UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ
ÉCOLE DOCTORALE CARNOT PASTEUR
Laboratoire de mathématiques de Besançon

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

présenté par

Philippe LEBACQUE

QUELQUES CONTRIBUTIONS AUX PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES CORPS GLOBAUX

soutenu publiquement le 27 novembre 2017, devant le jury composé de :

M. Hindry	Professeur, Université Paris Diderot (Rapporteur)
G. Lachaud	D.R. CNRS émérite, Institut de Mathématiques de Marseille
P. Michel	Professeur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Rapporteur)
M. Perret	Professeur, Université de Toulouse II le Mirail
J. Stix	Professeur, Goethe-Universität Frankfurt am Main
M. A. Tsfasman	D.R. CNRS, Laboratoire de Mathématiques de Versailles
S. G. Vlăduţ	Professeur, Aix-Marseille Université (Rapporteur)

QUELQUES CONTRIBUTIONS AUX PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES CORPS GLOBAUX

Philippe Lebacque

À la mémoire d'Alexey et de Tatyana
В память о моих друзьях Алексее и Татьяне

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à Marc Hindry, Philippe Michel et Serge G. Vlăduţ pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches. Un grand merci également à Gilles Lachaud, Marc Perret, Jakob Stix et Michael A. Tsfasman de prendre part au jury. C'est un grand honneur pour moi, tant j'ai pu apprendre de leurs mathématiques et de leurs enseignements en général.

Depuis la fin de ma thèse en 2007, j'ai eu la chance de travailler dans de nombreux laboratoires en France et à l'étranger. Je remercie de tout cœur les membres du laboratoire Poncelet de Moscou pour m'avoir accueilli une trentaine de fois pour des séjours plus ou moins longs, en particulier à Liza, Micha et Sergei qui ont soutenu tous mes projets.

Puis je voudrais remercier Alexander qui m'a fait confiance à la fin de ma thèse et accueilli à Ratisbonne et à Heidelberg dans des conditions idéales. Outre sa remarquable recherche dont l'influence est visible dans ce mémoire, c'est sa gentillesse et sa grande disponibilité à mon égard que je voudrais souligner ici, ainsi que la dédicace improvisée sur mon Cohomology of Number Fields qui est un guide depuis des années.

Je voudrais ensuite exprimer ma gratitude à Ivan pour m'avoir invité pour un an à Nottingham et m'avoir prodigué de très nombreux conseils et enseignements au fil des années.

Je dois aussi beaucoup au laboratoire de mathématiques de Besançon et à l'Université de Franche-Comté, pour le soutien indéfectible qu'ils ont porté à mon projet scientifique. Je remercie encore chaleureusement Christian, pour les nombreuses discussions, mathématiques ou non, que nous avons eues depuis mes années de thèse, pour sa très grande attention envers moi et tous ses conseils.

Pour finir, je ne saurais assez remercier l'équipe GRACE pour leur accueil parfait durant trois années qui se sont écoulées beaucoup trop vite. Merci à Alain, Ben, Daniel et Virgile pour toutes ces discussions passées, présentes et à venir.

Je n'oublie pas non plus mes autres amis mathématiciens ou ex-mathématiciens dont la liste est trop longue pour être inscrite ici, avec une mention spéciale pour Chab, mon plus vieil ami dans le milieu, et pour Jérôme, à qui j'ai coûté bien plus que le taxi et le changement d'avion qui scellèrent notre amitié.

Je voudrais ensuite remercier du fond du cœur Chloé et Fabienne qui me comblent de joie, supportent mes absences et me donnent le courage de surmonter les nombreuses épreuves survenant en mathématiques.

Mes pensées vont enfin à mes amis disparus Tanya et Alexey, sans qui ce mémoire n'aurait pas vu le jour : il est en quelque sorte le récit de l'aventure mathématique qui nous a réunis douze années durant.

Table des matières

Chapitre 1. Introduction à la théorie asymptotique des corps globaux 11
1. Le nombre de points rationnels d'une courbe définie sur un corps fini 11
2. Les invariants de Tsfasman–Vlăduţ, la fonction zêta limite et le théorème de Brauer–Siegel généralisé 13

Chapitre 2. Résultats algébriques autour de la propriété $K(\pi, 1)$ de Schmidt 17
1. Le site étale marqué d'une courbe et la propriété $K(\pi, 1)$ de Schmidt 17
2. Des résultats de Labute et Schmidt 18
3. Au-dessus de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique 18
4. Construction de corps globaux infinis aux invariants prescrits 22
5. Cas de l'égale caractéristique et d'une courbe projective non marquée 24
6. Perspectives 25

Chapitre 3. Familles de fonctions L et de fonctions ζ 27
1. Autour du théorème de Brauer–Siegel 27
2. Fonctions M associées à des familles de formes modulaires 29

Chapitre 4. Variétés sur les corps finis 37
1. Le nombre de points des jacobiennes des courbes définies sur un corps fini 37
2. Recherche actuelle : Tours infinies de surfaces et codes 40

Bibliographie 43

Introduction

L'étude des extensions algébriques infinies de corps globaux revêt de nombreuses facettes. Elle fait appel à des mathématiques très variées telles que la topologie, la théorie des groupes, des représentations, la théorie algébrique des nombres, mais aussi la théorie analytique des nombres, l'analyse fonctionnelle, ou encore les probabilités pour ne citer que celles qui nous intéressent plus particulièrement. Notre passion pour les questions asymptotiques trouve son origine dans son lien étonnant avec des problèmes pratiques relatifs à la construction de codes correcteurs d'erreurs et d'empilements de sphères. A travers ce mémoire je vais ainsi essayer d'illustrer par mes travaux ces différents domaines de recherche liés à l'étude en famille des corps globaux et des variétés algébriques définies sur un corps fini.

La théorie asymptotique des corps globaux et des variétés algébriques telle que nous l'exposons ici naît avec l'apparition des codes géométriques construits par Goppa, dont les paramètres sont bons dès lors qu'on utilise des courbes définies sur un corps fini ayant de nombreux points rationnels en comparaison avec leur genre. Ce nombre de points est contrôlé par les bornes de Weil, et de nombreux mathématiciens, comme par exemple J.-P. Serre, V. Drinfeld, Y. Ihara, H. Stark, R. Schoof, M. Tsfasman, S. Vlăduţ, J. Oesterlé, G. van der Geer, K. Lauter, H. Stichtenoth, A. Garcia (...) se sont intéressés au problème de savoir quel est le nombre maximal de points que peut avoir une courbe de genre donné définie sur un corps fini. Serre a remarqué que le cas où g est petit et le cas où g est grand nécessitent deux approches totalement différentes. C'est cette seconde approche qui est au coeur de nos travaux. Le premier résultat frappant, obtenu par Drinfeld et Vlăduţ, est que les bornes de Weil peuvent être améliorées significativement lorsque le genre tend vers l'infini. Le second, obtenu par Ihara et Tsfasman–Vlăduţ–Zink, établit que la borne de Drinfeld–Vlăduţ est atteinte lorsque le cardinal du corps fini est un carré. Par la suite, de nombreuses constructions, explicites ou non, ont produit de tels exemples. Le cas où ce cardinal n'est pas un carré demeure mystérieux encore aujourd'hui. Parallèlement, Ihara a étudié la situation analogue dans le cas des extensions infinies non ramifées de corps de nombres, et obtenu de même qu'il ne pouvait y avoir beaucoup de places de degré un dans ces extensions.

Se plaçant dans un cadre un peu plus général que celui d'Ihara, Tsfasman et Vlăduţ ont développé une notion de fonction zêta limite qui encode le comportement de données arithmétiques dans des familles de corps globaux, telles que le nombre de points de norme donnée, le nombre de places archimédiennes, le nombre de classes ou encore le produit de celui-ci avec le régulateur, etc. Pour cela, ils ont introduit des invariants pour les extensions algébriques infinies de corps globaux, dont on sait encore peu de choses. Par exemple, on ne sait pas s'il existe des corps globaux ayant une infinité d'invariants non nuls. Dans notre thèse, nous avons obtenu des résultats d'existence de corps globaux avec des propriétés asymptotiques prescrites, que nous avons raffinés par la suite.

Le premier chapitre de ce mémoire reprend une partie de notre article de synthèse ; il rappelle les notions et certains résultats frappants concernant les familles de corps globaux, tandis que le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à ce type de résultats qui utilisent fortement la propriété $K(\pi, 1)$ de Schmidt, et plus généralement à la propriété $K(\pi, 1)$ de Schmidt elle-même.

Les résultats d'Ihara et de Tsfasman–Vlăduţ s'appuient beaucoup sur une étude analytique en famille de la fonctions zêta de Dedekind, et par ailleurs bien des résultats asymptotiques utilisent les formules explicites de Weil. Ses propriétés, en particulier dans la bande critique, méritent d'être regardées de près, non seulement pour leur beauté intrinsèque mais aussi pour les informations arithmétiques qu'elles offrent, par exemple à travers la formule des classes ou, en dimension supérieure, à travers les conjectures de Birch et Swinnerton–Dyer et d'Artin–Tate. Avec Zykin, nous avons ainsi étudié le comportement en famille, dans la bande critique, de la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Dedekind. Enfin, Ihara a considéré la répartition des valeurs prises par la dérivée logarithmique et le logarithme de certaines familles de fonctions L associées à des corps globaux. Il a ainsi étendu de vieux travaux de Bohr, Jensen et Wintner et permis de mieux comprendre les propriétés asymptotiques de familles de corps nombres sur lesquelles la théorie de Tsfasman–Vlăduţ ne donne aucune information nouvelle. Toujours avec Zykin, nous avons obtenu des résultats similaires pour des familles de fonctions L associées à des formes modulaires, apportant une pierre importante à l'étude asymptotique en dimension supérieure. Dans le second chapitre, nous exposerons ces résultats analytiques.

Dans le dernier chapitre, nous revenons sur notre motivation initiale qui concerne le nombre de points des variétés définies sur un corps fini, dans le contexte des jacobiennes de courbes et celui des surfaces algébriques. Nous présenterons dans un premier temps une borne pour le nombre de points des jacobiennes qui est meilleure que les bornes combinatoires connues jusqu'à présent et nous terminerons par nos perspectives de recherche dans ce domaine, évoquant un travail en cours avec Couvreur et Perret.

Quelques notations et conventions utiles

- p et ℓ sont des nombres premiers et r une puissance de p.
- $\log^+ x = \log x$ si $x \geq 1$ et 0 sinon.
- $\Omega(n) = \sum \alpha_p$ si $n = \prod p^{\alpha_p}$ est la décomposition de n en facteurs premiers.
- (CN) désigne qu'une assertion est vraie dans le cas des corps de nombres.
- $(CN-GRH)$ indique qu'une assertion est vraie dans le cas des corps de nombres, sous l'hypothèse de Riemann généralisée.
- (CF) désigne qu'une assertion est vraie dans le cas des corps de fonctions.
- $\delta_{\mathbb{Q}} = 1$ (CN), $\delta_{\mathbb{Q}} = 0$ (CF) et $\delta_{\mathbb{F}} = 1 - \delta_{\mathbb{Q}}$.
- La dépendance dans les paramètres des o, O ou des $\ll$ est indiquée en indice. En l'absence d'indication, les constantes impliquées sont effectives et ne dépendent d'aucun paramètre.

- Si M est $\mathbb{Z}$-module, $M[p]$ désigne le noyau de la multiplication par p et $d_p M := \dim_{\mathbb{F}_p}(M/pM)$ est sa p-dimension.
- Si G est un pro-p-groupe et si $i \geq 0$, $H^i(G)$ désigne le groupe de cohomologie $H^i(G, \mathbb{F}_p)$. De plus, si G admet une présentation finie, posons $d(G) := d_p H^1(G, \mathbb{F}_p)$, $r(G) = d_p H^2(G, \mathbb{F}_p)$, $\chi_2(G) = 1 - d(G) + r(G)$ et (dès que cela a un sens) $\chi(G) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i d_p H^i(G, \mathbb{F}_p)$.
- Si G est un groupe abélien, posons $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Si K est un corps,

- μ_p désigne l'ensemble des racines $p^{\text{èmes}}$ de 1 dans une clôture algébrique de K.
- $\mu_p(K) = \mu_p \cap K$

Si K est un corps global, S et T deux ensembles de places de K, on note :

- $\mathcal{Q}$ le corps $\mathbb{Q}$ (CN), $\mathbb{F}_r(t)$ (CF) ;
- X_K le schéma $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ (CN), la courbe projective lisse abs. irréductible $X/\mathbb{F}_r$ de corps de fonctions K (CF) ;
- n_K le degré $[K : \mathcal{Q}]$;
- D_K le discriminant of K (CN) ;
- g_K le genre de X_K (CF) ou celui de K défini par $g_K = \log \sqrt{|D_K|}$ (CN) ;
- $\mathrm{Pl}_f(K)$ l'ensemble des places finies de K ;
- $\mathrm{N}\mathfrak{p}$ la norme d'une place $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pl}_f(K)$;
- $\deg \mathfrak{p}$ l'entier $\log_r \mathrm{N}\mathfrak{p}$ (CF) ;

- $\Phi_q(K)$ le nombre de places de K de norme q ;
- $\Phi_{\mathfrak{p},q}(K)$ le nombre de places de K de norme q divisant la place $\mathfrak{p}$;
- $\Phi_{\mathbb{R}}(K)$ le nombre de places réelles de K (CN) ;
- $\Phi_{\mathbb{C}}(K)$ le nombre de places complexes de K (CN) :
- $\theta(K,S)$ l'entier 1 si $S=\emptyset$ et K contient les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité, et 0 sinon, et $\theta(K) := \theta(K,\emptyset)$;
- $K_S^T(p)$ ou parfois simplement K_S^T la pro-p-extension maximale de K non ramifiée hors de S et où les places de T sont totalement décomposées. On pose $K_S = K_S^{\emptyset}$ et $K^T = K_{\emptyset}^T$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_S^T/K)$ est noté G_S^T (et on omet de même $\emptyset$ dans la notation) ;
- a_T l'entier $\mathrm{pgcd}(\deg \mathfrak{p},\ \mathfrak{p}\in T)$ (CF), 1 (CN) ;
- $\vartheta(S)$ la quantité $\sum_{\mathfrak{p}\in S} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}$,
- $\vartheta'(S)$ le réel $\log^+ \vartheta(S)$.

Si $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'extensions finies du corps global K et $\mathfrak{p}$ une place de K, on définit lorsque cela a un sens, les limites :

- $\phi_q = \lim\limits_{i\to+\infty} \dfrac{\Phi_q(K_i)}{g_{K_i}}$;
- $\phi_{\mathfrak{p},q} = \lim\limits_{i\to+\infty} \dfrac{\Phi_{\mathfrak{p},q}(K_i)}{g_{K_i}}$;
- $\phi_{\mathbb{R}} = \lim\limits_{i\to+\infty} \dfrac{\Phi_{\mathbb{R}}(K_i)}{g_{K_i}}$;
- $\phi_{\mathbb{C}} = \lim\limits_{i\to+\infty} \dfrac{\Phi_{\mathbb{C}}(K_i)}{g_{K_i}}$.

Si K est un corps de nombres et v une place finie de K, on note

- $\mathcal{K}^\times = \mathbb{Z}_p \otimes K^\times$;
- $\mathrm{Pl}_p = \{v, v|p\}$ l'ensemble des places p-adiques de K et si S est un ensemble de places de K, on pose $S_p := S \cap \mathrm{Pl}_p$ et $S_0 := S \setminus S_p$;
- $K_v^{nr} := \overline{\overline{K_v}^{I_v}}$ la pro-p-extension maximale non ramifiée de K_v ;
- K_v^{cyc} la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K_v (en particulier, si $v \nmid p$, $K_v^{cyc} = K_v^{nr}$) ;
- $K_v^{cr} := K_v^{nr} K_v^{cyc}$, la pro-$p$-extension maximale cyclotomiquement ramifiée de K_v ;
- $\widetilde{I}_v = \mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v^{cyc}K_v^{nr})$, $\widetilde{H}_v = \mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v^{cyc})$, $G_v^{cr} = \mathrm{Gal}(K_v^{cr}/K_v)$ et $G_v^{cyc} = \mathrm{Gal}(K_v^{cyc}/K_v)$.

