoins qu'elle peut être plus précise que la méthode semi-implicite lorsque la taille des incréments devient grande [BOU94].

## 5.2 A propos de la modélisation numérique des AMF

En premier lieu, on peut noter, pour tous les modèles unidimensionnels implémentés, l'utilisation systématique d'une discrétisation implicite dite Euler-arrière des relations constitutives pour effectuer l'intégration numérique.

Les précurseurs en matière d'implémentation numérique de modèles constitutifs des AMF furent Brinson et Lammering [BRI93a]. Utilisant des éléments de poutre dans des structures treillis, leurs travaux portent sur l'analyse élément fini du comportement des AMF.

Par la suite, Trochu et Qian [TRO97] ont développé une approche en transformations finies basée sur une formulation lagrangienne réactualisée s'appuyant sur la théorie de la plasticité classique. En séparant respectivement les chargements mécaniques et thermiques, ils ont simulé numériquement la superélasticité et l'effet mémoire au moyen notamment d'éléments finis de poutre géométriquement non-linéaires. Cependant, ce travail s'appuie sur deux critères de type Von-Mises et ne permet donc pas la prise en compte de la dissymétrie traction-compression. Le cas de la décharge n'est pas précisé dans cette étude.

Auricchio et Taylor ont également proposé des travaux concernant la modélisation numérique unidimensionnelle et isotherme des AMF en transformations finies [AUR97a]. Cette modélisation utilise l'approche proposée par Simo, présentée précédemment. Confrontant les résultats numériques de différents essais uniaxiaux tels que la flexion trois ou quatre points à des courbes expérimentales, leur implémentation a été validée [AUR97d][AUR97e]. D'autre part, dans la continuité de ce travail, Auricchio a présenté un modèle de la superélasticité des AMF en transformations finies dérivé de ses études précédentes dans un format approprié pour une analyse 3D [AUR01a]. Plus récemment, Auricchio et Petrini [AUR02] ont proposé



un modèle numérique superélastique en s'appuyant sur le modèle thermomécanique tridimensionnel développé par Souza et al. et décrit au début du chapitre 3. Ce modèle est basé sur une surface de charge unique et implique une forme des boucles internes non conforme aux résultats expérimentaux lors d'un chargement uniaxial complexe.

Parallèlement, Auricchio et Sacco ont exploré les voies de la modélisation numérique unidimensionnelle et isotherme des AMF [AUR97b][AUR97c]. La procédure de retour sur la surface de charge utilisée est originale puisqu'elle nécessite l'introduction de deux états d'essai élastique (prédiction élastique) : le premier est associé à aucune évolution de la transition de phase alors que le second est associé à une évolution complète de la transition. Ce dernier permet de retrouver le domaine d'élasticité de la martensite à la fin de la transformation. Enfin, abordant le problème du couplage thermomécanique des AMF, Auricchio et Sacco [AUR99b] ont proposé une modélisation 1D rendant compte des effets mémoire et d'une réorientation éventuelle en s'appuyant sur un schéma d'intégration implicite.

Comme nous l'avons souligné dans la revue bibliographique des principaux modèles AMF, la plupart des travaux se limitent au cas 1D utilisant une méthode implicite. En ce qui concerne l'implémentation des modèles 3D, cette méthode est plus compliquée à mettre en oeuvre, c'est pourquoi Lagoudas et al. [LAG94] ont proposé un algorithme de retour sur la surface de charge basé sur une discrétisation explicite des relations constitutives. Dans la continuité des travaux proposés par Boyd et Lagoudas [BOY96a], Qidwai et Lagoudas [QID00a] ont testé les performances aussi bien en termes de convergence, que de précision et de temps de calcul du modèle en comparant deux schémas d'intégration différents : un premier schéma explicite et un second implicite pour un critère en J2.

### 5.3 Algorithme de calcul des contraintes

Cette partie s'intéresse à la description incrémentale du comportement superélastique des AMF en transformations finies. A partir des lois constitutives exprimées dans la configuration intermédiaire (cf chapitre 3), on définit les lois incrémentales de la superélasticité. Partant du constat que le formalisme obtenu en transformations finies est voisin de celui des petites perturbations, on peut envisager un schéma de prédiction-corrrection pour le calcul de l'état du matériau à la fin de l'incrément considéré ; l'actualisation du repère tournant étant réalisée à partir de la transformation géométrique.

#### 5.3.1 Définition et propriétés des lois incrémentales

Dans le cadre d'une méthode incrémentale associée au schéma itératif de Newton, l'état du matériau  $({}_{n+1}\underline{\sigma}_q, {}_{n+1}z)$  est déterminé sur chaque incrément à partir de son état à l'incrément convergent précédent  $({}_n\underline{\sigma}_q, {}_nz)$  et du déplacement incrémental  $\Delta\underline{d}_q$  (problème à déplacement imposé). En outre, considérant l'état du matériau défini par  $\underline{\sigma}_q$ , transporté du tenseur des

contraintes de Cauchy par la rotation  $\underline{q}$ , on doit résoudre le problème à déplacement imposé suivant sur chaque intervalle  $[{}_n t, {}_{n+1} t]$  :

$$({}_n \underline{\sigma}_q, {}_n z) + \Delta \underline{d}_q \Rightarrow ({}_{n+1} \underline{\sigma}_q, {}_{n+1} z) \quad (5.1)$$

Pour définir le lien existant a priori entre d'une part, les quantités  ${}_n(\bullet)$  à l'instant  ${}_n t$  i.e. au début de l'incrément et le déplacement incrémental  $\Delta \underline{d}_q$ , et d'autre part les quantités  ${}_{n+1}(\bullet)$  à l'instant  ${}_{n+1} t$  i.e. à la fin de l'incrément (lois incrémentales), on utilise les lois constitutives du matériau. La modélisation du comportement est alors possible moyennant le respect d'un certain nombre de règles. En particulier, lorsque  $\Delta \underline{d}_q \rightarrow 0$ , les lois incrémentales doivent redonner les lois constitutives dont elles sont issues. En outre, les solutions obtenues doivent être stables et suffisamment précises. Finalement, ces lois doivent être objectives i.e. permettre les rotations de corps rigide sans générer de contraintes fictives.

### 5.3.2 Lois incrémentales de la superélasticité en transformations finies

Bref rappel du chapitre 3 : dans la configuration intermédiaire, les lois constitutives sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{d}}_q = \underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\xi}}_q \\ \varphi_{am} \leq 0 & \text{pour la transformation directe} \\ \varphi_{ma} \geq 0 & \text{pour la transformation inverse} \end{cases} \quad (5.2)$$

Où :

$$\begin{cases} \dot{\underline{d}}_q \text{ est la dérivée par rapport au temps du transporté du tenseur des contraintes de Cauchy par la rotation } \underline{q} \\ \underline{\underline{C}}^e \text{ est le tenseur de Hooke généralisé} \\ \dot{\underline{\xi}}_q \text{ est la dérivée par rapport au temps du transporté du tenseur de déformation élastique par la rotation } \underline{q} \end{cases}$$

Et par :

$$\underline{d}_q^{tr} = \gamma_{\Sigma} \underline{N} \dot{z} \quad (5.3)$$

Où  $\underline{N}$  est le tenseur permettant de définir la direction de la transformation considérée :

$$\underline{N} = \begin{cases} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi_{am} & \text{pour la transformation directe } (\dot{z} > 0) \\ \partial_{\underline{\sigma}_q} \kappa & \text{pour la transformation inverse } (\dot{z} < 0) \end{cases} \quad (5.4)$$

Où  $\kappa$  est la fonction pseudo-potential de dissipation définie dans le chapitre 3 et donnée par :

$$\kappa(\underline{\sigma}_q, z; h_{ma}) = \frac{T \underline{d}_q^{tr}}{\|\underline{d}_q^{tr}\|} \underline{\sigma}_q - \Sigma_{ma}(z; h_{ma}) \geq 0$$

Par ailleurs, la décomposition additive dans la configuration intermédiaire du taux de déformation totale  $\dot{\underline{d}}_q$  en une partie élastique et une partie non-élastique associée à la transition de phase s'écrit :

$$\dot{\underline{d}}_q = \dot{\underline{\varepsilon}}_q^e + \dot{\underline{d}}_q^{tr} \quad (5.5)$$

La relation (5.2a) devient alors :

$$\dot{\underline{\sigma}}_q = \underline{\underline{C}}^e (\dot{\underline{d}}_q - \dot{\underline{d}}_q^{tr}) \quad (5.6)$$

En intégrant cette relation entre deux instants  ${}_n t$  et  ${}_{n+1} t$  dans la configuration intermédiaire, on obtient :

$${}_{n+1} \underline{\sigma}_q = {}_n \underline{\sigma}_q + \Delta \underline{\sigma}_q = {}_n \underline{\sigma}_q + \underline{\underline{C}}^e (\Delta \underline{d}_q - \Delta \underline{d}_q^{tr}) \quad (5.7)$$

Où :

$$\Delta \underline{d}_q = \int_{{}_n t}^{{}_{n+1} t} \dot{\underline{d}}_q dt \quad \text{et} \quad \Delta \underline{d}_q^{tr} = \int_{{}_n t}^{{}_{n+1} t} \dot{\underline{d}}_q^{tr} dt \quad (5.8)$$

Ces lois d'évolutions peuvent être intégrées numériquement au moyen de méthodes implicites par le biais de la règle du mi-point généralisée.

### 5.3.3 Règle du mi-point généralisée

Pour les lois constitutives élasto-dissipatives du type de celles établies pour les transitions directe et inverse, le problème qui se pose sur chaque incrément correspondant à deux instants distincts  ${}_n t$  et  ${}_{n+1} t$  est d'intégrer entre ces deux instants la quantité  $\dot{\alpha} h(\sigma)$  avec  $\dot{\alpha} \geq 0$  et  $\sigma = \sigma(t)$ .

Pour cela et dans le cas unidimensionnel, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires qui s'énonce :

Soit  $f$  une fonction scalaire positive continue et  $g$  une fonction scalaire continue alors :

$$\exists {}_{n+\beta} t \in [{}_n t, {}_{n+1} t] / \int_{{}_n t}^{{}_{n+1} t} f(t) g(t) dt = g({}_{n+\beta} t) \int_{{}_n t}^{{}_{n+1} t} f(t) dt, \quad \beta \in [0, 1] \quad (5.9)$$

En effet,  $f$  étant positive et  $g$  continue, on a :

$$\text{Min}(g) \cdot \int_{n^t}^{n+1^t} f(t) dt \leq \int_{n^t}^{n+1^t} f(t) g(t) dt \leq \text{Max}(g) \cdot \int_{n^t}^{n+1^t} f(t) dt \quad (5.10)$$

En posant  $\dot{\alpha} = f$  et  $h = g$ , il vient alors :

$$\int_{n^t}^{n+1^t} \dot{\alpha} \cdot h(\sigma(t)) dt = h(\sigma_{(n+\beta t)}) \int_{n^t}^{n+1^t} \dot{\alpha} dt = \Delta\alpha \cdot h(\sigma_{(n+\beta t)}) \quad , \quad \beta \in [0, 1] \quad (5.11)$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_{(n+\beta t)} = \sigma_{(n^t + \beta\Delta t)} = \beta \sigma_{=n} \sigma + \beta\Delta\sigma \\ \Delta t = n+1^t - n^t \\ \Delta\sigma = n+1\sigma - n\sigma \end{cases} \quad (5.12)$$

Ce qui correspond au schéma d'intégration dit du "mi-point".

Toutefois, le théorème des valeurs intermédiaires, sur lequel repose ce schéma, n'est plus valable dans le cas de fonctions à variables tensorielles. Pourtant, ce schéma reste le plus utilisé. Sa généralisation à une formulation en référentiel tournant donne :

$$\int_{n^t}^{n+1^t} \dot{\alpha} \cdot h(\underline{\sigma}_q) dt = \Delta\alpha \cdot h(\underline{\sigma}_{q_{(n+\beta t)}}) \quad (5.13)$$

La méthode du mi-point généralisée est inconditionnellement B-stable pour  $\beta \geq 0,5$  [SIM91](Elle est A-stable sur le même intervalle [ORT85]) et sa précision est optimale pour  $\beta = 0,5$  (intégration semi-implicite)[SIM91][ORT85]. Néanmoins, pour des incréments importants, cette précision tend vers celle d'une intégration purement implicite  $\beta = 1$  [BOU94], qui présente l'avantage d'être particulièrement simple à mettre en oeuvre. C'est cette dernière qui a été utilisée dans ce qui suit.

### 5.3.4 Schéma prédicteur-correcteur

Comme annoncé en introduction, il est possible d'utiliser un algorithme de retour sur la surface de charge de type prédiction élastique suivie éventuellement d'une correction inélastique i.e. superélastique dans le cas des AMF. L'étape de prédiction élastique suppose que l'incrément de déformation de transformation est nulle. L'étape de correction superélastique vise à restaurer la cohérence si l'état élastique prédit est en dehors ou en dedans de la surface de transformation selon que l'on se trouve en transformation directe ou inverse ( $\varphi_{am} > 0$  ou  $\varphi_{ma} < 0$ ) en utilisant comme conditions initiales les valeurs de l'état du matériau à l'issue de la prédiction élastique.

### Prédiction élastique

Dans cette étape, le comportement du matériau est supposé uniquement élastique c'est pourquoi l'évolution des composantes relatives à la transition de phase n'est pas prise en compte. Les lois incrémentales s'écrivent alors :

$${}_{n+1}\underline{\sigma}_q^* = {}_n \underline{\sigma}_q + \underline{\underline{C}}^e \Delta \underline{d}_q; \quad {}_{n+1}z^* = {}_n z \quad (5.14)$$

Où  ${}_{n+1}\underline{\sigma}_q^*$  représente l'état de contrainte d'essai élastique et  $\Delta \underline{d}_q$  est l'incrément de déformation totale.

Dans le cas des transformations finies, la principale difficulté consiste à évaluer  $\Delta \underline{d}_q$  en intégrant  $\underline{\dot{d}}_q = {}^T \underline{q} \underline{D} \underline{q} = {}^T \underline{R} \underline{D} \underline{R}$  entre  ${}_n t$  et  ${}_{n+1} t$ . En se référant au développement présenté dans le cadre hyperélastique (cf chapitre 2), on établit que les composantes de  $\underline{M}$  dans  $C_{n+\beta}$  sont celles de  $\Delta \underline{d}_q = {}^T \underline{R}_{n+\beta} (\Delta t \underline{D}_{n+\beta}) \underline{R}_{n+\beta}^T = \underline{R}_{n+\beta} \underline{M} \underline{R}_{n+\beta}$  dans la configuration  $C_{In}$  par rapport au référentiel tournant.

Si la transformation du milieu est décrite par rapport à un repère attaché à une direction matérielle, ce qui est le cas de cette étude (cf chapitre 2), l'objectivité incrémentale du schéma d'intégration est assurée pour toute valeur de  $\beta$ . Cette dernière va juste permettre de jouer sur la précision du schéma qui est associée au choix du chemin d'interpolation et à la règle du mi-point généralisée. Dans notre cas, l'intégration numérique effectuée pour l'évaluation de  $\Delta \underline{d}_q$  utilise la valeur  $\beta = 1/2$ , laquelle permet d'obtenir une précision à l'ordre 2 [HUG80][PIN83].

Si l'état d'essai élastique permet de vérifier respectivement  $\varphi_{am}({}_{n+1}\underline{\sigma}_q^*, {}_n z; h_{am}^*) \leq 0$  (transformation  $a \rightarrow m$ ) ou  $\varphi_{ma}({}_{n+1}\underline{\sigma}_q^*, {}_n z; h_{ma}^*) \geq 0$  en s'assurant que l'état d'essai élastique n'a pas complètement traversé la surface de charge (transformation  $m \rightarrow a$ ), alors le critère de transformation est vérifié : l'état d'essai élastique  ${}_{n+1}\underline{\sigma}_q^*$  est donc l'état final de l'incrément. On peut noter que  $h_{am}^*$  et  $h_{ma}^*$  représentent l'ensemble des variables d'histoire obtenues jusqu'à l'instant  ${}_n t$ .

Sinon, les conditions de charge-décharge sont violées et l'état d'essai élastique est alors utilisé comme condition initiale lors de la phase de correction.

Ces tests nécessitent de s'assurer préalablement d'une part que l'essai est dans la phase de charge ou de décharge et d'autre part que la condition limite de transformation n'est pas atteinte ( $z = 1$  pour  $a \rightarrow m$  et  $z = 0$  pour  $m \rightarrow a$ ).

### Correction superélastique

L'état d'essai élastique violant le critère de transformation (respectivement directe et inverse), il faut corriger cet état pour restaurer les conditions de cohérence inélastique en effectuant un retour sur la surface de charge :

$${}_{n+1}\underline{\sigma}_q = {}_{n+1}\underline{\sigma}_q^* - \underline{\underline{C}}^e \Delta \underline{d}_q^{tr} \quad (5.15)$$

Où  ${}_{n+1}\underline{\sigma}_q^*$  représente l'état de contrainte d'essai élastique.

