

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 novembre 2009

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université de Franche Comté – Besançon
(spécialité Mathématiques)

par

Vanessa LLERAS

Modélisation, analyse et simulation de problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides

Composition du jury

<i>Président :</i>	Christine Bernardi	Université Paris VI
<i>Rapporteurs :</i>	Bertrand Maury Serge Nicaise	Université Paris-Sud, Orsay Université de Valenciennes
<i>Examineurs :</i>	Mihai Bostan Marco Picasso Yves Renard	Université de Franche-Comté EPFL Lausanne INSA de Lyon
<i>Directeur de thèse :</i>	Patrick Hild	Université de Franche-Comté

Remerciements

*A tous ceux qui de près ou de loin ont contribué
A ce que cette thèse soit réalisée
Se dirigent ma gratitude et mes pensées.*

*Mon cheminement, il a encouragé et accompagné,
Dans les meilleures conditions mon ascension j'ai menée,
Jusqu'au point culminant il m'a guidée :
Je remercie Patrick Hild, mon directeur de thèse dévoué,
Pour son attention éclairée et sa disponibilité,
Pour l'intérêt pour mes travaux qu'il a montré,
Pour son oreille attentive, son oeil critique et avisé,
Pour l'esprit de recherche qu'il a su m'inculquer.*

*Evaluer mon travail ils ont accepté,
Un regard juste et réfléchi sur mes travaux ils ont posé,
Mes rapporteurs je tiens à remercier :
Bertrand Maury et Serge Nicaise, professeurs d'université
Pour le temps à la relecture passé,
Et pour leurs précieux rapports rédigés.*

*Le Mont Thèse gravi,
Je remercie aussi les autres membres du jury :
Messieurs Yves Renard, Marco Picasso, Mihai Bostan et Madame la présidente Christine Bernardi,
Pour leur lecture critique et bienveillante du manuscrit.*

*Atteindre le sommet n'a pas été sans difficulté
Mais de nombreuses personnes m'ont accompagnée
J'ai partagé la cordée
Avec Alexandre, Christina et Djamel en maths appliquées,
Avec Karine, Hicham et Leila en EDP.*

*Mes premiers pas plein d'entrain
Ont abouti à différents camps de base : 328, 415 et parfois 401.
Pour continuer l'expédition
Il a fallu certains paliers de décompression :
Soirées billards et paris
Avec Olivier, Ludwine et Alexis ;
Soirées raclettes ou fondues chez Davy
Avec Mathilde, Moussa, Julien, J.Y., Seb et Anthony,
Ou barbecues et pétanques
Avec toute la bande ;
Et également des journées ski
Avec Guillaume, Stéphane, Benni et Andi,*

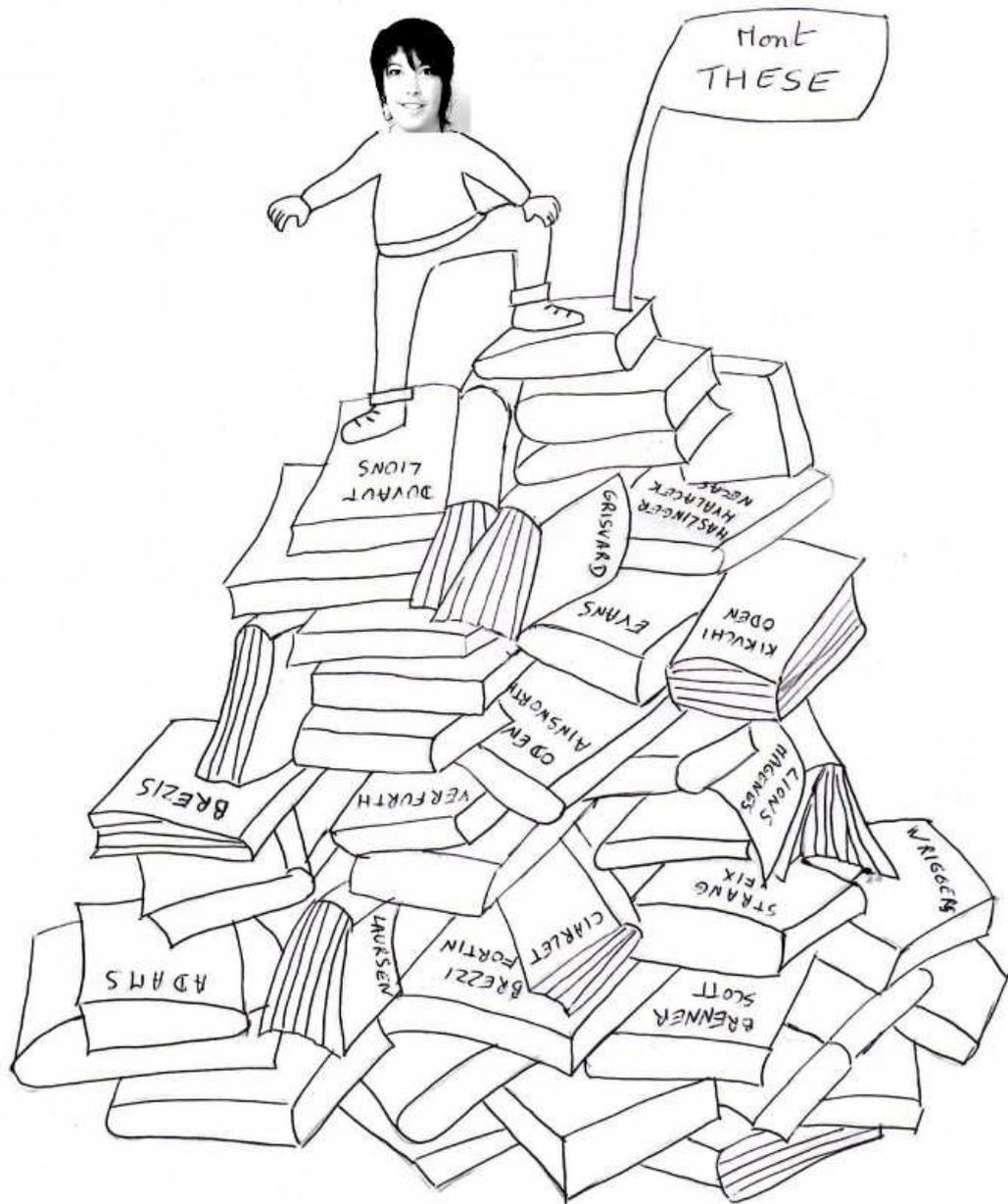
*Et avec les membres du volley,
On se délie les poignets ;
Après l'effort, on se repose et se rafraîchit
Lors de soirées hours happy
Avec Vanessa, Clément, Emilie
Christelle, François, Patou, Titi
Stéphane, Fabi sans oublier les Mehdi
Amélie, Sushi et toute la compagnie ;
Pour les anciens de Prépa,
C'est à Nouvel An qu'on se voit.*

*J'ai découvert d'autres horizons, d'autres paysages
Et leurs difficultés associées durant ce voyage :
La mécanique des fluides à Luminy
Agrémentée de football-parties.
Je remercie tout ceux avec qui j'ai partagé
Ces moments chaleureux pendant l'été.
J'ai été très heureuse de travailler
En compagnie de Cuc et Olivier.*

*Un grand merci à tous ceux qui surent m'épauler,
Aux professeurs de collège et lycées
Le goût des mathématiques ils m'ont donné,
Aux collègues de travail que j'ai eu l'occasion de côtoyer
Et avec qui j'ai partagé un thé :
Les jeunes et vieux routards du labo,
Nabile, Nicolas, Eric, Gilles, Florence, Ulrich et Nono,
Richard pour l'installation des logiciels info,
Les Catherine pour leur dispo.*

*Je veux aussi l'aide et le soutien inconditionnel, évoquer
De ma famille, mes parents et ma soeur en particulier.
Durant ce voyage ils ont toujours été à mes côtés
Mes doutes ils ont écartés
Et mes joies ils ont partagées.*

*A ma grand-mère décédée
Au cours de la dernière année
Ma thèse je souhaite dédier.*



"Le caractère d'unité de la mathématique est l'essence même de cette science. En effet, les mathématiques sont les fondements de toutes les connaissances naturelles exactes. Pour qu'elles remplissent complètement ce but élevé, puissent-elles être dans le nouveau siècle cultivées par des maîtres géniaux et par nombre de jeunes gens brûlant d'un noble zèle."

HILBERT

Table des matières

Introduction générale	1
1 Contact et frottement en mécanique des solides	1
1.1 Problème de l'élasticité linéarisée	2
1.2 Conditions de contact	4
1.3 Conditions de frottement	5
2 Contact en mécanique des fluides	8
3 Plan de la thèse	10

Partie I Inéquations variationnelles

Chapitre 1	
Problèmes variationnels quasi-statiques et leurs comportements asymptotiques	
1.1 Introduction	16
1.2 Comportement asymptotique du modèle simplifié de frottement	18
1.2.1 Un problème standard d'évolution	19
1.2.2 Estimations a priori	21
1.2.3 Limite des fluctuations du premier ordre	24
1.3 Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale	28
1.4 Conclusion	35

Partie II Contrôle de la qualité des calculs en mécanique des solides

Chapitre 1 Introduction
--

1.1	Etude des différentes estimations d'erreur	42
1.1.1	Estimation d'erreur a priori	42
1.1.2	Estimation d'erreur a posteriori	43
1.2	Méthode des éléments finis étendus : XFEM	50
1.2.1	Description de la méthode	51
1.2.2	Méthode XFEM avec une surface d'enrichissement fixe	55
1.2.3	Méthode XFEM avec une fonction cut-off	56

Chapitre 2 Estimateurs a posteriori pour la méthode XFEM

2.1	Les problèmes de Laplace et de l'élasticité sur un domaine fissuré	61
2.2	Discrétisation des problèmes de Laplace et de l'élasticité avec la méthode XFEM	64
2.3	Opérateur de quasi-interpolation	67
2.3.1	Définition	67
2.3.2	Stabilité	70
2.3.3	Estimations d'erreur	74
2.4	Estimations d'erreur	77
2.4.1	Estimations a priori	77
2.4.2	Estimations a posteriori	79
2.5	Résultats numériques	85
2.5.1	Le mode I d'ouverture	85
2.5.2	Le mode II de cisaillement	89
2.5.3	L'exemple du domaine en forme de L	92
2.6	Conclusion	96

Chapitre 3**Estimateurs a posteriori pour le contact frottant**

3.1	Le problème de contact avec frottement de Coulomb en élasticité . . .	100
3.1.1	Le problème continu	100
3.1.2	Résultats d'existence et d'unicité	103
3.2	Discrétisation par éléments finis	104
3.3	Estimations d'erreur	107
3.3.1	Estimations a priori	107
3.3.2	Définition de l'estimateur d'erreur par résidu η	108
3.3.3	Borne supérieure	109
3.3.4	Borne inférieure	113
3.4	Une seconde discrétisation par éléments finis	117
3.4.1	Description	118
3.4.2	Etude de l'existence et de l'unicité de la solution	119
3.5	Un second estimateur	123
3.5.1	Définition de l'estimateur par résidu associé à la seconde discrétisation	123
3.5.2	Borne supérieure	124
3.5.3	Borne inférieure	127
3.6	Résultats numériques	129
3.6.1	Un premier exemple avec glissement et séparation	130
3.6.2	Un second exemple avec adhérence, glissement et séparation	135
3.6.3	Troisième exemple : un cas avec peu de frottement ; comparaison avec un exemple de la littérature	139
3.7	Conclusion et perspectives	143

Chapitre 4**Estimateurs a posteriori stabilisé**

4.1	Discrétisation par une méthode stabilisée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange	147
4.1.1	Problème discret	147
4.1.2	Etude de l'existence et de l'unicité de la solution	148
4.2	Estimateurs d'erreur a posteriori	156
4.2.1	Définition de l'estimateur par résidu	156

4.2.2	Borne supérieure	158
4.2.3	Borne inférieure	162
4.3	Conclusion	163

Chapitre 5

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

5.1	Le problème continu	166
5.2	Discrétisation par une méthode stabilisée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange	172
5.2.1	Problème discret	172
5.2.2	Etude de la convergence	175
5.3	Conclusion	182

Partie III Simulation numérique en mécanique des fluides

Chapitre 1

Simulation numérique de la dynamique des globules rouges

1.1	Introduction	187
1.2	Un peu de biologie	188
1.3	Modélisation des globules rouges dans un fluide	190
1.3.1	Comportement mécanique des globules	190
1.3.2	Position du problème	191
1.3.3	Formulation variationnelle	193
1.4	Algorithme	193
1.4.1	Discrétisation en temps	194
1.4.2	Discrétisation en espace	195
1.4.3	Approximation de l'énergie de la membrane	195
1.4.4	Un algorithme de base	198

1.4.5	Contacts	198
1.4.6	Conservation du volume et de la surface	200
1.4.7	Algorithme complet	201
1.5	Simulations numériques	202
1.5.1	Cas d'un seul globule sans force externe hydrodynamique	202
1.5.2	Sous cisaillement	202
1.5.3	Sous écoulement de Poiseuille	205
1.6	Conclusion	208
Conclusion générale		209

Annexe A	
Quelques outils de la première partie	211

Annexe B	
Formule de Green	
et validation en fond de fissure	215

Annexe C	
Plusieurs théorèmes de trace	219

Annexe D	
L'algorithme de contact d'Olivier Pantz	221

Notations	225
Bibliographie	227

Table des figures

1	Description de Ω	2
2	Graphique des conditions de contact	5
3	Graphique de la loi de Tresca	6
4	Graphique de la loi de Coulomb à gauche et cône de Coulomb à droite . .	7
5	Graphique des conditions de contact pour le modèle avec compliance normale	8
1.1	Algorithme d'adaptation	49
1.2	Nœuds enrichis par la fonction Heaviside et par les fonctions singulières . .	52
1.3	Coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure	53
1.4	A gauche : mode I. A droite : mode II.	53
1.5	Graphique des fonctions singulières	54
1.6	Zone d'enrichissement fixe	55
1.7	Exemple de fonction cut-off exponentielle pour $r_0 = 0.01$ et $r_1 = 0.49$. . .	56
1.8	Norme H^1 de l'erreur en fonction du nombre d'éléments sur le bord du carré en mode I [60]	57
2.1	La géométrie du domaine fissuré Ω	62
2.2	Eléments généralisés	65
2.3	Patch pour un côté à droite et patch pour un triangle à gauche	66
2.4	Décomposition du domaine en utilisant une extension rectiligne de la fissure	68
2.5	Les différentes configurations du Lemme 2.3.1	71
2.6	Les différentes configurations du Lemme 2.3.2	72
2.7	Les différentes configurations du Lemme 2.3.3	74
2.8	Influence du rayon de la fonction cut-off pour le mode I [60]	78
2.9	Premier exemple : le corps fissuré	86
2.10	Convergence de l'estimateur η et de la norme d'erreur $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$	87
2.11	Carte de l'estimateur d'erreur local η_G avec $N_D = 16$ (à gauche) et $N_D = 80$ (à droite)	88
2.12	Cas de la fonction cut-off exponentielle χ : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-6} (à droite)	88
2.13	Cas de la fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-6} (à droite)	88