Chapitre 1

Introduction à la théorie asymptotique des corps globaux

Travail présenté :

— Asymptotic methods in number theory and algebraic geometry, avec Alexey Zykin, paru aux Publications Mathématiques de Besançon, 2011

L'objectif principal de cet article de synthèse est de réunir les résultats asymptotiques obtenus durant les deux ou trois dernières décennies autour de la construction de familles de corps globaux et de variétés définies sur des corps finis ou des corps globaux, et aussi de proposer un contenu en langue anglaise pour populariser les résultats écrits parfois en allemand, français ou russe. Cependant, cette synthèse contient aussi quelques explications de résultats dits folkloriques, pour lesquels aucune autre référence n'est disponible à notre connaissance. Pour faciliter la compréhension de la suite du mémoire, nous profitons de l'occasion pour introduire certains des résultats qui ont inspiré fortement nos recherches postdoctorales.

1. Le nombre de points rationnels d'une courbe définie sur un corps fini

Commençons par rappeler un problème à l'origine de la théorie asymptotique des corps globaux. Soit $\mathbb{F}_r$ le corps fini à r éléments. Pour une courbe projective lisse absolument irréductible (ou plus simplement courbe) C sur $\mathbb{F}_r$ on considère son nombre de points $\Phi_r(C)$ sur $\mathbb{F}_r$.

Soit $g(C)$ le genre de C. Le problème consiste à trouver le nombre maximal $\Phi_r(g)$ des nombres $\Phi_r(C)$ lorsque C décrit l'ensemble des courbes de genre g définies sur $\mathbb{F}_r$:

$$\Phi_r(g) = \max_{g(C)=g} \Phi_r(C).$$

La première borne supérieure a été découverte par André Weil dans les années 1940 comme conséquence directe de sa preuve de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis. Il a prouvé que $\Phi_r(C)$ satisfait à l'inégalité :

$$\Phi_r(C) \leq r + 1 + 2g\sqrt{r}.$$

Si cette borne s'avère très utile en pratique, elle est loin d'être optimale. De nombreux travaux (de J.-P. Serre, V. Drinfeld, Y. Ihara, H. Stark, R. Schoof, M. Tsfasman, S. Vlăduţ, J. Oesterlé, G. van der Geer, K. Lauter, H. Stichtenoth, A. Garcia, etc.) ont porté sur des raffinements de cette borne, mais nous nous intéresserons ici seulement à la situation où le genre est grand, dont le traitement diffère fortement du cas où le genre est petit. Dans ce contexte, le premier résultat frappant améliore la borne d'un facteur 2, c'est la borne de Drinfeld–Vlăduţ [**11**] :

Theorème 1.1 (Drinfeld–Vlăduţ). *Pour toute famille de courbes $\{C_i\}$ sur $\mathbb{F}_r$ de genre tendant vers $+\infty$, on a*

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{\Phi_r(C_i)}{g(C_i)} \leq \sqrt{r} - 1.$$

Cette borne est de plus atteinte (au moins) lorsque r est un carré. On peut en effet construire des familles de courbes (modulaires, Drinfeld, récursives etc) atteignant cette borne. Le cas où r n'est pas un carré reste largement ouvert, bien que des travaux récents de Bassa, Beelen, Garcia et Stichtenoth donnent de nouvelles indications sur ce que pourraient être les bornes asymptotiques optimales dans les cas où r n'est pas premier.

Ce résultat a été grandement amélioré et réinterprété à l'aide de la notion de fonctions ζ limites par Tsfasman et Vlăduţ, conduisant ces deux auteurs à introduire les invariants $\{\phi_q\}$ associés aux familles de corps globaux, invariants qui nous ont beaucoup intéressé tout au long de nos recherches. Cette réinterprétation permet d'espérer construire une théorie analogue en dimension supérieure.

Avant de définir et de rappeler les propriétés de ces invariants, portons notre attention sur le cas des corps de nombres. Pour un corps de nombres K, on note $n_K = [K : \mathbb{Q}]$ son degré et D_K son discriminant. Une question importante à la fois pour elle-même et pour ses très nombreuses applications et implications est de comprendre comment croît D_K. La première borne est celle de la géométrie des nombres, due à Minkowsky. Cette borne a donné lieu à de nombreuses améliorations, par exemple par H. Stark, J.-P. Serre et A. Odlyzko ([**69**], [**63**], [**60**], [**61**]), obtenues par des méthodes analytiques :

Theorème 1.2 (Odlyzko). *Pour toute famille de corps de nombres $\{K_i\}$ on a :*

$$\log|D_{K_i}| \geq A \cdot \Phi_{\mathbb{R}}(K_i) + 2B \cdot \Phi_{\mathbb{C}}(K_i) + o(n_{K_i}),$$

où $\Phi_{\mathbb{R}}(K_i)$ et $\Phi_{\mathbb{C}}(K_i)$ sont le nombre de places réelles et complexes de K_i. Inconditionnellement, on a $A = \log(4\pi) + \gamma + 1 \approx 4.11$, $B = \log(4\pi) + \gamma \approx 3.11$, et, en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH), on peut prendre $A = \log(8\pi) + \gamma + \frac{\pi}{2} \approx 5.37$, $B = \log(8\pi) + \gamma \approx 3.80$, où $\gamma \approx 0.577$ est la constante gamma d'Euler.

Inspirés par leurs travaux sur les courbes, Tsfasman and Vlăduţ ont généralisé cette inégalité en faisant intervenir aussi la contribution des places finies. C'est l'objet de l'inégalité fondamentale décrite au paragraphe suivant.

Enfin, l'une des sources d'inspiration la plus importante est le théorème de Brauer–Siegel. Soit h_K le nombre de classes du corps de nombres K et R_K son régulateur. La version classique du théorème, prouvée par Siegel ([**68**]) dans le cas des corps quadratiques et par Brauer ([**8**]) en général, décrit le comportement du produit $h_K R_K$ en famille. Il trouve son origine dans la conjecture de Gauss sur les corps quadratiques imaginaires, bien qu'il ait de nombreuses applications ailleurs. Rappelons l'énoncé de ce théorème :

Theorème 1.3 (Brauer–Siegel). *Pour toute famille de corps de nombres $\{K_i\}$, on a :*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log(h_{K_i} R_{K_i})}{\log\sqrt{|D_{K_i}|}} = 1$$

dès lors que la famille satisfait aux deux conditions :

(i) $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \frac{n_{K_i}}{\log\sqrt{|D_{K_i}|}} = 0;$

(ii) soit GRH est vérifiée, soit les K_i sont galoisiens sur $\mathbb{Q}$.

La première condition peut être supprimée, et dans ce cas la limite n'est pas nécessairement égale à 1, tandis que la seconde peut être affaiblie en remplaçant l'hypothèse galoisienne par galoisienne par pas. Cette amélioration, due principalement à Tsfasman et Vlăduţ est l'une des grande réussite de la théorie asymptotique des corps globaux. Le résultat correspondant pour les courbes, connu également inconditionnellement, décrit le nombre de points des jacobiennes de courbes : c'est un résultat important aux nombreuses applications, aux empilements de sphères par exemple. L'analogue de ce résultat en dimension supérieure est à présent l'un des enjeux de la théorie, et si une réponse complète est encore loin d'être connue, des travaux importants à ce propos ont été faits ces dernières années par Hindry–Pacheco [**14**], Kunyavskii–Tsfasman [**38**], Griffon [**12**] et très récemment Ulmer.

2. Les invariants de Tsfasman–Vlăduţ, la fonction zêta limite et le théorème de Brauer–Siegel généralisé

Le comportement de données arithmétiques en famille revêt un intérêt propre, mais a aussi de nombreuses applications, en particulier dans le domaine des codes et des empilements de sphères. Le point de vue de Tsfasman et Vlăduţ est de considérer un objet limite plutôt que tous les objets de la famille indépendamment, ici la fonction zêta limite qui encode le comportement asymptotique de ces données à travers son expression et ses valeurs spéciales.

Avant de commencer, rappelons quelques notations pour un corps global K. Notons :

$\mathcal{Q}$	le corps $\mathbb{Q}$ (CN), $\mathbb{F}_r(t)$ (CF) ;
X_K	$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ (CN), la courbe projective lisse abs. irréductible $X/\mathbb{F}_r$ de corps de fonctions K (CF) ;
n_K	$[K : \mathbb{Q}]$;
D_K	le discriminant of K (CN) ;
g_K	le genre de X_K (CF), le genre $\log \sqrt{\lvert D_K \rvert}$ de K (CN) ;
$\mathrm{Pl}_f(K)$	l'ensemble des places finies de K ;
$\mathrm{N}\mathfrak{p}$	le norme d'une place $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pl}_f(K)$;
$\deg \mathfrak{p}$	$\log_r \mathrm{N}\mathfrak{p}$ (CF) ;
$\Phi_q(K)$	le nombre de places de K de norme q ;
$\Phi_{\mathbb{R}}(K)$	le nombre de places réelles de K (CN) ;
$\Phi_{\mathbb{C}}(K)$	le nombre de places complexes de K (CN).

Donnons à présent les définitions relatives aux propriétés asymptotiques des corps globaux. Par *famille* $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps globaux on désignera une suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps globaux, extensions finies du même corps de base ($\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_r(t)$), telle que K_i n'est pas isomorphe à K_j si $i \neq j$, et telle que, dans le cas des corps de fonctions, le corps des constantes de chaque K_i est le même corps fini $\mathbb{F}_r$ pour tout entier i. Dans une famille, la suite des genres $(g_{K_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels corps globaux, à isomorphisme près, de genre plus petit qu'un genre donné g_0. Une *tour* $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ désignera une famille telle que $K_i \subsetneq K_{i+1}$ pour tout i. On appelle enfin corps global infini toute extension algébrique infinie de $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_r(t)$ limite d'une telle tour de corps globaux.

Considérons l'ensemble des paramètres

$$A = \begin{cases} \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \cup \left\{p^k \mid p \text{ premier, } k \in \mathbb{N}^*\right\} & (CN) \\ \left\{r^k \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}. & (CF) \end{cases}$$

A_f désignera $A - \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ dans le cas des corps de nombres, et A dans celui des corps de fonctions.

Soit $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de corps globaux. On dira que $\mathcal{K}$ est *asymptotiquement exacte* si, pour tout $q \in A$, la suite $(\Phi_q(K_i)/g_{K_i})$ admet une limite, que l'on notera alors

$$\phi_q(\mathcal{K}) := \lim_i \frac{\Phi_q(K_i)}{g_{K_i}}.$$

On omettra $\mathcal{K}$ dans la notation dès que cela ne prête pas à confusion. On dira que la famille $\mathcal{K}$ est *asymptotiquement bonne* si elle est asymptotiquement exacte et qu'au moins l'un des ϕ_q, $q \in A$, est non nul. Dans le cas contraire on la dira *asymptotiquement mauvaise*. La limite du ratio n_{K_i}/g_{K_i} sera notée

$$n_\infty(\mathcal{K}) := \lim_{i \to +\infty} \frac{n_{K_i}}{g_{K_i}}$$

lorsqu'elle existe.

Remarquons que de toute famille on peut extraire une famille asymptotiquement exacte. De plus, les tours $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de corps globaux sont toujours asymptotiquement exactes (voir [**71**]) et dans ce cas, les limites ϕ_q ne dépendent que de la limite $\mathcal{K} = \cup K_i$. Les *invariants de Tsfasman-Vlăduţ* $\phi_q(\mathcal{K})$ d'un corps global infini $\mathcal{K}$ sont alors définis comme étant les ϕ_q correspondant à toute tour $\{K_i\}$ telle que $\mathcal{K} = \cup K_i$.

On voit facilement qu'une condition nécessaire à un corps global infini pour être asymptotiquement bon est $n_\infty > 0$, cette condition étant également suffisante dans le cas des corps de nombres. Elle est en particulier vérifiée si le corps est non ramifié hors d'un ensemble fini de places, et modérément ramifié sur un corps global (d'après la formule de Riemann–Hurwitz, voir [**44**] pour les détails). De plus, on peut construire des corps globaux infinis avec un nombre fini de propriétés prescrites, ce sera l'objet de l'un des résultats du chapitre 2.

Ces invariants vérifient une inégalité fondamentale généralisant l'inégalité de Drinfeld-Vlăduţ (voir [**71**]) :

Theorème 1.4 (Inégalités fondamentales de Tsfasman-Vlăduţ). *Pour tout corps global infini, on a :*

$$(CN-GRH)\quad \sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} + (\log\sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} + (\log 8\pi + \gamma)\phi_{\mathbb{C}} \leq 1,$$

$$(CN)\quad \sum_q \frac{\phi_q \log q}{q-1} + (\log 2\sqrt{\pi} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} + (\log 2\pi + \gamma)\phi_{\mathbb{C}} \leq 1,$$

$$(CF)\quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_{r^m}}{r^{\frac{m}{2}}-1} \leq 1,$$

où γ est la constante d'Euler.

Si l'on ne tient pas compte des places finies, on retrouve alors les bornes d'Odlyzko–Serre, tandis que la restriction aux places rationnelles dans le cas des corps de fonctions est la borne de Drinfeld–Vlăduţ.

Définissons alors le défaut $\delta_{\mathcal{K}}$ d'une famille asymptotiquement exacte $\mathcal{K} = \{K_i\}$ de corps globaux comme la différence entre les deux membres de l'inégalité fondamentale sous

GRH

$$(CN) \quad \delta_{\mathcal{K}} = 1 - \sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} - (\log\sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} - (\log 8\pi + \gamma)\phi_{\mathbb{C}}$$

et

$$(CF) \quad \delta_{\mathcal{K}} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_{r^m}}{r^{\frac{m}{2}}-1}.$$

Le défaut est croissant pour l'inclusion des corps globaux infinis ([**44**]) : $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ implique $\delta_{\mathcal{K}} \le \delta_{\mathcal{L}}$. On connait l'existence de corps globaux infinis dont le défaut est nul dans le cas des corps de fonctions sur $\mathbb{F}_r$, lorsque r est un carré. De tels corps sont appelés optimaux et sont très intéressants du point de vue de la théorie de l'information.

Pour des raisons pratiques de correspondance entre corps de fonctions et corps de nombres, définissons également, pour toute place $\mathfrak{p}$ d'un corps global K, tout $q \in A$ et tout corps global infini $\mathcal{K}/K$, les invariants

$$\phi_{\mathfrak{p},q}(\mathcal{K}) = \lim \Phi_{\mathfrak{p},q}(K_i)/g_{K_i},$$

pour toute tour $\{K_i\}$ d'extensions de K de réunion $\mathcal{K}$. Ces limites existent et ne dépendent pas de la tour choisie. Le support de $\mathcal{K}/\mathcal{Q}$ est alors ainsi défini :

$$Supp(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{p} \in Pl(\mathcal{Q}) \mid \exists q \in A \quad \phi_{\mathfrak{p},q} \neq 0\}.$$

L'introduction de fonctions ζ dans ce contexte met en lumière les liens entre les différents résultats que nous venons d'exposer.

On peut définir la fonction zêta d'un corps global infini $\mathcal{K}$ sous la forme suivante (voir [**71**]) :

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s) := \prod_{q \in A_f} (1-q^{-s})^{-\phi_q}$$

ainsi que sa fonction zêta complétée

$$(CN) \quad \tilde{\zeta}_{\mathcal{K}}(s) := e^s 2^{-\phi_{\mathbb{R}}} \pi^{-s\phi_{\mathbb{R}}/2} (2\pi)^{-s\phi_{\mathbb{C}}} \Gamma(s/2)^{\phi_{\mathbb{R}}} \Gamma(s)^{\phi_{\mathbb{C}}} \zeta_{\mathcal{K}}(s),$$

$$(CF) \quad \tilde{\zeta_{\mathcal{K}}} := r^s \zeta_{\mathcal{K}}.$$

Le produit eulérien définissant ces fonctions converge absolument pour $Re(s) \ge 1$ ($Re(s) \ge 1/2$ sous GRH) d'après les inégalités fondamentales. Il définit alors une fonction analytique sur $Re(s) > 1$ ($> 1/2$ sous GRH). De plus, $\zeta_{\mathcal{K}}$ est la limite ponctuelle de $(\zeta_{K_i}^{1/g_{K_i}})$ sur le demi-plan $Re(s) > 1$ (voir [**71**]). Zykin a même démontré que cela restait vrai (après une petite modification) sous GRH pour $Re(s) > \frac{1}{2}$.