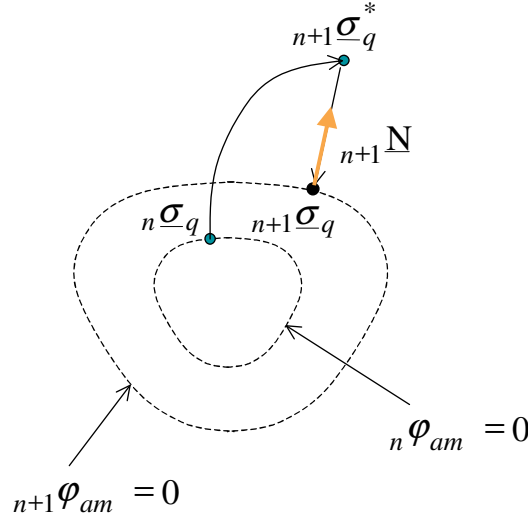
Le problème consiste alors à intégrer la loi d'évolution de transformation  $\underline{d}_q^{tr}$  sur l'intervalle  $[{}_n t, {}_{n+1} t]$  en utilisant la relation (5.3) :

$$\Delta \underline{d}_q^{tr} = \int_{{}_n t}^{{}_{n+1} t} \underline{\dot{d}}_q^{tr} dt = \int_{{}_n t}^{{}_{n+1} t} \gamma_{\Sigma} \underline{N}(\underline{\sigma}_q) \dot{z} dt \quad (5.16)$$

La règle du mi-point généralisée permet alors d'écrire :

$$\Delta \underline{d}_q^{tr} = \gamma_{\Sigma} \Delta z \underline{N}({}_{n+\beta}\underline{\sigma}_q) \quad (5.17)$$

En résumé, l'état de contrainte de prédiction élastique  ${}_{n+1}\underline{\sigma}_q^*$  est ramenée sur la surface de charge en fin d'incrément par la projection suivant la direction de la normale  $\underline{N}({}_{n+\beta}\underline{\sigma}_q)$  (cf figure 5.1), la variation de fraction volumique de martensite  $\Delta z$  étant obtenue en forçant les conditions de seuil en fin d'incrément.

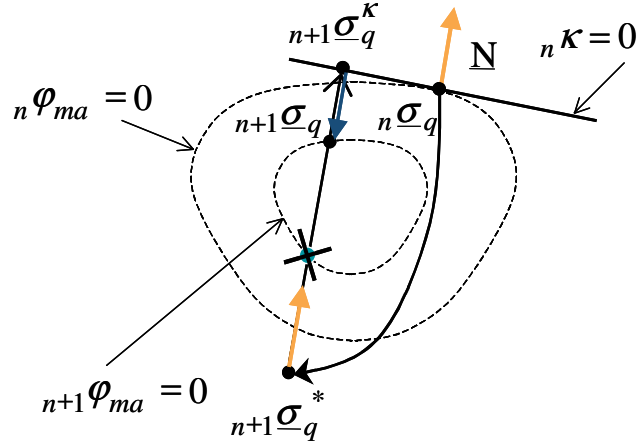


**Fig. 5.1** : Interprétation géométrique du retour sur la surface de charge par la méthode du mi-point généralisée (cas  $\beta = 1$ ) pour la transformation directe : unicité de la solution

Une illustration de ce schéma est donnée dans le cas d'une intégration implicite ( $\beta = 1$ ) sur la figure (5.1).

### Cas particulier de la décharge : Correction inélastique intermédiaire

Lors de la transformation inverse, le domaine élastique caractérisant le lieu des transformations inverses possibles n'étant pas convexe (cf cadre thermodynamique chapitre 3), une étape de correction intermédiaire est nécessaire pour assurer l'unicité de la solution calculée.



**Fig. 5.2 :** Etape de correction intermédiaire pour le calcul de l'état de contrainte lors de la transformation inverse : non-unicité de la solution

En guise d'illustration, la figure (5.2) représente le cas où la prédiction élastique  $n+1\sigma_q^*$  traverse complètement la surface de charge relative à la transformation inverse. Ainsi, on peut venir corriger sur la surface  $n+1\varphi_{ma}(n+1\sigma_q, n+1z; h_{ma}^*) = 0$  en deux points. L'idée consiste donc à calculer un état de contrainte inélastique par projection de l'état de contrainte d'essai élastique sur le domaine convexe défini par  $n\kappa(n\sigma_q, n z; h_{ma}^*) \geq 0$  :

$$n+1\sigma_q^\kappa = n+1\sigma_q^* - \gamma_\Sigma \Delta z^\kappa \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{N}} \quad (5.18)$$

$\Delta z^\kappa$  est déterminé en forçant la condition  $\kappa(n+1\sigma_q^\kappa, n z; h_{ma}^*) = 0$  :

$$\Delta z^\kappa = \frac{{}^T \underline{\underline{N}} n+1\sigma_q^* - \Sigma_{ma}(n z; h_{ma}^*)}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{\underline{N}} \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{N}}} = n+1z^\kappa - n z \quad (5.19)$$

Ou encore :

$$n+1z^\kappa = n z + \frac{{}^T \underline{\underline{N}} n+1\sigma_q^* - \Sigma_{ma}(n z; h_{ma}^*)}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{\underline{N}} \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{N}}} \quad (5.20)$$

Cette correction intermédiaire permet de "rapprocher" l'état de contraintes de l'état recherché sur la surface  $\varphi_{ma}(n+1\sigma_q, n+1z; h_{ma}^*) = 0$  :

$$n+1\sigma_q = n+1\sigma_q^\kappa - \gamma_\Sigma (n+1z^\kappa - n z) \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{N}} \quad (5.21)$$

Pour remonter aux contraintes de Cauchy, on utilise le fait que les composantes de  $\underline{\sigma}_q$  et de  $\underline{\sigma}$  sont les mêmes dans le repère tournant.

L'approche proposée est intégrée dans un contexte de coque spatiale en prenant en compte les spécificités de l'élément fini de coque à trois noeuds à interpolation mixte des composantes

de cisaillement transverse introduit dans le chapitre 2. En adaptant les lois incrémentales aux cas des coques i.e. en considérant l'hypothèse de contrainte normale nulle  $\sigma_{33} = 0$ , il est alors possible de simuler le comportement de structures AMF de très faible épaisseur.

### 5.3.5 Intégration implicite

Appelée également méthode d'Euler arrière, elle correspond à la valeur  $\beta = 1$ .

Pour alléger les notations et généraliser la procédure de calcul considérée, identique pour la transformation directe et inverse, on désignera par la suite la fonction de charge par  $\varphi(\underline{\sigma}_q, z)$ . De plus, les quantités  ${}_0(\bullet)$  désigneront désormais les quantités connues en début d'incrément tandis que les quantités  $(\bullet)$  représenteront les quantités inconnues à la fin de l'incrément.

#### Algorithme de calcul pour la transformation directe

Pour la transformation directe, la direction de l'écoulement est donnée par  $\underline{N} = \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi$ . On linéarise le système suivant en utilisant la méthode de Newton :

$$\begin{cases} \underline{d}_q^{tr} - {}_0\underline{d}_q^{tr} - \gamma_{\Sigma} (z - {}_0z) \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi = 0 \\ \varphi(\underline{\sigma}_q, z) = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

Ce qui donne au voisinage de la solution à l'itération  $(k+1)$  pour un problème piloté par les déformations :

$$\begin{cases} -\delta(\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k+1)} + \gamma_{\Sigma} \Delta z^{(k)} \partial_{\underline{\sigma}_q \underline{\sigma}_q}^2 \varphi^{(k)} \delta(\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} + \gamma_{\Sigma} \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} + r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)} = 0 \\ \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \delta(\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} + \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_z \varphi^{(k)} + r_{\varphi}^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Où  $r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)}$  et  $r_{\varphi}^{(k)}$  désignent les résidus à l'itération  $(k)$  :

$$\begin{aligned} r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)} &= -(\underline{d}_q^{tr})^{(k)} + {}_0\underline{d}_q^{tr} + \gamma_{\Sigma} \Delta z^{(k)} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \\ r_{\varphi}^{(k)} &= \varphi((\underline{\sigma}_q)^{(k)}, z^{(k)}; h_{am}) - \varphi^{(k)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

En utilisant la variation de la relation (5.15), on obtient d'autre part :

$$\delta(\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} = -\underline{\underline{C}}^e \delta(\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k+1)} \quad (5.25)$$

La substitution de (5.23)a dans (5.25) donne :

$$\delta(\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} = -\underline{\underline{C}}^e \left[ \gamma_{\Sigma} \Delta z^{(k)} \partial_{\underline{\sigma}_q \underline{\sigma}_q}^2 \varphi^{(k)} \delta(\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} + \gamma_{\Sigma} \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} + r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)} \right]$$

D'où :



$$- (\underline{\underline{C}}^e)^{-1} \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} = \gamma_\Sigma \Delta z^{(k)} \partial_{\underline{\sigma}_q \underline{\sigma}_q}^2 \varphi^{(k)} \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} + \gamma_\Sigma \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} + r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)}$$

Soit encore :

$$\left[ (\underline{\underline{C}}^e)^{-1} + \gamma_\Sigma \Delta z^{(k)} \partial_{\underline{\sigma}_q \underline{\sigma}_q}^2 \varphi^{(k)} \right] \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} + \gamma_\Sigma \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} + r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)} = 0 \quad (5.26)$$

Ainsi, les équations (5.23)b et (5.26) permettent d'écrire le problème sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)} \\ r_\varphi^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{(k)} & \gamma_\Sigma \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \\ \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} & \partial_z \varphi^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} \\ \delta z_{(k)}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Où  $\underline{\underline{G}}^{(k)} = (\underline{\underline{C}}^e)^{-1} + \gamma_\Sigma \Delta z^{(k)} \partial_{\underline{\sigma}_q \underline{\sigma}_q}^2 \varphi^{(k)}$  est un tenseur d'ordre quatre défini positif puisqu'il est la somme du tenseur défini positif  $(\underline{\underline{C}}^e)^{-1}$  et du tenseur donné par  $\gamma_\Sigma \Delta z^{(k)} \partial_{\underline{\sigma}_q \underline{\sigma}_q}^2 \varphi^{(k)}$  lequel est également défini positif dans le cas le plus général ( $\varphi = \varphi_{am}$  est convexe et  $\gamma_\Sigma \Delta z > 0$ ).

Ce système peut être réduit de la façon suivante pour calculer  $z$ .

La substitution de (5.26) dans (5.23)b donne :

$$-{}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \left( \underline{\underline{G}}^{(k)} \right)^{-1} \left[ \gamma_\Sigma \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} + r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)} \right] + \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_z \varphi^{(k)} + r_\varphi^{(k)} = 0$$

Et donc :

$$\delta z_{(k)}^{(k+1)} \left[ \gamma_\Sigma {}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \left( \underline{\underline{G}}^{(k)} \right)^{-1} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} - \partial_z \varphi^{(k)} \right] = -{}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \left( \underline{\underline{G}}^{(k)} \right)^{-1} r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)} + r_\varphi^{(k)}$$

Et finalement :

$$\delta z_{(k)}^{(k+1)} = \frac{r_\varphi^{(k)} - {}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \left( \underline{\underline{G}}^{(k)} \right)^{-1} r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)}}{\gamma_\Sigma {}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \left( \underline{\underline{G}}^{(k)} \right)^{-1} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} - \partial_z \varphi^{(k)}} \quad (5.28)$$

A partir de l'incrément de fraction volumique de martensite  $\delta z_{(k)}^{(k+1)}$ , on peut alors actualiser l'état de contrainte  $(\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k)}$ , l'état de déformation de transformation  $(\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k)}$  et la fraction volumique de martensite  $z^{(k)}$  pour l'itération  $(k+1)$  :

$$\begin{aligned} (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} &= (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k)} + \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} \\ (\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k+1)} &= (\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k)} + \delta (\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} &= z^{(k)} + \delta z_{(k)}^{(k+1)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

L'algorithme détaillé dans la Table (5.1) décrit un schéma de résolution itératif général appliqué pour chaque incrément de chargement et chaque itération du schéma de résolution de l'équilibre global de la structure.

<p>1. Pour <math>k = 0</math>, <math>(\underline{\sigma}_q)^{(k)} = {}_0\underline{\sigma}_q</math> <math>(\underline{d}_q^{tr})^{(k)} = {}_0\underline{d}_q^{tr}</math> <math>z^{(k)} = {}_0z</math></p> <p>2. Prédiction élastique : Calcul de l'état et du critère d'essai élastique</p> $\underline{\sigma}_q^* = {}_0\underline{\sigma}_q + \underline{C}^e : \Delta \underline{d}_q$ $\varphi^* = \varphi(\underline{\sigma}_q^*, {}_0z; h_{am}^*)$ <p>3. Vérification charge - valeur limite <math>{}_0z = 1</math> non atteinte Traitement des variables d'histoire</p> <p>4. Vérification du critère d'essai élastique</p> <p>Si <math> \varphi^*  \leq 0</math> alors</p> $\underline{\sigma}_q = \underline{\sigma}_q^* \quad \text{et} \quad z = {}_0z \quad \text{et} \quad h_{am} = h_{am}^* \quad \text{EXIT}$ <p>Sinon</p> $\varphi^{(k)} = \varphi^* \quad \text{Transformation directe GOTO 5}$ <p>Fin</p> <p>5. Correction superélastique : Calcul de l'incrément de fraction volumique de martensite</p> $\delta z_{(k)}^{(k+1)} = \frac{r_{\varphi}^{(k)} - {}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} (\underline{C}^{(k)})^{-1} r_{\underline{d}_q^{tr}}^{(k)}}{\gamma_{\Sigma} {}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} (\underline{C}^{(k)})^{-1} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} - \partial_z \varphi^{(k)}}$ <p>Calcul de <math>\delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)}</math> et <math>\delta (\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k+1)}</math></p> <p>6. Actualisation des variables d'état et des variables internes</p> $(\underline{\sigma}_q)^{(k+1)} = (\underline{\sigma}_q)^{(k)} + \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)}$ $z^{(k+1)} = z^{(k)} + \delta z_{(k)}^{(k+1)}$ $(\underline{d}_q^{tr})^{(k+1)} = (\underline{d}_q^{tr})^{(k)} + \delta (\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k+1)}$ <p>6. Test de convergence</p> <p>Si <math> \varphi^{(k+1)}  &lt; \text{Tolérance}</math> alors</p> <p>Test sur l'équilibre global</p> <p>Sinon</p> <p>Itération suivante <math>k = k + 1</math></p> <p>GOTO 5</p> <p>Fin</p>
--

**Tab. 5.1** : Algorithme implicite - transformation directe

### Algorithme de calcul pour la transformation inverse

Dans ce cas, la direction de l'écoulement donnée par  $\underline{N} = \partial_{\underline{\sigma}_q} \kappa = \frac{\underline{d}_q^{tr}}{\|\underline{d}_q^{tr}\|}$  est constante à la décharge, c'est pourquoi  $\partial_{\underline{\sigma}_q} \underline{N} = 0$ . L'état du matériau à corriger est celui obtenu suite à la correction inélastique intermédiaire présenté précédemment. En utilisant la variation de la relation (5.21), on obtient alors :

$$\delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} = -\gamma_{\Sigma} \delta z_{(k)}^{(k+1)} \underline{\underline{C}}^e \underline{N}$$

En utilisant la méthode de Newton pour résoudre la relation  $\varphi(\underline{\sigma}_q, z; h_{ma}) = 0$ , on peut écrire au voisinage de la solution à l'itération  $(k+1)$  :

$$\partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} + \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_z \varphi^{(k)} = -\varphi^{(k)}$$

En combinant les deux dernières relations, on obtient :

$$-\gamma_{\Sigma} \delta z_{(k)}^{(k+1)T} \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \underline{\underline{C}}^e \underline{N} + \delta z_{(k)}^{(k+1)} \partial_z \varphi^{(k)} = -\varphi^{(k)}$$

Et finalement :

$$\delta z_{(k)}^{(k+1)} = \frac{\varphi^{(k)}}{\gamma_{\Sigma} {}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \underline{\underline{C}}^e \underline{N} - \partial_z \varphi^{(k)}} \quad (5.30)$$

A partir l'incrément de fraction volumique de martensite  $\delta z_{(k)}^{(k+1)}$ , on peut alors actualiser l'état de contrainte  $(\underline{\sigma}_q)^{(k)}$ , l'état de déformation de transformation  $(\underline{d}_q^{tr})^{(k)}$  et la fraction volumique de martensite  $z^{(k)}$  pour l'itération  $(k+1)$  :

$$\begin{aligned} (\underline{\sigma}_q)^{(k+1)} &= \underline{\sigma}_q^{\kappa} + \delta (\underline{\sigma}_q)_{(k)}^{(k+1)} \\ (\underline{d}_q^{tr})^{(k+1)} &= (\underline{d}_q^{tr})^{(k)} + \gamma_{\Sigma} \delta z_{(k)}^{(k+1)} \underline{N} \\ z^{(k+1)} &= z^{(k)} + \delta z_{(k)}^{(k+1)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

L'algorithme d'implémentation détaillé dans la Table (5.2) décrit un schéma de résolution itératif général appliqué pour chaque incrément de chargement et chaque itération du schéma de résolution de l'équilibre global de la structure.