2.14	Convergence de l'estimateur η et de la norme d'erreur $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$	90
2.15	Carte de l'estimateur d'erreur local η_G avec $N_D = 16$ (à gauche) et $N_D = 80$ (à droite)	90
2.16	Cas de la fonction cut-off exponentielle χ : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-6} (à droite)	91
2.17	Cas de la fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final avec un seuil égal à 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil valant 10^{-6} (à droite)	91
2.18	Troisième exemple : le corps fissuré	93
2.19	Convergence de l'estimateur η	94
2.20	Carte de l'estimateur d'erreur local η_G avec $N = 8$ (à gauche) et $N = 48$ (à droite)	95
2.21	Cas de la fonction cut-off exponentielle χ : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 2×10^{-4} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-5} (à droite)	95
2.22	Cas de la fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 2×10^{-4} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 4×10^{-6} (à droite)	95
3.1	Exemple de déplacement tangentiel u_t et de multiplicateur ξ correspondant pour $d = 2$ [203]	104
3.2	Premier exemple. Configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.2$ et $N_C = 32$. 131	
3.3	Premier exemple. A gauche : déplacements normal et tangentiel $(\tilde{u}_{hn}, \tilde{u}_{ht})$ sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangentiel $(\tilde{\lambda}_{hn}, -\tilde{\lambda}_{ht})$ sur Γ_C . 131	
3.4	Premier exemple. Taux de convergence de η , $\tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$. . 133	
3.5	Premier exemple. A gauche : maillage adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de la contribution du contact frottant $\tilde{\eta}_C$ avec le raffinement adaptatif.	135
3.6	Second exemple. Configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.5$ et $N_C = 32$. 136	
3.7	Second exemple. A gauche : déplacements normal et tangentiel $(\tilde{u}_{hn}, \tilde{u}_{ht})$ sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangentiel $(\tilde{\lambda}_{hn}, -\tilde{\lambda}_{ht})$ sur Γ_C . 136	
3.8	Second exemple. Taux de convergence de η , $\tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$. . . 138	
3.9	Second exemple. Maillages initial (à gauche) et raffinés	138
3.10	Second exemple. A gauche : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ avec des raffinements uniforme et adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de sa contribution $\tilde{\eta}_C$ au contact frottant avec un raffinement adapté. . . . 139	
3.11	Troisième exemple. A gauche : configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.1$. A droite : Zoom près de la zone de séparation.	140
3.12	Troisième exemple. A gauche : déplacements normal et tangentiel $(\tilde{u}_{hn}, -\tilde{u}_{ht})$ sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangentiel $(\tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht})$ sur Γ_C . . 140	
3.13	Troisième exemple. Maillages initial (à gauche) et raffinés	141
3.14	Troisième exemple. A gauche : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ avec un raffinement uniforme et adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de sa contribution au contact $\tilde{\eta}_C$ avec un raffinement adapté.	141

3.15	Maillages raffinés au niveau 6, 9 et 12 [234].	142
3.16	A gauche : Convergence de l'estimateur [234] avec un raffinement uniforme et adapté. A droite : Convergence de l'estimateur [234] et de sa contribution au contact avec un raffinement adapté.	142
5.1	La géométrie du domaine fissuré Ω	167
5.2	Le choix de T' : T est un "mauvais élément" pour Ω_2 , T' est un "bon élément" pour Ω_2	174
5.3	Prolongation de T'	180
1.1	Des globules au microscope	188
1.2	Volume, surface et diamètre d'un globule en μm^3 , μm^2 et μm	189
1.3	Composition d'un globule rouge	189
1.4	Un globule en état d'équilibre.	202
1.5	Mouvement de "tank-treading" observé au microscope	203
1.6	Mouvement stationnaire de "tank-treading" d'un globule sous cisaillement à différents pas de temps	203
1.7	Mouvement de "tumbling" observé au microscope	204
1.8	Mouvement de "tumbling" d'un globule sous cisaillement à différents pas de temps	204
1.9	Forme des globules in vivo dans un capillaire de 6 μm de diamètre	205
1.10	Simulation de quatre globules où le fluide entre sur la gauche de la paroi selon un profil de Poiseuille, à différents pas de temps	206
1.11	Simulation de quatre globules à une intersection à différents pas de temps	207
B.1	Découpe du triangle en pointe de fissure	216
D.1	Dessins représentant $n_{a,x}$ suivant les cas	223
D.2	Plusieurs étapes de minimisation sur un voisinage convexe	224

Liste des tableaux

1.1	Nombre de degrés de liberté en fonction des méthodes	57
2.1	Valeurs de l'estimateur η , de la norme $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$ et des indices d'efficacité pour le premier exemple	86
2.2	Valeurs de l'estimateur η pour une fonction cut-off exponentielle χ	89
2.3	Valeurs de l'estimateur η pour une fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq	89
2.4	Valeurs de l'estimateur η , de la norme $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$ et des indices d'efficacité pour le second exemple.	89
2.5	Valeurs de l'estimateur η pour une fonction cut-off exponentielle χ	92
2.6	Valeurs de l'estimateur η pour la fonction polynômiale χ de degré cinq	92
2.7	Valeurs de l'estimateur η pour le troisième exemple	93
2.8	Valeurs de l'estimateur η pour une fonction cut-off exponentielle χ	94
2.9	Valeurs de l'estimateur η pour une fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq	94
3.1	Contributions de η et $\tilde{\eta}$ pour le premier exemple.	132
3.2	Estimateurs, erreur exacte et indices d'efficacité.	133
3.3	Contributions de η et $\tilde{\eta}$ pour le second exemple.	137
3.4	Estimateurs, erreur exacte et indices d'efficacité.	137

Introduction générale

LE sujet de ce travail est la modélisation, l'analyse et la simulation de problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides. Du latin *contactus* signifiant "toucher", "être voisin", le contact est l'état de deux ou plusieurs corps qui se touchent. On commence par introduire les équations modélisant le problème de contact unilatéral avec frottement en élasticité accompagnées d'un historique. Puis on fera un petit état de l'art relatif au contact en mécanique des fluides. Du fait du grand nombre de recherches sur ce sujet depuis de nombreuses décennies et de la disparité des théories, la revue bibliographique ne se veut pas exhaustive.

Dans ce qui suit les lettres en gras (par exemple \mathbf{u}, \mathbf{v}) désignent les vecteurs, alors que les lettres capitales (par exemple $\mathbf{V}, \mathbf{K}, \dots$) représentent des ensembles fonctionnels concernant les champs de vecteurs. Comme d'habitude, on note par $(L^2(\cdot))^d$ et par $(H^s(\cdot))^d$, $s \in \mathbb{R}, d = 1, 2, 3$ les espaces de Lebesgue et Sobolev en dimension un, deux ou trois (voir [3] pour la définition de $(H^s(\cdot))^d$, $s \in \mathbb{R}$). La norme usuelle de $(H^s(D))^d$ (norme duale si $s < 0$) est notée par $\|\cdot\|_{s,D}$ et on garde la même notation pour $d = 1, d = 2$ ou $d = 3$. Pour simplifier, la norme de $(L^2(D))^d$ est notée par $\|\cdot\|_D$ pour $d = 1$ ou $d = 2$.

1 Contact et frottement en mécanique des solides

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent dans l'industrie, notamment dans les structures mécaniques : ils sont variés, fortement non linéaires et complexes. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment réagissent les structures lorsqu'elles subissent ces forces. Le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement... Les problèmes de contact étant non linéaires, la modélisation des phénomènes de contact pose des difficultés.

L'approximation numérique de problèmes de contact avec frottement se produisant en mécanique des structures est généralement traité avec la méthode des éléments finis (voir [107, 112, 147, 160, 236]). En effet, elle est facile à implémenter en pratique et elle

est aussi précise d'un point de vue théorique. Une étude détaillée de plusieurs méthodes par éléments finis mixtes pour le problème de contact sans ou avec frottement peut être trouvée dans [111, 112]. L'analyse numérique et la convergence ont été étudiées dans [129, 205].

Il existe diverses formulations spécifiques de problèmes de contact fournissant la base pour une méthode d'analyse numérique. On va présenter dans un premier temps le problème du contact avec frottement dans le cadre de l'élasticité linéaire. Après quelques rappels sur le problème d'élasticité, on introduira les conditions de contact puis de frottement sur différentes lois.

1.1 Problème de l'élasticité linéarisée

Nous nous limitons au cas d'un solide élastique frottant sur une surface rigide plane immobile pour simplifier la présentation. L'introduction de géométries plus complexes fait apparaître des problèmes délicats dans la détermination de la surface de contact.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine polygonal borné représentant la configuration de référence d'un corps élastique. Les ensembles Γ_D , Γ_N et Γ_C forment une partition disjointe de la frontière régulière $\partial\Omega$. Le corps est soumis à des forces volumiques, par exemple son poids. Le champ de déplacement est connu sur la partie de mesure non nulle Γ_D . On peut par exemple supposer que le solide est encastré sur Γ_D . La partie Γ_N est soumise à une condition de Neumann. La partie restante Γ_C est la "zone de contact" avec ou sans frottement entre le corps et une fondation rigide plane.

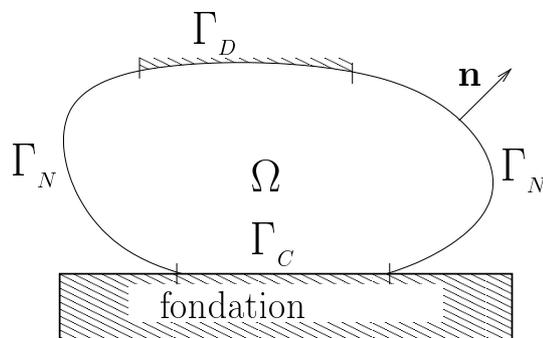


FIG. 1 – Description de Ω

La loi de comportement de l'élasticité linéaire reliant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ et le tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})/2$ est :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

Notons par $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq 2}$ le vecteur déplacement, a_{ijkl} les composantes du tenseur de Hooke \mathbf{A} du quatrième ordre et par $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ le tenseur de contraintes tel que :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = a_{ijkl} \frac{\partial u_h}{\partial x_k}, \quad i, j, h, k \in \{1, 2\},$$

où on adopte la convention de sommation des indices répétés. Les fonctions $a_{ijhk} \in L^\infty(\Omega)$ représentent les propriétés élastiques du matériau. On suppose que \mathbf{A} est symétrique : $a_{ijhk} = a_{jihk} = a_{hki j}$.

Un résultat important est l'inégalité de Korn :

Théorème 0.1.1

Soit Ω un domaine régulier borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 . Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n$, on a :

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega + \|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

et : désigne le produit scalaire dans l'espace des tenseurs symétriques de second ordre.

Lorsque Γ_D est de mesure nulle, des difficultés supplémentaires apparaissent (voir [175]). On supposera par la suite que Γ_D a une mesure superficielle non nulle. On a alors le résultat suivant qui découle de l'inégalité de Korn.

Lemme 0.1.1

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 . Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega \geq C \|\mathbf{v}\|_{V_0}^2$$

pour tout \mathbf{v} dans $\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n \text{ tel que } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D\}$.

Ainsi la condition d'ellipticité de \mathbf{A} a lieu : $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$a_{ijhk} \xi_{ij} \xi_{hk} \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}.$$

Pour simplifier, le corps est encastré sur Γ_D . Pour un problème d'élasticité sans contact ni frottement, le déplacement $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ du corps satisfait aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (2)$$

où $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ représente la densité des forces volumiques (poids), $\mathbf{g} = (g_1, g_2) \in (L^2(\Gamma_N))^2$ désigne les forces surfaciques imposées sur Γ_N , $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ est la normale unitaire sortante de Ω sur $\partial\Omega$, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathcal{S}_2$ où \mathcal{S}_2 désigne l'espace des tenseurs symétriques du second ordre, le tenseur linéarisé des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ et \mathbf{div} représente l'opérateur divergence des fonctions à valeurs vectorielles. La première équation correspond à l'équation d'équilibre à laquelle on ajoute la relation de comportement et les conditions de Dirichlet et Neumann.

Afin d'introduire les équations sur la zone de contact, on choisit pour vecteur unitaire tangentiel $\mathbf{t} = (-n_2, n_1)$. Sur Γ_C , on décompose le déplacement et le vecteur de contraintes en composantes normale et tangentielle comme suit :

$$\mathbf{u} = u_n \mathbf{n} + u_t \mathbf{t} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{u})\mathbf{n} + \sigma_t(\mathbf{u})\mathbf{t}.$$

Pour donner un sens à la décomposition précédente, on suppose que Γ_C est de régularité C^1 . On suppose aussi qu'il n'y a pas de distance initiale entre le solide et la fondation rigide sur Γ_C .

Les relations d'interaction dans la direction normale sont associées au problème de contact unilatéral et celles dans la direction tangentielle au problème de frottement. Pour étudier l'interaction dans la direction normale, on s'intéresse d'abord au cas du contact unilatéral sans frottement.

1.2 Conditions de contact

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est assez récente. C'est en 1933 que Signorini pose le problème général de l'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement sur une fondation rigide. Les conditions de contact unilatéral ont été formulées par Signorini [211] en 1959. Il s'ensuit le travail de Fichera [94] en 1964 où le problème de Signorini a été résolu en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Le problème de contact unilatéral sans frottement montre la non-linéarité sur le bord correspondant à la non-pénétration des matériaux sur la zone de contact ce qui mène à une inégalité variationnelle du premier ordre. Fichera donne la preuve de l'existence et de la régularité d'une solution faible et discute le problème de l'unicité. Dans [147], une synthèse concernant le cas d'un solide déformable en contact avec un socle rigide est présentée. Duvaut et Lions [86] présentent la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact accompagnée des résultats d'existence et d'unicité. Ciarlet et Nečas (1984, 1987) ont aussi traité le cas sans frottement. La condition de contact unilatéral est exprimée par la relation de complémentarité suivante :

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) u_n = 0. \quad (3)$$

Cette condition exprime qu'en cas de contact c'est le corps qui se déforme et qu'il ne peut y avoir d'interpénétration entre le solide et la fondation. De plus, la réaction du support sur le solide est dirigée vers l'intérieur du solide. Si le point est en contact alors $u_n = 0$ et $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0$ et si le point quitte la fondation $\sigma_n(\mathbf{u}) = 0$ et $u_n < 0$, ce qui établit le graphe de la loi de contact unilatéral. On voit sur ce graphe (Figure 2) la très forte non-linéarité de la loi.

L'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par :

$$\sigma_t(\mathbf{u}) = 0.$$

Cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle est nulle dans la zone de contact. On est dans le cas d'un glissement parfait. Néanmoins cette force tangentielle est non nulle dans la plupart des contacts réels. On introduit alors des lois complémentaires, les lois de frottement qui relient la composante tangentielle aux autres variables du système.

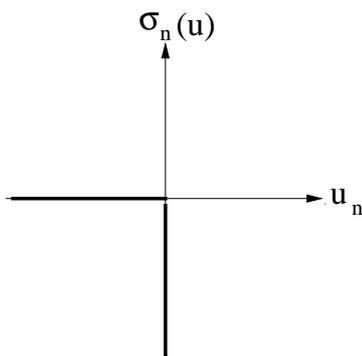


FIG. 2 – Graphique des conditions de contact

1.3 Conditions de frottement

Les premiers travaux sur le frottement ont été réalisés par Léonard de Vinci au début du *XVI*^{ème} siècle. Il donne ainsi la première valeur (0.25) du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. La compréhension des mécanismes entrant en jeu est restée très lacunaire et il faut attendre deux siècles pour qu'Amontons (1699) et Coulomb (1785) reprennent et développent les études de Léonard de Vinci en énonçant les premières lois de frottement. Historiquement, G. Amontons proposa une loi de proportionnalité entre les composantes normale et tangentielle des contraintes. Coulomb confirme les lois d'Amontons à partir d'expériences. On n'abordera pas ici les lois de frottement dynamique développées par Euler grâce à des expériences de solides glissant sur un plan incliné. Les travaux de Bowden et Tabor [46, 226] font une synthèse et améliorent les résultats obtenus sur l'analyse du frottement.