L'étude de ces fonctions zêta se trouve alors intimement liée à celle des invariants. L'inégalité fondamentale s'exprime naturellement à l'aide de la dérivée logarithmique $\tilde{Z}_{\mathcal{K}}(s) = \tilde{\zeta'}_{\mathcal{K}}(s)/\tilde{\zeta}_{\mathcal{K}}(s)$ de la fonction zeta limite complétée :

Theorème 1.5 (Inégalités fondamentales). *Pour toute famille asymptotiquement exacte de corps globaux $\mathcal{K} = \{K_i\}$ on a $\tilde{Z}_{\mathcal{K}}(\frac{1}{2}) \ge 0$ sous GRH et $\tilde{Z}_{\mathcal{K}}(1) \ge 0$ inconditionnellement.*

Le défaut admet une interprétation en terme de distribution des zéros ρ de la fonction zêta sur la droite critique. Plus précisément, on associe à tout corps global la mesure de comptage

$$\Delta_K = \frac{\pi}{g_K} \sum_{\rho} \delta_{t(\rho)},$$

où $t(\rho) = \operatorname{Im} \rho$ dans le cas des corps de nombres, $t(\rho) = \frac{1}{\log r} \operatorname{Im} \rho$ dans celui des corps de fonctions et où la somme est prise sur tous les zéros ρ de ζ_K (avec $t(\rho) \in (-\pi, \pi]$ dans le cas des corps de fonctions). On obtient ainsi une mesure sur $\mathbb{R}$ (CN) ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (CF). Le comportement asymptotique de Δ_K a d'abord été traité par Lang [**41**] dans le cas asymptotiquement mauvais, puis par Tsfasman et Vlăduţ en général ([**71**, Theorem 5.2], [**70**, Theorem 2.1]).

Theorème 1.6 (Tsfasman–Vlăduţ). *Supposons GRH. Alors, pour toute famille asymptotiquement exacte $\mathcal{K} = \{K_i\}$, la limite $\lim_{i \to \infty} \Delta_{K_i}$ existe et admet la densité continue*

$$M_{\mathcal{K}}(t) = \operatorname{Re} \tilde{Z}_{\mathcal{K}} \left(\tfrac{1}{2} + it \right).$$

Ainsi la fonction $M_{\mathcal{K}}(t)$ ne dépend que des ϕ_q et on a $\delta_{\mathcal{K}} = \tilde{Z}_{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{2} \right) = M_{\mathcal{K}}(0)$.

Le comportement asymptotique de la fonction ζ et de sa dérivée logarithmique dans la bande critique et plus particulièrement sur la droite critique est donc au centre de cette théorie. C'est important pour le théorème de Brauer–Siegel, où l'on s'intéresse plus particulièrement au voisinage de 1, pour l'estimation du défaut, où l'on observe le voisinage de $\frac{1}{2}$, et aussi pour des variantes en dimension supérieure pour lesquelles c'est ce même voisinage qu'il faut considérer. Dans le chapitre 3, nous montrerons d'abord comment une analyse fine de ces fonctions dans la bande critique conduit à des améliorations pour le théorème de Brauer–Siegel ou pour l'inégalité fondamentale. L'étude de la distribution des zéros conduit naturellement à se demander ce qu'il en est de la distribution des valeurs de ces fonctions, en lien avec d'autres résultats classiques de la théorie analytique des nombres. C'est le point de vue qu'a choisi Ihara après son étude de la constante d'Euler–Kronecker dans les familles de corps globaux [**15**]. Un paragraphe du chapitre 3 concernera alors une extension des travaux d'Ihara et Matsumoto aux formes modulaires, avec pour point de mire l'étude asymptotique de la fonction zêta des courbes $X_0(N)$.

Chapitre 2

Résultats algébriques autour de la propriété $K(\pi, 1)$ de Schmidt

---

Travaux présentés :

- On the cohomological dimension of some pro-p-extensions above the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of a number field, avec J. Blondeau et Ch. Maire, Mosc. Math. Journal 13 (2013), no. 4, 601–619.
- Quelques résultats effectifs concernant les invariants de Tsfasman-Vlăduţ, Annales de l'institut Fourier, 65 no. 1 (2015), p. 63–99
- Свойство $K(\pi, 1)$ для неособых отмеченных кривых над конечными полями, avec A. Schmidt, Изв. РАН. Сер. матем., 2015, том 79, выпуск 5, страницы 193–200

---

1. Le site étale marqué d'une courbe et la propriété $K(\pi, 1)$ de Schmidt

Considérons un schéma régulier X de dimension 1 et un ensemble fini T de points fermés. Dans l'article [**67**], Schmidt a introduit le site étale marqué de (X, T) en considérant la catégorie des morphismes étales $Y \to X$ de type fini tels que, pour tout point fermé $y \in Y$ d'image $x \in T$, l'extension résiduelle $k(y)/k(x)$ soit triviale, et en prenant les familles surjectives comme recouvrements. Il a alors défini de façon usuelle les groupes de cohomologie associés à un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$, noté $H^i_{\text{ét}}(X, T, \mathcal{F})$. Ce site jouit de nombreuses propriétés tout à fait similaires à celle du site étale classique. Par exemple, on peut aussi définir les groupes de cohomologie avec support, prouver l'excision (ce qu'il démontre par ailleurs) et calculer la dimension de ces groupes dans le cas des courbes $(X_K - S, T)$ et du faisceau constant $\mathbb{F}_\ell$. Enfin, considérant seulement les morphismes finis, on montre que cette sous-catégorie vérifie les axiomes d'une catégorie galoisienne, et après choix d'un point géométrique $\bar{x}$ hors de T, on construit le groupe fondamental étale marqué comme groupe d'automorphismes du foncteur fibre usuel $Y \mapsto Mor_X(\bar{x}, Y)$. On le note $\pi_1^{\text{ét}}(X, T)$.

La propriété $K(\pi, 1)$ de Schmidt pour un premier ℓ (voir [**67**]) est vérifiée lorsque les groupes de cohomologie galoisienne et étale à coefficients $\mathbb{F}_\ell$ d'une courbe marquée sont isomorphes. Plus précisément, si X est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, ou une courbe projective lisse absolument irréductible définie sur le corps fini $\mathbb{F}_r$, de corps de fonctions K, S et T deux ensembles finis de points fermés, on dit que $(X-S,T)$ a la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ si les homomorphismes de bord de la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^i(\pi_1^{\text{ét}}(X-S,T),\mathbb{F}_\ell)\to H^i_{\text{ét}}(X-S,T,\mathbb{F}_\ell)$$

sont des isomorphismes pour tout i. Lorsque ℓ est impair, le pro-ℓ-groupe $\pi_1^{\text{ét}}(X-S,T)(\ell)$, classifiant tous les ℓ-revêtements étales de $X-S$ où les points de T sont totalement décomposées, n'est rien d'autre que le groupe de Galois de l'extension $K_S^T(\ell)/K$ (autrement, il faut ajouter les places archimédiennes à S). Cela implique en particulier que $Gal(K_S^T(\ell),K)$ a dimension cohomologique finie, puisque Schmidt a démontré que les H_t^i sont nuls pour $i\geq 4$. Enfin, cette propriété est en quelque sorte générique, puisque quitte à élargir S par un nombre fini de places finies ne divisant pas ℓ, $(X-S,T)$ a la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ. Rappelons et expliquons brièvement quelques résultats centraux obtenus par Schmidt.

2. Des résultats de Labute et Schmidt

Il y a une dizaine d'années, Labute ([**39**]) a obtenu un résultat très troublant, ouvrant la voie à de nombreuses recherches. Il a en effet démontré que, lorsque S était bien choisi, $G_S(K)(\ell)$ était un pro-ℓ-groupe *mild*. En particulier, cela implique que la dimension cohomologique de ce groupe est égale à 2, alors qu'il était présumé avoir toujours dimension cohomologique infinie, dès qu'il est non trivial. A partir de ce travail, Schmidt a dégagé le théorème suivant, à la base de notre article [**4**].

Theorème 2.1 (Schmidt [**66**]). *Soit G un pro-p-groupe de type fini, non pro-p-libre, où p est un premier impair. Supposons que $H^1(G)=U\oplus V$ et*

(i) $\forall\chi_1,\chi_2\in V,\ \chi_1\cup\chi_2=0\in H^2(G)$;

(ii) $H^1(G)\otimes V\xrightarrow{\cup}\!\!\!\!\to H^2(G)$.

Alors $cd(G)=2$.

S'appuyant sur ce résultat, il a en outre démontré le résultat suivant, qui montre que la dimension cohomologique finie de $G_S^T(K)(\ell)$ est habituelle. Il occupe une place centrale dans l'article [**45**].

Theorème 2.2 (Schmidt [**67**]). *Soit S_0 et T_0 deux ensembles finis disjoints de places d'un corps global K, tels que T_0 soit non vide dans le cas des corps de fonctions. Soit $\ell\neq 2, car(K)$. Alors il existe un ensemble fini T de places de K contenant T_0 ainsi qu'un ensemble fini non vide S contenant S_0, dont les places $\mathfrak{p}$ vérifient $\mathrm{N}\mathfrak{p}=1 \mod \ell$ tels que*

(i) $S\cap T=\emptyset$;

(ii) (X_K-S,T) *vérifie la propriété* $K(\pi,1)$ *pour* ℓ *et* $cd_\ell\, G_S^T(K)=2$.

(iii) Toute place $\mathfrak{p}\in S$ se ramifie dans $K_S^T(\ell)$.

La démonstration de ce résultat utilise fortement la théorie de Kummer et le théorème de densité de Cebotarev. Dans notre article [**45**] nous en avons obtenu une version effective afin d'établir un résultat général d'existence pour les invariants de Tsfasman–Vlăduţ.

3. Au-dessus de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique

Les techniques introduites par Tsfasman et Vlăduţ ne permettent pas d'avoir des informations sur les extensions infinies qui admettent une sous-extension abélienne infinie, car tous les invariants sont alors nuls. Pour les étudier, il faut alors faire appel à d'autres méthodes. Dans notre article [**4**], écrit conjointement avec Blondeau et Maire, nous avons adapté au contexte de la théorie d'Iwasawa certaines techniques que Schmidt a utilisé dans son article [**67**], en particulier le théorème 2.1. Nous avons entrepris de construire des extensions infinies au-dessus de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres dont le groupe de Galois a dimension cohomologique finie, et de calculer son nombre minimal de générateurs et de relations. Nous avons démontré pour tout T l'existence d'un ensemble fini S tel que le groupe $\widetilde{G}_S^T$ a dimension cohomologique plus petite que deux, et même obtenu des exemples où elle est égale à un, c'est à dire où le groupe de Galois est libre. Pour ce faire, nous avons démontré un résultat théorique sur le nombre de générateurs et relations, puis établi à l'aide du théorème de Schmidt 2.1 et des calculs locaux de cup-produits que la dimension cohomologique était plus petite que deux, et enfin nous avons produit des exemples explicites avec le logiciel PARI/GP. Expliquons à présent les résultats principaux ainsi que quelques exemples.

Dans ce paragraphe, p désigne un nombre premier impair, K désigne un corps de nombres, S et T deux ensembles finis de places finies de K telle que :

— Pour toute place v de S ne divisant pas p, le complété K_v contient les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité ;

— $S \cap T = \emptyset$;

— $T \subset \mathrm{Pl}_p$.

On écrit $S_p = S \cap \mathrm{Pl}_p$ et $S_0 = S - S_p$.

Considérons $\widetilde{K}_S^T$ la pro-p-extension de K, maximale pour les conditions suivantes :

— $\widetilde{K}_S^T/K$ est localement cyclotomique aux places v de T.

— $\widetilde{K}_S^T/K$ est cyclotomiquement ramifiée hors de S ;

La première propriété signifie que, pour toute place $v \in T$ et toute $w|v$, l'extension $(\widetilde{K}_S^T)_w$ est contenue dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique K_v^{cyc} de K_v. La seconde indique que pour toute $v \notin S$ et toute $w|v$, $(\widetilde{K}_S^T)_w \subset K_v^{nr} K_v^{cyc}$, où K_v^{nr} est l'extension maximale non ramifiée de K_v. Une telle extension maximale existe bien, par stabilité de ces propriétés par compositum. Elle est en outre galoisienne par maximalité, de groupe de Galois $\widetilde{G}_S^T = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}_S^T/K)$.

La situation où S contient les places p-adiques de K et où $T = \emptyset$ est bien connue (voir [**59**]). Dans ce cas, $Gal(K_S/K)$ a dimension cohomologique 2. Lorsque S ne les contient pas toutes, et lorsque $T = \emptyset$, Schmidt a aussi démontré que la dimension cohomologique est égale à 2 après l'ajout de places dans S. De plus, le groupe $\widetilde{G}_S^{\emptyset}$ a été étudié en profondeur par Salle [**62**], et le groupe $\widetilde{G}_{\emptyset}^T$ par Jaulent et Soriano [**30**], Jaulent et Maire [**28**] ou encore Assim [**1**]. Dans ces situations, les groupes admettent une présentation finie, et une estimation de la caractéristique d'Euler a également été donnée. Jusqu'alors, aucun article n'avait traité le cas où S et T sont tous les deux non vides. Notons qu'enfin ces groupes continuent d'être étudiés, comme en témoigne l'article récent de Mizusawa [**56**].

L'estimation de la p-dimension de $\widetilde{G}_S^T$ et de sa caractéristique d'Euler passe classiquement par l'introduction d'un radical kummerien qui contrôle l'obstruction au principe local-global dans notre contexte. Posons :

$$\widetilde{V}_S^T = \{x \in \mathcal{K}^\times, x \in \mathcal{J}^p \prod_{v \notin S \cup T} \widetilde{\mathcal{U}}_v \prod_{v \in T} \mathcal{N}_v\}/\mathcal{K}^{\times p}.$$

Les groupes intervenant ici sont les suivants :

— $\mathcal{K}^\times = \mathbb{Z}_p \otimes K^\times$,

— $\mathcal{N}_v$ est formé des éléments de $\mathcal{K}_v$ qui sont des normes dans K_v^{cyc}/K_v;

— $\widetilde{\mathcal{U}}_v$ est le groupe des unités localement cyclotomiques $\mathcal{N}_v \cap (\mathbb{Z}_p \otimes U_v)$: c'est le groupe des unités qui sont des normes dans K_v^{cyc}/K_v;

— $\mathcal{J} = \mathcal{J}_K$ est le produit restreint sur les places v de K des groupes $\mathcal{K}_v^\times := \varprojlim_n K_v^\times/(K_v^\times)^{p^n}$, relativement aux groupes $\mathcal{U}_v$.

Le dual de ce groupe contrôle le groupe

$$Ш(\widetilde{G}_S^T) = \ker \left(H^2(\widetilde{G}_S^T) \to \bigoplus_{v\in S}^{*} H^2(\overline{G}_v) \oplus \bigoplus_{v\in \mathrm{Pl}_p - (S_p\cup T)} H^2(G_v^{cr}) \right),$$

où $\overline{G}_v := \mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v)$ et $G_v^{cr} = Gal(K_v^{nr}K_v^{cyc}/K_v)$ et où la première somme est privée d'une place dans le cas où K contient les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité et S n'est pas vide.

Énonçons le premier résultat de notre travail.

Theorème 2.3. *Soient S, T deux ensembles disjoints de places de K tels que $T \subset Pl_p$ et K_v contienne les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité pour tous les $v \in S - Pl_p$. Alors on a :*

(i) $d_p(\widetilde{G}_S^T) = -(\Phi_\mathbb{R} + \Phi_\mathbb{C} + |T| - 1 + \theta(K)) + |\mathrm{Pl}_p - S_p| + \sum_{v\in S_p} ([K_v : \mathbb{Q}_p] + \theta(K_v)) + |S_0| + d_p(\widetilde{V}_S^T)$;

(ii) $d_p Ш(\widetilde{G}_S^T) \leq d_p(\widetilde{V}_S^T)$;

(iii) $d_p H^2(\widetilde{G}_S^T) \leq d_p(\widetilde{V}_S^T) + |S_0| + |\mathrm{Pl}_p - (S_p \cup T)| + \sum_{v\in S_p} \theta(K_v) - \theta(K) + \theta(K, S)$;

où $\theta(K, S), \theta(K) = \theta(K, \emptyset), \theta(K_v), \in \{0, 1\}$ valent 1 si $S = \emptyset$ et K (respectivement K_v) admet des racines $p^{\text{èmes}}$ de 1, et 0 sinon.