### 5.3.6 Procédure de résolution implicite d'un modèle de comportement $J_3$ de la superélasticité des AMF

La résolution du problème constitutif incrémental et l'évaluation d'un opérateur tangent cohérent (présenté par la suite) nécessitent l'inversion du tenseur  $\underline{\underline{G}}$  d'ordre 4 introduit précédemment :

1.	Pour $k = 0$ ,	$(\underline{\sigma}_q)^{(k)} = {}_0\underline{\sigma}_q$	$(\underline{d}_q^{tr})^{(k)} = {}_0\underline{d}_q^{tr}$	$z^{(k)} = {}_0z$
2.	Prédiction élastique : Calcul de l'état et du critère d'essai élastique			
		$\underline{\sigma}_q^* = {}_0\underline{\sigma}_q + \underline{C}^e : \Delta \underline{d}_q$		
		$\varphi^* = \varphi(\underline{\sigma}_q^*; {}_0z; h_{ma}^*)$		
3.	Vérification décharge - valeur limite ${}_0z = 0$ non atteinte			
	Traitement des variables d'histoire			
	Critère de "non-traversement" de la surface de charge			
4.	Vérification du critère d'essai élastique			
	Si	$ \varphi^*  \leq 0$	alors	
		$\underline{\sigma}_q = \underline{\sigma}_q^*$	et	$z = {}_0z$ et $h_{ma} = h_{ma}^*$ EXIT
	Sinon			
		$\varphi^{(k)} = \varphi^*$	Transformation inverse	GOTO 5
	Fin			
5.	Correction intermédiaire : Calcul de l'état intermédiaire par projection			
	de l'état d'essai élastique sur le domaine convexe défini par $\kappa({}_0\underline{\sigma}_q; {}_0z; h_{ma}) \geq 0$			
		$z^\kappa = {}_0z + \frac{{}^T N \underline{\sigma}_q^* - \Sigma_{ma}({}_0z; h_{ma})}{\gamma_\Sigma {}^T N \underline{C}^e N}$		
		$\underline{\sigma}_q^\kappa = \underline{\sigma}_q^* - \gamma_\Sigma (z^\kappa - {}_0z) \underline{C}^e N$		
6.	Correction superélastique : Calcul de l'incrément de fraction volumique de martensite			
		$\delta z_{(k)}^{(k+1)} = \frac{\varphi^{(k)}(z^{(k)}; h_{ma})}{\gamma_\Sigma {}^T \partial_{\underline{\sigma}_q} \varphi^{(k)} \underline{C}^e N - \partial_z \varphi^{(k)}}$		
7.	Actualisation des variables d'état et des variables internes			
		$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \delta z_{(k)}^{(k+1)}$		
		$(\underline{\sigma}_q)^{(k+1)} = \underline{\sigma}_q^\kappa - \gamma_\Sigma (z^{(k+1)} - z^\kappa) \underline{C}^e N$		
		$(\underline{d}_q^{tr})^{(k+1)} = (\underline{d}_q^{tr})^{(k)} + \delta (\underline{d}_q^{tr})_{(k)}^{(k+1)}$		
8.	Test de convergence			
	Si	$ \varphi^{(k+1)}  < Tolérance$	alors	
		Test sur l'équilibre global		
	Sinon			
		Itération suivante $k = k + 1$		
		GOTO 5		
	Fin			

Tab. 5.2 : Algorithme implicite - transformation inverse

$$\underline{\underline{G}} = (\underline{\underline{C}}^e)^{-1} + \gamma_\Sigma \Delta z \partial_{\underline{\underline{\sigma}}_q}^2 \varphi \quad (5.32)$$

Où  $\underline{\underline{C}}^e$  est le tenseur de Hooke généralisé,  $\Delta z$  est la variation de fraction volumique de martensite sur l'incrément et  $\partial_{\underline{\underline{\sigma}}_q}^2 \varphi$  la dérivée seconde de la fonction d'écoulement.

La difficulté à inverser ce tenseur réside notamment dans le calcul de la dérivée seconde qui devient rapidement compliqué lorsque la fonction d'écoulement dépend de  $J_3$ . Dans cette perspective, il a été prouvé dans [PAL01] que l'hypothèse d'un comportement isotrope entraîne une formule de représentation pour  $\underline{\underline{G}}^{-1}$  qui est une combinaison linéaire de produits tensoriels diadiques ( $\otimes$ ) et carrés ( $\boxtimes$  est le produit carré de tenseurs défini pour tous tenseurs du second ordre par :  $(\underline{\underline{A}} \boxtimes \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{AC}}^T \underline{\underline{B}}$ ). Toutes les opérations tensorielles requises pour calculer les coefficients de la formule adoptée sont réalisées sous une forme explicite.

## 5.4 Calcul opérateur tangent cohérent

Afin de conserver la convergence du schéma de Newton pour la résolution de l'équilibre global, Simo et Taylor [SIM85][SIM86] ont préconisé l'utilisation d'un opérateur tangent cohérent avec l'algorithme de calcul des contraintes, dans notre cas un algorithme de type Euler-arrière.

Cet opérateur tangent cohérent  $\underline{\underline{C}}^{\text{tan}}$ , associé à la configuration intermédiaire tournée  $C_{I_n}$  (cf chapitre 2) et au couple conjugué mesure de déformation tensorielle cumulée  $\underline{\underline{d}}_q$ - tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_q$  peut être défini par :

$$d\underline{\underline{\sigma}}_q = \underline{\underline{C}}^{\text{tan}} : d(\underline{\underline{d}}_q) \quad (5.33)$$

### 5.4.1 Transformation directe

Dans ce cas, les lois incrementales sont données par les relations :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_q = {}_0\underline{\underline{\sigma}}_q + \underline{\underline{C}}^e \Delta \underline{\underline{d}}_q - \underline{\underline{C}}^e (\underline{\underline{d}}_q^{\text{tr}} - {}_0\underline{\underline{d}}_q^{\text{tr}}) \\ \underline{\underline{d}}_q^{\text{tr}} = {}_0\underline{\underline{d}}_q^{\text{tr}} + \gamma_\Sigma \Delta z \partial_{\underline{\underline{\sigma}}_q} \varphi \end{cases} \quad (5.34)$$

En différenciant ces deux relations, on obtient :

$$\begin{cases} d\underline{\underline{\sigma}}_q = \underline{\underline{C}}^e d(\underline{\underline{d}}_q) - \underline{\underline{C}}^e d(\underline{\underline{d}}_q^{\text{tr}}) \\ d(\underline{\underline{d}}_q^{\text{tr}}) = \gamma_\Sigma dz \partial_{\underline{\underline{\sigma}}_q} \varphi + \gamma_\Sigma \Delta z \partial_{\underline{\underline{\sigma}}_q}^2 \varphi d\underline{\underline{\sigma}}_q \end{cases} \quad (5.35)$$

En remplaçant la deuxième équation dans la première, il vient :

$$d\sigma_q = \underline{\underline{C}}^e d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma \underline{\underline{C}}^e \left[ dz \partial_{\sigma_q} \varphi + \Delta z \partial_{\sigma_q \sigma_q}^2 \varphi d\sigma_q \right] \quad (5.36)$$

Et en regroupant les termes :

$$\left[ \underline{\underline{I}} + \gamma_\Sigma \Delta z \underline{\underline{C}}^e \partial_{\sigma_q \sigma_q}^2 \varphi \right] d\sigma_q = \underline{\underline{C}}^e d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma dz \underline{\underline{C}}^e \partial_{\sigma_q} \varphi \quad (5.37)$$

Soit encore :

$$\underline{\underline{C}}^e \left[ (\underline{\underline{C}}^e)^{-1} + \gamma_\Sigma \Delta z \partial_{\sigma_q \sigma_q}^2 \varphi \right] d\sigma_q = \underline{\underline{C}}^e d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma dz \underline{\underline{C}}^e \partial_{\sigma_q} \varphi \quad (5.38)$$

Expression dans laquelle on retrouve le tenseur  $\underline{\underline{G}} = (\underline{\underline{C}}^e)^{-1} + \gamma_\Sigma \Delta z \partial_{\sigma_q \sigma_q}^2 \varphi$ . On peut alors écrire :

$$d\sigma_q = (\underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{C}}^e d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma dz (\underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{C}}^e \partial_{\sigma_q} \varphi \quad (5.39)$$

En notant que  $\underline{N} = \partial_{\sigma_q} \varphi$  et en simplifiant, on obtient :

$$d\sigma_q = \underline{\underline{G}}^{-1} d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma dz \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{N} \quad (5.40)$$

Pour déterminer  $dz$ , on utilise l'équation de cohérence que l'on différencie :

$$d\varphi(\sigma_q, z) = 0 \quad (5.41)$$

D'où :

$$d\varphi(\sigma_q, z) = \partial_{\sigma_q} \varphi : d\sigma_q + \partial_z \varphi dz = {}^T \underline{N} d\sigma_q + \partial_z \varphi dz = 0 \quad (5.42)$$

En utilisant la relation (5.40), on peut écrire :

$${}^T \underline{N} \left[ \underline{\underline{G}}^{-1} d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma dz \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{N} \right] + \partial_z \varphi dz = 0$$

En regroupant les termes en  $dz$ , on obtient la relation :

$$dz \left[ \gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{N} - \partial_z \varphi \right] = {}^T \underline{N} \underline{\underline{G}}^{-1} d(\underline{d}_q)$$

Et finalement :

$$dz = \frac{{}^T \underline{N} \underline{G}^{-1} d(\underline{d}_q)}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{G}^{-1} \underline{N} - \partial_z \varphi} \quad (5.43)$$

Pour déterminer l'expression de l'opérateur tangent cohérent, on utilise à nouveau l'expression de  $d\underline{\sigma}_q$  donnée par (5.40), il vient :

$$d\underline{\sigma}_q = \underline{G}^{-1} d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma \frac{{}^T \underline{N} \underline{G}^{-1} d(\underline{d}_q)}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{G}^{-1} \underline{N} - \partial_z \varphi} \underline{G}^{-1} \underline{N}$$

Soit encore :

$$d\underline{\sigma}_q = \underline{C}^{\text{tan}} d(\underline{d}_q) \quad (5.44)$$

Où  $\underline{C}^{\text{tan}}$  est l'opérateur tangent cohérent pour la transformation directe donné par :

$$\underline{C}^{\text{tan}} = \underline{G}^{-1} - \frac{\gamma_\Sigma \underline{G}^{-1} \underline{N} {}^T [\underline{G}^{-1} \underline{N}]}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{G}^{-1} \underline{N} - \partial_z \varphi} \quad (5.45)$$

#### 5.4.2 Transformation inverse

Dans ce cas, les lois incrementales sont données par les relations :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_q = {}_0 \underline{\sigma}_q + \underline{C}^e \Delta \underline{d}_q - \underline{C}^e ({}^t \underline{d}_q - {}_0 \underline{d}_q) \\ {}^t \underline{d}_q = {}_0 \underline{d}_q + \gamma_\Sigma \Delta z \underline{N} = {}_0 \underline{d}_q + \gamma_\Sigma (z - z^\kappa + z^\kappa - {}_0 z) \underline{N} \end{cases} \quad (5.46)$$

En différenciant ces deux relations et en notant que pour la transformation inverse  $\partial_{\underline{\sigma}_q} \underline{N} = 0$ , on obtient :

$$\begin{cases} d\underline{\sigma}_q = \underline{C}^e d(\underline{d}_q) - \underline{C}^e d({}^t \underline{d}_q) \\ d({}^t \underline{d}_q) = \gamma_\Sigma dz \underline{N} \end{cases} \quad (5.47)$$

En remplaçant la deuxième équation dans la première, il vient :

$$d\underline{\sigma}_q = \underline{C}^e d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma dz \underline{C}^e \underline{N} \quad (5.48)$$

De même que précédemment, pour déterminer  $dz$ , on utilise l'équation de cohérence que l'on différencie :

$$d\varphi(\underline{\sigma}_q, z) = {}^T \underline{N} d\underline{\sigma}_q + \partial_z \varphi dz = 0 \quad (5.49)$$

En utilisant la relation (5.48), on peut écrire :

$${}^T \underline{N} [\underline{C}^e d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma dz \underline{C}^e \underline{N}] + \partial_z \varphi dz = 0$$

Le regroupement des termes en  $dz$  donne alors :

$$dz [\gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{C}^e \underline{N} - \partial_z \varphi] = {}^T \underline{N} \underline{C}^e d(\underline{d}_q)$$

Et finalement :

$$dz = \frac{{}^T \underline{N} \underline{C}^e d(\underline{d}_q)}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{C}^e \underline{N} - \partial_z \varphi} \quad (5.50)$$

L'expression de  $d\underline{\sigma}_q$  donnée par (5.48) permet alors d'obtenir l'expression de l'opérateur tangent cohérent  $\underline{C}^{\text{tan}}$  pour la transformation inverse telle que :

$$d\underline{\sigma}_q = \underline{C}^e d(\underline{d}_q) - \gamma_\Sigma \frac{{}^T \underline{N} \underline{C}^e d(\underline{d}_q)}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{C}^e \underline{N} - \partial_z \varphi} \underline{C}^e \underline{N} = \underline{C}^{\text{tan}} d(\underline{d}_q) \quad (5.51)$$

Avec :

$$\underline{C}^{\text{tan}} = \underline{C}^e - \frac{\gamma_\Sigma \underline{C}^e \underline{N} {}^T [\underline{C}^e \underline{N}]}{\gamma_\Sigma {}^T \underline{N} \underline{C}^e \underline{N} - \partial_z \varphi} \quad (5.52)$$

Dans le cadre d'une approche lagrangienne réactualisée lors de la résolution du problème d'équilibre global, cet opérateur tangent cohérent  $\underline{C}^{\text{tan}}$ , défini dans la configuration tournée  $C_{In}$  et reliant les quantités  $d_{n+1}(\underline{d}_q)$  et  $d_{n+1}\underline{\sigma}_q$  doit être modifié de façon à relier les quantités  $d_{n+1}\underline{S}$  et  $d_{n+1}\underline{E}$  définies dans la configuration de référence  $C_n$ . Le transport de l'opérateur tangent cohérent de la configuration tournée  $C_{In}$  à la configuration de référence  $C_n$  est alors identique à celui effectué dans le chapitre 2 pour l'opérateur tangent élastique.

## 5.5 Validation de la modélisation numérique

Les algorithmes de calcul précédents basés sur la méthode d'intégration implicite ont été implémentés dans le code éléments finis CASTEM 2000.

Ainsi, certains essais élémentaires tels que la traction, la compression et le cisaillement mais également des essais 3D e.g. traction sur plaque trouée et gonflement ont été simulés puis comparés aux résultats expérimentaux afin de valider le modèle proposé. Enfin, un exemple de simulation sur une structure complexe (micropince introduite dans le chapitre 1) est proposé pour souligner les aptitudes du modèle dans des situations plus complexes.



### 5.5.1 Essai de traction

Compte tenu des paramètres matériaux recalés pour une simulation en transformations finies (cf tableaux 5.3, 5.4 et 5.5), les essais de traction ont été simulés afin de vérifier l'influence du recalage. La configuration de l'essai est identique à celle utilisée lors de la simulation en petites perturbations.

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_\Sigma$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (K)	$A_s^0$ (K)
16,5	0,3	7700	0,058	0,05	0,08	0,14	25,77	4,66	232	285

**Tab. 5.3** : Paramètres matériaux CuZnAl recalés

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_\Sigma$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (K)	$A_s^0$ (K)
13,5	0,3	6400	0,047	0,038	0,028	0,2	61,16	1,22	256	262

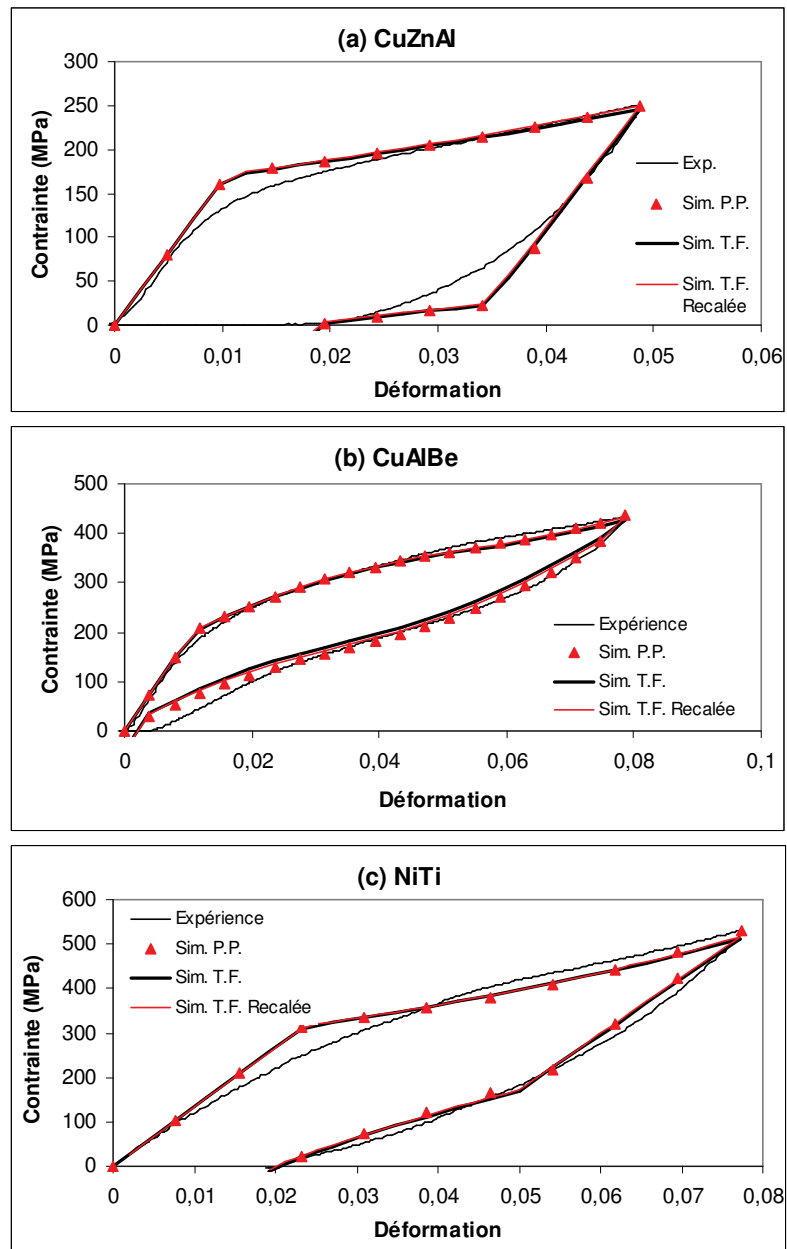
**Tab. 5.4** : Paramètres matériaux NiTi recalés

$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_{Yam} _{z=0}$ (MPa)	$\sigma^\Delta$ (MPa)	$\hat{\sigma}^\Delta$ (MPa)	$\gamma_\Sigma$	$n$	$a$
18,7	0,3	200	430	350	0,0676	2	0,1

**Tab. 5.5** : Paramètres matériaux CuAlBe recalés

### 5.5.2 Essais traction compression

Ce type d'essai vise à mettre en évidence la dissymétrie traction-compression. Les paramètres matériaux du NiTi équiatomique utilisé pour cet essai sont présentés dans le tableau suivant.