Plusieurs lois de frottement existent. Nous allons énoncer quelques lois associées aux phénomènes de contact et de frottement dans le cadre d'un contact entre un corps déformable et une fondation rigide. En considérant le frottement additionné au problème de contact, des non-linéarités supplémentaires doivent être prises en compte. Énonçons tout d'abord la plus simple.

Frottement de Tresca

La plus simple (en apparence) est la loi de Tresca. Dans [86], le frottement a été rajouté aux problèmes de contact et le problème a été écrit sous forme d'un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas d'un frottement de Tresca. Les conditions de frottement de Tresca [147] sont :

$$\begin{aligned} si \quad u_t = 0, & \quad |\sigma_t(\mathbf{u})| \leq s, \\ si \quad u_t \neq 0, & \quad \sigma_t(\mathbf{u}) = -s \frac{u_t}{|u_t|} \end{aligned}$$

où $s \in L^\infty(\Gamma_C)$, $s \geq 0$ désigne le seuil de glissement fixe qui est supposé connu et qui ne dépend pas de la contrainte normale. Le graphe de cette loi est tracé Figure 3. Le fait que la contrainte normale n'apparaisse pas dans la limite de glissement limite l'utilisation de

cette loi. Le problème est plutôt réservé aux applications où la contrainte tangentielle est connue sur le bord de frottement. Le problème de contact avec le frottement de Tresca admet une unique solution.

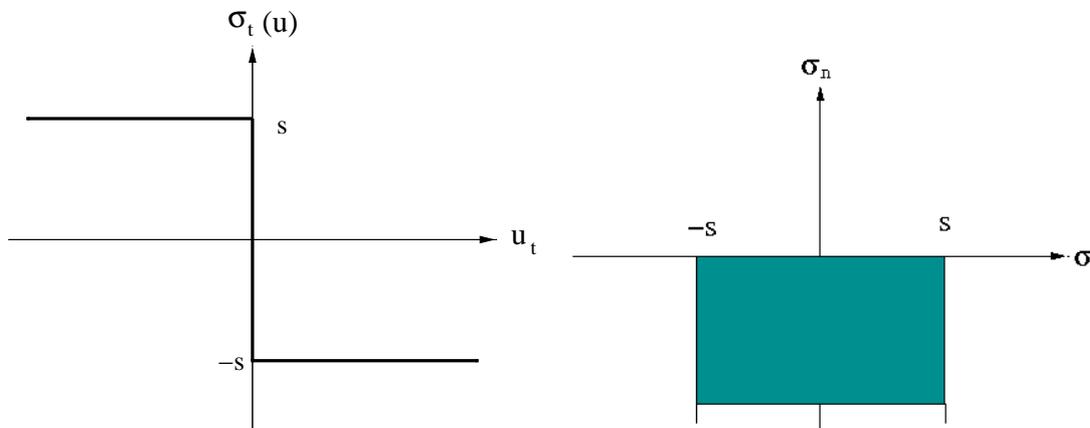


FIG. 3 – Graphique de la loi de Tresca

Frottement de Coulomb

Pour décrire la dépendance du seuil s à l'intensité des efforts normaux, on utilise une loi de Tresca dont le seuil s est proportionnel à l'effort normal. Il s'agit de la loi de Coulomb. La loi a été développée au départ sur des modèles avec des solides rigides puis ensuite sur des corps déformables avec notamment les travaux de Duvaut-Lions [84, 86] sur les inégalités variationnelles. En notant μ le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en présence ($\mu \geq 0$), la condition de frottement de Coulomb est :

$$si \quad u_t = 0, \quad |\sigma_t(\mathbf{u})| \leq -\sigma_n(\mathbf{u})\mu, \quad (4)$$

$$si \quad u_t \neq 0, \quad \sigma_t(\mathbf{u}) = \sigma_n(\mathbf{u})\mu \frac{u_t}{|u_t|}. \quad (5)$$

Cette condition représente deux situations physiques qui sont l'adhérence quand $u_t = 0$ et le glissement quand $u_t \neq 0$. En effet, quand le multiple du module de la composante normale est atteint, le corps peut glisser dans la direction de la composante tangentielle. Le coefficient de frottement est le rapport maximal entre force tangentielle et force normale au point de contact. Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact a la forme d'un cône dont l'ouverture dépend du coefficient de frottement : il s'agit du cône de Coulomb. L'enveloppe de ce cône est la surface de seuil de glissement.

Il existe plusieurs lois dérivées intégrant un coefficient de frottement μ variable (par exemple par rapport au déplacement tangentiel) mais je n'en parlerai pas ici.

Remarque 0.1.1

Quand $\mu = 0$, on obtient $\sigma_t(\mathbf{u}) = 0$ sur Γ_C . Il s'agit du cas sans frottement.

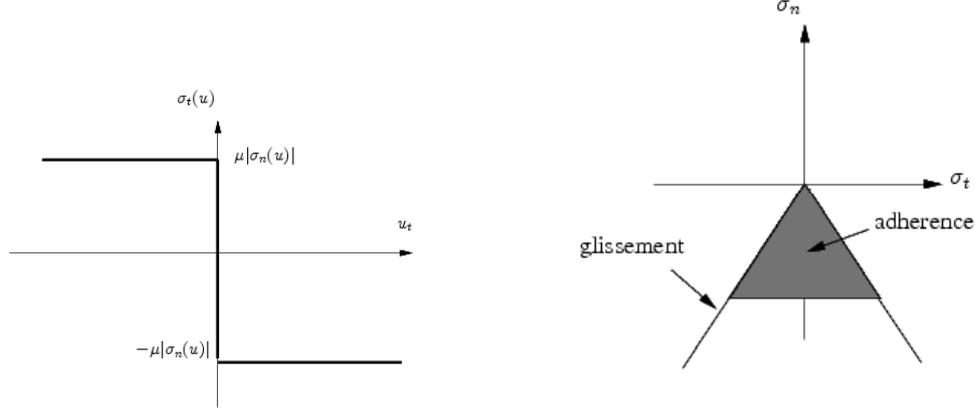


FIG. 4 – Graphique de la loi de Coulomb à gauche et cône de Coulomb à droite

Frottement avec déflexion ou compliance normale

Ces lois ont été initiées par J.-T. Oden et J.-A.-C. Martins [173], [174] en 1985. Ils proposent une loi de frottement qui inclue une non-proportionnalité entre la force normale et la force tangentielle de frottement et prend en compte l'écrasement normal entre le corps et la fondation en se basant sur les études expérimentales de [227].

Dans cette sous-section, on considère un corps élastique qui occupe une région Ω de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$). Le corps est fixe sur une partie Γ_D du bord $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_C$, peut entrer en contact avec la fondation réactive sur la partie Γ_C et est soumis à des forces volumiques $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^n$. Sur la surface de contact on utilise une condition de compliance normale (voir [150], [151]). Le problème de contact et frottement avec compliance normale en élasto-statique est de trouver le champ de déplacement \mathbf{u} satisfaisant les équations (6)–(8) auxquelles on ajoute la relation de comportement :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_D. \quad (7)$$

Alors les conditions de compliance normale avec frottement sur Γ_C sont :

$$\begin{cases} \sigma_n(\mathbf{u}) = -c_N(u_n)_+^{m_N}, \\ \text{si } u_t = 0, & |\sigma_t(\mathbf{u})| \leq c_T(u_n)_+^{m_T} \\ \text{si } u_t \neq 0, & \sigma_t(\mathbf{u}) = -c_T(u_n)_+^{m_T} \frac{u_t}{|u_t|} \end{cases} \quad (8)$$

où $(\cdot)_+$ désigne la partie positive. Ainsi $(u_n)_+$ représente la pénétration du corps dans la fondation. Les constantes $m_N \geq 1$, $m_T \geq 1$ ainsi que les coefficients de compliance positifs c_N et c_T dans $L^\infty(\Gamma_C)$ désignent des paramètres d'interface caractérisant le comportement vis à vis du contact entre le corps et la fondation rigide. Les équations aux dérivées partielles associées [210] présentent de nombreuses difficultés mathématiques qui demeurent irrésolues.

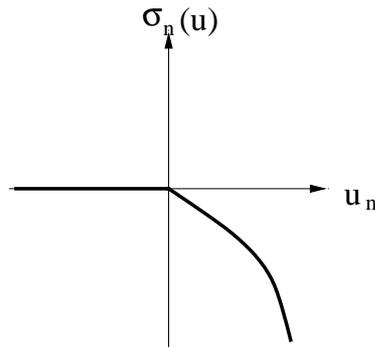


FIG. 5 – Graphique des conditions de contact pour le modèle avec compliance normale

Remarque 0.1.2

Le cas $m_N = m_T$ correspond au modèle de frottement de Coulomb où le coefficient de frottement vaut $\frac{c_T}{c_N}$

2 Contact en mécanique des fluides

L'étude du mouvement de solides rigides à l'intérieur d'un liquide est une des questions importantes de la mécanique des fluides. Les premières contributions sur ce sujet sont dues à des scientifiques célèbres comme Kirchhoff, Stokes, Lord Kelvin ou Lamb.

L'effet de la présence d'une paroi sur le mouvement d'une sphère dans un fluide visqueux a été traité en 1961 par Brenner [49] et par Maude [176]. En 1974, Cox s'intéresse dans [75] au cas de deux solides lisses de forme quelconque évoluant dans un fluide de Stokes. Deux particules dans un fluide visqueux peuvent entrer en contact (voir [179]). Ceci est dû à la rugosité des particules. La force de lubrification s'exerçant sur une sphère rugueuse est celle qui s'exercerait sur une sphère lisse de même rayon mais plus proche du plan. Différentes études ont permis de comprendre les mécanismes évitant les collisions dans les modèles simplifiés. Vasquez et Zuazua [228] ont montré qu'il n'y avait pas de collision entre les particules en temps fini pour un problème en dimension 1, après avoir prouvé l'existence et l'unicité des solutions fortes pour ce modèle. Hillairet a étudié le phénomène de collisions asymptotiques en dimension 2 [131]. Starovoitov [214] a construit des solutions faibles et prouve que l'unicité disparaît lorsque les collisions apparaissent.

Hillairet [132] a démontré que si la particule et le plan sont lisses et si le fluide est de Navier-Stokes, alors la distance entre la particule et le plan ne peut tendre vers 0 en temps fini. L'absence de collision en temps fini pour les solutions fortes est due à la régularité des solutions. Hesla [118] a obtenu des résultats similaires. Physiquement cela s'explique par le fait que, quand la particule se rapproche du plan, le fluide situé dans l'interstice doit s'évacuer et la résistance du fluide crée alors une force qui pénalise le mouvement de la particule. Il s'agit de la force de lubrification ou hydrodynamique. Elle est suffisante pour éviter les collisions de particules. Cependant les distances interparticulaires peuvent devenir très petites (ordre du μm). Lors de simulations numériques, l'écoulement fluide est en général mal résolu entre deux particules proches et donc la force de lubrification

est mal estimée. A ces erreurs dues à la discrétisation en espace, s'ajoutent celles issues de la discrétisation en temps. Ces erreurs provoquent des contacts numériques qui peuvent stopper prématurément les calculs (de nombreux codes s'arrêtent lorsque deux frontières se rencontrent). Des raisons de robustesse numérique rendent alors indispensables le développement de techniques particulières permettant de gérer efficacement les contacts.

Les collisions présentent des difficultés dans les simulations numériques et différentes stratégies ont été développées pour éviter les contacts. Dans [134], une méthode basée sur des raffinements locaux du maillage et du pas de temps a été programmée. Toutefois, le nombre de raffinements ainsi que la petitesse du pas de temps nécessaires pour éviter les collisions ne sont pas connus a priori et la méthode peut donc présenter un coût de calcul important. Certains auteurs ont ajouté des forces répulsives à courte portée (voir [102] et [197]). Dans [213], des forces élastiques répulsives sont appliquées lorsque les particules commencent à se chevaucher. Une force de lubrification est intégrée à une méthode de simulation basée sur des équations intégrales dans [93]. Dans [177], un algorithme de minimisation est utilisé pour imposer une distance minimale entre les particules. Ces méthodes assurent la stabilité numérique mais ne sont pas forcément en accord avec la physique sous-jacente. Aline Lefebvre [162] a simulé des écoulements de particules rigides dans un fluide newtonien en utilisant une méthode de pénalisation qui prend en compte les collisions et la méthode des caractéristiques pour la discrétisation en temps. Contrairement à [139] qui impose une distance minimale sur les particules voisines et qui ne peut pas traiter des systèmes denses, elle a implémenté le schéma décrit dans [178] pour les collisions inélastiques à un grand nombre de particules. L'algorithme global de projection des vitesses sur un espace de vitesses admissibles permet d'imposer une distance minimale entre les particules et permet de gérer efficacement les cas denses en prenant en compte globalement tous les contacts possibles.

Dans les simulations de situations d'évacuations d'urgence (où les personnes sont représentées par des particules rigides), il y a différentes méthodes pour gérer le contact. Les individus sont gérés à l'aide de forces de répulsion choisies très singulières, ce qui impose de fortes contraintes sur le pas de temps utilisé : il s'agit du modèle de forces sociales. Moins coûteux en temps de calcul, d'autres modèles (automates cellulaires ou graphes orientés) reposent sur une discrétisation spatiale. Cependant ces derniers ne gèrent pas directement les contacts. Ainsi dans [230], les contacts entre les individus et les obstacles sont gérés par la définition d'une distance positive entre ces derniers. Ainsi la vitesse réelle est la projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble de vitesses admissibles respectant une contrainte de non-chevauchement.

La simulation numérique de contacts entre divers solides déformables reste, malgré les nombreux travaux qu'elle a suscités, un problème très délicat en mécanique des milieux déformables. Un algorithme robuste de prise en compte des contraintes de non-interpénétration entre solides déformables subissant de grandes déformations a été proposé dans [196]. Comme la méthode de formulation de type maître-esclave (voir [159]) ne peut s'appliquer au cas des auto-contacts, il s'est inspiré de la méthode NSCD introduite dans [138]. Dans la dernière partie, pour éviter les contacts "numériques", on adapte l'algorithme d'Olivier Pantz au cas dynamique des globules rouges et on ajoute une étape de projection afin d'éliminer les intersections. A cet effet, des nouvelles contraintes imposant une distance minimale ε entre les vésicules et/ou le bord du domaine sont ajoutées.

3 Plan de la thèse

La thèse intitulée "Modélisation, analyse et simulation de problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides" se compose de trois parties indépendantes.

La première partie plus théorique traite de problèmes variationnels quasi-statiques et de leurs comportements asymptotiques. De nombreux problèmes traduisant des phénomènes non linéaires en mécanique et en physique sont formulés à l'aide d'inéquations variationnelles. On rencontre de telles inéquations en étudiant les problèmes d'obstacle, les fluides de Bingham en visco-plasticité, les problèmes de torsion en élasto-plasticité, les problèmes de contact ou de Signorini, ainsi que ceux munis de la loi de frottement de Coulomb, etc. On s'intéresse alors au comportement asymptotique d'inégalités variationnelles quasi-statiques par rapport à ces paramètres physiques tel que le coefficient de frottement ou le coefficient de compliance. On commence par étudier le problème simplifié de frottement quasi-statique et par dualité convexe, on le reformule en un problème standard d'évolution. Ainsi à l'aide de méthodes bien connues, on peut étudier la stabilité de la solution par rapport au coefficient de frottement. Enfin on élargit certains résultats obtenus au modèle quasi-statique de frottement avec compliance normale.