Esquisse de preuve : Le premier point est un calcul classique, provenant des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \widetilde{V}_S^T & \longrightarrow & V^T & \longrightarrow & \prod_{v\notin T}\mathcal{U}_v \prod_{v\in T}\mathcal{K}_v^\times/(\widetilde{\mathcal{U}}_S^T \prod_v \mathcal{U}_v^p) & \longrightarrow & {}_p\widetilde{G}_S^{T,ab} \\ &&&&&&&& \downarrow \\ &&&&&&&& {}_pG^{T,ab} \end{array}$$

où $V^T = \left(\prod_{v\notin T}\mathcal{U}_v \prod_{v\in T}\mathcal{K}_v^\times \mathcal{J}^p\right) \cap \mathcal{K}^\times/\mathcal{K}^{\times p}$, et

$$1 \longrightarrow E_K^T/(E_K^T)^p \longrightarrow V^T \longrightarrow G^{T,ab}[p] \longrightarrow 1 ,$$

où E_K^T est le groupes des T-unités de K.

Les deuxième et troisième points sont beaucoup plus techniques. Il s'agit de comprendre l'égalité

$$\ker\left(H^2(\widetilde{G}_S^T) \to H^2(\overline{G})\right) = \ker\left(H^2(\widetilde{G}_S^T) \to \bigoplus_{v\in S}^{*} H^2(\overline{G}_v)\right)$$

(avec les morphismes naturels) et ainsi de voir d'abord $Ш(\widetilde{G}_S^T)$ comme un sous-groupe de $\ker\left(H^2(\widetilde{G}_S^T) \to H^2(\overline{G})\right)$.

Puis, par l'utilisation de suites exactes d'inflation-restriction, on parvient à construire une injection de $Ш(\widetilde{G}_S^T)$ dans le conoyau de l'application naturelle

$$H^1(\overline{G})/H^1(\widetilde{G}_S^T) \to \bigoplus_{v\notin S\cup T} H^1(\overline{G}_v)/H^1(G_v^{cr}) \oplus \bigoplus_{v\in T} H^1(\overline{G}_v)/H^1(G_v^{cyc}).$$

Puis la théorie du corps de classes, un principe local-global pour les puissance $p^{\text{èmes}}$ ainsi qu'une bonne analyse des extensions locales cyclotomiquement ramifées permettent d'identifier le dual de ce conoyau à $\widetilde{V}_S^T$. La fin de la preuve se déduit des calculs de p-dimension des H^2 locaux. Enfin, signalons que cette preuve s'appuie à la fois sur le cas classique pour les groupes G_S^T et sur les travaux de Salle ([**62**]). □

COROLLAIRE 2.4. *Supposons que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) K *contient les racines* $p^{\text{èmes}}$ *de* 1.

(ii) $|S| = 1$ *et* $S \cup T = Pl_p$ *;*

(iii) K *n'admet pas de p-extension non triviale non ramifiée hors de* T *et totalement décomposée en la place de* S.

Alors $\widetilde{G}_S^T$ *est un pro-p-groupe libre à* $d(\widetilde{G}_S^T) = 1 - (\Phi_{\mathbb{R}} + \Phi_{\mathbb{C}}) + [K_{v_0} : \mathbb{Q}_p]$ *générateurs, où* v_0 *est la place de* S.

EXEMPLE 2.5. Soit $a \equiv 1 \bmod 3$ un entier et θ un racine de $X^3 + aX + 1$. Soit $K = \mathbb{Q}(\theta, \zeta_3)$ (ici $p = 3$). Il existe une place v_0 de K divisant 3 d'indice d'inertie 4. Soit v_1 la seconde place de K divisant 3. Soit $S = \{v_0\}$ et $T = \{v_1\}$.

On peut alors vérifier (par exemple avec PARI/GP) que, pour certaines valeurs de a, il n'y a pas de 3-extension de K non ramifiée hors de T (par exemple $a = 1$, $a = 4$...) Dans ces cas là, $\widetilde{G}_S^T$ est isomorphe au pro-3-groupe libre à 2 générateurs.

On peut également en déduire que sous certaines conditions, le groupe $\widetilde{G}_S^T$ n'est pas p-adique analytique. Notre second théorème adapte les méthodes de Schmidt à notre contexte.

THEORÈME 2.6. *Soit* K *un corps de nombres ne contenant pas les racines* $p^{\text{èmes}}$ *de l'unité.*

Soient S' *et* T *deux ensembles finis de places finies de* K *telles que* $S' \cap T = \emptyset$. *Alors il existe un ensemble fini* S *de places finies de* K *tel que*

(i) $S' \subset S$ *et* $(S - S') \cap \mathrm{Pl}_p = \emptyset$ *;*

(ii) le pro-p-groupe $\widetilde{G}_S^T$ *a dimension cohomologique au plus égale à* 2 *;*

(iii) $\chi(\widetilde{G}_S^T) = \Phi_{\mathbb{R}} + \Phi_{\mathbb{C}} - \sum_{v\in S_p}[K_v : \mathbb{Q}_p]$ *où* $\chi(\widetilde{G}_S^T)$ *est la caractéristique d'Euler associée au groupe* $H^*(\widetilde{G}_S^T, \mathbb{F}_p)$.

Esquisse de preuve : La première étape de la preuve consiste en l'ajout de places dans S' de sorte que, pour T fixé, $\widetilde{V}_S^T$ soit trivial. Cette propriété reste vraie lorsqu'on ajoute encore des places à S' par la suite. Cela induit que le groupe $Ш(\widetilde{G}_S^T)$ est trivial et donc que les relations sont toutes locales. Puis, on choisit un ensemble fini de places $\mathbf{T}$ de K tel que

- $T \subset \mathbf{T}$ et $\mathbf{T} \cap \mathrm{Pl}_p = T \cap \mathrm{Pl}_p$;
- $Cl_K^{\mathbf{T}}[p] = \{1\}$.

C'est une condition technique utile pour construire un ensemble de places $S = S_n \cup S'$ tel que
$$H^1(\widetilde{G}_S^{T,el}) \simeq H^1(\widetilde{G}_{S'}^{T,el}) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{q}\in S_n} H^1(\mathrm{Gal}(K_{\{\mathfrak{q}\}}^{\mathbf{T},el}/K)),$$
tel que l'on puisse calculer le cup-product
$$\begin{array}{ccc} H^1(\widetilde{G}_S^T) \times H^1(\widetilde{G}_S^T) & \xrightarrow{\cup} & H^2(\widetilde{G}_S^T) \\ (x,y) & \mapsto & x \cup y \end{array}$$
à l'aide des calculs locaux dans
$$H^2(\widetilde{G}_S^T) \hookrightarrow \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in S_{old}} H^2(\overline{G}_{\mathfrak{p}}) \oplus \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Pl}_p-(S_p\cup T)} H^2(G_{\mathfrak{p}}^{cr}) \oplus \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{q}\in S_{new}} H^2(\overline{G}_{\mathfrak{q}})$$
et conclure en utilisant le théorème de Schmidt 2.1. Ici, nous ne donnerons pas les détails très techniques de la preuve, qui s'appuie sur les travaux de Schmidt, sur un théorème miroir de Gras–Meunier, sur la théorie du corps de classes, sur le théorème de densité de Cebotarev et sur une analyse fine de la situation localement cyclotomique pour le calcul des cup-produits dont on veut que certains soient nuls, tout en engendrant le H^2 global. □

4. Construction de corps globaux infinis aux invariants prescrits

L'article [**71**] se conclut par une série de questions, l'une d'elle étant de savoir s'il existe un corps global infini avec un ensemble fini d'invariants non nuls. Dans notre thèse (voir [**44**]), nous avons répondu à cette question par l'affirmative, ainsi qu'à une autre : existe-t-il un corps global infini asymptotiquement bon ayant un ensemble prescrit d'invariants nuls. Deux autres questions naissent naturellement de ce travail.

Question 2.7. Existe-t-il un corps global infini avec une infinité d'invariants non nuls ?

Cette question est un des grands défis concernant les corps globaux infinis. En effet, les techniques algébriques ne permettent de contrôler qu'un nombre fini de places, tandis que les méthodes analytiques ne détectent pas les ensembles infinis de densité analytique nulle. Et c'est à cette frontière qu'il faut chercher pour y répondre. Dans notre thèse, nous avions obtenu à ce propos l'existence de corps globaux infinis ayant une infinité de places totalement décomposées, et dont la densité des places ramifiées est nulle (mais possiblement en nombre infini), *cf.* [**44**, Th. 6.9].

Question 2.8. Existe-t-il un corps global infini ayant ces deux propriétés à la fois ?

On peut répondre à celle-ci en toute généralité grâce aux travaux de Schmidt sur la propriété $K(\pi,1)$, avec une estimation du défaut. Avant d'énoncer ce résultat très important, obtenu dans [**45**], signalons qu'il a été précisé dans le cas des corps de fonctions par Hess-Stichtenoth-Tutdere [**13**], avec une amélioration en terme de défaut.

Theorème 2.9. *Soit $P = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\} \subset Pl_f(\mathcal{Q})$, non vide dans le cas des corps de fonctions. Soient, pour tout $i = 1\dots n$, n_i entiers distincts $d_{i,1}, \dots, d_{i,n_i}$. Soit un ensemble fini $I \subset Pl_f(\mathcal{Q})$ tel que $I \cap P = \emptyset$. On pose $N = \mathrm{ppcm}(n_i)_i\, \mathrm{ppcm}(d_{i,j})_{i,j}$. Alors il existe trois fonctions strictement positives $f(P,N)$, $g(P,I)$ $h(P,n_i,d_{i,j})$ et un corps global infini $\mathcal{K}$, totalement réel dans le cas des corps de nombres, tels que :*

(i) $I \cap Supp(\mathcal{K}) = \emptyset$.

(ii) Pour tout $i = 1\dots n$, et tout $j = 1\dots n_i$, $\phi_{\mathfrak{p}_i, \mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}} = \frac{n_\infty}{n_i d_{i,j}} > 0$.

(iii) $\phi_{\mathbb{R}} = n_\infty$ *(CN).*

(iv) $n_\infty \geq (f(P,N) + g(P,I))^{-1}$ *et* $\delta(\mathcal{K}) \leq 1 - \dfrac{h(P,n_i,d_{i,j})}{f(P,N)+g(P,I)}$.

Sous GRH*, on peut prendre*

$$h(P,n_i,d_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{\frac{d_{i,j}}{2}} - 1} + \delta_{\mathbb{Q}} \left(\log 8\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right),$$

et si r est premier avec N,

$$f(P,N) \ll a^{\Omega(N)} \left\{ (1+|P|)\log N + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} N^2 \right\},$$

où $a > 1$ est une constante effective, et

$$g(P,I) \ll |P|(\vartheta'(P) + \log^+ |I| + \log^+ \vartheta'(I)) + \vartheta'(I)$$
$$+ (|P|^2 + |I| + 1)(1 + \delta_{\mathbb{F}} \log a_P).$$

Lorsque r n'est pas premier avec N, on obtient dans (iv) une estimation un peu plus faible.

Esquisse de preuve : On construit ce corps global infini sous la forme d'un compositum $\mathcal{Q}_S^T(\ell)L$, $\ell \neq car(\mathcal{Q})$, ayant les propriétés suivantes :

— L est une extension finie de $\mathcal{Q}$ ayant des places de norme $\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}$ au-dessus des $\mathfrak{p}_i$,

— $\mathrm{cd}\, Gal(\mathcal{Q}_S^T(\ell)/\mathcal{Q}) = 2$,

— S est un ensemble fini de places, disjoint de I, ne contenant que des places modérées,

— $P \subset T$,

— les places de I ne sont pas totalement décomposées dans $\mathcal{Q}_S^T(\ell)/\mathcal{Q}$.

En effet, un tel compositum est modérément ramifié sur L, non ramifié en dehors d'un ensemble fini, impliquant $n_\infty > 0$. Comme les places de L au-dessus des $\mathfrak{p}_i$ sont totalement décomposées, on en déduit la positivité des $\phi_{\mathfrak{p}_i, \mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}}$. Enfin, les places de I n'étant pas totalement décomposées, leur degré d'inertie est infini dans $\mathcal{Q}_S^T(\ell)/\mathcal{Q}$ et donc dans $\mathcal{Q}_S^T(\ell)L/L$, et ainsi les $\phi_{\mathfrak{p},q}$ correspondant sont tous nuls.

Résumons les étapes de la preuve.

– On obtient d'abord une version effective un peu modifiée du théorème de densité de Cebotarev, valable dans le cas des corps de nombres aussi bien que dans celui des corps de fonctions, afin de pouvoir choisir hors d'un ensemble fini des places de Frobenius donné tout en contrôlant leur norme.

– Nous obtenons ensuite des majorations générales de genre et du nombre de classes en fonction du discriminant, majorations techniques utiles pour les différentes estimations.

– Nous démontrons la version effective suivante d'une version faible du théorème de Grunwald-Wang

Proposition 2.10. *Soit k un corps global, T (non vide dans le cas des corps de fonctions) et I deux ensembles disjoints de places finies de k et ℓ un nombre premier. Alors il existe une extension abélienne K/k (comprenant éventuellement une extension du corps des constantes) d'exposant ℓ, non ramifiée hors d'une unique place finie $s \notin T \cup I$, modérément ramifiée si $\ell \neq car(k)$, telle que les places de T sont totalement décomposées et celles de I ont pour degré d'inertie ℓ. De plus g_K peut être borné explicitement par une fonction de ℓ, $\#I$, $\#T$, n_k et g_k.*

Lorsque $\ell \neq car(k)$, on l'obtient par composita à l'aide d'un théorème miroir de Gras, du théorème de densité de Cebotarev et de la théorie de Kummer. On estime le degré et le genre de K grâce à la version effective du théorème de Cebotarev qui permet d'estimer la norme de s, aux estimations de genre et de nombre de classes, en s'appuyant aussi sur des résultats de Shafarevich.

Lorsque $\ell = car(k)$, c'est le théorème d'approximation forte qui permet d'obtenir le résultat, par de jolis arguments employés plus tard dans [**46**]. Dans ce cas, on peut choisir s, ce qui permet de réduire fortement les bornes, mais ce qu'on gagne est perdu au moment du calcul du genre à cause de la ramification sauvage. La majoration obtenue finalement est alors à peine plus faible que dans le cas modéré.

– Par utilisations successives de ce résultat, on construit le corps L, une extension finie de $\mathcal{Q}$ ayant des places de norme $\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}$ au-dessus des $\mathfrak{p}_i$ (dont on connaît le nombre) et pour lequel on a $g_L/n_L \leq f(P,N)$.

– On prouve une version explicite du théorème de Schmidt 2.2, que l'on utilise en plus du théorème de Grunwald–Wang pour construire l'extension infinie $\mathcal{Q}_S^T(\ell)/\mathcal{Q}$, telle que S soit fini et modéré, $(X - S, T)$ ait la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ, et que les places de I n'y soient ni ramifiées, ni totalement décomposées. Notre version explicite nous donne les informations sur S dont nous avons besoin pour estimer le défaut. Le fait que les places de I ne soient pas totalement décomposées impose que leur degré d'inertie est infini, car la finitude de dimension cohomologique du groupe de Galois impose que les éléments de Frobenius soient ou bien triviaux, ou bien d'ordre infini.

– En prenant le compositum, on obtient un corps global infini jouissant des propriétés voulues, le défaut étant obtenu par un calcul de genre. Il admet trois contributions : l'une $h(P, n_i, d_{i,j})$, positive, venant des places totalement décomposées, et deux autres intervenant négativement, l'une $f(P,N)$ provenant du genre de L, et l'autre $g(P,I)$ provenant de la taille des éléments de S (lui même fonction de P et I). $\square$

5. Cas de l'égale caractéristique et d'une courbe projective non marquée

Le théorème 2.2 de Schmidt laisse ouvertes plusieurs questions très intéressantes. Par exemple, il ne traite pas le cas où $\ell = 2$, où $\ell = car(k)$ ni celui où $S = \emptyset$. Cette dernière question est également captivante pour la théorie de Tsfasman et Vlăduţ, car même dans le cas où ℓ est la caractéristique, le corps $k^T(\ell)$ est asymptotiquement bon. Nous avons alors étudié le cas où k est un corps de fonctions et où S est quelconque, dans notre article [**46**] écrit avec Schmidt.