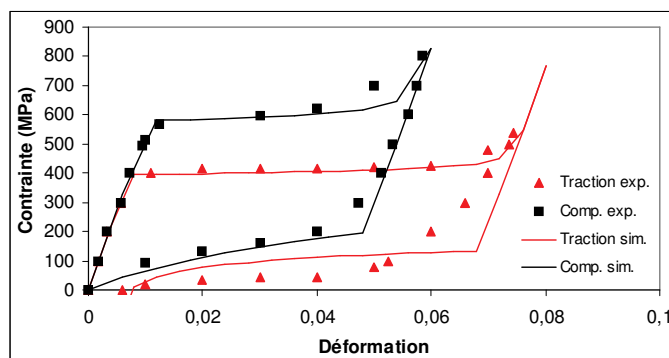


**Fig. 5.3** : Essai de traction - Comparaison expérience / simulation Petites Perturbations / Transformations Finies avec recalage

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{\Sigma}$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (°K)	$A_s^0$ (°K)
55	0,29	6500	0,0535	0,5	0,2	0,189	73	0	280	300

**Tab. 5.6** : Dissymétrie traction/compression - Paramètres matériaux NiTi

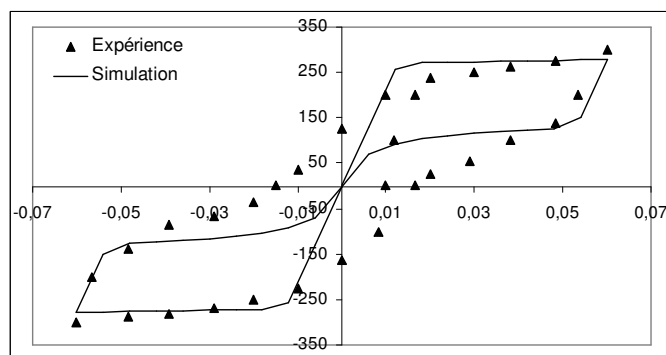
La réponse obtenue est ensuite comparée aux points expérimentaux [ORG96].



**Fig. 5.4** : Dissymétrie traction / compression - Comparaison expérience / simulation [ORG96]

### 5.5.3 Cisaillement

Le matériau utilisé pour cet essai de cisaillement est celui de l'essai de traction-compression. La réponse issue de la simulation numérique est comparée directement aux points expérimentaux [ORG98] sur la figure (5.5).



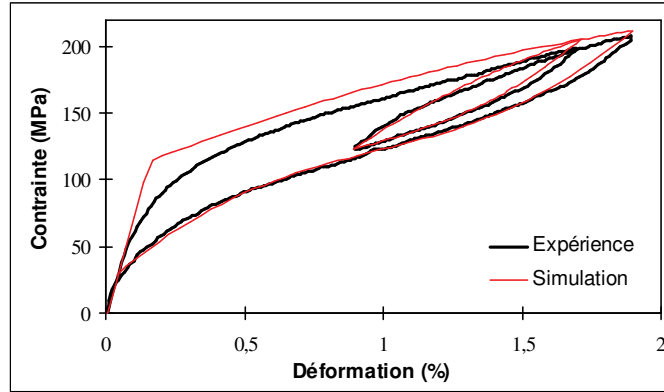
**Fig. 5.5** : Essai de cisaillement - Comparaison expérience [ORG98] / simulation

### 5.5.4 Boucles internes

La modélisation réalisée permet également de simuler le comportement d'un matériau vis à vis des boucles internes, charges ou décharges partielles (en traction sur les figures 5.6 et 5.7). Pour des essais plus complexes, la répartition des contraintes dans la structure n'est pas homogène, ce qui implique des charges et des décharges à des états de contrainte différents.

$E(GPa)$	$\nu$	$\sigma_{Yam} _{z=0} (MPa)$	$\sigma^\Delta (MPa)$	$\hat{\sigma}^\Delta (MPa)$	$\gamma_\Sigma$	$n$	$a$
75	0,3	119	270	300	0,0568	2	0,1

**Tab. 5.7** : Forte dépendance à l'histoire - Paramètres CuAlBe



**Fig. 5.6** : Boucles internes lors d'un essai de traction - Forte dépendance à l'histoire - Cas d'un CuAlBe - Comparaison expérience [BOU01a] / simulation

L'exemple du CuAlBe, dont les paramètres sont donnés dans le tableau précédent, présente une forte dépendance à l'histoire (cf figure 5.6). La courbe issue de la simulation correspond bien à la courbe expérimentale [BOU01a].

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{\Sigma}$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (°K)	$A_s^0$ (°K)
6	0,3	7700	0,0648	5	5	0	20,9	0	275	280

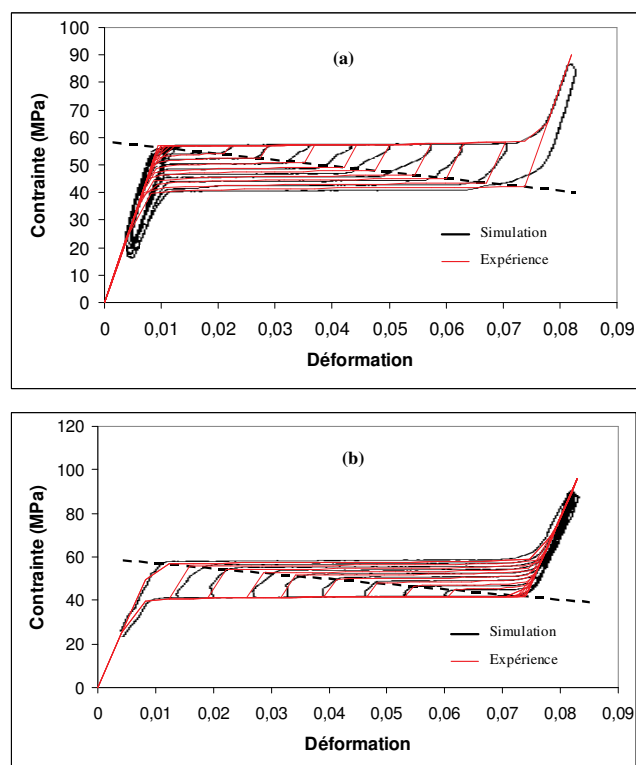
**Tab. 5.8** : Faible dépendance à l'histoire - Paramètres CuZnAl [HUO93]

Le cas du CuZnAl (cf tableau 5.8) est un exemple d'une faible dépendance à l'histoire (cf figure 5.7). On observe les décharges (figure 5.7a) et les charges partielles (figure 5.7b). La comparaison avec des essais expérimentaux présentant plusieurs boucles internes pour une sollicitation 3D serait toutefois plus significative pour confirmer le bon comportement du modèle vis-à-vis des boucles internes qu'un essai de traction avec une seule boucle.

### 5.5.5 Essai de traction sur plaque trouée

Les conditions de symétrie de l'essai permettent de restreindre l'étude à un quart de plaque. Les dimensions et le maillage utilisés pour simuler cet essai sont indiqués sur la figure 5.8. L'essai est réalisé à effort imposé. Le maillage compte 166 éléments de coque à trois noeuds. Cette simulation est réalisée avec 20 incréments pour la charge-décharge. Le tableau suivant (cf tableau 5.9) indique l'épaisseur des éprouvettes pour les matériaux testés. En outre, on utilise les paramètres de la traction simple pour effectuer la simulation sur chaque type de matériau (tableaux 5.3, 5.5 et 5.4).

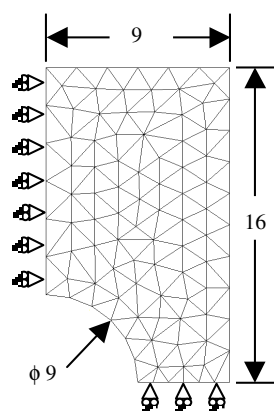
Les réponses obtenues en transformations finies permettent d'apprécier l'effet du recalage par rapport à l'expérience et à la simulation PP (cf figure 5.9). Elles représentent l'évolution du déplacement d'une des extrémités de l'éprouvette en fonction de l'effort appliqué au même endroit.



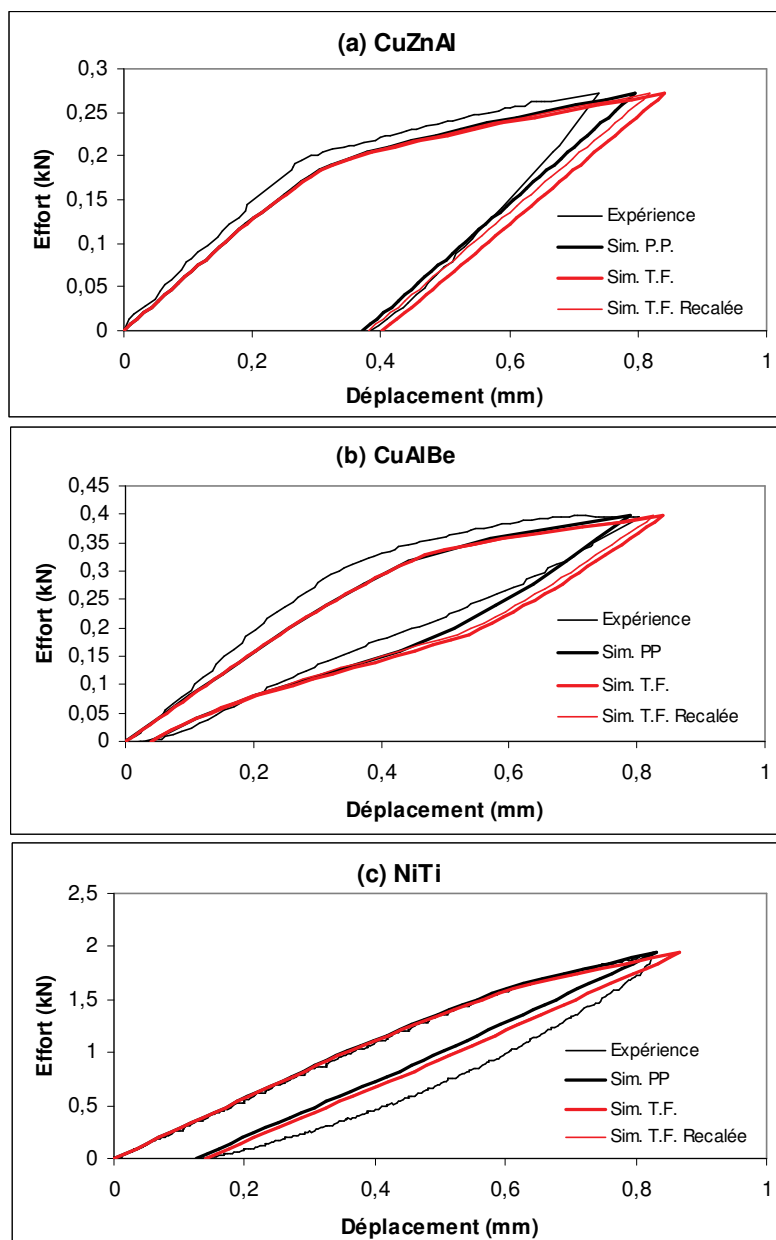
**Fig. 5.7 :** Boucles internes lors d'un essai de traction - Faible dépendance à l'histoire - Cas d'un monocristal de CuZnAl : (a) Décharges partielles (b) Recharges partielles - Comparaison expérience [HUU93] / simulation

	CuZnAl	CuAlBe	NiTi
Epaisseur (mm)	0,1	0,1	0,5

**Tab. 5.9 :** Epaisseur des éprouvettes



**Fig. 5.8 :** Essai de traction sur une plaque trouée : maillage et définition géométrique

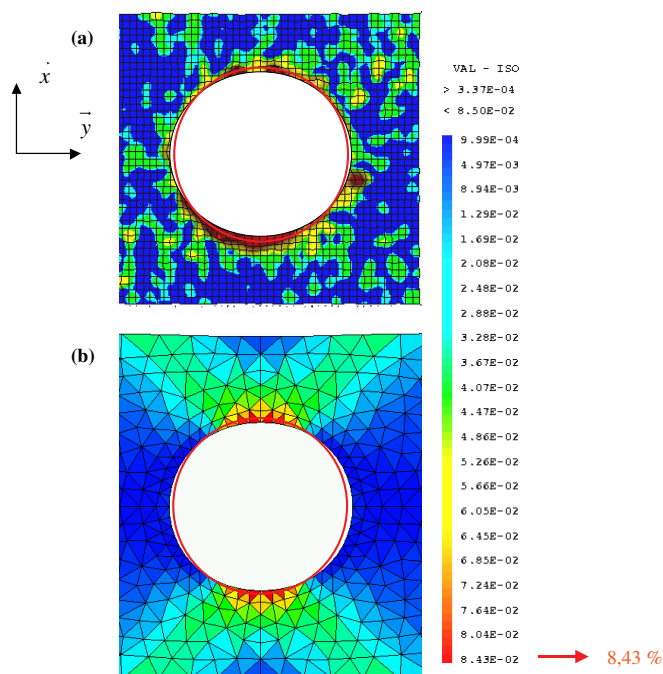


**Fig. 5.9** : Essai de traction sur plaque trouée- Comparaison expérience / simulation Petites Perturbations / Transformations Finies avec recalage

### Répartition des isovaleurs

L'analyse des images, obtenues lors des essais expérimentaux, grâce au logiciel d'analyse d'images Spouch présenté dans le chapitre 4, permet d'obtenir notamment la répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  ( $\vec{y}$  étant la direction de la sollicitation) du tenseur des déformations de Green Lagrange dans la zone d'analyse. Ces résultats peuvent être comparés à la répartition des isovaleurs obtenues avec les simulations numériques correspondantes (cf figures 5.10, 5.11, 5.12).

La zone d'analyse d'images a des dimensions variables selon l'essai pour des raisons de netteté des clichés. Ainsi, l'observation se limite à la zone autour du trou pour le CuZnAl tandis que le CuAlBe et le NiTi présentent des zones d'analyse plus grandes. Sur les figures suivantes, le cercle rouge indique la configuration initiale du trou.

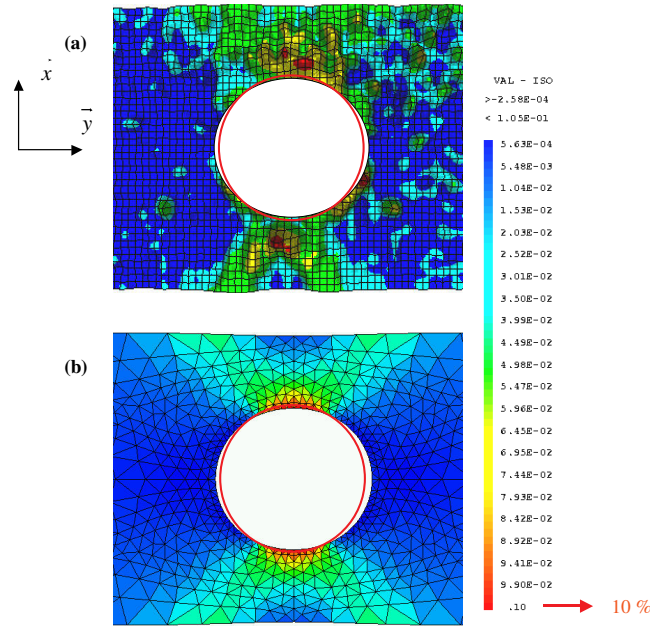


**Fig. 5.10** : Essai de traction sur plaque trouée - Répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  - Cas du CuZnAl - (a) Analyse d'images (b) Simulation

Les simulations numériques permettent effectivement de retrouver la concentration de contraintes autour de la zone du trou. La répartition en "X" des isovaleurs est bien observable dans le cas du CuAlBe et du NiTi mais n'apparaît pas dans le cas du CuZnAl. La netteté des images étant primordiale pour une analyse correcte, il suffit d'une légère modification de la mise au point lors de la précharge de l'éprouvette pour fausser cette analyse.