Dans la seconde partie, on s'intéresse au contrôle de la qualité des calculs en mécanique des solides. L'un des buts est de formuler et d'analyser le contact avec la méthode XFEM (eXtended Finite Element Method). Ainsi dans un premier chapitre d'introduction, on rappelle les différentes notions d'estimations d'erreur et on décrit la méthode XFEM classique et deux de ses variantes. Après ce chapitre introductif, on commence par étudier et implémenter sous Getfem++ un estimateur a posteriori par résidu pour le problème de Laplace et pour le système de l'élasticité en dimension deux discrétisés par la méthode XFEM. La définition d'un opérateur de quasi-interpolation nous permet d'obtenir l'analyse a posteriori vérifiée par des résultats numériques. Afin d'élargir ces résultats au cas du contact pour la méthode XFEM, on propose dans le Chapitre 3 des estimateurs d'erreur par résidu pour les approximations par éléments finis des problèmes de contact avec frottement de Coulomb. On propose, étudie et implémente sous CAST3M deux estimateurs d'erreur associés à deux discrétisations par éléments finis. Un résultat récent d'unicité de Renard dans [203] pour le problème continu nous permet de réaliser l'analyse de l'erreur a posteriori. Dans les deux cas, les estimations permettent d'obtenir des bornes supérieure et inférieure de l'erreur de discrétisation et on compare les deux approches numériquement. Pour faciliter l'introduction du contact dans la méthode XFEM, on désire utiliser une méthode permettant de contourner la condition inf-sup de Babuška-Brezzi : il s'agit d'une méthode reposant sur celle de Barbosa et Hughes [23]. On l'applique d'abord dans le Chapitre 4 au problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. On justifie l'existence et l'unicité du problème discret et on met en exergue un estimateur a posteriori. On achève cette partie en adaptant les méthodes présentées précédemment à une méthode de domaine fictif. On donne la formulation du contact avec la méthode XFEM et on étudie la convergence de cette nouvelle méthode.

La dernière partie concerne la simulation numérique en mécanique des fluides. Plus particulièrement, on s'intéresse à l'analyse et la simulation numérique sous FreeFem++ des contacts pour les globules rouges en dimension 2 évoluant dans un fluide régi par les équations de Navier-Stokes. On présente une méthode numérique pour résoudre le système fluide/structure formé par les globules rouges et le fluide environnant en dimension 2. La méthode prend en compte trois aspects essentiels : le comportement mécanique des globules rouges, les interactions fluide/structure et les interactions de contacts structures/structures. On rappelle alors la composition des globules qui leur procure une géométrie particulière ainsi que certaines propriétés leur permettant de traverser tous les capillaires. On présente ensuite le modèle adopté dans les simulations décrivant la dynamique des globules. Puis on décrit l'algorithme utilisé. Nous limitons notre étude au cas bidimensionnel qui, bien que simplificateur, nous permet de reproduire une palette assez importante d'observations expérimentales comme l'illustrent les simulations numériques obtenues dans la dernière section.

Première partie
Inéquations variationnelles

Chapitre 1

Problèmes variationnels quasi-statiques et leurs comportements asymptotiques

DANS ce chapitre, on s'intéresse au comportement asymptotique de solutions d'inégalités variationnelles quasi-statiques par rapport à des paramètres physiques comme le coefficient de frottement ou le coefficient de compliance. On commence par étudier le problème simplifié de frottement quasi-statique et par dualité convexe, on le reformule en un problème standard d'évolution. Ainsi on peut l'étudier à l'aide de méthodes bien connues. Enfin on élargit certains résultats obtenus au modèle quasi-statique de frottement avec compliance normale.

Ce travail a été effectué en collaboration avec Mihaï Bostan et a abouti à la soumission d'un article intitulé **Some remarks on time-dependent variational problems and their asymptotic behaviour** [45].

Sommaire

1.1	Introduction	16
1.2	Comportement asymptotique du modèle simplifié de frottement	18
1.2.1	Un problème standard d'évolution	19
1.2.2	Estimations a priori	21
1.2.3	Limite des fluctuations du premier ordre	24
1.3	Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale	28
1.4	Conclusion	35

1.1 Introduction

BEAUCOUP de problèmes traduisant des phénomènes non linéaires en mécanique et en physique sont formulés à l'aide d'inéquations variationnelles. On rencontre de telles inéquations en étudiant les problèmes d'obstacle, les fluides de Bingham en visco-plasticité, les problèmes de torsion en élasto-plasticité, les problèmes de contact ou de Signorini, ainsi que ceux munis de la loi de frottement de Coulomb, etc. La solution de ces problèmes dépend de certains paramètres physiques, tel que le coefficient de frottement, de torsion, ou de compliance. La question qui nous vient à l'esprit concerne le comportement asymptotique de la solution par rapport à ces coefficients. Par exemple, on veut identifier la limite des solutions u_ε lorsque le paramètre physique, que l'on note $\varepsilon > 0$, devient très petit. Si ε approche 0, alors u_ε tend vers $u^0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon$. Mais dans beaucoup de situations, l'approximation $u_\varepsilon \sim u^0$ n'est pas satisfaisante. On a alors besoin d'écrire u_ε avec un développement limité à l'ordre 1 :

$$u_\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon o(\varepsilon).$$

En d'autres mots, on s'intéresse à la limite $\lim_{\varepsilon \searrow 0} (u_\varepsilon - u^0)/\varepsilon$.

Un modèle simplifié pour le frottement fut introduit dans [100] (voir aussi [86], [101]). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ un ouvert borné avec un bord régulier et $V = H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|v\| = \left\{ \int_\Omega (|v(x)|^2 + |\nabla v|^2) d\Omega \right\}^{1/2}$ pour tout $v \in V$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère l'inégalité variationnelle :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \in V : \int_\Omega \{u_\varepsilon(v - u_\varepsilon) + \nabla u_\varepsilon \cdot (\nabla v - \nabla u_\varepsilon)\} d\Omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} \{|v| - |u_\varepsilon|\} d\Gamma & \quad (1.1) \\ & \geq \int_\Omega \mathcal{F}(v - u_\varepsilon) d\Omega, \forall v \in V \end{aligned}$$

où $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$. On peut écrire la forme linéaire continue $v \in V \rightarrow \int_\Omega \mathcal{F}v d\Omega$ de la façon suivante $v \rightarrow \int_\Omega \{Fv + \nabla F \cdot \nabla v\} d\Omega$ pour tout élément $F \in V$. Ici ε désigne un petit paramètre correspondant au coefficient de frottement. En résumé, le problème ci-dessus peut être reformulé de la manière suivante : si $(H, (\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert, on cherche $u_\varepsilon \in H$ tel que :

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \varepsilon j(v) - \varepsilon j(u_\varepsilon) \geq (F, v - u_\varepsilon), \forall v \in H \quad (1.2)$$

où $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue H -elliptique, $j : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une fonction propre, convexe, semi continue inférieurement sur H et $F \in H$. Pour tout $\varepsilon > 0$, le théorème de Lions-Stampacchia assure que l'inégalité (1.2) (voir [100], [165]) est bien posée.

On s'interroge sur le comportement asymptotique de la famille de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ pour ε petit. Par exemple, on écrit le développement de u_ε ainsi :

$$u_\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots \quad (1.3)$$

Insérant cette expression dans (1.2) on aboutit à :

$$a(u^0 + \varepsilon u^1 + \dots, v - u^0 - \varepsilon u^1 - \dots) + \varepsilon j(v) - \varepsilon j(u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) \geq (F, v - u^0 - \varepsilon u^1 - \dots) \quad (1.4)$$

et passant à la limite quand $\varepsilon \searrow 0$, on obtient :

$$u^0 \in H : a(u^0, v - u^0) \geq (F, v - u^0), \forall v \in H$$

qui est équivalent à :

$$u^0 \in H : a(u^0, v) = (F, v), \forall v \in H. \quad (1.5)$$

Remarque 1.1.1

Le terme dominant de (1.3) résout le problème elliptique (1.5).

L'évaluation du terme du premier ordre u^1 est obtenue en combinant (1.4) et (1.5) :

$$\varepsilon a(u^1 + \varepsilon u^2 + \dots, v - u^0 - \varepsilon u^1 - \dots) + \varepsilon j(v) - \varepsilon j(u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) \geq 0.$$

En simplifiant par ε et en remplaçant v par $u^0 + \varepsilon v$, on arrive à :

$$a(u^1 + \varepsilon u^2 + \dots, \varepsilon(v - u^1) - \varepsilon^2 u^2 - \dots) + j(u^0 + \varepsilon v) - j(u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots) \geq 0$$

qui est équivalent à :

$$a(u^1 + \varepsilon u^2 + \dots, v - u^1 - \varepsilon u^2 - \dots) + \frac{j(u^0 + \varepsilon v) - j(u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots)}{\varepsilon} \geq 0.$$

Puis en passant de nouveau à la limite lorsque $\varepsilon \searrow 0$, on aboutit à :

$$a(u^1, v - u^1) + (\partial j(u^0), v - u^1) \geq 0, \forall v \in H.$$

En notant $A : H \rightarrow H$ l'opérateur linéaire associé à la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, l'inégalité précédente signifie que u^1 appartient à l'ensemble convexe fermé $K = -A^{-1}\partial j(u^0)$. Il n'est pas difficile de voir que u^1 est la solution du problème variationnel suivant :

$$u^1 \in K : a(u^1, v - u^1) \geq 0, \forall v \in K.$$

Maintenant que l'on a déterminé les termes u^0, u^1, \dots , il nous faut vérifier la validité de l'expansion asymptotique (1.3), par exemple que $u_\varepsilon - u^0 = o(\varepsilon)$, $u_\varepsilon - u^0 - \varepsilon u^1 = \varepsilon o(\varepsilon)$, etc. De tels résultats ont été obtenus dans [42].

Dans ce chapitre, nous voulons améliorer l'analyse asymptotique pour les inégalités variationnelles quasi-statiques associées à (1.1). On commence par l'étude du modèle simplifié de frottement que l'on transforme en un problème classique d'évolution. Pour ce problème, on établit plusieurs estimations uniformes qui faciliteront par la suite l'étude de la limite du premier ordre. Enfin on élargit les précédentes estimations au modèle de frottement avec compliance normale.

1.2 Comportement asymptotique du modèle simplifié de frottement

Soient l'espace des fonctions continues $C(0, T; V)$ de $[0, T]$ dans V et l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$ de \mathbb{R}_+ dans V , c'est-à-dire l'espace de Banach de toutes les fonctions $u \in L^p(\mathbb{R}_+; V)$ dont le gradient au sens des distributions ∇u appartient à $L^p(\mathbb{R}_+; V)$, muni de la norme $\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p$. La norme $\|\cdot\|_p$ est définie par :

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} \|u(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} < +\infty \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_V < +\infty \quad \text{si } p = +\infty.$$

$W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$ est l'adhérence de $C_0^\infty(\mathbb{R}_+; V)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$ et l'espace local correspondant est noté $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$.

On veut étudier le comportement asymptotique du modèle simplifié de frottement : trouver $u_\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$ tel que

$$\begin{cases} u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 \\ u_\varepsilon(t) \in V : \\ \int_\Omega \{u_\varepsilon(t)(v - \dot{u}_\varepsilon(t)) + \nabla u_\varepsilon(t) \cdot (\nabla v - \nabla \dot{u}_\varepsilon(t))\} d\Omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} \{|v| - |\dot{u}_\varepsilon|\} d\Gamma \\ \geq \int_\Omega \{F(t)(v - \dot{u}_\varepsilon(t)) + \nabla F(t) \cdot (\nabla v - \nabla \dot{u}_\varepsilon(t))\} d\Omega, \forall v \in V \end{cases} \quad (1.6)$$

où $F \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$ pour $p \in]1, +\infty]$.

Remarque 1.2.1

L'inclusion $W^{1,p}(0, T; V) \subset C(0, T; V)$ permet d'avoir $F, u_\varepsilon \in C(0, T; V)$ pour tout $T > 0$ et ainsi l'inégalité variationnelle de (1.6) a du sens pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

La bonne définition de ces inégalités variationnelles quasi-statiques a été établie dans [8], [9], [10], [107], [151]. L'existence est obtenue en utilisant une approximation par différences finies avec un schéma d'Euler implicite. En prenant $v = 0$ et $v = 2\dot{u}_\varepsilon(t)$ dans (1.6), on obtient que (1.6) est équivalente à :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0, \quad u_\varepsilon(t) \in V, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ \int_\Omega \{u_\varepsilon(t)\dot{u}_\varepsilon(t) + \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon\} d\Omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} |\dot{u}_\varepsilon| d\Gamma = \int_\Omega \{F(t)\dot{u}_\varepsilon(t) + \nabla F(t) \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon(t)\} d\Omega \\ \int_\Omega \{u_\varepsilon(t)v + \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\} d\Omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} |v| d\Gamma \geq \int_\Omega \{F(t)v + \nabla F(t) \cdot \nabla v\} d\Omega, \forall v \in V. \end{cases}$$

En particulier la condition initiale u_ε^0 doit satisfaire pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega \{u_\varepsilon^0(x)v(x) + \nabla u_\varepsilon^0 \cdot \nabla v\} d\Omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} |v(x)| d\Gamma \geq \int_\Omega \{F_0(x)v(x) + \nabla F_0 \cdot \nabla v\} d\Omega. \quad (1.7)$$

1.2.1 Un problème standard d'évolution

Il est possible de transformer le problème quasi-statique (1.6) en un problème standard d'évolution. En effet, en conservant les notations A et j , le problème (1.6) est équivalent à :

$$A \left(\frac{u_\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon} \right) + \partial j(\dot{u}_\varepsilon(t)) \ni 0, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

et aussi à

$$\left[\dot{u}_\varepsilon(t), -A \left(\frac{u_\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon} \right) \right] \in \partial j, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.8)$$

On suppose que la fonction j est paire, *i.e.*

$$D(j) = -D(j), \quad j(v) = j(-v) \quad \text{pour tout } v \in D(j) = \{v \in V; j(v) \neq \emptyset\}. \quad (1.9)$$

Remarque 1.2.2

C'est le cas du modèle (1.1).