Soit X une courbe projective lisse absolument irréductible, définie sur le corps fini $\mathbb{F}_r$, de corps de fonctions k. Soient S et T deux ensembles disjoints de points fermés de X. Voici les résultats obtenus.

THEORÈME 2.11. *Supposons que* $\ell = \mathrm{car}(\mathbb{F}_r)$.

(1) *Si* $S \neq \emptyset$, *alors* $(X - S, T)$ *a la propriété* $K(\pi,1)$ *pour* ℓ *et* $cd\, G_S^T(k) = 1$.
(2) *Si* $T = \emptyset$, *alors* $(X - S, T)$ *a la propriété* $K(\pi,1)$ *pour* ℓ *et* $cd\, G_S(k) \leq 2$.
(3) *Supposons* $S = \emptyset$ *et* $T \neq \emptyset$.
  (i) *Si* $\mathrm{Pic}(X)[\ell] = 0$, *alors* (X,T) *a la propriété* $K(\pi,1)$ *pour* ℓ *si et seulement si* T *admet un unique point* x *et* $p \nmid \deg x$. *Dans ce cas* $\pi_1(X,T)(\ell) = 1$.
  (ii) *Si* $\mathrm{Pic}(X)[\ell] \neq 0$ *et*

$$\sum_{x \in T} \frac{\deg(x)}{r^{\deg(x)/2} - 1} > g_X - 1,$$

alors $\pi_1(X,T)(\ell)$ est fini et (X,T) n'a pas la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ.

Enfin, nous considérons le cas de la courbe X lorsque $\ell \neq \mathrm{car}(\mathbb{F}_r)$.

THEORÈME 2.12. *Supposons que $\ell \neq \mathrm{car}(\mathbb{F}_r)$. Alors X a la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ si et seulement si $\mu_\ell(\mathbb{F}_r) = 1$ ou $\mathrm{Pic}(X)[\ell] \neq 0$.*

D'autre part, si $\mu_\ell \subset \mathbb{F}_r$ et $\mathrm{Pic}(X)[\ell] = 0$ on a

$$\pi_1^{et}(X)(\ell) \cong \pi_1^{et}(\mathbb{F}_r)(\ell) \cong \mathbb{Z}_\ell.$$

En particulier, $H^i(\pi_1^{et}(X)(\ell), \mathbb{F}_\ell)$ est toujours fini et est trivial si $i > 3$.

Esquisse de preuve : La preuve du premier théorème repose d'abord sur des calculs de la cohomologie étale de la courbe marquée $(X - S, T)$ à « coefficients $\mathbb{F}_\ell$ ». Par excision, on calcule d'abord les groupes de cohomologie locaux, puis on démontre encore par l'excision et l'approximation forte que $H^i(X - S, T, \mathbb{F}_\ell) = 0$ pour $i \geq 3$, que $H^2(X - S, T, \mathbb{F}_\ell) = 0$ si $S \neq \emptyset$ et que l'on a la suite exacte

$$0 \to H^1(X-S,T) \to H^1(X-S) \to \bigoplus_{x \in T} H^1_{nr}(k_x) \to H^2(X-S,T) \to H^2(X-S) \to 0,$$

où les coefficients sont tous $\mathbb{F}_\ell$. De $H^i(X - S, T, \mathbb{F}_\ell) = 0$ pour $i \geq 3$, on déduit que si $G_S^T(k)(\ell)$ est fini et non trivial (et a donc dimension cohomologique infinie), $(X - S, T)$ n'a pas la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ.

D'autre part, lorsque $S \neq \emptyset$, on déduit de $H^i(X - S, T, \mathbb{F}_\ell) = 0$ pour $i \geq 2$ que $(X - S, T)$ a la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ et que $cd\, G_S^T(k) \leq 1$. Mais $G_S^T(k)$ n'est pas trivial, d'après la suite exacte

$$0 \to H^1(X-S,T) \to H^1(X-S) \to \bigoplus_{x \in T} H^1_{nr}(k_x) \to 0$$

où $\bigoplus_{x\in T} H^1_{nr}(k_x)$ a $\mathbb{F}_\ell$-dimension finie tandis que $H^1(X - S)$ a dimension infinie. On montre au passage que

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^i(X,T,\mathbb{F}_\ell) = \#T,$$

formule pour la caractéristique d'Euler Poincaré démontrée en établissant la formule pour $T = \emptyset$ et la suite exacte à cinq termes obtenues ci-avant. Cette formule admet une généralisation aux surfaces, comme nous le montrons avec Couvreur et Perret. Le cas où $S = \emptyset$ et $T \neq \emptyset$ dans le théorème se déduit d'un résultat classique d'Ihara et d'observations sur le groupe de Galois $G^T(k)$, alors fini.

Le second théorème se déduit par passage à la courbe $\widetilde{X} = X \times_{\mathbb{F}_r} \widetilde{\mathbb{F}}_r$, où $\widetilde{\mathbb{F}}_r$ est la pro-ℓ-extension maximale de $\mathbb{F}_r$. En observant que $H^2(\widetilde{X}) = \mu_\ell(k)^*$, on obtient que $\widetilde{X}$ et donc X a la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ si $\mu_\ell(\mathbb{F}_r) = 1$. Puis, par des arguments de cohomologie galoisienne, faisant agir le groupe $G = G(\overline{\mathbb{F}}_r, \widetilde{\mathbb{F}}_r)$ d'ordre surnaturel premier à ℓ sur $H^1(\bar{X}, \mathbb{F}_\ell)$ et $T = \pi_1^{ab}(\bar{X})(\ell)$ on parvient à obtenir le résultat à l'aide d'un lemme qui nous a été communiqué par J. Stix. □

6. Perspectives

Rassemblons ici les questions ouvertes qui appellent à une réflexion ultérieure, en plus de celles déjà posées dans ce chapitre.

QUESTION 2.13. Quelle est la fonction ζ de $K_S^T(\ell)$, lorsque $cdG_S^T(\ell) = 2$?

Cette question est intimement liée à la décomposition des places dans $K_S^T(\ell)/K$, puisqu'elles seules produisent des facteurs non triviaux. Elle est importante car les seuls exemples de corps globaux infinis dont nous connaissons la fonction ζ sont les corps asymptotiquement mauvais et les corps de fonctions infinis asymptotiquement bons construits à partir de corps de fonctions infinis optimaux ou bien construits récursivement. Ces corps sont de bons candidats pour être les premiers corps de nombres infinis asymptotiquement bons dont on connaîtrait la fonction ζ.

Question 2.14. Que peut-on dire de $Gal(K^T(p)/K)$, lorsque K est un corps de fonctions de caractéristique p?

On pourrait débuter par l'étude de l'application naturelle $H^1(X) \to \bigoplus_{x \in T} H^1_{nr}(k_x)$, et essayer de contrôler son conoyau.

Question 2.15. Que reste-t-il lorsque X n'est plus une courbe, mais une variété de dimension supérieure ?

Cette question admet déjà des réponses partielles. Dans une récente prépublication, Schmidt a démontré que son site marqué jouit de bonnes propriétés également en dimension supérieure. Grâce à l'excision et au théorème de pureté, on démontre alors que bien des résultats ici sont transposables à la dimension supérieure. C'est l'objet d'un travail en cours avec Couvreur et Perret.

Chapitre 3

Familles de fonctions L et de fonctions ζ

Travaux présentés :

- On logarithmic derivatives of zeta functions in families of global fields, avec A. Zykin. IJNT 7 (2011), no.8, 2139–2156
- On M-functions associated with modular forms, avec A. Zykin, prépublication.

---

1. Autour du théorème de Brauer–Siegel

La théorie asymptotique des corps globaux repose sur deux aspects : l'un, analytique, étudie le comportement en famille des fonctions ζ et donne beaucoup d'information a priori, et l'autre, algébrique, permet de garantir que des objets limites non triviaux existent. Le théorème de Brauer–Siegel, à la fois à son origine et à son point culminant, rend compte du comportement autour de $s = 1$ des fonctions ζ de Dedekind en famille. L'inégalité fondamentale concerne quant à celle leur comportement en $s = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour obtenir ces deux résultats, il est important d'établir des résultats dans la bande critique, là où les produits eulériens ne convergent plus. En dimension supérieure, ces deux problèmes se superposent. En effet, l'analogue du théorème de Brauer–Siegel concerne aussi la valeur spéciale au milieu de la bande critique. Dans leur approche à ce problème, Kunyavskii et Tsfasman [**38**] étudient le cas d'une courbe elliptique fixée et considèrent des changements de base par une famille de corps globaux asymptotiquement bonne. Pour démontrer un analogue du théorème de Brauer–Siegel, on est alors amené à étudier soigneusement le comportement des fonctions ζ de Dedekind de ces corps globaux dans la bande critique. C'est le point de départ de notre article [**47**], écrit avec Alexey Zykin. Nous insistons enfin sur le fait que J.-F. Burnol nous a apporté une aide technique très précieuse lors de la démonstration du théorème principal.

Ainsi, dans cet article, nous étudions le comportement en famille de la dérivée logarithmique de la fonction ζ des corps globaux au voisinage de la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Les résultats effectifs que l'on obtient au moyen des formules explicites de Weil sont alors appliqués au théorème de Brauer-Siegel dont on déduit une amélioration significative dans sa version explicite. On met également en évidence les problèmes qui surviennent en $s = \frac{1}{2}$ et les limites de cette méthode pour l'étude des valeurs spéciales limites. Les techniques employées ici sont principalement analytiques (transformées de Mellin, distributions) mais aussi combinatoires dans le cas des corps de fonctions.

Rappelons l'écriture que nous avons adoptée pour la fonction ζ de Dedekind du corps global K

$$\zeta_K(s) = \prod_q (1 - q^{-s})^{-\Phi_q},$$

où le produit est pris sur les puissances q de nombres premiers et où $\operatorname{Re} s > 1$. On note

$$Z_K(s) = -\sum_q \frac{\Phi_q \log q}{q^s - 1}$$

sa dérivée logarithmique. Son comportement au voisinage de $s = \frac{1}{2}$ est décrit par le théorème suivant, en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée dans le cas des corps de nombres. Énonçons nos résultats principaux.

THEORÈME 3.1. *Soient K un corps global, $N \geq 10$ un entier et $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ tels que $\epsilon_0 = \operatorname{Re}\epsilon > 0$. Alors, on a :*

$$(CF) \ \sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{r^f}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1} + Z_K\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) + \frac{1}{(\epsilon - \frac{1}{2})\ln r} = O\left(\frac{g_K}{\epsilon_0 r^{\epsilon_0 N}}\right) + O\left(r^{\frac{N}{2}}\right).$$

$$(CN - GRH) \ \sum_{q \leq N} \frac{\Phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon} - 1} + Z_K\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) + \frac{1}{\epsilon - \frac{1}{2}} =$$

$$= O\left(\frac{|\epsilon|^4 + |\epsilon|}{\epsilon_0^2}(g + n\log N)\frac{\log^2 N}{N^{\epsilon_0}}\right) + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Ces résultats permettent de retrouver leurs versions asymptotiques ($N \to +\infty, g \to +\infty$) obtenues par Zykin, et permettent de comprendre comment les sommes partielles de la série définissant Z_K l'approchent à l'extérieur du domaine de convergence de la série, lorsque K varie. Ce théorème redonne enfin les inégalités fondamentales de Tsfasman–Vlăduţ.

Esquisse de preuve : La preuve de ces résultats repose sur les formules explicites de Weil. Dans le cas des corps de fonctions, ces formules lient le nombre de points de la courbe correspondante aux racines inverse du numérateur de la fonction ζ. Dans le cas des corps de nombres, elle relie sommes sur les premiers à des sommes sur les zéros également. La preuve du théorème découle alors de (3 pour les corps de nombres) choix astucieux de fonctions tests, d'estimations effectives au moyen du théorème de densité de Cebotarev d'Odlyzko–Lagarias, et de l'introduction de distributions. □

Intéressons nous à leurs corollaires asymptotiques. Ils résultent de passages à la limite et de propriétés générales sur les séries de Dirichlet. Rappelons que la fonction ζ associée à une famille $\{K_i\}$ de corps globaux est définie par

$$\zeta_{\{K_i\}}(s) = \prod_q (1 - q^{-s})^{-\phi_q}.$$

On note encore $Z_{\{K_i\}}(s) = -\sum_q \frac{\phi_q \log q}{q^s - 1}$ sa dérivée logarithmique. Les inégalités fondamentales implique leur convergence pour $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$, elles définissent ainsi des fonctions analytiques sur $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

COROLLAIRE 3.2. *Soit $\{K_i\}$ une famille asymptotiquement exacte de corps globaux, $N \geq 10$ un entier et $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ tel que $\epsilon_0 = \operatorname{Re}\epsilon > 0$. Alors on a :*

$$(CF)\ \sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) = O\left(\frac{1}{\epsilon_0 r^{\epsilon_0 N}}\right)$$

$$(CN-GRH)\ \sum_{q\leq N} \frac{\phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) = O\left(\frac{(|\epsilon|^4+|\epsilon|)\log^3 N}{\epsilon_0^2 N^{\epsilon_0}}\right).$$

Notre dernier résultat concerne la valeur de $Z_{\{K_i\}}(s)$ en $s=\frac{1}{2}$.

THEOREME 3.3. *Pour toute famille asymptotiquement exacte de corps globaux $\{K_i\}$, il existe $\delta>0$ dépendant de $\{K_i\}$ tel que :*

$$(CF)\ \sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}}-1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right) = O(r^{-\delta N})$$

$$(CN-GRH)\ \sum_{q\leq N} \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right) = O(N^{-\delta}).$$

On en déduit une preuve plus naturelle de la version explicite du théorème de Brauer–Siegel généralisé déjà présent dans [**43**] (et avec un meilleur terme d'erreur).

COROLLAIRE 3.4. *Pour toute famille asymptotiquement exacte de corps globaux $\{K_i\}$, il existe $\delta>0$ dépendant de $\{K_i\}$ tel que :*

$$(CF)\ \sum_{f=1}^{N} \phi_{r^f} \log\frac{r^f}{r^f-1} = \kappa + O\left(\frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)N}}\right),$$

$$(CN-GRH)\ \sum_{q\leq N} \phi_q \log\frac{q}{q-1} = \kappa + O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}+\delta}}\right).$$

2. Fonctions M associées à des familles de formes modulaires

Plus récemment, nous nous sommes inspirés dans [**49**] du travail d'Ihara [**17**] pour démontrer l'existence de fonctions M et $\widetilde{M}$ associées à la distribution des valeurs des fonctions L de formes modulaires lorsqu'elles varient en famille. Plus précisément, si $\mathcal{L}$ désigne ou bien $\log L$ ou $\log' L$, nous avons d'abord traité le cas de la distribution des valeurs prises par $\mathcal{L}(f\otimes\chi,s)$, où f est une forme parabolique fixée et χ décrit le groupe des caractères modulo m, lorsque $m\to+\infty$, puis par les $\mathcal{L}(f,s)$, lorsque f décrit l'ensemble des formes primitives de poids k et niveau N, et $N\to+\infty$. Dans le premier cas, nous sommes parvenus à leur associer ces fonctions par l'introduction de distributions et l'estimation à la Jessen-Wintner de leurs transformées de Fourier. Nos méthodes sont comparables à celles employées par Ihara et Matsumoto, avec des arguments techniques plus élaborés. Le second cas s'appuie sur des estimations fines à travers la formule de Petersson, spécifique à notre cas. Ces résultats sont importants aussi du point de vue de la théorie de l'information, car une façon de construire des familles asymptotiquement bonnes de codes est d'utiliser les courbes modulaires $X_0(N)$. La fonction ζ de sa jacobienne se décompose comme le produit des fonctions L que nous considérons, et ainsi, nous visons à obtenir des informations sur la distribution des valeurs prises par le logarithme ou la dérivée logarithmique de cette fonction ζ, lorsque $N\to+\infty$.

2.1. Contexte. L'étude de la distribution des valeurs des fonctions L est un sujet classique de la théorie des nombres. Dans la première moitié du siècle dernier, Bohr, Jessen, Wintner,..., ont initié l'étude de la distribution des valeurs du logarithme $\log \zeta(s)$ et de la dérivée logarithmique $(\zeta'/\zeta)(s)$ de la fonction ζ de Riemann, lorsque $\operatorname{Re} s = \sigma > \frac{1}{2}$ est fixé et $\operatorname{Im} s = \tau \in \mathbb{R}$ varie ([**2**], [**5**],[**32**], [**34**]). Cela a été généralisé plus tard aux fonctions L des formes paraboliques et à la fonctions ζ de Dedekind par Matsumoto ([**51**], [**52**], [**53**]).