### Simulation pour différents niveaux de chargement

Afin d'observer la répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  et de la fraction volumique de martensite associée pour des niveaux de chargement plus importants, des simula-



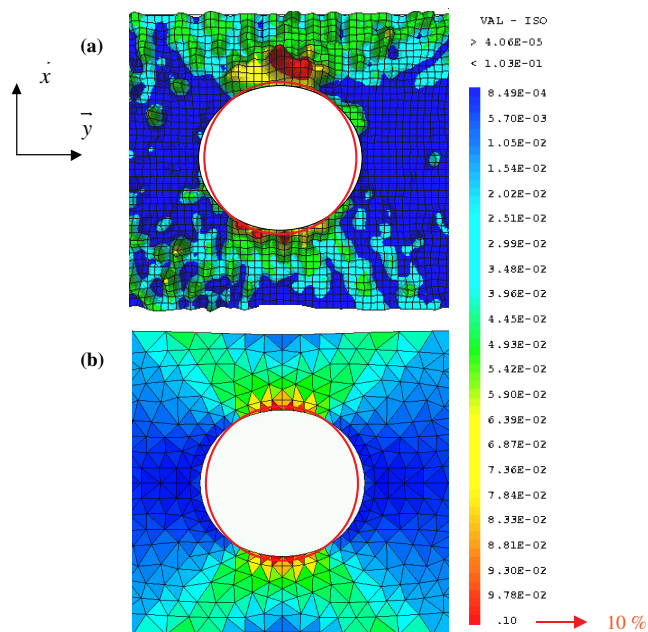
**Fig. 5.11** : Essai de traction sur plaque trouée - Répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  - Cas du CuAlBe - (a) Analyse d'images (b) Simulation

tions ont été effectuées dans le cas du CuAlBe. On relève ainsi des valeurs de  $E_{yy}$  de l'ordre de 17% et 23 % autour du trou.

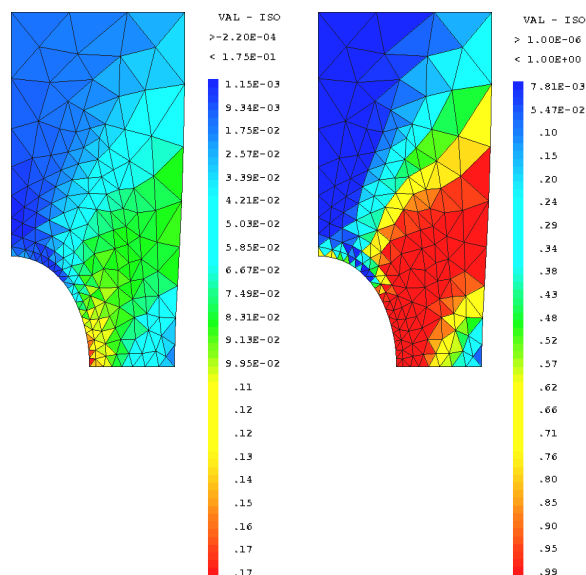
### 5.5.6 Essai de gonflement

Les conditions de symétrie de l'essai permettent de restreindre l'étude à un quart de plaque. Une plaque circulaire encastrée sur son pourtour est soumise à une pression. Le maillage compte 122 éléments de coque à trois noeuds qui comptent 7 points de Gauss dans l'épaisseur. Cette simulation est réalisée avec 200 incréments pour la charge-décharge. Largement décrit dans la partie expérimentale, l'essai de gonflement permet de vérifier le comportement en transformations finies du modèle implanté dans le cas d'une sollicitation équilibrée. Les dimensions et le maillage utilisés pour simuler cet essai sont indiqués sur la figure (5.15). L'épaisseur des différentes plaques utilisées pour la simulation est donnée dans le tableau (5.9). Les paramètres utilisés pour la simulation sont disponibles dans les tableaux (5.3), (5.5) et (5.4).

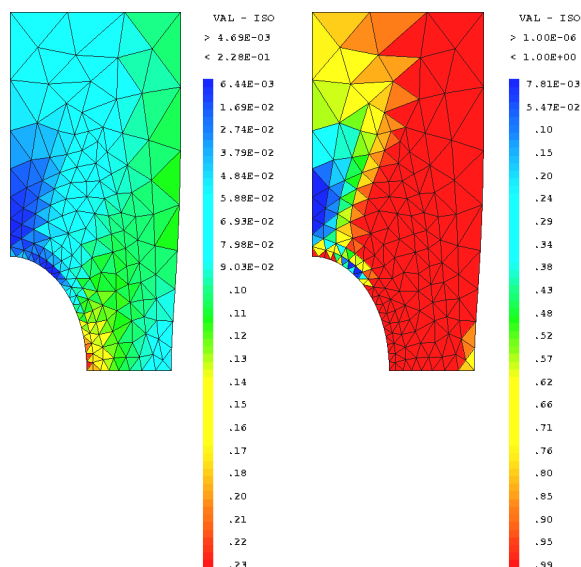




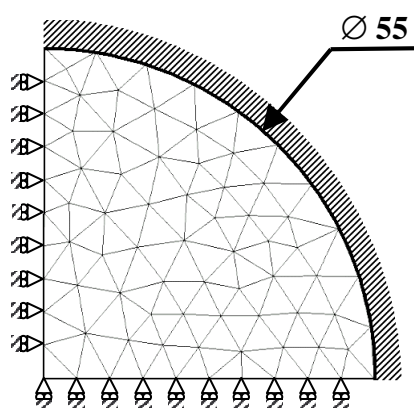
**Fig. 5.12** : Essai de traction sur plaque trouée - Répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  - Cas du NiTi - (a) Analyse d'images (b) Simulation



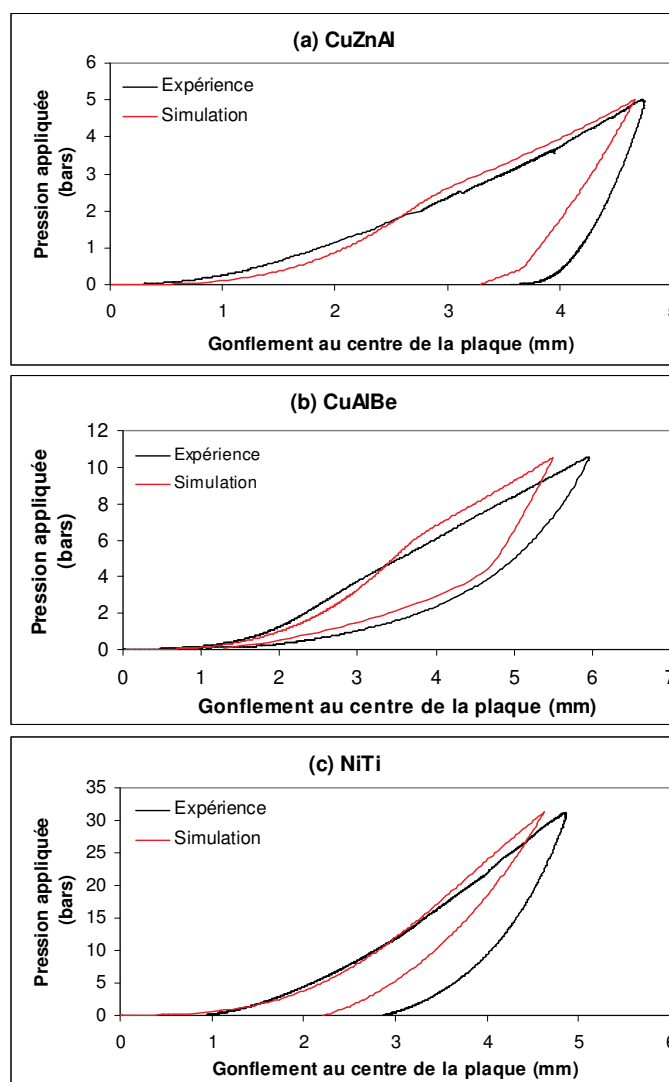
**Fig. 5.13** : Essai de traction sur plaque trouée - Répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  et de la fraction volumique de martensite



**Fig. 5.14** : Essai de traction sur plaque trouée - Répartition des isovaleurs de la composante  $E_{yy}$  et de la fraction volumique de martensite



**Fig. 5.15** : Essai de gonflement : maillage et définition géométrique



**Fig. 5.16** : Essai de gonflement - Comparaison expérience / simulation pour différents matériaux : (a) CuZnAl, (b) CuAlBe et (c) NiTi

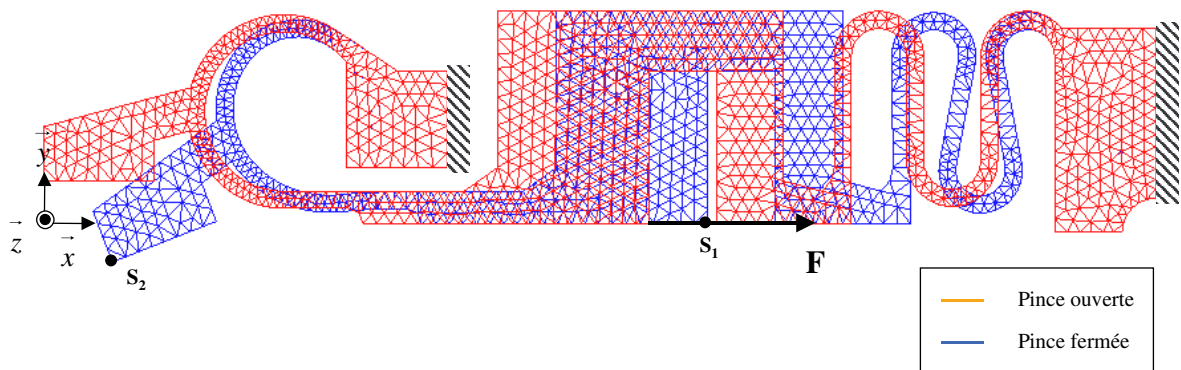
### 5.5.7 Micropince

Le modèle de comportement en transformations finies développé trouve dans la micropince (introduite dans la partie applications du chapitre 1) un exemple pertinent d'application. Les dimensions globales de cette structure sont  $5,8 * 2 * 0,23 \text{ mm}$ . Les détails de la géométrie sont disponibles dans [KOH02]. On peut rappeler rapidement le principe de la micropince : un mouvement de translation d'un actionneur en AMF commande la rotation et ainsi l'ouverture des mâchoires de la pince. Un autre actionneur en AMF, situé dans la zone attenante aux mâchoires, permet de commander la fermeture des pinces (cf page 20). Le fonctionnement de cette micropince induit de grandes déflexions et des rotations importantes. Les paramètres du NiTi utilisés pour la simulation sont donnés dans le tableau (5.10). La température de l'essai est  $T = 298^\circ K$ . Cette simulation est réalisée avec 40 incréments pour la charge-décharge.

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_\Sigma$	$a_1$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a_2$ (J.kg <sup>-1</sup> )	$a$	$\Delta s_0$ (U.S.I.)	$s_0$ (U.S.I.)	$M_s^0$ (°K)	$A_s^0$ (°K)
62	0,3	6500	0,06	0,02	0,14	0,2	25,9	6,7	250	299

**Tab. 5.10** : Paramètres du matériau de la micropince

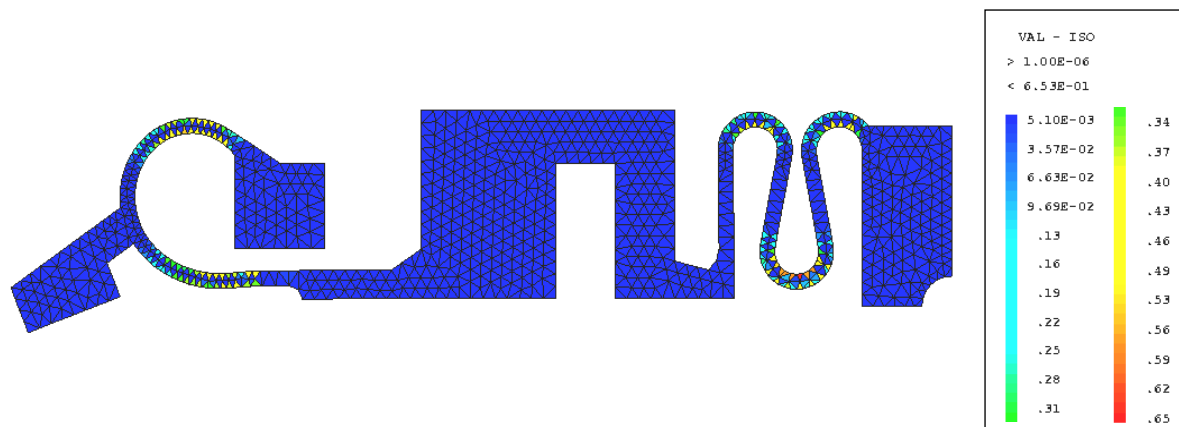
L'actionnement de l'ensemble est d'origine thermique puisque basé sur l'effet Joule. Notre modèle étant établi pour des chargements isothermes, cette simulation est réalisée en imposant l'effort sur l'actionneur linéaire. On obtient alors la déformée de la micropince dans la position fermée (cf figure 5.17).



**Fig. 5.17** : Simulation du fonctionnement d'une micropince [KOH02] - Configuration - Maillage - Déformée

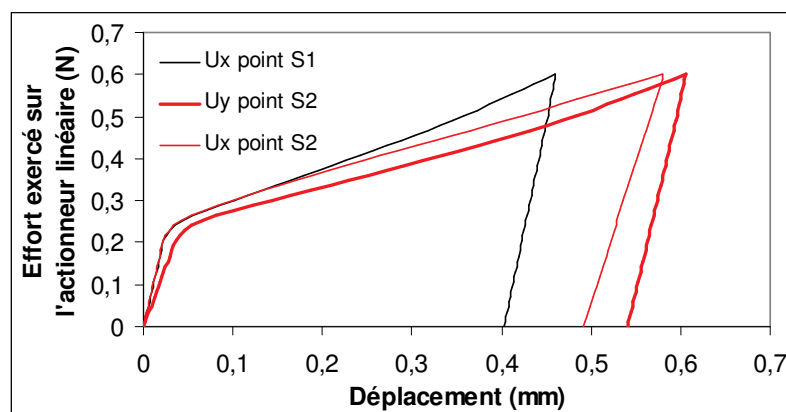
D'autre part, on constate que les actionneurs, structures minces courbes, présentent des concentrations de contraintes comme en témoigne la répartition de la fraction volumique dans la micropince (cf figure 5.18).

Le fonctionnement de la micropince étant basé sur l'effet mémoire simple sens, il est intéressant d'observer la courbe reliant l'effort exercé sur l'actionneur linéaire au déplacement de



**Fig. 5.18** : Simulation du fonctionnement d'une micropince [KOH02] - Répartition de la fraction volumique de martensite

ce dernier ( $S_1$ ) dans la direction  $\vec{x}$ , mais également le déplacement suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de l'extrémité de la mâchoire ( $S_2$ ) (cf figure 5.19). Une déformation résiduelle importante demeure à la décharge mais celle-ci est récupérée par chauffage (par effet Joule) au-dessus de la température de fin de transformation austénitique  $A_f^0$ . La récupération des déformations commande ainsi l'ouverture et la fermeture des mâchoires de la micropince.



**Fig. 5.19** : Evolution des déplacements des points  $S_1$  (Actionneur linéaire) et  $S_2$  (Extrémité mâchoire) en fonction de l'effort appliqué au niveau de l'actionneur linéaire

## 5.6 Conclusion

Dans le cadre d'une méthode incrémentale associée au schéma itératif de Newton, l'intégration numérique de lois constitutives établies dans le chapitre 4 s'inspire des techniques numériques élaborées pour les matériaux élastoplastiques et notamment un algorithme de retour sur la surface de charge du type prédiction-correction. Une méthode implicite est utilisée pour effectuer l'intégration. Une étape de correction intermédiaire permet d'assurer l'unicité de la solution lors de la transformation inverse. Le modèle numérique ainsi obtenu a été im-

plémenté dans CASTEM 2000. Une série d'essais en transformations finies permet de simuler la réponse du matériau pour des sollicitations diverses. Ces réponses sont ensuite comparées aux résultats expérimentaux afin de valider le modèle développé. La simulation du comportement de la micropince est un essai structure permettant de mettre en évidence l'aptitude du modèle vis-à-vis de chargements mécaniques complexes pour des structures complexes. Cet exemple est d'autant plus intéressant qu'il appelle une modélisation pour des trajets de chargement non-proportionnels. En effet, le pincement d'un objet par les mâchoires a pour effet de modifier la direction de chargement, générant alors une réorientation des plaquettes de martensite.