Sous la condition (1.9), il est facile de voir que ∂j est impaire : $D(\partial j) = -D(\partial j)$ et $\partial j(-x) = -\partial j(x)$ pour tout $x \in D(\partial j)$, *i.e.*

$$[x, y] \in \partial j \quad \text{si et seulement si} \quad [-x, -y] \in \partial j.$$

C'est pourquoi (1.8) devient :

$$\left[-\dot{u}_\varepsilon(t), A \left(\frac{u_\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon} \right) \right] \in \partial j.$$

Considérons maintenant la fonction conjuguée j^* par dualité convexe

$$j^*(w) = \sup_{v \in H} \{(w, v) - j(v)\}, \quad w \in H.$$

On sait que (voir [52]) j^* est propre, convexe, semi continue inférieurement et $\partial j^* = (\partial j)^{-1}$. Ainsi on obtient :

$$\left[A \left(\frac{u_\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon} \right), -\dot{u}_\varepsilon(t) \right] \in (\partial j)^{-1} = \partial j^*$$

signifiant que u_ε est solution du problème d'évolution suivant :

$$\frac{du_\varepsilon}{dt} + \partial j^* A \left(\frac{u_\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon} \right) \ni 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

En introduisant la notation $y_\varepsilon(t) = \frac{u_\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon}$, on déduit que le problème quasi-statique (1.6) peut être écrit :

$$\begin{cases} y_\varepsilon(0) = \frac{u_\varepsilon^0 - u_0^0}{\varepsilon} =: y_\varepsilon^0 \\ \varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{dt} + \partial j^* A y_\varepsilon(t) \ni -\frac{du^0}{dt}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (1.10)$$

La bonne définition de (1.10) provient de résultats standards sur les problèmes d'évolution associés aux opérateurs maximaux monotones (voir [51]). On utilise le résultat connu (extrait de [51] pp. 72), qui s'adapte facilement à notre cas, par ellipticité de l'opérateur A :

Théorème 1.2.1 (Brezis)

Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement sur un espace de Hilbert H et $f \in L^2(0, T; H)$. Alors pour tout $u^0 \in \overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u(0) = u^0 \\ \frac{du}{dt} + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t), \quad t \in [0, T[\end{cases}$$

a une unique solution forte $u \in C(0, T; H)$ telle que :

- i) $\varphi \circ u \in L^1(0, T; H)$
- ii) $\varphi \circ u$ est absolument continue sur $[\delta, T]$ pour tout $\delta \in]0, T[$
- iii) $\sqrt{t} \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$.

De plus, si $u^0 \in D(\varphi)$ alors

- iv) $\varphi \circ u$ est absolument continue sur $[0, T]$
- v) $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$.

Pour le modèle simplifié de frottement, la fonction convexe est donnée par :

$$j(v) = \int_{\partial\Omega} |v(x)| \, d\Gamma, \quad v \in V.$$

Comme $j(v) \geq 0 = j(0)$ pour tout $v \in V$, on a $0 \in \partial j(0)$. On considère l'ensemble convexe fermé non vide

$$D_0 = \partial j(0) = \left\{ w \in V : \int_{\partial\Omega} |v(x)| \, d\Gamma \geq \int_{\Omega} \{w(x)v(x) + \nabla w \cdot \nabla v\} \, d\Omega, \forall v \in V \right\}.$$

Notons que j est homogène et on vérifie facilement que la fonction conjuguée j^* est donnée par :

$$j^*(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } w \in D_0 \\ +\infty, & \text{si } w \in V \setminus D_0 \end{cases}$$

et alors $D(j^*) = D_0$. La fonction convexe j est une semi-norme bornée sur V . En effet, par le théorème de trace, on a :

$$j(v) = \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq C(\Omega)\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

En particulier pour tout $v \in V$

$$\partial j(v) \subset \partial j(0) \subset \{w \in V : \|w\| \leq C(\Omega)\}.$$

Cela suggère que :

$$D(\partial j^*) = D((\partial j)^{-1}) = R(\partial j) = \cup_{v \in V} \partial j(v) = \partial j(0) = D_0.$$

En appliquant le Théorème 1.2.1 au modèle simplifié de frottement (avec $A = Id$), on obtient :

Proposition 1.2.1

Pour tout $F \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+; V)$, $\varepsilon > 0$ et sous la condition initiale u_ε^0 telle que $\frac{u_\varepsilon^0 - F(0)}{\varepsilon} \in D_0$, le problème (1.6) a une unique solution $u_\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+; V)$, qui satisfait :

$$\int_0^T \|\dot{u}_\varepsilon(t)\|^2 dt \leq \int_0^T \|\dot{F}(t)\|^2 dt, \quad \forall T > 0. \quad (1.11)$$

Démonstration : On justifie seulement l'estimation (1.11). En multipliant (1.10) par \dot{y}_ε , on a après intégration sur $[0, T]$:

$$\varepsilon \int_0^T \|\dot{y}_\varepsilon(t)\|^2 dt + j^*(y_\varepsilon(T)) - j^*(y_\varepsilon(0)) = - \int_0^T (\dot{F}(t), \dot{y}_\varepsilon(t)) dt.$$

Avec l'hypothèse $y_\varepsilon^0 = \frac{u_\varepsilon^0 - F(0)}{\varepsilon} \in D_0 = D(j^*)$, on obtient $j^*(y_\varepsilon(0)) = 0$ d'où

$$\varepsilon \int_0^T \|\dot{y}_\varepsilon(t)\|^2 dt = - \int_0^T (\dot{F}(t), \dot{y}_\varepsilon(t)) dt$$

impliquant que

$$\int_0^T (\dot{u}_\varepsilon(t), \dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)) dt = 0.$$

Notre estimation s'ensuit avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Remarque 1.2.3

L'hypothèse sur la condition initiale de la Proposition 1.2.1 coïncide avec (1.7), car $D_0 = -D_0$.

1.2.2 Estimations a priori

On établit plusieurs estimations uniformes par rapport au paramètre $\varepsilon > 0$. Il est facile de voir que $(u_\varepsilon(t))_{\varepsilon > 0}$ converge vers $F(t)$ dans V uniformément en temps. Comme on veut déterminer le terme de premier ordre de l'expansion asymptotique (comme dans (1.3)), on a besoin d'estimer les oscillations $y_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - F}{\varepsilon}$ de u_ε autour de la fonction limite F .

Proposition 1.2.2

Soit $F \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$ et $u_\varepsilon^0 \in V$ telle que $\frac{u_\varepsilon^0 - F(0)}{\varepsilon} \in D_0$. Alors on a

$$i) \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \frac{u_\varepsilon - F}{\varepsilon} \right\|_{C(\mathbb{R}_+; V)} \leq C(\Omega).$$

$$ii) \sup_{\varepsilon > 0} \|\dot{u}_\varepsilon\|_{L^p(0, T; V)} \leq \|\dot{F}\|_{L^p(0, T; V)}, \quad \forall T > 0.$$

En particulier si $\dot{F} = 0$ alors

$$iii) \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \frac{\sqrt{t}}{\varepsilon} (\dot{u}_\varepsilon - \dot{F}) \right\|_{L^2(0, T; V)} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} C(\Omega).$$

Démonstration : i) Ici (\cdot, \cdot) correspond au produit scalaire standard sur V . En utilisant (1.6), on aboutit à :

$$(u_\varepsilon(t) - F(t), v - \dot{u}_\varepsilon(t)) + \varepsilon j(v) - \varepsilon j(\dot{u}_\varepsilon(t)) \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

En choisissant v tel que $v - \dot{u}_\varepsilon(t) = F(t) - u_\varepsilon(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t) - F(t)\|^2 &\leq \varepsilon j(\dot{u}_\varepsilon(t) + F(t) - u_\varepsilon(t)) - \varepsilon j(\dot{u}_\varepsilon(t)) \\ &\leq \varepsilon j(F(t) - u_\varepsilon(t)) \\ &\leq \varepsilon C(\Omega) \|u_\varepsilon(t) - F(t)\| \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - F}{\varepsilon} \right\|_{C(\mathbb{R}_+; V)} \leq C(\Omega), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

ii) Pour presque tout $t > 0$ et $h > 0$, (1.6) écrite en $t + h$ avec $v = 0$ donne :

$$(u_\varepsilon(t + h), \dot{u}_\varepsilon(t + h)) \leq (F(t + h), \dot{u}_\varepsilon(t + h)) - \varepsilon j(\dot{u}_\varepsilon(t + h)). \quad (1.12)$$

Maintenant (1.6) en t avec $v = \dot{u}_\varepsilon(t) + \dot{u}_\varepsilon(t + h)$ mène à :

$$-(u_\varepsilon(t), \dot{u}_\varepsilon(t + h)) \leq -(F(t), \dot{u}_\varepsilon(t + h)) + \varepsilon j(\dot{u}_\varepsilon(t) + \dot{u}_\varepsilon(t + h)) - \varepsilon j(\dot{u}_\varepsilon(t)). \quad (1.13)$$

En combinant (1.12) et (1.13) on arrive à :

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon(t + h) - u_\varepsilon(t), \dot{u}_\varepsilon(t + h)) &\leq (F(t + h) - F(t), \dot{u}_\varepsilon(t + h)) \\ &\quad + \varepsilon \{j(\dot{u}_\varepsilon(t) + \dot{u}_\varepsilon(t + h)) - j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{u}_\varepsilon(t + h))\} \\ &\leq (F(t + h) - F(t), \dot{u}_\varepsilon(t + h)) \end{aligned}$$

car j est une semi-norme. On déduit que :

$$\left(\frac{u_\varepsilon(t + h) - u_\varepsilon(t)}{h}, \dot{u}_\varepsilon(t + h) \right) \leq \left\| \frac{F(t + h) - F(t)}{h} \right\| \|\dot{u}_\varepsilon(t + h)\|$$

ce qui entraîne en posant $h \searrow 0$

$$\|\dot{u}_\varepsilon(t)\| \leq \|\dot{F}(t)\|, \quad \text{pour presque tout } t > 0$$

et c'est pourquoi

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\dot{u}_\varepsilon\|_{L^p(0, T; V)} \leq \|\dot{F}\|_{L^p(0, T; V)}, \quad \forall T > 0.$$

iii) Supposons maintenant que $\ddot{F} = 0$, et posons $F(t) = F(0) + tG$, $F(0), G \in V$. Par les précédents calculs, on sait que :

$$\|\dot{u}_\varepsilon(t)\| \leq \|\dot{F}(t)\| = \|G\|, \text{ pour presque tout } t > 0$$

et ainsi les fonctions $t \rightarrow u_\varepsilon(t)$ et $t \rightarrow j(u_\varepsilon(t))$ sont Lipschitz continues. En effet,

$$|j(u_\varepsilon(t+h)) - j(u_\varepsilon(t))| \leq j(u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)) \leq C(\Omega)\|u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)\| \leq C(\Omega)|h|\|G\|.$$

Pour tout point différentiable t_0 de u_ε et $j \circ u_\varepsilon$, on aboutit à

$$\frac{dj(u_\varepsilon)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \left(q, \frac{du_\varepsilon}{dt}\Big|_{t=t_0} \right), \forall q \in \partial j(u_\varepsilon(t_0)).$$

On écrit aussi $\frac{d}{dt}j(u_\varepsilon) = (\partial j(u_\varepsilon(t)), \dot{u}_\varepsilon(t))$. On commence par justifier le dernier point de la Proposition 1.2.2 pour les solutions régulières $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Observons que (1.6) est équivalent à

$$u_\varepsilon(t) - F(t) + \varepsilon \partial j(\dot{u}_\varepsilon(t)) \ni 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.14)$$

On prévoit de multiplier (1.14) par $\ddot{u}_\varepsilon = \ddot{u}_\varepsilon - \ddot{F}$. Mais avant notons que

$$\frac{d}{dt} \left(j(\dot{u}_\varepsilon) - j(\dot{F}) \right) = (\partial j(\dot{u}_\varepsilon(t)), \ddot{u}_\varepsilon(t)). \quad (1.15)$$

Regroupons (1.14) et (1.15) :

$$(u_\varepsilon(t) - F(t), \ddot{u}_\varepsilon - \ddot{F}) + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(j(\dot{u}_\varepsilon) - j(\dot{F}) \right) = 0$$

et on obtient

$$\frac{d}{dt} (u_\varepsilon(t) - F(t), \dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)) + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(j(\dot{u}_\varepsilon) - j(\dot{F}) \right) = \|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)\|^2. \quad (1.16)$$

En posant $v = \dot{F}(t)$ dans (1.6), on déduit que :

$$-(u_\varepsilon(t) - F(t), \dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)) - \varepsilon \left\{ j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{F}(t)) \right\} \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

On considère la fonction positive $b_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$b_\varepsilon(t) = -(u_\varepsilon(t) - F(t), \dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)) - \varepsilon \left\{ j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{F}(t)) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

et (1.16) devient

$$\|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)\|^2 + \dot{b}_\varepsilon(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $T > 0$, en intégrant sur $[s, T]$ pour tout $s \in [0, T]$:

$$\int_s^T \|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)\|^2 dt = b_\varepsilon(s) - b_\varepsilon(T) \leq b_\varepsilon(s).$$

L'intégration pour $s \in [0, T]$ mène à :

$$\int_0^T \int_s^T \|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)\|^2 dt ds = \int_0^T \int_0^t \|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)\|^2 ds dt$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T t \|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)\|^2 dt &\leq - \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|u_\varepsilon(s) - F(s)\|^2 ds - \varepsilon \int_0^T \{j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{F}(t))\} dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u_\varepsilon^0 - F(0)\|^2 - \varepsilon \int_0^T \{j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{F}(t))\} dt \\
 &\leq \frac{1}{2} (C(\Omega)\varepsilon)^2 - \varepsilon \int_0^T \{j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{F}(t))\} dt. \tag{1.17}
 \end{aligned}$$

Pour estimer le dernier terme, prenons un élément quelconque q de $\partial j(\dot{F})$ et notons que

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \{j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{F}(t))\} dt &\geq \int_0^T (q, \dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)) dt \\
 &= (q, u_\varepsilon(T) - F(T)) - (q, u_\varepsilon^0 - F(0)) \\
 &\geq -2C(\Omega)^2\varepsilon \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

comme $\|q\| \leq C(\Omega)$ (car l'application J est Lipschitz continue de constante $C(\Omega)$) et $\|u_\varepsilon - F\|_{C(\mathbb{R}_+; V)} \leq C(\Omega)\varepsilon$. Finalement en combinant (1.17) et (1.18), on déduit pour tout $T > 0$:

$$\int_0^T t \|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}(t)\|^2 dt \leq \frac{5}{2} C(\Omega)^2 \varepsilon^2$$

entraînant que $\|\sqrt{t}(\dot{u}_\varepsilon - \dot{F})/\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; V)} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} C(\Omega)$.

Le résultat général s'ensuit par des arguments standards de régularisation : par densité des fonctions C_c^∞ dans $W^{1,p}$, on obtient en prenant $u_{\varepsilon_n} \in C_c^\infty$ et $u_\varepsilon \in W^{1,p}$:

$$\begin{aligned}
 \|\sqrt{t}(\dot{u}_\varepsilon - \dot{F})/\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; V)} &\leq \|\sqrt{t}(\dot{u}_\varepsilon - \dot{u}_{\varepsilon_n})/\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; V)} + \|\sqrt{t}(\dot{u}_{\varepsilon_n} - \dot{F})/\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; V)} \\
 &\leq C' \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{5}{2}} C(\Omega)
 \end{aligned}$$

Le résultat découle lorsque $n \rightarrow +\infty$. ■

1.2.3 Limite des fluctuations du premier ordre

En se basant sur les estimations précédentes, on déduit que $\lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon = F$ dans $C(\mathbb{R}_+; V)$ et que $((u_\varepsilon - F)/\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est borné sur $L^\infty(\mathbb{R}_+; V)$. C'est pourquoi on utilise la suite $(\varepsilon_k)_k$ convergant vers 0 et une fonction $y \in L^\infty(\mathbb{R}_+; V)$ telle que :

$$y_{\varepsilon_k} := \frac{u_{\varepsilon_k} - F}{\varepsilon_k} \rightharpoonup y \text{ faiblement } \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; V) \text{ et faiblement dans } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; V).$$

Comme $(\sqrt{t} \dot{y}_{\varepsilon_k})_k$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}_+; V)$, on peut supposer que $\sqrt{t} \dot{y}_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \sqrt{t} z$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}_+; V)$. Il est facile de voir que z coïncide avec la distribution dérivée de y . Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on introduit l'ensemble convexe fermé non vide $K(t) = -\partial j(\dot{F}(t))$.