Cependant, désirant comprendre le comportement de la constante d'Euler–Kronecker des corps globaux, qu'il a définie comme le terme constant du développement en série de Laurent de la dérivée logarithmique Z_K de ζ_K, Ihara a proposé un nouveau point de vue en étudiant d'autres familles de fonctions L. L'étude de $L'(1,\chi)/L(1,\chi)$ débutée dans [**23**] a ensuite donné naissance à beaucoup de résultats sur la distribution des valeurs de L'/L et $\log L$. Ils s'inscrivent enfin dans la théorie asymptotique des corps globaux, car ils donnent des informations sur le comportement asymptotique de fonctions ζ associées à des familles abeliennes de corps globaux, inaccessibles par la théorie de Tsfasman–Vlăduţ.

Ihara a considéré dans [**16**] la distribution de $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ dans les cas suivants :

(A) K est $\mathbb{Q}$, une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ ou un corps de fonctions sur $\mathbb{F}_r$ (avec une place pointée, considérée comme archimédienne) et les χ sont des caractères de Dirichlet normalisés sur K;

(B) K est un corps de nombres avec au moins deux places archimédiennes, et χ sont des Grössencharacters non ramifiés ;

(C) $K = \mathbb{Q}$ et $\chi = \chi_t, t \in \mathbb{R}$ défini par $\chi_t(p) = p^{-it}$.

Il obtient des résultats d'équidistribution du type

$$\operatorname{Avg}'_\chi \Phi\left(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right) = \int_{\mathbb{C}} M_\sigma(w)\Phi(w)|dw|, \quad |dw| = \frac{dx\,dy}{2\pi}$$

(où la moyenne dépend du cas considéré), valides pour $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ dans le cas des corps de nombres, et pour $\sigma > 3/4$ dans le cas des corps de fonctions, sous des hypothèses restrictives pour la fonction test Φ. Le cas des corps de fonctions a été abordé à nouveau dans [**19**] par Ihara et Matsumoto, où ils affaiblissent les hypothèses faites sur Φ et σ (Φ de croissance au plus polynomiale et $\sigma > 1/2$). Les résultats les plus généraux pour (A) ont été établis dans [**21**] (sous GRH pour les corps de nombres) pour les familles $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ et $\log L(s,\chi)$. Pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ Ihara et Matsumoto prouvent que

$$\operatorname{Avg}_\chi \Phi\left(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right) = \int_{\mathbb{C}} M_\sigma(w)\Phi(w)|dw|,$$
$$\operatorname{Avg}_\chi \Phi(\log L(s,\chi)) = \int_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_\sigma(w)\Phi(w)|dw|,$$

pour des fonctions test continues Φ à croissance au plus exponentielle.

Des résultats inconditionnels pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ ont été démontrés dans les cas log et log$'$ des situations (A, $K = \mathbb{Q}$) et (C) (voir [**20**] et [**22**]). Ils concernent une classe plus restreinte de fonctions tests Φ (continues et bornées) et la moyenne n'est pas prise sur absolument tous les caractères.

Ces travaux introduisent une fonction de densité $M_\sigma(z)$ et une fonction associée $\tilde{M}_s(z_1,z_2)$ (qui est la transformée de Fourier inverse de M_σ, lorsque $z_2 = \bar{z}_1$, $s = \sigma \in \mathbb{R}$). Ces fonctions ont des propriétés remarquables qui peuvent être établies inconditionnellement : par exemple, $\tilde{M}$ admet un développement en produit eulérien et un prolongement analytique à gauche de $\operatorname{Re} s > 1/2\ldots$

Récemment, Mourtada et Murty [**57**] ont étudié la situation de moyenne sur les caractères quadratiques, en utilisant les méthodes de [**21**]. Matsumoto et Umegaki [**54**] ont quant à deux étudié des questions similaires pour les différences de logarithmes des fonctions L de puissances symétriques de formes modulaires. Leurs résultats sont complémentaires à ceux que nous présentons ci-après, puisque le cas $\mathrm{Sym}^1 f = f$ n'y est pas abordé.

2.2. Notre contribution. Dans l'article [**50**], nous généralisons au cas des formes modulaires les méthodes d'Ihara et Matsumoto. Nous obtenons des résultats dans deux directions. D'abord, nous considérons le cas d'une forme primitive fixée et prenons la moyenne sur ses tordues par des caractères de Dirichlet. Dans ce contexte, nos résultats sont complets, bien que parfois conditionnels à GRH. Puis, nous prenons la moyenne sur les formes primitives de poids donné et de niveau tendant vers l'infini.

Soit $B_k(N)$ l'ensemble des formes primitives de poids k et niveau N. Cet ensemble est constitué des formes nouvelles normalisées de poids k et niveau N parcourant une base orthogonale (de $S_k^{new}(N)$) de vecteurs propres pour tous les opérateurs de Hecke T_n (avec n premier à N).

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 1} \eta_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e^{2i\pi nz}$ une forme primitive de $B_k(N)$. On définit sa fonction L par la série de Dirichlet $L(f,s) = \sum_{n\geq 1} \eta_f(n) n^{-s}$. Elle converge absolument pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, peut être prolongée analytiquement à $\mathbb{C}$ tout entier et admet un développement en produit eulérien, que l'on rappelle ici :

$$L(f,s) = \prod_p L_p(f,s),$$

où, pour tout premier p,

$$L_p(f,s) = \begin{cases} \left(1 - \eta_f(p)p^{-s} + p^{-2s}\right)^{-1} & \text{si } (p,N) = 1, \\ \left(1 - \eta_f(p)p^{-s}\right)^{-1} & \text{si } p \mid N. \end{cases}$$

Grâce à des résultats de Deligne, ces facteurs locaux peuvent s'écrire ainsi :

$$L_p(f,s) = \left(1 - \alpha_f(p)p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \beta_f(p)p^{-s}\right)^{-1}, \tag{1}$$

où

$$\begin{cases} |\alpha_f(p)| = 1,\ \beta_f(p) = \alpha_f(p)^{-1} & \text{si } (p,N) = 1, \\ \alpha_f(p) = \pm p^{-\frac{1}{2}}, \beta_f(p) = 0 & \text{si } p \parallel N \ (\textit{i.e. } p \mid N \text{ et } p^2 \nmid N), \\ \alpha_f(p) = \beta_f(p) = 0 & \text{si } p^2 \mid N. \end{cases}$$

On définit $\mathfrak{L}(f,s)$ comme étant soit $(L'/L)(f,s)$, soit $\log L(f,s)$, suivant le cas considéré. On pose enfin $\mathfrak{g}(f,s,z) = \exp\left(\frac{iz}{2}\mathfrak{L}(f,s)\right)$ et on définit les coefficients $\mathfrak{l}_z(n)$ comme étant les coefficients de son développement en série de Dirichlet $\mathfrak{g}(f,s,z) = \sum_{n\geq 1} \mathfrak{l}_z(n) n^{-s}$. En utilisant les relations entre les coefficients $\eta_f(n)$, on peut écrire $\mathfrak{l}_z(n) = \sum_{x\geq 1} c^N_{z,x}(n)\eta_f(x)$, où $c^N_{z,x}(n)$ ne dépend que du niveau N. Posons enfin $c_{z,x}(n) = c^1_{z,x}(n)$.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur m premier au niveau N. De la même façon, on pose $L(f\otimes\chi, s) = \sum_{n\geq 1} \eta_f(n)\chi(n) n^{-s}$, on définit $\mathfrak{L}(f\otimes\chi, s)$ comme étant soit

$(L'/L)(f\otimes\chi,s)$, soit $\log L(f\otimes\chi,s)$, et on pose $\mathfrak{g}(f\otimes\chi,s,z)=\exp\left(\frac{iz}{2}\mathfrak{L}(f\otimes\chi,s)\right)$. On a enfin $\mathfrak{g}(f\otimes\chi,s,z)=\sum_{n\geq1}\mathfrak{l}_z(n)\chi(n)n^{-s}$.

Nous avons alors démontré les résultats suivants lorsque f est fixée et χ varie.

Theorème 3.5. *Supposons que m soit premier et appelons Γ_m le groupe des caractères de Dirichlet modulo m. Soit $0<\epsilon<\frac{1}{2}$ et $T,R>0$. Soit $s=\sigma+it$ dans le domaine $\sigma\geq\epsilon+\frac{1}{2}$, $|t|\leq T$, z et z' dans le disque $\mathcal{D}_R=\{z\mid |z|\leq R\}$. Alors, sous GRH pour les $L(f\otimes\chi,s)$, on a*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{|\Gamma_m|}\sum_{\chi\in\Gamma_m}\overline{\mathfrak{g}(f\otimes\chi,s,z)}\mathfrak{g}(f\otimes\chi,s,z')=\sum_{n\geq1}\overline{\mathfrak{l}_z(n)}\mathfrak{l}_{z'}(n)n^{-2\sigma}=:\tilde{M}_\sigma(-\bar{z},z'),$$

uniformément en s, z et z'.

Comme les coefficients $\eta_f(n)$ de $L(f,s)$ sont réels, on a $\overline{\mathfrak{l}_{-\bar{z}}(n)}=\mathfrak{l}_z(n)$. On a donc démontré que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{|\Gamma_m|}\sum_{\chi\in\Gamma_m}\psi_{z_1,z_2}(\mathfrak{L}(f\otimes\chi,s))=\sum_{n\geq1}\overline{\mathfrak{l}_{-\overline{z_1}}(n)}\mathfrak{l}_{z_2}(n)n^{-2\sigma}=:\tilde{M}_\sigma(z_1,z_2),$$

où $\psi_{z_1,z_2}(w)=\exp\left(\frac{i}{2}(z_1\bar{w}+z_2w)\right)$. Notre second théorème interprète $\tilde{M}_\sigma(z_1,z_2)$ sous la forme d'une intégrale et étend largement la classe de fonctions pour laquelle ceci est valide.

Theorème 3.6. *Supposons que $\operatorname{Re}s=\sigma>\frac{1}{2}$ et que m parcourt l'ensemble de nombres premiers. Considérons pour Φ ou bien une fonction continue sur $\mathbb{C}$ à croissance au plus exponentielle (i.e. $\Phi(w)\ll e^{a|w|}$ pour un certain $a>0$), ou bien la fonction caractéristique d'un ensemble borné de $\mathbb{C}$ ou encore celle du complémentaire d'un ensemble borné de $\mathbb{C}$. Définissons M_σ comme la transformée de Fourier inverse de $\tilde{M}_\sigma(z,\bar{z})$. Alors, sous GRH pour les $L(f\otimes\chi,s)$ on a :*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{|\Gamma_m|}\sum_{\chi\in\Gamma_m}\Phi(\mathfrak{L}(f\otimes\chi,s))=\int_{\mathbb{C}}M_\sigma(w)\Phi(w)|dw|.$$

Dans le second cas, celui où f varie, nous n'avons pour l'instant obtenu que la première partie du théorème souhaité.

Theorème 3.7. *Supposons que N soit premier et que k soit fixé. Soit $0<\epsilon<\frac{1}{2}$ et $T,R>0$. Soit $s=\sigma+it$ appartenant au domaine $\sigma\geq\epsilon+\frac{1}{2}$, $|t|\leq T$, z et z' au disque $\mathcal{D}_R$. Alors, sous GRH pour $L(f,s)$, on a :*

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{f\in B_k(N)}\omega(f)\overline{\mathfrak{g}(f,s,z)}\mathfrak{g}(f,s,z')=\sum_{n,m\in\mathbb{N}}n^{-\bar{s}}m^{-s}\sum_{x\geq1}\overline{c_{z,x}(n)}c_{z',x}(m),$$

uniformément en s, z et z' dans ces domaines, où $\omega(f)=\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}(f,f)_N}$ sont les poids harmoniques de Petersson, avec $(f,f)_N=\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}}|f(z)|^2y^k\frac{dx\,dy}{y^2}$.

Esquisse de preuve : Ces théorèmes passent d'abord par des majorations des coefficients intervenant dans les séries de Dirichlet. On démontre d'abord que pour tout $\epsilon>0$ et $z\in\mathcal{D}_R$ on a

$$|c^N_{z,x}(n)|\ll_{\epsilon,R}n^\epsilon\quad\text{et}\quad|\mathfrak{l}_z(n)|\ll_{\epsilon,R}n^\epsilon.$$

Dans le cas du théorème 3.5, on obtient directement le résultat en montrant que la famille des coefficients $\mathfrak{l}_{|z|\leq R}$ est uniformément admissible au sens d'Ihara et Matsumoto (voir [**21**, Theorem 1]), ce qui s'obtient à partir des nombreux résultats connus sur les fonctions L de formes modulaires paraboliques. La preuve d'Ihara et Matsumoto s'appuie fortement sur l'orthogonalité des caractères, et son analogue dans le cadre modulaire est la formule de Petersson. Avec celle-ci, nous démontrons le théorème 3.7 par des méthodes d'analyse complexe. Pour résumer, voici les étapes de notre preuve.

– À l'aide de la formule de Petersson, nous démontrons d'abord le résultat pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{5}{4}$ là où les produits eulériens et les séries introduites par le terme d'erreur dans la formule de Petersson convergent. Cela nous permet de dégager le terme principal. Le reste de la preuve reviendra à étendre ce résultat.

– On décompose la fonction $\mathfrak{g}$ en deux intégrales :

Lemme 3.8. *Soient* $0 < \epsilon' < \epsilon < \frac{1}{2}$, $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\sigma = \mathrm{Re}\, s \geq \frac{1}{2} + \epsilon$, $c > \max(0, 1-\sigma)$, $X \geq 1$.

(i) Pour $\mathrm{Re}\, s \geq \dfrac{1}{2} + \epsilon$, *on a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ - \mathfrak{g}_-$, *où les fonctions holomorphes* $\mathfrak{g}_+$ *et* $\mathfrak{g}_-$ *sont définies par*

$$\mathfrak{g}_+(f, s, z, X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, w = c} \Gamma(w) \mathfrak{g}(f, s+w, z) X^w dw,$$

and

$$\mathfrak{g}_-(f, s, z, X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, w = \epsilon' - \epsilon} \Gamma(w) \mathfrak{g}(f, s+w, z) X^w dw.$$

(ii) La fonction $\mathfrak{g}_+$ *admet un développement en série de Dirichlet*

$$\mathfrak{g}_+ = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{l}_z(n) e^{-\frac{n}{X}} n^{-s}$$

qui converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Ici, $X \geq 1$ est un paramètre que l'on fixe à la fin de la démonstration. Par la suite, on estime $\mathfrak{g}_+$ en moyenne, tandis que $\mathfrak{g}_-$ l'est pour chaque f individuellement.

– On écrit

$$\operatorname*{Avg}^h_{f \in B_k(N)} (\overline{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}') = \operatorname*{Avg}^h_{f \in B_k(N)} (\overline{\mathfrak{g}}_+\mathfrak{g}'_+) - \operatorname*{Avg}^h_{f \in B_k(N)} (\overline{\mathfrak{g}}_+\mathfrak{g}'_-) - \operatorname*{Avg}^h_{f \in B_k(N)} (\overline{\mathfrak{g}}_-\mathfrak{g}'_+) + \operatorname*{Avg}^h_{f \in B_k(N)} (\overline{\mathfrak{g}}_-\mathfrak{g}'_-).$$

et on démontre que le terme principal provient de $\operatorname*{Avg}^h_{f \in B_k(N)} (\overline{\mathfrak{g}}_+\mathfrak{g}'_+)$, les trois autres termes apportant des contributions négligeables que nous bornons explicitement par Cauchy–Schwartz. Enfin le choix du paramètre $X = \sqrt{N}$ nous conduit au théorème, lorsque N est premier.