---

# Perspectives

---

Le travail présenté dans ce mémoire est évolutif dans le sens où il s'inscrit dans une logique d'équipe, ouvrant nécessairement des perspectives. L'élément de coque implanté dans le code élément fini CASTEM 2000 a été repris puis développé pour permettre le calcul multicouches tandis que le modèle de comportement des AMF implémenté est exploité par un module d'homogénéisation.

L'activité "AMF" du groupe Modélisation Numérique des Matériaux et Structures a pour objectif le développement d'outils d'aide à la conception optimale de structures hybrides intégrant des AMF comme éléments de commande. En outre, la plupart des modèles de comportement des AMF s'intéresse aujourd'hui au phénomène de création puis de réorientation de la martensite occasionné par des chargements non-proportionnels. C'est pourquoi l'extension du modèle développé pour simuler ce type de chargement est incontournable. Ces deux aspects constituent les perspectives à court terme de ce travail. A moyen terme, les modélisations mécaniques et numériques proposées devront être complétées afin de prendre en compte des chargements anisothermes. Ce couplage thermo-mécanique est envisagé dans un contexte de coques dynamiques.

## 6.1 Perspective d'application aux structures adaptatives

Le développement des technologies de la communication, les exigences de l'aéronautique, les besoins de l'aérospatiale se conjuguent à une demande croissante de stabilité géométrique des structures mécaniques soumises à des conditions environnementales variables. On peut citer l'exemple caractéristique des réflecteurs d'antennes spatiales, qui, soumis à des variations thermiques d'une amplitude de plus de  $200^{\circ}C$ , doivent conserver une forme déterminée. Avec les chargements thermiques, les structures sont également souvent soumises à des chargements mécaniques ou hygroscopiques.

Pour répondre à cette contrainte de stabilité, les industriels et les scientifiques comptaient encore récemment sur une optimisation des propriétés matérielles. L'utilisation de structures sandwich pour les réflecteurs d'antennes spatiales trouve son origine dans cette volonté d'optimisation. Ainsi, les ingénieurs se sont tournés vers des matériaux offrant de faibles dilatations



et de fortes raideurs en flexion. En ce sens, les matériaux composites offrent un compromis défiant toute concurrence face à d'autres matériaux en termes de propriétés thermomécaniques, masse volumique et coût.

Les solutions orientées vers l'optimisation du matériau ont atteint leurs limites du fait, notamment, de l'impossibilité de maintenir strictement une forme géométrique sous des chargements variables. L'idée des structures adaptatives a donc émergé il y a une dizaine d'années. Ces structures permettent d'"analyser" les chargements et de contrabalancer leurs effets par des phénomènes internes ou externes à la structure dont on veut garantir la forme.

On peut distinguer deux types d'applications des structures adaptatives : le contrôle actif et le contrôle passif.

Une structure adaptative est à la base une structure classique comportant un réseau de capteurs permettant de jauger les chargements extérieurs variables et un réseau d'actionneurs permettant de répondre de façon adéquate aux informations reçues par les capteurs. La structure, en adaptant sa réponse aux stimuli extérieurs, va alors modifier l'état physique de la structure. Dans certains cas, cet ensemble peut se résumer à un matériau unique, à l'instar des AMF, cumulant les fonctions de capteur-analyseur-actionneur. Dans la plupart des cas, ces fonctions sont disjointes. Les propriétés thermomécaniques remarquables de ces alliages en font, en effet, de très bons candidats pour des applications en contrôle actif ou passif de structures composites.

Un autre intérêt des structures adaptatives, même en l'absence de chargements extérieurs variables réside dans la contrôlabilité des formes. Dans le cas des réflecteurs d'antennes, il est possible de modifier sa géométrie de façon à l'adapter à la réception de certaines fréquences. Au-delà des problèmes statiques tels que le contrôle de forme, un des intérêts majeurs des structures adaptatives réside dans la possibilité d'un contrôle dynamique. A titre d'exemple, on peut citer le confort vibroacoustique des véhicules.

### 6.1.1 Exemples d'application des AMF aux structures adaptatives

Les AMF sont donc souvent utilisés au sein de structures hybrides où ils sont couplés avec des matériaux composites, les rôles qu'ils peuvent jouer sont nombreux et touchent à différents aspects mécaniques [VAN99].

- Contrôle actif de forme : l'effet mémoire de forme est utilisé pour modifier la forme de la matrice du composite (cf figure 5.20).
- Relaxation : la martensite induite par les contraintes permet de relâcher les contraintes imposées, celles-ci pouvant être dues à un chargement particulier, des différences entre les coefficients de dilatation thermiques ou à des chocs thermiques.
- Contrôle de la fréquence de vibration : l'introduction d'un AMF permet de modifier fortement le comportement d'un composite et induit certaines particularités comme la

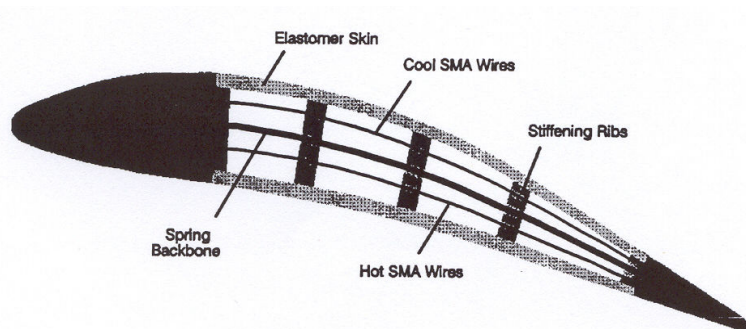


Fig. 5.20 : Ajustement de la courbure d'une aile d'avion intégrant des fils AMF

modification de la fréquence propre suivant la structure de l'AMF. Lorsque le matériau est traversé par un courant électrique, la structure connaît un échauffement qui entraîne l'apparition de martensite ce qui modifie son spectre de résonance (cf figure 5.21).

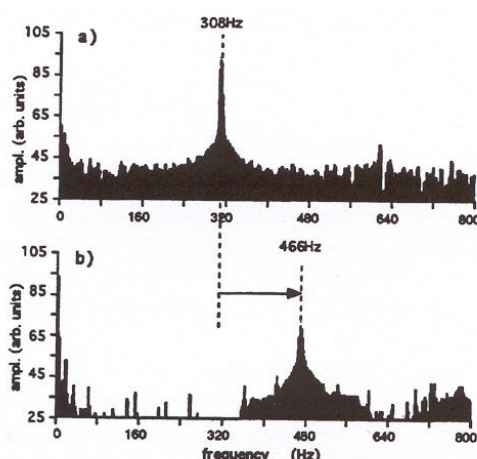
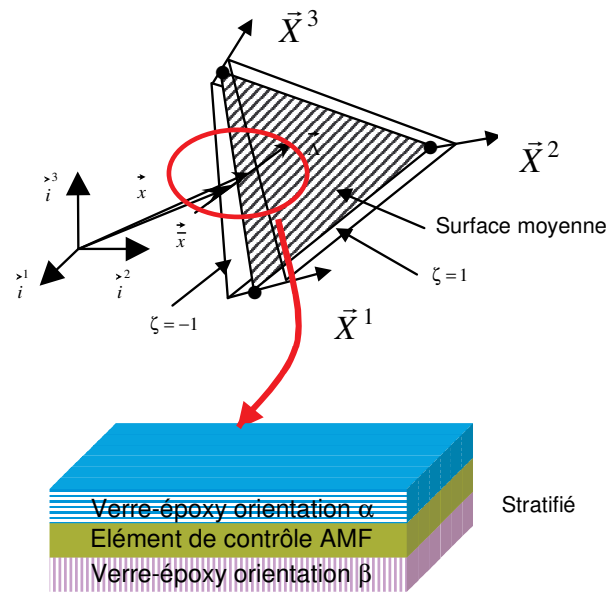


Fig. 5.21 : Modification du spectre de vibration d'une structure

### 6.1.2 De la modélisation du comportement des structures minces en AMF vers le calcul multicouches

Les outils développés et testés lors ce travail de thèse s'inscrivent complètement dans cette logique des structures adaptatives. Les structures minces en AMF interviennent fréquemment dans ce type de structures notamment en ce qui concerne le contrôle de forme passif, l'intégration des AMF dans le but d'un contrôle actif étant grandement limité par le temps de réponse conséquent des AMF à un stimulus extérieur.

L'élément de coque présenté au début de ce rapport a été développé afin de réaliser du calcul multicouches orthotropes [CAR01]. Ainsi, il est possible de considérer une loi de comportement par couche pour simuler la réponse d'une structure composite à une sollicitation donnée (cf figure 5.22).



**Fig. 5.22** : Utilisation de l'élément de coque pour le calcul multicouches - Application sur un stratifié verre époxy/AMF/verre époxy

L'exemple suivant vise à démontrer l'aptitude de l'élément et de la loi de comportement AMF implantés dans le code éléments finis CASTEM à simuler la réponse en flexion d'une structure composite. La configuration de cet essai est identique à celle utilisée dans le chapitre précédent. L'AMF utilisé est le CuZnAl présenté alors.

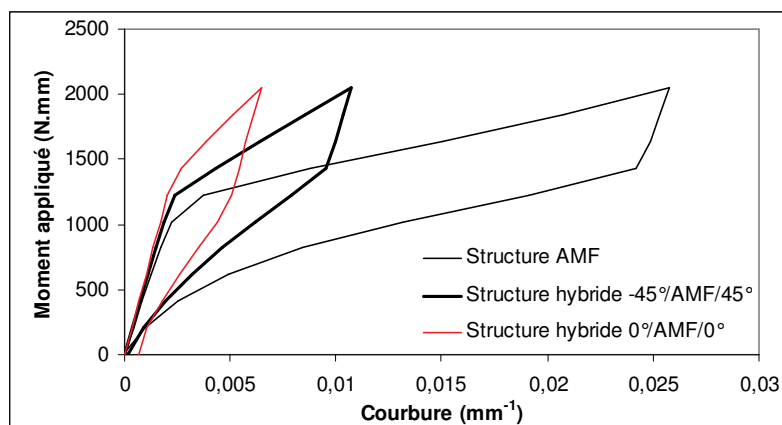
Cette structure hybride est constituée de trois couches : une couche d'AMF prise en sandwich entre deux couches de composite résine époxy-fibre de verre. Par rapport à une direction donnée, la couche supérieure présente une direction d'anisotropie d'orientation  $\alpha$  et la couche inférieure une direction d'anisotropie d'orientation  $\beta$ .

Le comportement des couches composites verre-époxy et la modélisation numérique correspondante ont été développés au sein de l'équipe [BOU03] et implantés dans CASTEM 2000.

En outre, il est possible de jouer sur l'orientation de chaque couche, ce qui permet d'évaluer l'influence de l'orientation des couches sur la réponse globale de la structure composite (cf figure 5.23).

### 6.1.3 Conclusion

La capacité réelle de faire du calcul numérique de structures hybrides intégrant les AMF sous forme de films minces doit encore être confirmée par une confrontation avec l'expérience pour des trajets de chargement quelconques.



**Fig. 5.23** : Influence des AMF sur la réponse en flexion d'une structure hybride - Effet de l'orientation des couches

## 6.2 Extension au cas de chargements non-proportionnels

Le développement des applications intégrant les AMF passe par la multiplication des essais multiaxiaux. Les premiers essais pseudoélastiques sous chargement multiaxiaux ont mis en évidence des phénomènes tels que la réorientation des variantes de martensite, révélant les limites de la plupart des modèles de comportement développés dans le contexte de chargements proportionnels. La littérature portant sur les AMF s'enrichit de travaux expérimentaux dans ce domaine. Parallèlement, les modèles de comportement permettant de rendre compte de chargements non-proportionnels tendent à se multiplier. Ainsi, il est intéressant d'étendre le modèle de comportement pour ce type de chargement [BOU02b].



---

# Conclusion

---

Aucun modèle ne prétend expliquer parfaitement la réalité. La raison d'être d'un modèle de comportement réside dans la volonté de représenter le plus précisément possible des phénomènes physiques. La combinaison modèle numérique/expérience/outils informatiques permet maintenant de réaliser des simulations sur des structures élaborées.

Les multiples facettes du comportement des AMF compliquent la généralisation d'un modèle capable de toutes les simuler. Nombreuses sont les fées qui se sont penchées sur le berceau des AMF. Aujourd'hui, ces matériaux ont atteint une certaine "maturité" comme en témoigne leur large utilisation dans de nombreux domaines. Désormais, l'avenir des AMF semble se définir en termes de composantes de structures adaptatives, notamment pour le contrôle actif et passif des structures composites car les éléments de commande en AMF cumulent les fonctions de capteur, processeur et actionneur, permettant une intégration maximum dans un espace minimum.

Le code élément fini CASTEM 2000 ne disposait pas d'éléments permettant le calcul de structures coques en très faible épaisseur en raison du problème de verrouillage. La première partie de cette thèse a été consacrée à l'implantation dans le code d'un élément de coque dégénéré dont la cinématique permet d'isoler les termes de cisaillement transverse afin d'effectuer une interpolation mixte de ces composantes dans le but de remédier au verrouillage. L'objectif de calculs de structure passait également par une extension de l'élément dans un contexte de grandes transformations. Tout ce travail aurait eu un intérêt limité sans une validation rigoureuse par une campagne d'essais de références.

Le second grand chantier de ce travail portait sur la mise au point d'un modèle de comportement phénoménologique de la superélasticité des Alliages à Mémoire de Forme. S'appuyant sur la théorie des matériaux standards généralisés et les modèles classiques de la plasticité, il s'inscrit dans un cadre thermodynamique strict. Ce cadre est suffisamment général pour englober la plupart des modèles concernant les AMF, notamment le modèle RLT mais également un modèle pour des matériaux dont le comportement présente une forte dépendance à son histoire. L'originalité de ce modèle se révèle également sous d'autres angles. Au-delà de son caractère général, il prend en compte la dissymétrie traction-compression et permet de

simuler des boucles internes. En outre, l'extension du cadre en transformations finies s'appuie sur les notions de configuration intermédiaire déformée et de vecteurs directeurs qui permettent d'obtenir un formalisme voisin de celui des petites perturbations.

Une excursion dans le domaine expérimental a été nécessaire pour améliorer la base de données en vue de l'identification des paramètres matériau et de la validation des essais de structure. Cette tâche a été grandement facilitée par l'existence de bancs d'essais éprouvés au sein du laboratoire. Une mise en oeuvre aisée des manipulations a rapidement donné des résultats exploitables. Une identification inverse, basée sur un algorithme génétique et des méthodes de résolution locale, est en cours de réalisation et devrait permettre prochainement d'identifier de façon optimale les paramètres du matériau à partir de réponses expérimentales.

Le dernier volet de cette étude est relatif à l'intégration numérique des lois de comportement du modèle, au moyen d'une méthode implicite, suivie de l'implantation dans le code. Un algorithme prédicteur-correcteur spécifique, permettant de gérer la transition de phase inverse compte tenu de la réduction homothétique de la surface seuil associée, a été développé et validé par l'expérience dans le cas des transformations finies. Il semble toutefois utile de poursuivre cette campagne d'essais de validation par la comparaison avec d'autres essais expérimentaux en grandes transformations pour diverses sollicitations. Ce complément d'étude est indispensable pour fiabiliser et optimiser l'outil numérique développé. L'intégration du modèle dans le contexte de l'élément fini de coque dégénéré permet d'envisager des calculs sur des structures très minces en transformations finies sous chargements proportionnels. En ajoutant à cela l'aptitude au calcul multicouches de cet élément, on obtient une perspective très intéressante en termes de structures adaptatives.

---

# Bibliographie

---

- [ABE93] Abeyaratne R. and Knowles J.K., A continuum model of a thermoelastic solid capable of undergoing phase transitions , J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, p. 541-571, 1993.
- [AHM71] Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements; Int. J. for Num. Meth. in Engng., Vol. 27, p. 271-283, 1971.
- [AIM01] Hautcoeur A., <http://www.a2im.com>, 2001.
- [AUR95] Auricchio F., Shape memory alloys : applications, micromechanics, macromodelling and numerical simulations, PhD thesis, University of California at Berkeley, CA, USA, 1995.
- [AUR97a] Auricchio F. et Taylor R., Shape-memory alloys : modelling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 143, p. 175-194, 1997.
- [AUR97b] Auricchio F., Taylor R. et Lubliner J., Shape-memory alloys : macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 146, p. 281-312, 1997.
- [AUR97c] Auricchio F. and Lubliner J., A uniaxial model for shape memory alloys, Int. J. Sol. Structures, Vol. 34, p. 3601-3618, 1997.
- [AUR97d] Auricchio F. and Sacco E., A superelastic shape alloy beam model, J. Int. Mat. Sys. Struct., Vol. 8, 1997.
- [AUR97e] Auricchio F., Sacco E., A one-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite; Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 32, n°6, p. 1101-1114, 1997.
- [AUR99a] Auricchio F., Taylor R.L., A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes, Int. J. of Plasticity, Vol. 15, p. 1359-1378, 1999.