Théorème 1.2.2

Supposons que $F(t) = F_0 + tG$ avec $F_0, G \in V$ et que $(u_\varepsilon^0 - F_0)/\varepsilon \in D_0$. Alors la suite $(\varepsilon_k)_k$ converge vers 0 et il existe un élément $y \in -\partial j(G)$ tel que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{\varepsilon_k} - F}{\varepsilon_k} = y \text{ faiblement } \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; V) \text{ et fortement dans } L^2_{\text{loc}}(]0, +\infty[; V).$$

Démonstration : Soit $\eta \in C_c^1(]0, +\infty[; \mathbb{R})$ une fonction positive. En multipliant (1.6) par $\eta(t)$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{u_{\varepsilon_k}(t) - F(t)}{\varepsilon_k}, v - \dot{u}_{\varepsilon_k}(t) \right) \eta(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} j(v) \eta(t) dt \geq \int_{\mathbb{R}_+} j(\dot{u}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt. \quad (1.19)$$

Comme η a un support compact dans $]0, +\infty[$, par la Proposition 1.2.2 on déduit :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+} \{j(\dot{u}_\varepsilon(t)) - j(\dot{F})\} \eta(t) dt \right| &\leq C(\Omega) \int_{\mathbb{R}_+} \|\dot{u}_\varepsilon(t) - \dot{F}\| \eta(t) dt \\ &\leq C(\Omega) \|\sqrt{t}(\dot{u}_\varepsilon - \dot{F})\|_{L^2(\mathbb{R}_+; V)} \left\| \frac{\eta}{\sqrt{t}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})} \\ &\leq \sqrt{\frac{5}{2}} \varepsilon C(\Omega)^2 \left\| \frac{\eta}{\sqrt{t}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

et on obtient la convergence

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}_+} j(\dot{u}_\varepsilon(t)) \eta(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} j(\dot{F}) \eta(t) dt.$$

De la même manière, en combinant convergences faible et forte, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} (y_{\varepsilon_k}(t), v - \dot{u}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt &= \int_{\mathbb{R}_+} (y_{\varepsilon_k}(t), v - \dot{F}) \eta(t) dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} (y_{\varepsilon_k}(t), \dot{F} - \dot{u}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}_+} (y(t), v - \dot{F}) \eta(t) dt, \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans (1.19) lorsque $k \rightarrow +\infty$ on aboutit à :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \{(y(t), v - \dot{F}) + j(v) - j(\dot{F})\} \eta(t) dt \geq 0$$

pour toute fonction positive $\eta \in C_c^1(]0, +\infty[; \mathbb{R})$ et par conséquent on a pour presque tout $t > 0$:

$$(y(t), v - \dot{F}) + j(v) - j(\dot{F}) \geq 0, \quad v \in V$$

ce qui signifie que $y(t) \in K$ pour presque tout $t > 0$. Sachant que l'ensemble K ne dépend pas de t , on a $K = -\partial j(G)$. En prenant v un élément arbitraire de K , $[\dot{F}, -v] \in \partial j$.

D'après (1.6) on sait que $y_{\varepsilon_k} + \partial j(\dot{u}_{\varepsilon_k}(t)) \ni 0$ qui est équivalent à $[\dot{u}_{\varepsilon_k}(t), -y_{\varepsilon_k}(t)] \in \partial j$. C'est pourquoi avec la monotonie de ∂j on a :

$$(\dot{u}_{\varepsilon_k}(t) - \dot{F}, -(y_{\varepsilon_k}(t) - v)) \geq 0$$

et après multiplication par $\varepsilon_k^{-1}\eta \geq 0$, où $\eta \in C_c([0, +\infty[; \mathbb{R})$ et intégration sur \mathbb{R}_+ , on déduit

$$\int_{\mathbb{R}_+} (\dot{y}_{\varepsilon_k}(t), v - y_{\varepsilon_k}(t))\eta(t) dt \geq 0.$$

Comme $(y_{\varepsilon_k})_k, (\dot{y}_{\varepsilon_k})_k$ est borné dans $L^2(\text{supp}(\eta); V)$, (après extraction éventuelle) on a la convergence forte $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\varepsilon_k} = y$ dans $L^2(\text{supp}(\eta); V)$. Finalement on déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}_+} (\dot{y}(t), v - y(t))\eta(t) dt \geq 0$$

ce qui implique :

$$y(t) \in K : (\dot{y}(t), v - y(t)) \geq 0, \text{ pour presque tout } t > 0, \forall v \in K.$$

L'inégalité variationnelle précédente signifie que pour tout $v \in K$ la fonction $t \rightarrow \frac{1}{2}\|y(t) - v\|^2$ est décroissante *i.e.*,

$$\frac{1}{2}\|y(t+h) - v\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y(t) - v\|^2, \quad t > 0, h > 0.$$

En prenant $v = y(t) \in K$ on a $y(t+h) = y(t), t, h > 0$ et ainsi $y(\cdot)$ est une fonction constante. ■

En réalité on peut montrer que $\lim_{\varepsilon \searrow 0} y_\varepsilon(t) = y$ fortement dans V et uniformément pour $t \in [\delta, +\infty[$, pour tout $\delta > 0$. La preuve repose sur le comportement asymptotique des semi-groupes engendrés par les opérateurs maximaux monotones. En effet, par (1.10) on sait que le modèle simplifié de frottement (1.6) est équivalent à

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{dt} + \partial j^*(y_\varepsilon(t)) \ni -G, t \in \mathbb{R}_+ \\ y_\varepsilon(0) = \frac{u_\varepsilon^0 - F_0}{\varepsilon} \in D_0. \end{cases}$$

On introduit la variable fixe $s = \frac{t}{\varepsilon}$ et la nouvelle inconnue $z_\varepsilon(s) = y_\varepsilon(t)$. On obtient alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dz_\varepsilon}{ds} + \partial j^*(z_\varepsilon(s)) \ni -G, s \in \mathbb{R}_+ \\ z_\varepsilon(0) = \frac{u_\varepsilon^0 - F_0}{\varepsilon} =: z_\varepsilon^0 \in D_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Supposons que $(z_\varepsilon^0)_{\varepsilon > 0}$ converge lorsque $\varepsilon \searrow 0$ vers un élément $z^0 \in \overline{D_0} = D_0$ et considérons $z \in C(\mathbb{R}_+; V)$ l'unique solution forte de (1.20) correspondant à la condition initiale z^0 . En utilisant la monotonie de ∂j^* , on vérifie facilement que :

$$\|z_\varepsilon(s) - z(s)\| \leq \|z_\varepsilon^0 - z^0\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \searrow 0$$

et on peut ainsi écrire :

$$\|y_\varepsilon(t) - y\| \leq \|z_\varepsilon(t/\varepsilon) - z(t/\varepsilon)\| + \|z(t/\varepsilon) - y\| \leq \|z_\varepsilon^0 - z^0\| + \|z(t/\varepsilon) - y\|$$

Si on justifie le comportement asymptotique pour z , i.e. z converge pour de larges temps vers y , alors on obtiendra que $\lim_{\varepsilon \searrow 0} y_\varepsilon(t) = y$ fortement dans V et uniformément pour $t \in [\delta, +\infty[$, pour tout $\delta > 0$.

Ceci est une conséquence directe de résultats connus concernant la théorie de la stabilité des semi-groupes. Plus précisément on fait appel au théorème de Baillon et au résultat de comparaison de Bruck :

Théorème 1.2.3 (Baillon)

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur maximal monotone et impair (i.e., $D(A) = -D(A)$ et $A(-x) = \{-y : y \in Ax\}$). On note par $(S(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe engendré par $-A$. Alors $A^{-1}0 \neq \emptyset$ et pour tout $x \in \overline{D(A)}$ il existe un élément $y \in A^{-1}0$ tel que :

i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Proj}_{A^{-1}0} S(t)x = y$, fortement dans H .

ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t)x = y$, fortement dans H , où $\sigma(t)x = \frac{1}{t} \int_0^t S(s)x ds, t > 0$.

Théorème 1.2.4 (Bruck)

Supposons que la fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ admette un minimum. Notons par $(S(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe engendré par $-\partial\varphi$. Alors pour tout $x \in \overline{D(\partial\varphi)}$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)x - \sigma(t)x\| = 0, \quad \text{où } \sigma(t)x = \frac{1}{t} \int_0^t S(s)x ds, t > 0.$$

En se basant sur les résultats précédents, on obtient :

Théorème 1.2.5

Supposons que $F(t) = F_0 + tG$, avec $F_0, G \in V$ et que la famille $(\varepsilon^{-1}(u_\varepsilon^0 - F_0))_{\varepsilon > 0} \subset D_0$ converge lorsque $\varepsilon \searrow 0$ vers un élément $z^0 \in \overline{D_0} = D_0$. Si $G \in D_0^\perp$ alors il existe $y \in -\partial j(G)$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{u_\varepsilon(t) - (F_0 + tG)}{\varepsilon} = y, \quad \text{uniformément pour } t \in [\delta, +\infty[, \forall \delta > 0.$$

Démonstration : Soit z l'unique solution de

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds} + \partial j^*(z(s)) \ni -G, & s \in \mathbb{R}_+ \\ z(0) = z^0 \in D_0 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds} + \partial \phi_G(z(s)) \ni 0, & s \in \mathbb{R}_+ \\ z(0) = z^0 \in D_0 \end{cases}$$

où $\phi_G(z) = j^*(z) + (G, z)$. Il est facile de voir que ϕ_G est paire (car j^* est paire et $G \in D_0^\perp$). C'est pourquoi $\partial\phi_G$ est impaire et on a $(\partial\phi_G)^{-1}0 = -\partial j(G) \neq \emptyset$. On déduit par le théorème de Baillon et le résultat de comparaison de Bruck qu'il existe un minimum y pour ϕ_G , $y \in -\partial j(G)$ tel que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \text{Proj}_{-\partial J(G)} z(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s z(\tau) d\tau = y.$$

Finalement on a :

$$\|y_\varepsilon(t) - y\| \leq \|z_\varepsilon(t/\varepsilon) - z(t/\varepsilon)\| + \|z(t/\varepsilon) - y\| \leq \|z_\varepsilon^0 - z^0\| + \|z(t/\varepsilon) - y\| \rightarrow 0$$

quand $\varepsilon \searrow 0$, uniformément pour $t \in [\delta, +\infty[$, pour tout $\delta > 0$. ■

1.3 Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

La plupart des résultats de la section précédente s'adaptent avec des changements mineurs au problème de frottement avec compliance normale. On prend donc le modèle décrit dans l'introduction générale à la sous-section concernant le frottement avec compliance normale 1.3, qui a été introduit en élasticité dans [173], [174]. L'ensemble des déplacements admissibles :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \}$$

est muni de la norme $(H^1(\Omega))^n$. On désigne par $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire standard en élasticité linéaire

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} a_{ijhk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_k} d\Omega,$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ représente le tenseur des déformations linéarisé, *i.e.* :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) / 2.$$

Si Γ_D a une mesure superficielle positive, on sait que la forme bilinéaire $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ est $\tilde{\mathbf{V}}$ -elliptique (voir Lemme 0.1.1)

$$\tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \geq \beta \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}.$$

Le problème de frottement avec compliance normale mène à l'inégalité variationnelle suivante (voir, par exemple, [150], [151])

$$\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j_N(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j_T(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}} \quad (1.21)$$

où la forme linéaire L est donné par $L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$ et

$$j_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} c_N(u_n)_+^{m_N} v_n \, d\Gamma, \quad j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} c_T(u_n)_+^{m_T} |v_t| \, d\Gamma.$$

j_N correspond au travail virtuel de la contrainte normale et j_T est la puissance virtuelle des forces de frottement. Les fonctions j_N et j_T sont bien définies pour $1 \leq m_N, m_T$ si $n = 2$, $1 \leq m_N, m_T < 3$ si $n = 3$. Ceci nous permet d'utiliser l'injection

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma_C) \tag{1.22}$$

pour chaque $q \in [1, +\infty[$ si $n = 2$ et pour chaque $q \in [1, 4]$ si $n = 3$. Des calculs standards utilisant des inégalités de Hölder (voir [42] ou Annexe A) donnent pour une constante C dépendant de Ω :

$$|j_N(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_N} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n$$

$$|j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)| \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_T} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{1,\Omega}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in (H^1(\Omega))^n$$

$$|j_N(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_N(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{1,\Omega} \left\{ \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}^{m_N-1} \right\} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

et

$$|j_T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{1,\Omega} \left\{ \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}^{m_T-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}^{m_T-1} \right\} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n$.

Remarque 1.3.1

Pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}$, les fonctions $j_N(\mathbf{u}, \cdot)$, $j_T(\mathbf{u}, \cdot)$ et $j_N(\cdot, \mathbf{v})$, $j_T(\cdot, \mathbf{v})$ sont continues par rapport à la topologie forte de $\tilde{\mathbf{V}}$.

De plus, les fonctions j_N, j_T sont fortement continues sur $\tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{V}}$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (j_N, j_T)(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = (j_N, j_T)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

pour chaque suite $(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)_k$ convergeant fortement dans $\tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{V}}$ vers (\mathbf{u}, \mathbf{v}) .

Sous les conditions ci-dessus, il a été prouvé dans [150] que le problème (1.21) possède des solutions. De plus, il y a des résultats d'unicité [122] pour des coefficients c_N, c_T suffisamment petits. C'est pourquoi, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le problème associé aux coefficients $\varepsilon c_N, \varepsilon c_T$ est bien posé :

$$\mathbf{u}_\varepsilon \in \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) + \varepsilon j_N(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) + \varepsilon j_T(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) - \varepsilon j_T(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon),$$

pour tout $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}$. Le comportement asymptotique de cette inégalité variationnelle lorsque $\varepsilon \searrow 0$ a été étudié récemment dans [42]. On examine ici le problème quasi-statique de frottement avec compliance normale : trouver $\mathbf{u}_\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$ telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\varepsilon(0) = \mathbf{u}_\varepsilon^0 \\ \mathbf{u}_\varepsilon(t) \in \tilde{\mathbf{V}} : \\ \tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) + \varepsilon(j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) - \varepsilon(j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) \\ \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}} \end{cases} \tag{1.23}$$

où (\cdot, \cdot) (resp. $\|\cdot\|$) désigne le produit scalaire usuel (resp. norme) sur $(H^1(\Omega))^n$ et $\mathbf{F} \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$ pour tout $p \in]1, +\infty]$. En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{v} = 2\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)$ dans (1.23), on déduit la forme équivalente :

$$\mathbf{u}_\varepsilon(t) \in \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) + \varepsilon j_N(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) + \varepsilon j_T(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) = (\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) \quad (1.24)$$

et

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) + \varepsilon j_N(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) + \varepsilon j_T(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}. \quad (1.25)$$

En particulier la condition initiale doit satisfaire :

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon^0, \mathbf{v}) + \varepsilon j_N(\mathbf{u}_\varepsilon^0, \mathbf{v}) + \varepsilon j_T(\mathbf{u}_\varepsilon^0, \mathbf{v}) \geq (\mathbf{F}(0), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}. \quad (1.26)$$

Le fait que le problème quasi-statique soit bien posé a été étudié dans [8, 9] pour les conditions initiales satisfaisant (1.26). On établit maintenant des estimations uniformes par rapport au paramètre $\varepsilon > 0$. Observons que, si on note $\tilde{A} : \tilde{\mathbf{V}} \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}$ l'opérateur linéaire associé à la forme bilinéaire $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$, alors le problème quasi-statique correspondant à $\varepsilon = 0$ se réduit à :

$$\mathbf{u}_0(t) \in \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{a}(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}$$

qui est équivalent à $\mathbf{u}_0(t) = \tilde{A}^{-1}\mathbf{F}(t)$, pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 1.3.2

Si $\mathbf{u}_0(0) = \tilde{A}^{-1}\mathbf{F}(0) \in \tilde{\mathbf{V}}$ satisfait $u_0(0)_n \leq 0$ sur Γ_C alors, pour tout $\varepsilon > 0$, (1.26) est vraie avec $\mathbf{u}_\varepsilon^0 = \mathbf{u}_0(0)$.