La preuve de 3.6 se déroule ainsi. On démontre d'abord un résultat analogue pour un ensemble fini P de premiers p. Soit $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 0$. Définissons suivant le cas (log ou log′) des fonctions sur $T_p = \mathbb{C}^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ par

$$g_{s,p}(t) = \frac{-(\log p)\alpha(p)p^{-s}t}{1 - \alpha(p)p^{-s}t} + \frac{-(\log p)\beta(p)p^{-s}t}{1 - \beta(p)p^{-s}t},$$

et

$$G_{s,p}(t) = -\log(1 - \alpha(p)p^{-s}t) - \log(1 - \beta(p)p^{-s}t),$$

que l'on note $\mathfrak{g}_{s,p}$. On introduit les fonctions $\tilde{M}_{s,p}(z_1,z_2) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mathfrak{l}_{z_1}(p^r)\mathfrak{l}_{z_2}(p^r)p^{-2rs}$, puis $\tilde{M}_{s,P}(z_1,z_2) = \prod_{p\in P} \tilde{M}_{s,p}(z_1,z_2)$ et enfin $\tilde{M}_{\sigma,P}(z) = \tilde{M}_{\sigma,P}(z,\bar{z})$. La fonction $\tilde{M}_{s,P}(z_1,z_2)$ est entière en z_1,z_2 et on voit facilement que $\tilde{M}_{\sigma,P}(z)$ vérifie la borne triviale $|\tilde{M}_{\sigma,p}(z)| \leq 1$ par son expression sous forme d'intégrale.

Puis en prenant la mesure image de la mesure de Haar sur le cercle unité de $\mathbb{C}$, on obtient l'existence d'une unique mesure positive $M_{\sigma,P}$ à support compact et masse 1 sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ telle que

$$M_{\sigma,P}(\Phi) = \int_{T_P} \Phi(\mathfrak{g}_{s,P}(t_P))d^\times t_P$$

pour toute fonction continue Φ sur $\mathbb{C}$. On vérifie que $\mathcal{F}M_{\sigma,P} = \tilde{M}_{\sigma,P}(z)$, où $\mathcal{F}$ est l'opérateur de Fourier sur les distributions tempérées. Le résultat le plus important est ensuite l'existence d'un ensemble $\mathcal{P}_f$ de densité positive telle que, pour tout

$$p \in \mathcal{P}_f, \quad \tilde{M}_{\sigma,p}(z) \ll_{p,\sigma} (1+|z|)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il s'obtient en adaptant soigneusement la preuve du [**32**, Theorem 13] de Jessen–Wintner, et en utilisant le théorème d'oscillation de Murty [**58**, Corollary 2 duTheorem 4]. Alors, en prenant suffisamment de premiers dans $\mathcal{P}_f$, on obtient par transformation de Fourier une régularité arbitraire pour $M_{\sigma,P}$. En passant à la limite sur P, on obtient la convergence du produit eulérien définissant la fonction $\tilde{M}_\sigma(z)$ et sa décroissance plus rapide que tout $(1+|z|)^{-n}$. On montre ensuite la converge uniforme de $M_{\sigma,P}(z)$ vers $\mathcal{F}\tilde{M}_\sigma(-z)$. En utilisant de jolis arguments dus à Paley et Zygmund, on obtient enfin que $M_\sigma(z) = O_{\sigma,\lambda}(e^{-\lambda|z|^2})$, lorsque $|z| \to +\infty$. On déduit en outre que

$$\tilde{M}_\sigma(z_1,z_2) = \int_{\mathbb{C}} M_\sigma(w)\psi_{z_1,z_2}(w)|dw|,$$

où $\psi_{z_1,z_2}(w) = \exp\left(\frac{i}{2}(z_1\bar{w} + z_2 w)\right)$, les fonctions étant entières et coïncidant pour $z_2 = \bar{z}_1$. La fin de la preuve du théorème s'appuie alors sur les résultats d'Ihara et Matsumoto (ou par des arguments classiques de théorie des probabilités). □

Notons que les idées de cette preuve sont aussi utilisables dans le cas (C), comme en témoigne la très récente prépublication [**55**].

2.3. Perspectives et questions ouvertes. Notre travail avec A. Zykin sur les fonctions M nous pousse à nous intéresser aux questions suivantes.

QUESTION 3.9. Peut-on démontrer le théorème 3.5 en plus grande généralité ?

Par exemple, on pourrait considérer des fonctions L de formes automorphes plus générales, et étudier la moyenne sur leurs tordues par des caractères de Hecke de corps quadratiques imaginaires ou de corps de fonctions avec une place fixée à l'infini.

QUESTION 3.10. Établir une version inconditionnelle du théorème 3.6.

Les résultats inconditionnels de [**20**, Theorem 1] et [**22**, Theorem 1.1] laissent penser que des résultats similaires pourraient être démontrés dans notre cas.

QUESTION 3.11. Etablir un analogue au théorème 3.6 pour les formes modulaires dans les autres situations (A), (B), (C) discutées auparavant.

Des résultats ont été établis par Matsumoto dans [**51**] dans le cas (C), poursuivi très récemment dans sa prépublication [**55**] avec Umegaki.

QUESTION 3.12. Poursuivre une étude poussée des fonctions M et $\tilde{M}$.

Dans le cas des caractères de Dirichlet, Ihara l'a fait dans [**17**] et [**18**]. Nous devrions être capables d'écrire un développement explicite en série entière pour $\tilde{M}_s(z_1, z_2)$ en les variables z_1, z_2, d'établir son prolongement analytique, et d'étudier sa croissance, ses zéros.

QUESTION 3.13. Peut-on obtenir le théorème 3.7 sous des hypothèses plus faibles pour N ? Peut-on laisser tendre k vers l'infini, tandis que N est fixé ? Peut-on faire tendre $k + N \to \infty$?

En suivant avec attention la preuve du théorème 3.7, on peut voir que le résultat limite est toujours valide lorsque $N = 1$ et $k \to \infty$. Cela suggère qu'une plus grande généralité doit être possible. L'idée serait d'utiliser de meilleures bornes sur les moyennes des coefficients de Fourier d'indice non premiers à N. Cela pourrait être possible au moyen de bases explicites de l'espace des formes anciennes, dans l'esprit de [**26**].

QUESTION 3.14. Démontrer une version inconditionnelle du théorème 3.7.

Bizarrement, un raisonnement brutal à base de produits eulérien ne fonctionne pas, même pour $\mathrm{Re}\, s > 1$. Une version inconditionnelle pour $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ sera certainement difficile à obtenir, même si on se restreint aux caractères ψ_z comme dans [**20**] et [**22**].

QUESTION 3.15. Est-il possible d'établir un analogue du théorème 3.6 dans le cas des moyennes harmoniques sur l'ensemble des formes primitives.

Nous n'avions pas pu mener une étude analogue à cause de l'absence (actuellement) d'une théorie locale.

QUESTION 3.16. Peut-on enlever les poids harmoniques dans le théorème 3.7 ?

Deux approches sont possibles. Les artilces [**26**], [**36**], [**37**] résolvent des problèmes similaires par l'interprétation des poids à travers $L(\mathrm{Sym}^2 f, 1)$. D'un autre côté, on peut aussi construire la théorie locale correspondante. Les résultats d'équidistribution de Serre [**65**] pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke T_p suggèrent que la situation locale est assez claire. On pourrait alors obtenir des résultats d'équidistribution sans les poids harmoniques.

QUESTION 3.17. Peut-on prouver le théorème 3.7 pour d'autres types de formes automorphes ?

Dans le cas de fonctions L plus générales, une formule des traces appropriée sera nécessaire pour remplacer celle de Petersson.

QUESTION 3.18. Quel est un analogue pour les corps de fonctions du théorème 3.7 ?

QUESTION 3.19. Établir les propriétés de $\tilde{M}$ dans le cas des moyennes sur les formes primitives.

Contrairement au cas des caractères, $\tilde{M}_s(z_1, z_2)$ n'est plus holomorphe en s. Cependant, à s fixé, c'est toujours une fonction entière de z_1 et z_2. Il serait ainsi intéressant d'obtenir un développement explicite, son prolongement analytique etc. La croissance sera difficile à obtenir sans une bonne théorie locale.

QUESTION 3.20. Écrire une version adélique de nos résultats et de ceux d'Ihara et Matsumoto.

Cela conduirait sans aucun doute à une meilleure compréhension des fonctions M, $\tilde{M}$, et de la relation entre les théories locales et globales.

QUESTION 3.21. Quels sont les implications arithmétiques de nos résultats ?

Les résultats d'Ihara et Matsumoto donnent une meilleure compréhension du comportement de la constante d'Euler–Kronecker des corps cyclotomiques. Lorsque l'on considère les moyennes sur les formes primitives, nos résultats sont liés à l'étude asymptotique des fonctions ζ des courbes modulaires $X_0(N)$, qui peuvent-être écrites comme

$$\zeta_{X_0(N)}(s) = \prod_{f \in B_2(N)} L(f, s).$$

Remarquons en guise de conclusion de cette partie, qu'aucune théorie asymptotique satisfaisante n'a été réellement développée en dimension supérieure, bien que dans les cas des variétés sur les corps finis différentes approches (algébriques et analytiques) ont été considérées, par exemple dans [**72**].

Chapitre 4

Variétés sur les corps finis

Travail présenté :

— On the number of rational points of Jacobians over finite fields, avec A. Zykin, Acta Arith. 169 (2015), 373–384.

---

1. Le nombre de points des jacobiennes des courbes définies sur un corps fini

La jacobienne des courbes est un objet central dans de nombreux problèmes et en particulier pour les applications de la géométrie algébrique sur les corps finis. Elle intervient également pour la description des revêtements étales des courbes, et pour ces raisons elle nous a intéressé tout particulièrement. Le calcul explicite du nombre de points rationnels de la jacobienne d'une courbe de grand genre peut s'avérer difficile en pratique et différentes méthodes combinatoires en proposent de bonnes approximations. Dans notre travail [**49**], nous avons obtenu dans bien des cas de meilleures bornes que les bornes combinatoires existantes, en adaptant au cas fini des méthodes que nous avions mises au point pour étudier les fonctions ζ en famille. Pour cela, l'ingrédient principal sont les formules explicites et les bornes de Weil.

1.1. Contexte. Depuis les travaux de Weil, on sait que le nombre de classes h d'une courbe projective lisse absolument irréductible (ou plus simplement courbe par la suite) X de genre g définie sur $\mathbb{F}_r$ est borné par

$$\left(\sqrt{r}-1\right)^{2g} \leq h \leq \left(\sqrt{r}+1\right)^{2g}.$$

Des efforts considérables ont été entrepris pour améliorer ces bornes depuis les travaux de Lachaud et Martin-Deschamps [**40**], qui ont obtenu la borne suivante

$$h \geq h_{LMD} = r^{g-1}\frac{(r-1)^2}{(r+1)(g+1)},$$

au moyen d'une formule déduite de l'équation fonctionnelle pour la fonction ζ

$$h = \frac{\sum\limits_{n=0}^{g-1} A_n + \sum\limits_{n=0}^{g-2} r^{g-1-n} A_n}{\sum\limits_{i=1}^{g} |1-\pi_i|^2},$$

où A_n est le nombre de diviseurs effectifs de degré n sur X et $(\pi_i, \overline{\pi_i})$ sont les couples de racines inverses du numérateur de la fonction zêta de X. Depuis lors, des méthodes combinatoires ont été mises au point pour obtenir de bonnes bornes pour les numérateur et dénominateur de cette fraction.

Dans la série d'articles [**6**],[**7**], Ballet, Rolland, et Tutdere ont utilisé cette approche pour obtenir des bornes inférieures très élaborées pour le nombre de classes, certaines de ces bornes étant même optimales lorsque $g \to \infty$, ce qui signifie qu'elles atteignent la borne du théorème de Brauer–Siegel généralisé pour les corps de fonctions. Leurs meilleures bornes sont données par le théorème suivant :

Theorème 4.1 (Ballet–Rolland–Tutdere). *Soit $X/\mathbb{F}_r$ une courbe définie sur $\mathbb{F}_r$ de genre $g \geq 2$ et de nombre de classes h. Soient D_1, D_2 des ensembles finis d'entiers $(\ell_i)_{i\in D_1}$, $(m_j)_{j\in D_2}$ des familles d'entiers tels que*

(i) $D_1 \subseteq \{1, \dots, g-1\}$;

(ii) $D_2 \subseteq \{1, \dots, g-2\}$;

(iii) pour tout $i \in D_1$, $\Phi_{r^i} \geq 1$;

(iv) pour tout $j \in D_2$, $\Phi_{r^j} \geq 1$;

(v) $l_i \geq 0$ *et* $\sum_{i\in D_1} i\ell_i \leq g-1$;

(vi) $m_j \geq 0$ *et* $\sum_{j\in D_2} jm_j \leq g-2$.

Alors $h \geq h_{BRT}$ avec

$$h_{BRT} = \frac{(r-1)^2}{(g+1)(r+1)-\Phi_r}\left(\prod_{i\in D_1}\binom{\Phi_{r^i}+\ell_i}{\ell_i}\right.$$
$$\left. + r^g \prod_{j\in D_2}\left[\left(\frac{r^j}{r^j-1}\right)^{\phi_{r^j}} - \Phi_{r^j}\binom{\Phi_{r^j}+m_j}{m_j}\int_0^{r^{-j}}\frac{(r^{-j}-t)^{m_j}}{(1-t)^{\Phi_{r^j}+m_j+1}}\,\mathrm{dt}\right]\right).$$

Appelons h_{BRT} la meilleure borne possible pour ce théorème.

Dans leur article [**3**] à propos du nombre de points des variétés abéliennes en général, Aubry, Haloui, et Lachaud ont obtenu des bornes inférieures sur le nombre de classes qui peuvent s'avérer très fines lorsque la courbe a beaucoup de points rationnels comparé à son genre. Malheureusement, ces bornes ne sont pas aussi bonnes d'un point de vue asymptotique lorsque $g \to +\infty$. Énonçons leur résultat pour les jacobiennes.

Theorème 4.2 (Aubry–Haloui–Lachaud). *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.1, on a :*

(i) $h \geq M(r)^g \left(r+1+\dfrac{\Phi_r-(r+1)}{g}\right)^g$, *avec* $M(r) = \dfrac{e\log x^{\frac{1}{x}-1}}{x^{\frac{1}{x}}-1}$, *où* $x = \left(\dfrac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}\right)^2$.

(ii) $h \geq \dfrac{r-1}{r^g-1}\left[\dbinom{\Phi_r+2g-2}{2g-1} + \displaystyle\sum_{i=2}^{2g-1}\Phi_{r^i}\dbinom{\Phi_r+2g-2-i}{2g-1-i}\right]$.

(iii) Si $\Phi_r \geq g(\sqrt{r}-1)+1$ *alors*

$$h \geq \binom{\Phi_r+g-1}{g} - r\binom{\Phi_r+g-3}{g-2}.$$

(iv) $h \geq \dfrac{(r-1)^2}{(g+1)(r+1)-\Phi_r}\left[\binom{\Phi_r+g-2}{g-2}+\sum_{i=0}^{g-1} r^{g-1-i}\binom{\Phi_r+i-1}{r}\right].$

On note h_{AHL} la meilleure borne possible pour h donnée par $(1)-(4)$ de ce théorème. La borne (3) peut s'avérer très fine lorsque g est petit et Φ_r est grand. Insistons enfin sur le fait que leurs travaux concernent les variétés abéliennes en général et non seulement les jacobiennes : ce niveau de généralité a sans doute un coût.

1.2. Nos résultats. Nous avons ainsi démontré le résultat suivant, basé sur nos estimations obtenues pour le théorème de Mertens généralisé issues des formules explicites de Weil.

Theorème 4.3. *Soit X une courbe projective lisse absolument irréductible définie sur $\mathbb{F}_r$ de nombre de classes h. Alors h est donné par la formule suivante, valable pour tout $N \geq 1$:*

$$\log h = g\log r + \sum_{f=1}^{N}\frac{1}{fr^f}|X(\mathbb{F}_{r^f})| - \sum_{n=1}^{N}\frac{1+r^{-n}}{n} - \varepsilon_3(N),$$

ou, de façon équivalente,

$$\log h = g\log r + \sum_{r=1}^{N}\left(\Phi_{r^r}\sum_{f=1}^{\lfloor\frac{N}{r}\rfloor}\frac{1}{fr^{rf}}\right) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1+r^{-n}}{n} - \varepsilon_3(N),$$

où $\varepsilon_3(N)$ vérifie $|\varepsilon_3(N)| \leq \dfrac{2g}{(\sqrt{r}-1)(N+1)r^{\frac{N}{2}}}.$

Corollaire 4.4. *(Bornes pour le nombre de classes) Le nombre de points rationnels h sur la jacobienne de X vérifie $h_{min}(N) \leq h \leq h_{max}(N)$, où*

$$h_{min}(N) = r^g\exp\left(\sum_{f=1}^{N}\frac{1}{fr^f}|X(\mathbb{F}_{r^f})| - \sum_{n=1}^{N}\frac{1+r^{-n}}{n} - \frac{2g}{(\sqrt{r}-1)(N+1)r^{\frac{N}{2}}}\right),$$

$$h_{max}(N) = r^g\exp\left(\sum_{f=1}^{N}\frac{1}{fr^f}|X(\mathbb{F}_{r^f})| - \sum_{n=1}^{N}\frac{1+r^{-n}}{n} + \frac{2g}{(\sqrt{r}-1)(N+1)r^{\frac{N}{2}}}\right).$$

On note h_{LZ} la meilleure borne inférieure obtenue par ce théorème (pour le meilleur choix de N).