- [AUR99b] Auricchio F., Sacco E., A temperature-dependent beam for shape memory alloys : constitutive modelling, finite-element implementation and numerical simulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 174, p. 171-190, 1999.
- [AUR01a] Auricchio F., A robust integration algorithm for a finite strain shape memory alloy superelastic model, *Int. J. Plasticity*, Vol. 17, p. 971-990, 2001.
- [AUR01b] Auricchio F., Consideration on the constitutive modeling of shape-memory alloys, *Shape Memory Alloys Advances in Modelling and Applications*, F. Auricchio, L. Faravelli, G. Magonette & V. Torra Edts., CIMNE, Barcelona, Spain, p. 125-187, 2001.
- [AUR02] Auricchio F. and Petrini L., Improvements and algorithmical considerations on a recent three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformations, *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.*, Vol. 55, p. 1255-1284, 2002.
- [BAI24] Bain E.C., *Trans. AIME*, Vol. 70, p. 25, 1924.
- [BAL92] Ball J. and James R., Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two-well problem, *Phil. Transactions of the Royal Society, Series A* 338, p. 389-450, 1992.
- [BAT90a] Batoz J. L. et Dhatt G., *Modélisation des Structures par Eléments Finis*, Vol. 2/3, Hermes, 1990.
- [BAT86a] Bathe K-J. and Dvorkin E.N., A formulation of general shell elements - The use of mixed interpolation of tensorial components, *Int. Journal for Num. Meth. In Eng.*, Vol. 22, p. 697-722, 1986.
- [BAT86b] Bathe K. J., Dvorkin E. N., A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 22, p. 697-722, 1986.
- [BAT90b] Bathe K. J., Bucalem M. L., Brezzi F., Displacement and stress convergence of our MITC plate bending elements ; *Engineering Computations*, Vol. 7, p. 291-302, 1990.
- [BAT96] Bathe K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- [BEA59] Beams J. W., *Structure And Properties of Thin Films*, Eds. C. A. Neugebauer, J. Wiley and Sons, New York, 1959.
- [BEL85] Belytschko T., Stolarski H., Liu W.K., Carpenter N. and Ong J.S., Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements, *Comp. Meth. In Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 51, p. 221-258, 1985.
- [BER82] Bertsekas D. P., *Constrained optimization and lagrange multiplier methods*, Academic Press, New York, 1982.

- [BHA99] Bhattacharya K., Crystallographic attributes of a shape memory alloy, *J. Engineering Materials and Technology*, Vol. 121, p. 93-97, 1999.
- [BO99a] Bo Z., Lagoudas D.C. and Miller D., Material characterization of sma actuators under non proportional loading, *J. Engineering Materials and Technology*, Vol. 121, p. 78-85, 1999.
- [BO99b] Bo Z., Lagoudas D. C., Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading. Part I : theoretical derivations, *Int. J. Engng. Sc.*, Vol. 37, p. 1089-1140, 1999.
- [BO99c] Bo Z., Lagoudas D. C., Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part IV : modeling of minor hysteresis loops, *Int. J. Engng. Sc.*, Vol. 37, p. 1205-1249, 1999.
- [BOI92] Boisse P., Daniel J. L. and Gelin J. C., A simple isoparametric three-node shell finite element, *Computers & Structures*, Vol. 44, n°6, p. 1263-1273, 1992.
- [BOI93] Boisse P., Daniel J.L. et Gelin J.C., Élément fini de coque à trois noeuds pour le calcul des structures minces en grandes déformations, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 2, n°2, p. 179-209, 1993.
- [BOI94] Boisse P., Daniel J. L. and Gelin J. C., A  $C^0$  three-node shell element for non-linear structural analysis, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 37, 1994.
- [BOI96] Boisse P., Gelin J.C. and Daniel J.L., Computation of thin structures at large strains and large rotations using simple  $C^0$  isoparametric three-node shell element, *Computers and struct.*, Vol. 58, n°2, p. 249-261, 1996.
- [BON94] Bonnotte E., Etude des propriétés mécaniques des films minces. Application au silicium monocristallin, Thèse de Doctorat n°430, Université de Franche-Comté, 1994.
- [BOU94] Boubakar M. L., Contribution à la simulation numérique de l'emboutissage des tôles. Prise en compte du comportement élastoplastique anisotrope, Thèse de Doctorat n°418, Université de Franche-Comté, 1994.
- [BOU98a] Boubakar M L. et Boisse P., Comportement élastoplastique anisotrope pour l'analyse numérique des coques minces en grandes transformations, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 7, n°6, p. 709-735, 1998.
- [BOU98b] Boubakar M. L., Moyne S., L'excellent Ch. et Boisse P., Analyse et prédiction 3-D du comportement de structures en alliages à mémoire de forme à grandes déformations pseudoélastiques, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 7, n°8, p. 91-110, 1998.
- [BOU99] Boubakar M.L, Moyne S., L'excellent Ch. and Boisse P., Shape memory alloys pseudoelastic finite strain : theory and numerical applications, *JSME*, Vol. 121, p. 44-47, 1999.

- [BOU02a] Boubakar M.L. and Lexcellent C., Some tools for modelling shape memory alloys. Thermomechanical behaviour and some efficient use, Third World Conference on Structural Control, Como, Italy, 2002.
- [BOU02b] Boubakar M. L., De la modélisation numérique de matériaux composites ou à transition de phase, HDR n°111, Université de Franche-Comté, 2002.
- [BOU03] Boubakar M.L., Vang L., Trivaudey F. and Perreux D., A meso-macro finite element modelling of laminate structures- Part II : time dependent behaviour, Composite Structures, 60, p. 275-305, 2003.
- [BOU00] Bouvet C., Boubakar M.L. and Lexcellent C., Two normal dissipative processes for thermomechanical modelling of shape memory alloys, IASS - IACM Fourth international Colloquium on computations of shell and spatial structures, Chania - Crete, Greece, 2000.
- [BOU01a] Bouvet Ch., De l'uniaxial au multiaxial : comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme, Thèse de Doctorat n°870, Université de Franche-Comté, 2001.
- [BOU01b] Bouvet C., Boubakar M.L. and Lexcellent C., Tension-compression asymmetric effect on the numerical modelling of pseudoelastic shape memory alloys, ECCM 2001 Cracow Poland June 26-29, 2001.
- [BOY96a] Boyd J. G. and Lagoudas D. C., A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I : The monolithic shape memory alloy, Int. J. of Plasticity, Vol. 12, n°6, p. 805-842, 1996.
- [BRE89] Brezzi F., Bathe K. J. and Fortin M., Mixed-interpolated elements for Reissner/Mindlin plates, Int. J. for Num. Meth. in Engng., Vol. 28, p. 1787-1801, 1989.
- [BRI93a] Brinson L. and Lammering R., Finite element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 30, p. 3261-3280, 1993.
- [BUC97] Bucalem M.L. and Bathe K.J., Finite element analysis of shell structures, Archives of Computational Methods in Eng., Vol. 4, p. 3-61, 1997.
- [BUE63] Buehler W.J., Gilfrich J.V. and Wiley R.C., J. Appl. Phys., Vol.34, p. 1475, 1963.
- [CAR01] Carbillet S., Calcul multicouche dans un élément coque avec cisaillement transverse - Applications à des matériaux multicouches, D.E.A. de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, 2001.
- [CHA51] Chang L.C. and Read T.A., Trans. AIME , Vol. 191, p. 47, 1951.
- [COS09] Cosserat E. and F., Théorie des corps déformables, Hermann, Paris, 1909.
- [DAN98] Daniel J-L., Contribution à la simulation de l'emboutissage, Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 1998.

- [DIN89] Ding Y., Finite-rotations elemente zur geometrisch nicht linearen analyse allgemeiner flächentrawerke, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr Universität Bochum, Technical Repport, n°6, 1989.
- [DOG88] Dogui A., Cinématique bidimensionnelle en grandes déformations. Application à la traction hors axes et à la torsion, J. Méca. Th. et Appl., Vol. 1, 1988.
- [DOG89] Dogui A., Plasticité anisotrope en grandes déformations, Thèse de Doctorat ès-Science, Université Claude Bernard, Lyon I, 1989.
- [DVO84] Dvorkin E. N. and Bathe K. J., A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis, Engineering Computations, Vol. 1, p. 77-88, 1984.
- [ECK48] Eckart C., The thermodynamics of irreversible processes : IV. The theory of elasticity and anelasticity, Physical Review 72, 373, 1948.
- [EDE74] Edelen D. C., On the characterisation of fluxes in non-linear irreversible thermodynamics, Int. J. Engng. Sci., Vol. 12, p. 397, 1974.
- [FAL80] Falk F., Model free energy, mechanics and thermodynamics of shape memory alloys, Acta Met., Vol. 28 , p. 1773-1780, 1980.
- [FRE83] Fressengeas C. et Molinari A., Représentation du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations, Rapport Greco, n°81, 1983.
- [GAA93] Gaaloul H., Contribution à la modélisation de l'élastoplasticité anisotrope en grandes déformations. Application aux tôles d'emboutissage, Thèse de Doctorat, E.C.Lyon, France, 1993.
- [GAL98] Gall K., Sehitoglu H., Maier H. J. and Jacobus K, Stress-induced martensitic transformations in polycrystalline CuZnAl shape memory alloys under different stress states, Met. Mat. Trans., p. 765-773, 1998.
- [GER71] Germain P, Cours de mécanique des milieux continus, Tome 1, Masson et Cie, 1971.
- [GER83] Germain P., Nguyen Q. S. and Suquet P., Continuum Thermodynamics, J. Appl. Mech., Vol. 50, p. 1010-1020, 1983.
- [GIL99] Gillet Y., Patoor E. and Berveiller M., Calculation of pseudoelastic elements using a non symmetrical thermomechanical criterion and associated rule, J. Intel. Mat. Tech., Vol. 9, p. 366-378, 1999.
- [GIL93] Gilormini P., Roudier P. et Rougée P., Les déformations cumulées tensorielles, C. R. Acad. Sc. Paris, T. 316, Série II, p. 1499-1504, 1993.
- [GOO97] Goo B. C. and LExcellent, Micromechanics-based modeling of two-way memory effect of a single crystalline shape-memory alloy, Acta Materiala , Vol. 45, p. 727-737, 1997.

- [HAL75] Halphen B. et Nguyen Q. S. ; Sur les matériaux standards généralisés, *J. de Mécanique*, Vol. 14, n°1, p. 39-63, 1975.
- [HIL50] Hill R., A theory of the plastic bulging of a metal diaphragm by lateral pressure, *Phil. Mag.*, Vol. 41, n°7, p. 1133-1142, 1950.
- [HOR77] Horrigmoe G., Finite element instability analysis of free form shells, Division of Structural Mechanics, Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Report 77-2, 1977.
- [HUA98] Huang M. and Brinson L. C., A Multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior, *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 46, p. 1379-1409, 1998.
- [HUA99] W. Huang, Yield surfaces of shape memory alloys and their applications, *Acta Materiala*, Vol. 47, p. 2769-2776, 1999.
- [HUG80] Hughes T. J. R. and Winget J., Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 15, p. 1862-1867, 1980.
- [HUG81] Hughes T.J.R and Liu W.K., Nonlinear finite element analysis of shells : Part I. Three dimensionnal shells, *Comp. Meth. In Appl. Mec. And Eng.*, Vol. 26, p. 331-362, 1981.
- [HUO93] Huo Y., Müller I., Nonequilibrium thermodynamics of pseudoelasticity, *Continuum Mech. Thermodyn.*, Vol. 5, p. 163-204, 1993.
- [KER90] Kerber T., Revue des éléments finis de coque au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes, *La recherche aérospatiale*, n°3, p. 45-76, 1990.
- [KOH98] Kohl M. and Skrobanek K.O., Linear actuators based on the shape memory effect, *Sensors and actuators*, A70, p. 104-111, 1998.
- [KOH02] Kohl M., Krevet B. and Just E., SMA microgripper system, *Sensors and actuators*, A 97-98, p. 646-652, 2002.
- [LAG96] Lagoudas D.C., Bo Z. and Qidwai M.A., A unified thermodynamic constitutive model for sma and finite element analysis of active metal matrix composite, *Mechanics of Composite Material and Structures*, Vol. 3, p. 153-179, 1996.
- [LAG99] Lagoudas D. C., Bo Z., Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading. Part II : material characterization and experimental results for a stable transformation cycle, *Int. J. Engng. Sc.*, Vol. 37, p. 1141-1173, 1999.
- [LEE69] Lee E., Elastic-plastic deformations at finite strains, *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, p. 1-6, 1969.
- [LEP00] Leppäniemi A., Shape memory alloys - applications and commercial aspects, <http://www.ad.tut.fi/aci/courses/76527/Seminars2000/SMA.pdf>, 2000.

- 
- [LEX99] Lexcellent C., Rejzner J., Bouvet Ch., Robinet P. et Calloch S., Comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme sous sollicitations multiaxiales radiales : approche expérimentale et modélisation macroscopique phénoménologique, 39ème Congrès de Metallurgie, Québec, p. 73-88, 1999.
- [LIM99] Lim J.T. and McDowell D.L., Mechanical behaviour of a NiTi shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading, *Journal of Engrg Materials and Technology*, Vol. 121, p. 9-18, 1999.
- [LIN90] Lin P., In-situ measurement of mechanical properties of multilayer-coatings, PhD. Thesis, MIT, Boston, 1990.
- [LUB96] Lubliner J. and Auricchio F., Generalized plasticity and shape-memory alloys, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, n°7, p. 991-1003, 1996.
- [MAL69] Malvern L. E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Series in Engineering of the Physical Sciences, 1969.
- [MAN71] Mandel J., *Plasticité et Viscoplasticité*, Cours C.I.S.M. 97, Udine, Springer, New York, 1971.
- [MAT94] Matzenmiller A. and Taylor R.L., A return mapping algorithm for isotropic elastoplasticity, *Int. Journal for Num. Meth. In Eng.*, Vol. 37, p. 813-826, 1994.
- [MAU92] Maugin G. A., *The thermomechanics of plasticity and fracture*; Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1992.
- [MIC02] Michel J.F., *Modélisation mécanique et simulation numérique de la mise en forme des structures en très faibles dimensions*, Thèse de Doctorat n°951, Université de Franche-Comté, 2002.
- [MOR90] Moran B., Ortiz M. and Shih C.F., Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity, *Int. J. Num. Methods of Engineering*, Vol. 29, p. 483-514, 1990.
- [MOR67] Moreau J. J., *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Cours du Collège de France, 1966-67.
- [MOY98] Moyne S., *Etude expérimentale et numérique de structures en alliage à mémoire de forme*, Thèse de Doctorat n°668, Université de Franche-Comté, 1998.
- [MUL89] Müller I., On the size of the hysteresis in pseudo-elasticity, *Continuum Mech. Thermodyn.*, Vol. 1, p. 125-142, 1989.
- [MUL91] Müller I. and Xu H., On the pseudoelastic hysteresis, *Acta. Meta. Mater.*, Vol. 39, p. 263-271, 1991.
- [NAG84] Nagtegaal J. C. and Veldpaus F. E., On the implementation of finite strain plasticity equations in a numerical model, *Numerical Analysis of Forming Processes*, Edts. J. F. T. Pittman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood and J. M. Alexander, 1984.

- [ORG96] Orgeas L. and Favier D., Non symmetric tension-compression behavior of NiTi alloy, *J. de Physique IV*, C8, p. 605-610, 1996.
- [ORG98] Orgeas L. and Favier D., Stress-induced martensitic transformation of a NiTi alloy in isothermal shear, tension and compression, *Acta Materiala*, Vol. 46, p. 5579-5591, 1998.
- [ORT85] Ortiz M and Popov E.P., Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.*, Vol. 21, p.1561-1576, 1985.
- [ORT86] Ortiz M. and Simo J.C., An analysis of a new class of integration algorithm for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. Num. Methods of Engineering*, Vol. 23, p. 353-366, 1986.
- [OTS02] Otsuka K. and Kakeshita T., Science and technology of shape memory alloys : New developments, <http://www.mrs.org/publications/bulletin>, 2002.
- [PAL01] Palazzo V., Rosati L. et Valoroso N., Solution procedures for J3 plasticity and viscoplasticity, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, Art. n° 2747, p. 1-37, 2001.
- [PAT88] Patoor E., Eberhardt A. and Berveiller M., Thermomechanical behavior of shape memory alloys, *Arch. Mech*, Vol. 40, p. 755-794, 1988.
- [PAT93] Patoor E., Eberhardt A. and Berveiller M., Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys, *Pitman Research Notes in Mathematics*, 296, p. 38-54, 1993.
- [PIN83] Pinsky P. M., Ortiz M. and Pister K. S., Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, Vol. 40, p. 137-158, 1983.
- [QID00a] Qidwai M. A. and Lagoudas D. C., Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 47, p. 1123-1168, 2000.
- [QID00b] Qidwai M. A. and Lagoudas D. C., On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material, *Int. J. of Plasticity*, Vol. 16, p. 1309-1343, 2000.
- [RAN92] Raniecki B., Lexcellent C. and Tanaka K., Thermodynamic models of pseudoelastic behaviour of shape memory alloys, *Arch. Mech.*, Vol. 44, p. 261-284, 1992.
- [RAN98] Raniecki B. and Lexcellent C., Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 17, n°2, p. 185-205, 1998.
- [REJ00] Rejzner J., Modélisation des alliages à mémoire de forme soumis a des sollicitations multiaxiales ou à des gradients de contrainte, Thèse de Doctorat n°817, Université de Franche-Comté, 2000.