Proposition 1.3.1

Soit $\mathbf{F} \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$ et $(\mathbf{u}_\varepsilon^0)_{\varepsilon>0} \subset \tilde{\mathbf{V}}$ une famille bornée dans $\tilde{\mathbf{V}}$ telle que (1.26) soit vraie pour tout $\varepsilon > 0$ (par exemple $\mathbf{u}_\varepsilon^0 = \mathbf{u}_0(0)$ avec $u_0(0)_n \leq 0$ sur Γ_C). Alors on obtient :

- i) $\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\tilde{\mathbf{V}})} < +\infty, \quad \forall T > 0.$
- ii) $\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \left\| \frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{C(0,T;\tilde{\mathbf{V}})} < +\infty, \quad \forall T > 0.$
- iii) Pour tout $T > 0$, il existe $\varepsilon_T > 0$ tel que :

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_T} \|\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;\tilde{\mathbf{V}})} \leq \frac{2}{\beta} \|\dot{\mathbf{F}}\|_{L^p(0,T;\tilde{\mathbf{V}})}.$$

Démonstration : i) Observons que $j_T \geq 0$, on déduit de (1.24)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t)) + \frac{\varepsilon}{m_N + 1} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_C} c_N (u_\varepsilon(t)_n)_+^{m_N+1} d\Gamma \leq \frac{d}{dt} (\mathbf{F}(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t)) - (\dot{\mathbf{F}}(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t))$$

et par intégration par rapport au temps on a :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2} \tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t)) \leq \frac{1}{2} \tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon^0, \mathbf{u}_\varepsilon^0) + \frac{\varepsilon}{m_N + 1} \int_{\Gamma_C} c_N (u_{\varepsilon n}^0)_+^{m_N+1} d\Gamma \\ &+ (\mathbf{F}(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t)) - (\mathbf{F}(0), \mathbf{u}_\varepsilon^0) - \int_0^t (\dot{\mathbf{F}}(s), \mathbf{u}_\varepsilon(s)) ds. \end{aligned} \quad (1.27)$$

En utilisant la bornitude de $(\mathbf{u}_\varepsilon^0)_{\varepsilon>0} \subset \tilde{\mathbf{V}}$ et l'injection (1.22) on obtient :

$$\sup_{\varepsilon>0} \tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon^0, \mathbf{u}_\varepsilon^0) + \sup_{\varepsilon>0} |(\mathbf{F}(0), \mathbf{u}_\varepsilon^0)| < +\infty$$

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\Gamma_C} c_N (u_{\varepsilon n}^0)^{m_N+1} d\Gamma \leq \|c_N\|_{L^\infty(\Gamma_C)} \sup_{\varepsilon>0} \|\mathbf{u}_\varepsilon^0\|_{L^{m_N+1}(\Gamma_C)}^{m_N+1} \leq C \sup_{\varepsilon>0} \|\mathbf{u}_\varepsilon^0\|^{m_N+1} < +\infty$$

et ainsi (1.27) implique en utilisant l'inégalité de Young :

$$\frac{\beta}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^2 \leq C + \frac{2}{\beta} \frac{1}{2} \|\mathbf{F}(t)\|^2 + \frac{\beta}{2} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^2 + \int_0^t \|\dot{\mathbf{F}}(s)\| \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\| ds, \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

pour toute constante indépendante de ε , qui est équivalent à

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^2 \leq \frac{2}{\beta} \left(C + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{F}\|_{C(0,T;\tilde{V})}^2 \right) + \frac{2}{\beta} \int_0^t \|\dot{\mathbf{F}}(s)\| \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\| ds, \quad t \in [0, T], \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

En appliquant le lemme de Bellman (voir Annexe A), on obtient :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\tilde{V})} \leq \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(C + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{F}\|_{C(0,T;\tilde{V})}^2 \right)^{1/2} + \frac{2}{\beta} \int_0^T \|\dot{\mathbf{F}}(s)\| ds, \quad \forall T > 0$$

et ainsi $\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\tilde{V})} < +\infty$ pour tout $T > 0$.

ii) On utilise maintenant (1.25). En prenant en compte que

$$j_N(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^{m_N} \|\mathbf{v}\|, \quad j_T(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^{m_T} \|\mathbf{v}\|$$

on déduit :

$$\tilde{a} \left(\frac{\mathbf{u}_0(t) - \mathbf{u}_\varepsilon(t)}{\varepsilon}, \mathbf{v} \right) \leq C (\|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^{m_N} + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^{m_T}) \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}.$$

En utilisant la $\tilde{\mathbf{V}}$ ellipticité de \tilde{a} , on aboutit à :

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \left\| \frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{C(0,T;\tilde{V})} \leq \frac{C}{\beta} \left(\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{C(0,T;\tilde{V})}^{m_N} + \sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{C(0,T;\tilde{V})}^{m_T} \right) < +\infty.$$

iii) Les arguments sont proches de ceux utilisés dans la Proposition 1.2.2 ii). On a d'après (1.23) écrite avec $t+h$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon(t+h), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)) \leq (\mathbf{F}(t+h), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)) - \varepsilon(j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t+h), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)). \quad (1.28)$$

En utilisant maintenant (1.23) avec t et $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) + \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} -\tilde{a}(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)) &\leq -(\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)) + \varepsilon(j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) + \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)) \\ &\quad - \varepsilon(j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)). \end{aligned} \quad (1.29)$$

En combinant (1.28), (1.29) et les propriétés de semi-normes de j_N, j_T ainsi que la borne locale uniforme de i), on arrive à :

$$\begin{aligned}
& \tilde{a} \left(\frac{\mathbf{u}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{u}_\varepsilon(t)}{h}, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h) \right) \\
& \leq \left(\frac{\mathbf{F}(t+h) - \mathbf{F}(t)}{h}, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h) \right) \\
& + \frac{\varepsilon}{h} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)) - \frac{\varepsilon}{h} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t+h), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)) \\
& \leq \left(\frac{\mathbf{F}(t+h) - \mathbf{F}(t)}{h}, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h) \right) \\
& + \frac{\varepsilon}{h} C' \|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}_\varepsilon(t+h)\| \{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t+h)\|^{m_N-1} \} \|\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)\| \\
& + \frac{\varepsilon}{h} C' \|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}_\varepsilon(t+h)\| \{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|^{m_T-1} + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t+h)\|^{m_T-1} \} \|\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)\| \\
& \leq \left(\frac{\mathbf{F}(t+h) - \mathbf{F}(t)}{h}, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h) \right) + C \frac{\varepsilon}{h} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{u}_\varepsilon(t)\| \|\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t+h)\|, \quad t \in [0, T]
\end{aligned}$$

pour toute constante C dépendante de T mais pas de ε . En prenant $h \searrow 0$, on déduit que :

$$\beta \|\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|^2 \leq \|\dot{\mathbf{F}}(t)\| \|\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\| + C\varepsilon \|\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|^2, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T]$$

et l'estimation iii) découle immédiatement avec $\varepsilon_T = \beta/(2C)$. ■

En se basant sur les estimations précédentes, on déduit que $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_0$ dans $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \tilde{\mathbf{V}})$

et $\left(\frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0}{\varepsilon} \right)_{\varepsilon > 0}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$. Ainsi il existe une suite $(\varepsilon_k)_k$ convergeant vers 0 et une fonction $\mathbf{w} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$ telle que :

$$\mathbf{w}_{\varepsilon_k} := \frac{\mathbf{u}_{\varepsilon_k} - \mathbf{u}_0}{\varepsilon_k} \rightharpoonup \mathbf{w} \quad \text{faiblement } \star \text{ dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}}).$$

Comme $(\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$, on peut supposer que $\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \dot{\mathbf{u}}_0$ faiblement dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$. Malheureusement il n'est pas possible d'identifier le problème limite vérifié par la fonction \mathbf{w} . Néanmoins on a un résultat partiel :

Proposition 1.3.2

La limite faible $\star \mathbf{w} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{u}_{\varepsilon_k} - \mathbf{u}_0}{\varepsilon_k}$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$ satisfait

$$\tilde{A}\mathbf{w}(t) + \partial_v(j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \ni 0, \quad \text{pour presque tout } t > 0$$

où $\partial_v(j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \cdot)$ désigne le sous-différentiel de la fonction convexe $v \rightarrow (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v})$.

Démonstration : Posons $\eta \in C_c([0, +\infty[; \mathbb{R})$ une fonction positive. En multipliant (1.25) par η , on obtient après intégration sur \mathbb{R}_+ :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}. \quad (1.30)$$

La convergence faible $\star \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{w}_{\varepsilon_k} = \mathbf{w}$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})$ implique :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt. \quad (1.31)$$

Par la Proposition 1.3.1, on sait que :

$$\sup_k \|\eta \mathbf{u}_{\varepsilon_k}\|_{C(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})} < +\infty, \quad \|\eta(\mathbf{u}_{\varepsilon_k} - \mathbf{u}_0)\|_{C(\mathbb{R}_+; \tilde{\mathbf{V}})} \leq C\varepsilon_k$$

et ainsi, les propriétés de j_N, j_T mènent, lorsque $k \rightarrow +\infty$, à :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt - \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt \right| \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}_+} \eta(t) \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t) - \mathbf{u}_0(t)\| \{ \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t)\|^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_0(t)\|^{m_N-1} \} \|\mathbf{v}\| dt \\ & + C \int_{\mathbb{R}_+} \eta(t) \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t) - \mathbf{u}_0(t)\| \{ \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t)\|^{m_T-1} + \|\mathbf{u}_0(t)\|^{m_T-1} \} \|\mathbf{v}\| dt \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

En combinant (1.30), (1.31), (1.32), on aboutit à l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v}) \eta(t) dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}. \quad (1.33)$$

Maintenant on projette de passer à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$ dans (1.24). Pour toute fonction positive $\eta \in C_c^1([0, +\infty[; \mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt = 0. \quad (1.34)$$

Il est facile de voir :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt \\ & = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k \dot{\mathbf{w}}_{\varepsilon_k}(t) + \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \\ & = \varepsilon_k \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \\ & = -\varepsilon_k \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t)) \eta'(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt - \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \right| \\ & \leq \varepsilon_k \frac{\beta}{2} \|\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t)\| \|\eta'(t)\| + \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}_{\varepsilon_k}(t) - \mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \\ & \rightarrow 0, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Afin de passer le second terme de (1.34) à la limite, on choisit $T > 0$ assez grand tel que $\text{supp } \eta \subset [0, T]$ et on considère la fonction convexe $\mathbf{J}_0 : L^p(0, T; \tilde{\mathbf{V}}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{v}) = \int_0^T (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v}(t)) dt, \quad \forall \mathbf{v} \in L^p(0, T; \tilde{\mathbf{V}}).$$

On vérifie facilement la continuité de \mathbf{J}_0 avec la Remarque 1.3.1. En particulier comme $\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k} \eta \rightarrow \dot{\mathbf{u}}_0 \eta$ faiblement dans $L^p(0, T; \tilde{\mathbf{V}})$, par semi-continuité inférieure :

$$\int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt.$$

Par les propriétés de j_N, j_T et les estimations uniformes de $(\mathbf{u}_{\varepsilon_k})_k$ avec $0 < \varepsilon_k \leq \varepsilon_T$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt - \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt \right| \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}_+} \eta(t) \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t) - \mathbf{u}_0(t)\| \{ \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t)\|^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_0(t)\|^{m_N-1} \} \|\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)\| dt \\ & + C \int_{\mathbb{R}_+} \eta(t) \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t) - \mathbf{u}_0(t)\| \{ \|\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t)\|^{m_T-1} + \|\mathbf{u}_0(t)\|^{m_T-1} \} \|\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)\| dt \\ & \leq C' \int_{\mathbb{R}_+} \eta(t) \varepsilon_k \frac{2}{\beta} \|\dot{\mathbf{F}}\| dt \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt - \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt \right| = 0$$

et alors :

$$\int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon_k}(t)) \eta(t) dt. \quad (1.36)$$

En combinant (1.34), (1.35) et (1.36), on déduit :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt \leq 0$$

En tenant compte de (1.33), l'inégalité suivante est vraie pour toute fonction positive $\eta \in C_c^1([0, +\infty[; \mathbb{R})$ et $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}(\mathbf{w}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \eta(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} \{ (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v}) - (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \} \eta(t) dt \geq 0.$$

Finalement on obtient pour presque tout $t > 0$:

$$\tilde{a}(\mathbf{w}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_0(t)) + (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v}) - (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \dot{\mathbf{u}}_0(t)) \geq 0.$$

et la conclusion suit. ■

1.4 Conclusion

On peut essayer de prolonger ces résultats au cas où le terme de frottement c_T s'annule et le terme du contact normal c_N reste inchangé (ou inversement). On peut également voir ce qui se passe lorsqu'on prend le modèle de frottement de Coulomb quasi-statique dont l'existence d'une solution a été mise en évidence, si le coefficient de frottement est suffisamment petit et régulier, dans [205] et [68].

Deuxième partie

Contrôle de la qualité des calculs en mécanique des solides

*"Quand nous n'avons pas une expression exacte pour une quantité,
nous la nommons sourde, parce qu'alors elle échappe,
comme un bruit sourd qu'on distingue mal."*

Chapitre 1

Introduction

DANS ce chapitre, nous détaillons les estimations d'erreur *a priori* et *a posteriori* et présentons les trois principaux types d'estimateurs pour les problèmes d'élasticité linéaire. Nous détaillons également les procédures d'adaptation de maillage. Ensuite nous décrivons la méthode des éléments finis étendus et deux variantes : méthode XFEM avec une surface d'enrichissement et méthode XFEM avec une fonction cut-off.

Sommaire

1.1	Etude des différentes estimations d'erreur	42
1.1.1	Estimation d'erreur a priori	42
1.1.2	Estimation d'erreur a posteriori	43
1.2	Méthode des éléments finis étendus : XFEM	50
1.2.1	Description de la méthode	51
1.2.2	Méthode XFEM avec une surface d'enrichissement fixe	55
1.2.3	Méthode XFEM avec une fonction cut-off	56

1.1 Etude des différentes estimations d'erreur

Pour un problème réel initial, on obtient différents modèles mécaniques dépendant du choix des caractéristiques du matériau, de la charge et de la géométrie de la structure. Excepté dans des cas académiques, il est impossible de déterminer analytiquement la solution exacte des problèmes. Pratiquement on remplace alors le modèle mécanique par un modèle approché, généralement basé sur une méthode par éléments finis, dont on est capable de déterminer la solution, approximation plus ou moins précise de la solution exacte. Au cours de la simulation numérique d'un problème physique on peut distinguer plusieurs origines à l'erreur qui font que la solution obtenue est différente de la solution exacte du problème étudié. Les principales sources d'erreur pour un problème statique sont :

- la modélisation mathématique du problème physique. La qualité de la solution dépend du choix du modèle (choix de la loi de comportement, choix des caractéristiques du matériau) qui peut négliger des phénomènes physiques particuliers.
- la discrétisation spatiale du problème : dans la méthode des éléments finis, les calculs s'appuient sur un maillage (discrétisation spatiale) associé à la géométrie du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation. Leur précision dépend de la taille h des éléments que l'on appelle le pas de discrétisation spatiale. Plus ces derniers sont petits, plus les calculs sont précis et plus la simulation est fiable.
- la discrétisation fonctionnelle : on approche la forme de la solution en fixant une forme paramétrique simple de la solution à l'aide de fonctions de base.
- la résolution numérique : erreurs d'intégration numérique liées au choix du schéma d'intégration, erreurs d'arrondi...