Bien que nous n'ayons pas pu établir formellement que la borne h_{LZ} soit meilleure que h_{AHL} et h_{BRT}, nous l'avons vérifié sur des exemples chers à la communauté, ceux des tours récursives de Garcia et Stichtenoth, ainsi que d'autres semblables pour lesquels il est intéressant d'obtenir des bornes pour le nombre de classes. Dans ces exemples, c'est bien le cas sauf dans un cas particulier où la borne h_{AHL} est excellente. Cela s'explique par le fait que la contribution de tous les points, rationnels ou non, est considérée dans notre étude.

1.3. Perspectives et questions ouvertes. Des questions naturelles se posent après notre travail avec Zykin.

Question 4.5. Est-il possible de comparer h_{BRT}, h_{AHL}, et h_{LZ} autrement que sur des exemples ?

Nous aimerions obtenir une description explicite des cas où chaque borne est meilleure que les autres. L'un des problèmes rencontrés est qu'il est difficile de prévoir pour quel N la borne h_{LZ} est atteinte, et ce N varie significativement dans les exemples.

QUESTION 4.6. Peut-on améliorer ou optimiser la borne h_{LZ} en utilisant différentes fonctions test dans les formules explicites ?

Oesterlé a réussi à obtenir les meilleures bornes pour $|X(\mathbb{F}_{q^r})|$ accessibles à partir des formules explicites au moyen de la programmation linéaire (voir **[64]**). Cette technique ne semble cependant pas être utilisable en l'état puisque le problème n'est pas linéaire. Si l'optimisation semble difficile, on pourrait espérer produire d'autres fonctions test donnant de meilleures bornes que celle que nous avons utilisée.

QUESTION 4.7. Quels sont les analogues de ces bornes pour les corps de nombres ?

Cette questions semble plus accessibles, puisque les théorèmes de Mertens et de Brauer–Siegel sont disponibles aussi pour les corps de nombres. Cependant, la composante analytique de ces preuves pourrait s'avérer autrement plus délicate.

2. Recherche actuelle : Tours infinies de surfaces et codes

Des propriétés des codes géométriques construits à l'aide de courbes définies sur un corps fini peuvent être déduites de la connaissance de leur genre et de leur nombre de points. Il est beaucoup plus ardu de comprendre les codes géométriques produits à l'aide de surfaces, comme en témoignent les travaux de Couvreur (par exemple **[9]** **[10]**) et d'autres avant lui. En effet, l'estimation de la distance minimale et de la dimension de ces codes peut déjà s'avérer très problématique. D'un autre côté, lorsqu'on essaie de généraliser à la dimension 2 les résultats conduisant à des familles de bons codes et à la compréhension de leurs propriétés asymptotiques (ramification, obtention de beaucoup de points rationnels, corps de classes, cohomologie des surfaces marquées, formules explicites...), on se heurte à des difficultés techniques que nous pouvons à présent être capables de surmonter en partie depuis les travaux de Lang **[42]**, Kato-Saito **[33]**, Wiesend-Kerz-Schmidt **[35]** sur la théorie du corps de classes pour les surfaces et l'approche de Schmidt **[67]** sur la cohomologie des courbes marquées.

Dans un travail en cours avec Couvreur et Perret, nous espérons produire des familles infinies de codes à l'aide de surfaces algébriques définies sur $\mathbb{F}_q$ dont les paramètres sont très bons.

L'approche que nous avons choisie est analogue à celle utilisée par Serre pour produire, lorsque q n'est pas un carré, des familles de courbes définies sur $\mathbb{F}_q$ ayant de nombreux points rationnels, c'est à dire pour obtenir des bornes inférieures sur $A(q)$ dans ce cas (voir **[64]**). Si X est une surface, l'idée est de tester la finitude du groupe fondamental classifiant les revêtements étales de X où les points de T sont totalement décomposés par le critère de Golod-Schafarevich. Malheureusement, la cohomologie galoisienne est difficile à calculer, c'est pourquoi nous faisons appel à la cohomologie étale de la surface marquée adaptant une idée de Schmidt pour les courbes, ainsi qu'au fait que la cohomologie galoisienne peut être estimée en degré 1 et 2 par cette cohomologie. Cela nous conduit alors à des critères d'infinitude que nous tâchons d'appliquer.

Nous essayons alors de produire nos exemples d'abord à partir de famille remarquables de surfaces, puis en nous appuyant fortement sur des calculs réalisés à l'aide d'un logiciel de calcul formel, en utilisant en particulier les techniques de Kedlaya pour calculer les fonctions zeta des surfaces (et donc la dimension de certains groupes de cohomologie étale).

Du point de vue des codes, nous comprenons déjà le comportement des paramètres en famille. Ils mettent en lumière les quantités importantes en dimension supérieure. En plus de la caractéristique d'Euler étale, la caractéristique cohérente, ou le carré du diviseur canonique, joue également un rôle. Il faudra ainsi les incorporer dans une future théorie asymptotique en dimension supérieure, à développer...

Bibliographie

[1] J. Assim, Analogues étales de la p-tour des corps de classes, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15** (2003), no. 3, 651–663.

[2] H. Bohr, B. Jessen. Uber die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, I, Acta Math. **54** (1930), 1–35 ; II, ibid. **58** (1932), 1–55.

[3] Y. Aubry, S. Haloui, G. Lachaud. Sur le nombre de points rationnels des variétés abéliennes et des jacobiennes sur les corps finis. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 350, 907–910, 2012.

[4] J. Blondeau, P. Lebacque, Ch. Maire. On the cohomological dimension of some pro-p-extensions above the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of a number field, Mosc. Math. Journal 13 (2013), no. 4, 601–619.

[5] V. Borchsenius, B. Jessen. Mean motions and values of the Riemann zeta function, Acta Math. **80** (1948), 97–166.

[6] S. Ballet, R. Rolland. Lower bounds on the class number of algebraic function field defined over any finite field. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 24(3), 505–540, 2012.

[7] S. Ballet, R. Rolland, S. Tutdere. Lower Bounds on the number of rational points of Jacobians over finite fields and application to algebraic function fields in towers. *arXiv :1303.5822*

[8] R. Brauer. On zeta-functions of algebraic number fields, Amer. J. Math. **69**, Num. 2, 1947, 243–250.

[9] A. Couvreur, Construction of Rational Surfaces Yelding Good Codes. *Finite Fields Appl.* 17(5), 424-441. 2011.

[10] A. Couvreur, The Dual Minimum Distance of Arbitrary Dimensional Algebraic-Geometric Code. *J. Algebra*, 350(1), 84-107, 2012.

[11] V. G. Drinfeld, S. G. Vlăduţ. The number of points of an algebraic curve (in Russian), Funktsional. Anal. i Prilozhen. **17** (1983), no. 1, 68–69.

[12] R. Griffon, Analogues du théorème de Brauer–Siegel pour quelques familles de courbes elliptiques, PhD Thesis, Univ. Paris 7 Diderot, 2016

[13] F. Hess, H. Stichtenoth, S. Tutdere. On invariants of towers of function fields over finite fields. *Journal of Algebra and Its Applications*, 12(4), 477–487, 2013.

[14] M. Hindry, A. Pacheco, An analogue of the Brauer-Siegel theorem for abelian varieties in positive characteristic, Mosc. Math. J., 16(1), 45–93, 2016

[15] Y.Ihara. On the Euler–Kronecker constants of global fields and primes with small norms, Algebraic Geometry and Number Theory, ed. V. Ginzburg, Progress in Mathematics **253**, 407–451, Birkhauser, Boston, 2006.

[16] Y. Ihara. On "M-functions" closely related to the distribution of L'/L-values, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **44** (2008), 893–954.

[17] Y. Ihara. On certain arithmetic functions $\tilde{M}(s; z_1, z_2)$ associated with global fields : analytic properties, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 1, 257–305.

[18] Y. Ihara. An analytic function in 3 variables related to the value-distribution of $\log L$, and the "Plancherel volume", Functions in number theory and their probabilistic aspects, 103–116, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B34, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012.

[19] Y. Ihara, K. Matsumoto. On L-functions over function fields : power-means of error-terms and distribution of L'/L-values, Algebraic Number Theory and Related Topics 2008, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B19 (2010), 221–247.

[20] Y. Ihara, K. Matsumoto. On certain mean values and the value-distribution of logarithms of Dirichlet L-functions, Quarterly J. Math. **62** (2011), no. 3, 637–677.

[21] Y. Ihara, K. Matsumoto. On $\log L$ and L'/L for L-functions and the associated "M-functions" : connections in optimal cases, Mosc. Math. J. **11** (2011), no. 1, 73–111.

[22] Y. Ihara, K. Matsumoto. On the value-distribution of logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions, Analytic number theory, approximation theory, and special functions, Springer, New York, 2014, 79–91.

[23] Y. Ihara, V. K. Murty, M. Shimura. On the logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions at $s = 1$, Acta Arith. **137** (2009), no. 3, 253–276.

[24] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms, Graduate Studies in Mathematics*, **17**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[25] H. Iwaniec, E. Kowalski. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[26] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak. Low lying zeros of families of L-functions, Publications Mathématiques de l'IHÉS **91** (2000), 55–131.

[27] J.-F. Jaulent et C. Maire, Radical hilbertien et tour localement cyclotomique, *Japan. J. Math.* **28** (2002), no. 2, 203–213.

[28] J.-F. Jaulent et C. Maire, Sur les invariants d'Iwasawa des tours cyclotomiques, *Canad. Math. Bull.* **46** (2003), no. 2, 178–190.

[29] J.-F. Jaulent et C. Maire, A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **70**, 2000, 239-250.

[30] J.-F. Jaulent et F. Soriano, Sur les tours localement cyclotomiques, *Arch. Math.* **73** (1999), no. 2, 132–140.

[31] B. Jessen. The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, Acta Mathematica, **63** (1934), pp. 249–323.

[32] B. Jessen, A. Wintner, Distribution functions and the Riemann Zeta Functions, Transactions of the American Mathematical Society, Providence, R.I. : American Mathematical Society, **38** (1935), 48–88.

[33] K. Kato, ; S. Saito, Global class field theory of arithmetic schemes. (Boulder, Colo., 1983), 255–331, Contemp. Math., 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[34] R. Kershner, A. Wintner, On the asymptotic distribution of $\zeta'/\zeta(s)$ in the critical strip, Amer. J. Math. **59** (1937), 673–678.

[35] M. Kerz et A. Schmidt, Covering data and higher dimensional global class field theory, *J. Number Theory*, 129, 2569–2599, 2009.

[36] E. Kowalski, P. Michel. The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions, Duke Math. J. **100** (1999), no. 3, 503–542.

[37] E. Kowalski, P. Michel. A lower bound for the rank of $J_0(q)$, Acta Arith. **94** (2000), no. 4, 303–343.

[38] B. E. Kunyavskii, M. A. Tsfasman. Brauer–Siegel theorem for elliptic surfaces, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. **8**.

[39] John Labute. Mild pro-p-groups and Galois groups of p-extensions of $\mathbb{Q}$. *J. Reine Angew. Math.*, 596 :155–182, 2006.

[40] G. Lachaud, M. Martin-Deschamps. Nombre de points des jacobiennes sur un corps fini. *Acta Arith.*, 56(4) : 329–340, 1990.

[41] S. Lang. On the zeta function of number fields, Invent. Math. **12** (1971), 337–345.

[42] S. Lang, Unramified class field theory over function fields in several varieties, *Ann. of Math.* 64 (1956), 285–325.

[43] P. Lebacque. Generalised Mertens and Brauer–Siegel Theorems, Acta Arith. **130** (2007), no. 4, 333–350.

[44] P. Lebacque. On Tsfasman–Vlăduţ invariants of infinite global fields, Int. J. Number Theory, no. **6**(2010), 1419–1448.

[45] P. Lebacque. Quelques résultats effectifs concernant les invariants de Tsfasman-Vlăduţ, Annales de l'institut Fourier, 65 no. 1 (2015), p. 63–99

[46] P. Lebacque, Alexander Schmidt. Свойство $K(\pi, 1)$ для неособых отмеченных кривых над конечными полями, Изв. РАН. Сер. матем., 2015, том 79, выпуск 5, страницы 193–200

[47] P. Lebacque, A. Zykin. On logarithmic derivatives of zeta functions in families of global fields, IJNT 7 (2011), no.8,2139–2156

[48] P. Lebacque, A. Zykin. Asymptotic methods in number theory and algebraic geometry, avec Alexey Zykin, paru aux *Publications Mathématiques de Besançon*, 2011

[49] P. Lebacque, A. Zykin. On the number of rational points of Jacobians over finite fields, Acta Arith. 169 (2015), 373–384.

[50] P. Lebacque, A. Zykin. On M-functions associated with modular forms, avec A. Zykin, prépublication.

[51] K. Matsumoto. A probabilistic study on the value-distribution of Dirichlet series attached to certain cusp forms, Nagoya Math. J. **116** (1989), 123–138.

[52] K. Matsumoto. Value-distribution of zeta-functions, in "Analytic Number Theory", Proc. Japanese-French Sympos. held in Tokyo, 1988, Lecture Notes in Math. **1434**, Springer–Verlag, 1990, 178–187.

[53] K. Matsumoto. Asymptotic probability measures of zeta-functions of algebraic number fields, J. Number Theory **40** (1992), 187–210.

[54] K. Matsumoto, Y. Umegaki. On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions, preprint, arXiv :1603.07436.

[55] K. Matsumoto, Y. Umegaki. On the density function for the value-distribution of automorphic L-functions arXiv :1707.04382.

[56] Y. Mizusawa. On pro-p link groups of number fields. Prépublication.

[57] M. Mourtada, K. Murty. Distribution of values of $L'/L(\sigma, \chi_D)$, Mosc. Math. J. **15** (2015), no. 3, 497–509.

[58] R. Murty. Oscillations of Fourier Coefficients of Modular Forms, Math. Ann. **262** (1983), 431–446.

[59] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, Cohomology of Number Fields, GMW 323, Springer 2008.

[60] A. M. Odlyzko. Lower bounds for discriminants of number fields. Acta Arith. **29**(1976), 275–297.

[61] A. M. Odlyzko. Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeroes of zeta-functions : a survey of recent results. Sém. Th. Nombres Bordeaux, 1990, v.2, 119–141.

[62] L. Salle, Sur les pro-p-extensions à ramification restreinte au-dessus de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **20** (2008), no. 2, 485–523.

[63] J.-P. Serre. Minorations de discriminants, note of October 1975, published on pp. 240-243 in vol. 3 of Jean-Pierre Serre, Collected Papers, Springer 1986.

[64] J.-P. Serre, Rational Points on Curves over Finite Fields, Lecture Notes, Harvard University, 1985

[65] J.-P. Serre. Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p, J. Am. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102.

[66] A. Schmidt, On the $K(\pi, 1)$-property for rings of integers in the mixed case. Algebraic number theory and related topics 2007, 91–100, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B12, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009.

[67] A. Schmidt, Über pro-p-fundamentalgruppen markierter arithmetischer kurven, *J. Reine Angew. Math.* **640** (2010), 203–235.

[68] C. L. Siegel. Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper. Acta Arith. **1** (1935), 83–86.

[69] H. M. Stark. Some effective cases of the Brauer–Siegel Theorem, Invent. Math. **23**(1974), 135–152.

[70] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduţ. Asymptotic properties of zeta-functions, J. Math. Sci. **84** (1997), Num. 5, 1445–1467.

[71] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduţ. Infinite global fields and the generalized Brauer–Siegel Theorem, Moscow Mathematical Journal **2** (2002), no. 2, 329–402.

[72] A. Zykin. Asymptotic properties of zeta functions over finite fields, Finite Fields Appl. **35** (2015), 247–283.