- 
- [RIC71] Rice R. J., Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its application to metal plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 19, p. 433-455, 1971.
- [ROC72] Rockafellar R. T., *Convex analysis*; Princeton University Press, 1972.
- [ROG93] Rogueda-Berriet C., *Modélisation thermodynamique du comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme*, Thèse de Doctorat n°336, Université de Franche-Comté, 1993.
- [SIM85] Simo J. and Ortiz M., A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Comp. Meth. In Appl. Mech. and Engrg*, Vol. 49, p. 221-245, 1985.
- [SIM86] Simo J. and Taylor R., Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 48, p.101-118, 1986.
- [SIM88a] Simo J.C., A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition : Part I. Continuum formulation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 66, p. 199-219, 1988.
- [SIM88b] Simo J.C., A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition : Part II. Computational aspects, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 68, p. 1-31, 1988.
- [SIM91] Simo J.C. and Govindjee S., Non-linear B-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity, *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.*, Vol. 31, p. 151-176, 1991.
- [SIM92] Simo J.C., Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 99, p. 61-112, 1992.
- [SIM93] Simo J.C. and Meschke G., A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Applications to geomaterials, *Computational mechanics*, Vol. 11, p. 253-278, 1993.
- [SIM98] Simo J.C. and Hughes T.J.R., *Computational Inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- [SOU98] Souza A. C., Mamiya E. N., Zouain N., Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 17, p. 789-806, 1998.
- [STO83] Stolarski H. and Belytschko T., Shear and membrane locking in curved  $C^0$  elements, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, Vol. 41, p. 279-296, 1983.
- [SUN93a] Sun Q.P. and Hwang K.C., Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys, Part I. Derivation of general relations, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, p. 1-17, 1993.



- [SUN93b] Sun Q.P. and Hwang K.C., Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys, Part II. Study of the individual phenomena, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, p. 19-33, 1993.
- [TIM61] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theorie des Plaques et des Coques*, Dunod, Paris, 1961.
- [TRO97] Trochu F. and Qian Y.Y., Nonlinear finite element simulation of superelastic shape memory alloy parts, *Computers and structures*, Vol. 5, p. 799-810, 1997.
- [VAC90] Vacher P. et LExcellent C., Comportement pseudoélastique d'un alliage polycristallin CuZnAl à mémoire de forme, *Revue de Phys. Appliquée*, Vol. 25, p. 783-797, 1990.
- [VAC99] Vacher P., Dumoulin S. and Arrieux R., Determination of the forming limit diagram from local strain measurement using digital image analysis, *Int. J. Form. Proc.*, Vol. 2, 1999.
- [VAN99] Van Humbeck J., Non-medical applications of shape memory alloys, *Materials Science and Eng. A*, 273-275, p. 134-148, 1999.
- [WES53] Wechsler M., Lieberman D. and Read T., On the theory of the formation of martensite, *J. of Metals*, 197, p. 1503-1515, 1953.
- [XIA97] Xiao H., Bruhns O. and Meyers A., Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate, *Acta Mech.*, Vol. 124, p. 89-105, 1997.
- [ZIE77] Zienkiewicz O. C.; *The Finite Element Method*; Mc Graw-Hill, 1977.

---

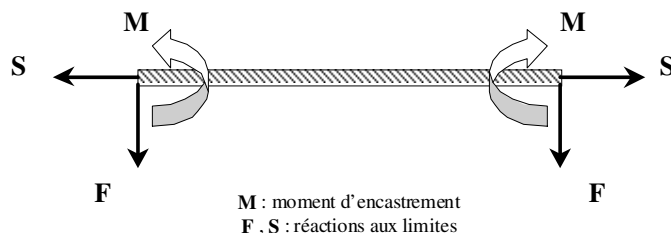
# Annexe

---

## A Formulation analytique du gonflement des plaques

### A.1 Hypothèses générales

Il est préférable de considérer le chargement mécanique équivalent pour établir la relation  $P = f(h)$  dans les différents cas (cf figure A.1).



**Fig. A.1** : Chargement mécanique équivalent

On distingue deux cas particuliers de la flexion des plaques minces soumises à des charges transversales [BON94] :

- Cas des faibles flèches  $1 \gg h/e$

La relation  $P = f(h)$  est déterminée en utilisant les hypothèses suivantes :

- Les déformations dans le plan moyen de la plaque sont nulles car  $S = 0$  et ce plan reste neutre lors de la flexion,
- une subsection droite avant déformation demeure droite après déformation,
- l'état moyen de contrainte est plan, la plaque étant mince, et les contraintes normales à la plaque peuvent être négligées.

- Cas des grandes flèches  $h/e \gg 1$

La relation  $P = f(h)$  n'est plus linéaire comme dans le cas précédent et dépend des hypothèses faites sur la forme de la membrane déformée. Les déformations dans le plan moyen ne sont pas nulles en raison de l'existence des efforts de réaction  $S$ .

## A.2 Mise en équation du problème

On considère une membrane circulaire isotrope de diamètre initial  $2a$  et d'épaisseur  $e$  de sorte que le rapport  $e/a$  soit petit. Ainsi, les contraintes de flexion et de cisaillement peuvent être négligées. (Toutefois, cette approximation concernant la flexion n'est pas justifiée dans une zone proche de l'encastrement même si la plaque est de faible épaisseur. Mais, les effets de bord sont localisés et peuvent, malgré tout, être négligés). Ensuite, on applique à cette plaque une pression hydrostatique  $P$  qui engendre une flèche  $h$  au centre.

La forme de la plaque déformée peut être assimilée à celle d'une calotte sphérique, c'est pourquoi on définit un repère sphérique  $\mathfrak{R}(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\varphi})$  lié à un point  $M$  de la membrane. La projection de  $\mathfrak{R}$  dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est telle que :

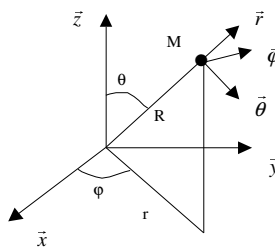
$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{\theta} \\ \vec{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$$


Fig. A.2 : Coordonnées sphériques

On peut représenter la plaque circulaire sous pression dans l'hypothèse d'une membrane déformée d'une calotte sphérique. On obtient la figure (A.3) suivante :

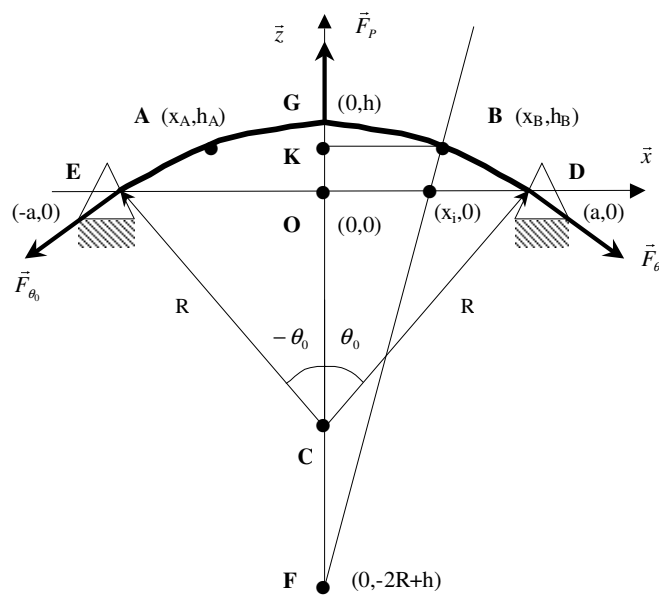


Fig. A.3 : Déformée d'une plaque circulaire sous pression

L'équilibre des forces appliquées à la plaque s'écrit :

$$\sum d\vec{F}_\theta + \vec{F}_p = \vec{0} \quad (\text{A.1})$$

où  $\vec{F}_p$  est la force résultant de la pression et  $d\vec{F}_\theta$  est la résultante des forces s'appliquant sur la surface  $dS_\theta$ .

Compte tenu de la configuration du problème (faible épaisseur), on fait l'hypothèse d'un état de contrainte moyenne plane. De ce fait, la contrainte  $\sigma_\theta$  est indépendante de l'épaisseur. D'autre part, sur le bord de la membrane,  $d\vec{F}_\theta = \sigma_\theta dS_\theta \vec{\theta}$  avec  $dS_\theta = e(R \sin \theta) d\varphi$ . Ainsi, en exprimant  $d\vec{F}_\theta$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et par intégration sur la surface de la subsection  $S_C$  de la plaque circulaire selon l'épaisseur, on obtient :

$$\vec{F}_\theta = \int_{S_C} df_1 \vec{x} + \int_{S_C} df_2 \vec{y} + \int_{S_C} df_3 \vec{z} \quad (\text{A.2})$$

Pour des raisons de symétrie de révolution, les deux premiers termes de l'expression précédente s'annulent, il reste alors en projetant selon l'axe  $\vec{z}$  :

$$\vec{F}_\theta \cdot \vec{z} = F_\theta = - \int_0^{2\pi} \sigma_\theta e R \sin^2 \theta \cdot d\varphi \quad (\text{A.3})$$

Ainsi, pour la calotte sphérique ( $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ ), on obtient la force résultante :

$$\sum d\vec{F}_\theta = -2\pi \sigma_\theta e R \sin^2 \theta_0 \cdot \vec{z} \quad (\text{A.4})$$

De même, la force  $\vec{F}_P$  résultant de la pression se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{F}_P &= \int_S P \cdot \vec{r} \cdot dS_P \\ \text{avec } dS_P &= (R d\theta) \cdot (R \sin \theta) d\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Par projection dans  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et par intégration sur la surface  $S_P$  correspondant à la plaque circulaire, on obtient :

$$\vec{F}_P = \int_{S_P} df_1 \vec{x} + \int_{S_P} df_2 \vec{y} + \int_{S_P} df_3 \vec{z} \quad (\text{A.6})$$

Pour des raisons de symétrie, les deux premiers termes de l'expression précédente s'annulent, il reste alors en projetant selon l'axe  $\vec{z}$  :

$$\vec{F}_P \cdot \vec{z} = F_P = PR^2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (\text{A.7})$$

Soit une force générée par la pression telle que :

$$\vec{F}_P = \pi PR^2 \sin^2 \theta_0 \cdot \vec{z} \quad (\text{A.8})$$

En réécrivant l'équation d'équilibre en projection (A.1) sur l'axe  $\vec{z}$ , avec les relations (A.4) et (A.8), on obtient finalement :

$$-2\pi\sigma_\theta eR \sin^2 \theta_0 + \pi PR^2 \sin^2 \theta_0 = 0$$

D'où :

$$\sigma_\theta = \frac{PR}{2e} \quad (\text{A.9})$$

Le rayon de courbure étant par définition constant pour la calotte (hypothèse de contraintes planes et de sphéricité de la calotte), on en déduit que :

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{PR}{2e} \quad (\text{A.10})$$

Où  $\sigma_\varphi$  désigne la contrainte circonférentielle.

En outre, étant donné que  $\sigma_r = P$  alors on peut négliger  $\sigma_r$  devant  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_\varphi$  (car  $R \gg e$ ). Le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\underline{\sigma}_{(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\varphi})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Relation $P = f(h)$

#### Equations différentielles de la déformée

Timoshenko [TIM61] a établi ces relations par un calcul que cette partie va présenter. On définit les moments de flexion par unité de longueur  $M_r$  et  $M_\theta$  agissant sur le contour de la membrane. Dans le cas de la flexion pure, ces moments sont tels que :

$$\begin{cases} M_r = D \left( \frac{1}{R_r} + \nu \frac{1}{R_\theta} \right) \\ M_\theta = D \left( \frac{1}{R_\theta} + \nu \frac{1}{R_r} \right) \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Où  $R_\theta$  et  $R_r$  sont les rayons de courbure principaux de la membrane dans les directions  $\vec{\theta}$  et  $\vec{r}$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_\theta} = \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \\ \frac{1}{R_r} = -\frac{d^2h}{dr^2} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Avec :

$$\begin{cases} h \text{ est la flèche d'un point } M(r, \theta, \varphi) \\ D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \text{ est la rigidité en flexion de la plaque} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

En introduisant la valeur des rayons de courbure principaux dans les équations des moments de flexion, puis en écrivant l'équilibre des moments de flexion sur un élément de la membrane, on obtient alors l'équation différentielle de la déformée :

$$\frac{d^3h}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2h}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{D}$$

Où  $Q$  est l'effort de cisaillement par unité de longueur agissant sur une subsection cylindrique de rayon  $r$  tel que :

$$2\pi r Q = \int_0^r 2\pi r P dr \quad (\text{A.15})$$

$P$  étant la pression appliquée sur la membrane.

Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{P}{D} \quad (\text{A.16})$$

### Cas des faibles flèches $1 \gg h/e$

Les constantes d'intégration de l'équation précédente sont déterminées en utilisant le fait que la pente de la surface fléchie est nulle en  $r = 0$  (au centre de la membrane) et  $r = a$  (sur le pourtour). En outre, la flèche est nulle en  $r = a$  (à l'encastrement). Ce qui se traduit par :

$$\left( \frac{dh}{dr} = 0 \right)_{r=0}, \left( \frac{dh}{dr} = 0 \right)_{r=a} \text{ et } (h = 0)_{r=a} \quad (\text{A.17})$$

En utilisant ces relations lors de l'intégration, on peut finalement exprimer  $P$  en fonction de  $h$  :

$$P = \frac{16}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{he^3}{a^4} \quad (\text{A.18})$$

### Cas des grandes flèches $h/e \gg 1$

Lors d'un problème en flexion d'une plaque, lorsque la flèche n'est plus petite devant l'épaisseur mais reste faible par rapport aux autres dimensions, la déformation du plan moyen de la plaque n'est plus nulle. Il apparaît alors des efforts perpendiculaires à ce plan. C'est pourquoi il faut reconsidérer la formulation du problème en prenant en compte cette déformation du plan moyen. Ainsi, la relation  $P = f(h)$  n'est plus linéaire.

Dans la suite, différentes expressions analytiques de la relation  $P = f(h)$  sont présentées

**Formulation de Timoshenko** Deux méthodes ont été utilisées pour déterminer la relation  $P = f(h)$ . La première méthode consiste à prendre en compte la déformation du plan moyen.

La seconde est basée sur des considérations énergétiques. Timoshenko a supposé que l'équation différentielle de la forme de la surface fléchie est la même que pour les petites flèches. L'expression obtenue est alors [TIM61] :

$$P = \frac{16}{3} \frac{Y}{1+v} \frac{e^3 h}{a^4} \left[ 1 + 0,488 \left( \frac{h}{e} \right)^2 \right] \quad (\text{A.19})$$

**Formulation de Lin** Lin a supposé que la membrane déformée est une portion de sphère et que la flèche  $h$  est petite face au rayon  $a$ . En utilisant la même démarche que Timoshenko, la relation  $P = f(h)$  s'écrit alors [LIN90] :

$$P = \left( \frac{7-v}{3} \right) \frac{Y e^3 h}{a^4} \quad (\text{A.20})$$

**Formulation de Beams** En faisant l'hypothèse d'une calotte sphérique, en considérant la flèche  $h$  au centre de la membrane et le rayon initial  $a$  de la membrane circulaire, Beams a utilisé la relation suivante [BEA59] :

$$\sigma = \frac{P a^2}{4 h e} \quad (\text{A.21})$$

En supposant le matériau isotrope et en utilisant le cas ( $a \gg h$ ), i.e. une flèche petite devant le rayon, il a considéré que la déformation est une variation de longueur de la membrane déformée, soit :

$$\varepsilon = \frac{2h^2}{3a^2} \quad (\text{A.22})$$

Alors, la loi de Hooke permet d'écrire  $\sigma = Y \varepsilon$  (où  $Y = \frac{E}{1-\nu}$  est le module module biaxial dans le cas d'un matériau isotrope), d'où l'expression :

$$P = \frac{8Y e h^3}{3a^4} \quad (\text{A.23})$$

**Formulation de Bonnotte** Bonnotte a proposé un développement de la méthode de Timoshenko avec un recalage de la constante  $C = (1,08 - 0,3v) - 0,35 \exp(-0,55\frac{h}{e})$  par la méthode des éléments finis [BON94] :

$$P = \frac{8Ye^3h}{3a^4} \left[ \frac{2}{1+v} + C \left( \frac{h}{e} \right)^2 \right] \quad (\text{A.24})$$

**Formulation générale** Celle-ci permet de regrouper sous une même forme la relation  $P = f(h)$  avec une constante  $C$  différente selon le type de formulation retenu :

$$P = \frac{8Ye^3h}{3a^4} \left[ \frac{2}{1+v} + C \left( \frac{h}{e} \right)^2 \right] \quad (\text{A.25})$$

La constante  $C$  est fonction de  $(h, e, v)$  et peut prendre les formes suivantes :

$C = 1$	Formulation de Beams	
$C = \frac{0,976}{1+v}$	Formulation de Timoshenko	
$C = \frac{7-v}{8}$	Formulation de Lin	(A.26)
$C = (1,08 - 0,3v) - 0,35 \exp(-0,55\frac{h}{e})$	Formulation de Bonnotte	

On peut réécrire cette formulation générale sous la forme de la somme des termes de petits et de grands déplacements :

$$P = \underbrace{\frac{16}{3} \frac{Ye^3h}{a^4(1+v)}}_{\text{Termes petits déplacements}} + \underbrace{C \frac{8Ye^3h}{3a^4}}_{\text{Termes grands déplacements}} \quad (\text{A.27})$$