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à l'erreur de discrétisation spatiale, qu'on notera \mathbf{e}_h et définie comme la différence entre la solution exacte \mathbf{u} du problème mathématique et la solution éléments finis \mathbf{u}_h du problème discret. On cherchera à estimer au mieux l'erreur commise dans la triangulation de notre domaine. Pour cela, deux grandes méthodes d'estimation d'erreur *a priori* et *a posteriori* ont été développées.

1.1.1 Estimation d'erreur a priori

L'estimation d'erreur *a priori* permet d'obtenir une borne supérieure de l'erreur à partir des informations a priori sur la solution éléments finis (degré des fonctions d'interpolation, régularité de la solution), la géométrie du domaine (les éventuelles singularités) et le maillage associé (la taille des éléments). L'objectif principal de cette estimation est la prédiction du **taux de convergence asymptotique** de l'erreur éléments finis ([66, 225]) à une constante près :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^\alpha \|\mathbf{u}\| + C(h, \mathbf{f})$$

Le premier terme dépend de \mathbf{u} et $C(h, \mathbf{f})$ dépend de la différence entre la donnée \mathbf{f} et son approximation \mathbf{f}_h et d'une puissance de h de degré supérieurs à la précédente. α apparaît ainsi comme la pente de la droite $\log \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$ en fonction de $\log h$. Ces estimations ne permettent pas de quantifier les erreurs sur la solution éléments finis car ils font intervenir la solution exacte qui n'est généralement pas connue. On a alors défini un autre type d'estimateur.

1.1.2 Estimation d'erreur a posteriori

Définition et critère

On doit déterminer l'ordre d'erreur sans pour autant connaître la solution exacte de notre problème. Il s'agit alors d'estimer l'erreur exacte $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$ à l'aide d'une quantité $\eta(\mathbf{u}_h, d)$ calculable explicitement, dépendant de la solution éléments finis \mathbf{u}_h et de données d , que l'on appelle estimateur d'erreur *a posteriori*. En vue d'améliorer la discrétisation dans les zones qui génèrent le plus d'erreur, il paraît indispensable d'avoir une idée des contributions à l'erreur globale de chaque élément T , triangle de la triangulation (voir Définition 2.2.1). Ainsi, l'estimateur *a posteriori* s'exprime comme somme d'estimateurs locaux :

$$\eta(\mathbf{u}_h, d) = \left(\sum_T \eta_T(\mathbf{u}_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On détermine ainsi les éléments avec une erreur importante. Si l'estimateur local est grand, on a donc beaucoup d'erreur autour de ce point donc on utilisera des petites mailles. Au contraire si l'estimateur local est petit, on pourra utiliser des grandes mailles. Ainsi les estimations *a posteriori* servent à effectuer des procédures d'adaptation de maillage que l'on décrira par la suite afin d'optimiser le temps de calcul sur ordinateur.

Lorsqu'un estimateur est défini, il faut s'interroger sur les critères et les moyens permettant de juger des performances de cet estimateur. Le but de ces estimateurs est d'obtenir des quantités globales et locales qui représentent au mieux la vraie erreur commise lors de l'approximation par éléments finis.

Propriétés 1.1.1

- P1 : L'estimateur doit avoir une **borne supérieure globale** qui soit entièrement calculable à partir de la solution éléments finis :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\Omega}^2 \leq C \sum_T \eta_T(\mathbf{u}_h)^2$$

en norme L^2 , H^1 ou norme en énergie du déplacement (choix de normes imposé par la forme bilinéaire). La constante C est une inconnue, différente pour chaque problème. Généralement, on ne la calcule pas en pratique.

- P2 : Il vérifie une **borne inférieure locale** :

$$\eta_T(\mathbf{u}_h)^2 \leq C_T^2 \sum_{T' \text{ proche de } T} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{T'}^2$$

- P3 : On regarde le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur vraie : **exactitude asymptotique** développée juste après.
- P4 : Lorsque C_T ne dépend pas des données, du maillage ou de la solution, l'estimateur est dit **robuste**.

Différents types d'estimateurs a posteriori

Les premiers travaux dans ce domaine datent de la fin des années 70. Ils ont fait l'objet d'intenses efforts de recherche dans tous les domaines où l'on fait appel à la méthode des éléments finis pour la simulation numérique des différents types de problèmes. Les premiers travaux de recherche sur ce sujet ont été consacrés principalement aux problèmes linéaires unidimensionnel et bidimensionnel. Depuis les estimations se sont enrichies grâce au développement de nouvelles approches, parmi lesquelles on peut distinguer principalement les travaux de Babuška et Rheinboldt [17], qui utilisent les résidus des équations d'équilibre pour construire les estimateurs d'erreur, ceux de Ladevèze [156, 157] qui ont introduit la notion d'erreur en relation de comportement aussi appelée "flux équilibrés" et utilisant des techniques de construction de champs statiquement admissibles, et les travaux de Zienkiewicz et Zhu [242] qui ont proposé un estimateur d'erreur pour un problème d'élasticité linéaire basé sur le calcul de l'écart entre la contrainte éléments finis et une contrainte continue obtenue par une technique de lissage de type moindres carrés. De nos jours, ces trois principales approches ont été largement étudiées et des améliorations ont été proposées. Une revue des différents estimateurs d'erreur a posteriori peut être trouvée dans [4, 18, 106, 231, 232]. Détaillons ces classes d'estimateurs d'erreur dans le cas linéaire $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$ et l'idée générale de construction, chacun ayant ses spécificités et ses avantages.

1. Estimateurs d'erreur en relation de comportement introduits par Ladevèze en 1975 :

On construit un couple admissible déplacement-contrainte $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ vérifiant les équations d'équilibre et les équations de liaison (conditions de Dirichlet et de Neumann). Seule la relation de comportement n'est pas vérifiée (si elle est vérifiée, il s'agit de la solution exacte). Ainsi la qualité de la solution est évaluée en mesurant la non vérification de cette loi et l'erreur en relation de comportement est définie par $\eta_{RC} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})$. On choisit en général $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_h$ puisque le déplacement éléments finis est admissible. En revanche $\boldsymbol{\sigma}_h$ ne l'est pas donc on construit un champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre et recherché comme un prolongement de la solution éléments finis. L'estimateur d'erreur donne en théorie une surestimation de l'erreur exacte du problème notamment en élasticité.

Il a été mis en œuvre en élasticité bidimensionnelle dans [157] et tridimensionnelle dans [83]. Dans [155], l'estimateur d'erreur a été obtenu pour le problème d'élastoplasticité et de dynamique vibratoire en dimension 2. Des améliorations ont été apportées par la résolution de problèmes locaux dans [158].

2. Estimateurs en résidus d'équilibre introduits par Babuška et Rheinboldt en 1978 :

Le champ des contraintes éléments finis ne vérifie pas les équations d'équilibre. On construit alors des résidus d'équilibre : $R_h^u(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v})$.

On calcule une estimation d'erreur associée à chaque élément du maillage à partir du calcul des résidus élémentaires des équations d'équilibre et du saut des contraintes aux interfaces des éléments. Les résidus d'équilibre mesurent ainsi la non-vérification des équations d'équilibre intérieure et la non vérification des conditions d'équilibre

sur le bord ainsi que la discontinuité du vecteur contrainte au travers de l'interface. Pour une interpolation linéaire, le terme décrivant le saut de contraintes est prépondérant par rapport au terme du résidu d'équilibre [59].

Les premiers travaux réalisés dans ce domaine ont conduit à des estimateurs explicites car on obtient une estimation de la norme de l'erreur globale ou locale à partir de la solution éléments finis et des données du problème. En effet, Babuška et Rheinboldt ont proposé un encadrement de l'erreur dans le cas d'un problème linéaire avec des maillages quasi-uniformes (voir Définition 2.2.2). Ils ont démontré l'existence de deux constantes C_1 et C_2 indépendantes du maillage et de la solution éléments finis et $C_2 \geq C_1 > 0$ telles que :

$$C_1 \eta \leq \|\mathbf{e}_h\| \leq C_2 \eta$$

Dans [16], les constantes dépendant de la nature du problème étudié ont été calculées. Les auteurs de [144] l'ont calculé dans le cadre de l'élasticité linéaire en contraintes planes : $C = \sqrt{\frac{1-\nu}{24Ep}}$ où E le module de Young, ν le coefficient de Poisson et $p \geq 1$ le degré d'interpolation de l'élément fini. Ces estimateurs sont mathématiquement rigoureux. Ils vérifient les propriétés P1-P2. Mais en général la propriété P1 n'est pas satisfaite au sens strict car on trouve la borne supérieure à une constante inconnue près.

Des méthodes dites implicites [4] par patch d'éléments ou par éléments ont alors été développées et l'approximation de l'erreur est obtenue cette fois-ci après résolution de problèmes locaux liés à l'erreur. Sous la condition que des problèmes locaux de dimension infinie peuvent être résolus exactement, ils satisfont théoriquement P1-P2-P3. Malheureusement l'approximation de ces problèmes locaux a pour conséquence la perte de la propriété P1 et un coût de calcul élevé.

Ainsworth et Oden [4] ont amélioré l'estimateur résiduel par une technique dite de résidu équilibré. Son principe consiste à calculer des forces de traction sur les faces de chaque élément du maillage et qui sont en équilibre avec le résidu intérieur local. Cette technique est théoriquement indépendante de la dimension de l'espace et de la nature de l'interpolation.

3. Estimateurs d'erreur en contrainte introduits par Zienkiewicz et Zhu en 1987 :

Un des principaux défauts de la solution éléments finis est que le champ des contraintes est discontinu à la traversée des interfaces entre les éléments. Dans l'expression de l'estimateur résiduel, le terme décrivant le saut des contraintes est prépondérant par rapport au terme du résidu d'équilibre pour une interpolation linéaire. L'erreur pouvant être estimée uniquement par ces discontinuités, Zienkiewicz et Zhu choisissent de construire une solution d'ordre supérieur à celui de la solution éléments finis, espérant ainsi une meilleure approximation de la solution exacte du problème. Ainsi ils ont construit un champ de contraintes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h$ lissé à partir de la solution éléments finis et continu aux interfaces entre éléments. Pour construire le champ de contraintes continu, il faut connaître les contraintes nodales. La valeur

des contraintes aux nœuds est obtenue en minimisant au sens des moindres carrés la distance entre le champ continu $\tilde{\sigma}_h$ et le champ éléments finis σ_h . L'estimateur global est défini par $(\int_{\Omega} tr((\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)^t K^{-1}(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)))^{1/2}$. Il satisfait la propriété P3 mais viole systématiquement la propriété P1 au sens strict.

Zienkiewicz et Zhu ont proposé plus récemment une méthode de recouvrement global et une méthode SPR [240, 243] (Superconvergent Patch Recovery) utilisant la propriété de super-convergence aux points de Gauss mise en évidence par Barlow. Cette méthode plus précise et moins coûteuse calcule une expansion polynomiale des composantes du tenseur des contraintes éléments finis sur des patches topologiques, sous domaines du maillage centrés sur un nœud et contenant un ensemble de points d'intégration. Zienkiewicz [241] et Oden [193] ont proposé d'autres techniques d'amélioration dans le cadre des raffinements hiérarchiques p et h - p .

Remarque 1.1.1

Avec des modèles analytiques 1D et 2D et des éléments triangulaires linéaires et quadratiques [239], les estimateurs résiduels et en contrainte sont équivalents.

On vient de présenter les grandes familles d'estimateurs couramment utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis. De nombreux auteurs ont donné des estimations pour les méthodes des éléments finis mixtes, volumes finis, Galerkin discontinu...

Efficacité d'un estimateur

Quand la solution exacte d'un problème étudié est connue, la fiabilité des estimateurs d'erreur est évaluée au moyen de son indice d'efficacité défini par : $\xi = \frac{\eta}{\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}}$ où η est un estimateur de l'erreur exacte globale $\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}$.

Au niveau de chaque élément T du maillage, l'indice d'efficacité local est donné par : $\xi_T = \frac{\eta_T}{\|\mathbf{e}_h\|_{1,T}}$ où η_T et $\|\mathbf{e}_h\|_{1,T}$ sont ses contributions aux erreurs globales η et $\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}$:

$$\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}^2 = \sum_T \|\mathbf{e}_h\|_{1,T}^2, \quad \eta^2 = \sum_T \eta_T^2$$

Un estimateur est dit efficace lorsque son indice d'efficacité et son inverse sont bornés pour toute taille de maillage. Un estimateur est dit asymptotiquement exact lorsque son indice d'efficacité tend vers 1 quand la taille h des éléments tend vers 0. Lorsque l'indice est plus grand que 1, il y a surestimation et si l'indice est plus petit que 1, il y a sous-estimation. Pour évaluer l'indice, la méthode la plus sûre consiste à utiliser des problèmes test où la solution exacte est connue analytiquement. Une autre technique largement répandue consiste à prendre comme solution "exacte" une solution éléments finis obtenue sur un maillage très fin. Pour obtenir des résultats fiables, il est indispensable que ce maillage soit nettement plus fin que le maillage sur lequel l'erreur est estimée. Dans les résultats numériques, on compare souvent le taux de convergence de l'estimateur avec celui de l'erreur vraie. L'égalité des taux de convergence est une condition nécessaire mais pas suffisante pour obtenir un indice d'efficacité égal à 1.

Dans une étude numérique, Babuška et al [15] ont montré que l'efficacité de leur type d'estimateur dépend fortement de la régularité de la solution, de la régularité des éléments et de la topologie du maillage. L'exactitude asymptotique est en général basée sur une super-convergence et n'a lieu que pour certaines topologies de maillage. Pour des problèmes d'élasticité avec des éléments triangulaires linéaires, les résultats montrent que l'estimateur est moins performant et sous-estime considérablement l'erreur lorsque l'angle minimal des triangles devient trop petit ou bien lorsque la solution présente des singularités. Il est souhaitable de surestimer l'erreur afin de l'utiliser comme critère d'arrêt dans un processus adaptatif que nous allons décrire maintenant.

Adaptation et raffinement de maillage

On couple souvent les estimateurs d'erreur *a posteriori* avec une procédure d'adaptation de maillage [204] qui vise, par des modifications des paramètres de discrétisation, à améliorer la précision de la solution éléments finis pour un moindre coût de calcul. En pratique, il n'est pas possible de raffiner uniformément la taille des éléments autant que nécessaire, pour des raisons évidentes de coûts de calculs. Toutefois il est possible d'optimiser le maillage en raffinant seulement dans des zones prédéfinies (où l'erreur est susceptible d'être plus importante qu'ailleurs) et en déraffinant en dehors de celle-ci : on parle ainsi d'adaptation de maillage. Ce processus est dicté par des considérations liées, d'une part, à la géométrie du domaine et d'autre part, à la physique du problème étudié.

Les techniques d'adaptation de maillage reposent sur trois méthodes principales :

1. *h*-adaptation :

- méthode locale de *h*-raffinement [79, 144] : le maillage initial est raffiné en augmentant le nombre de degrés de liberté. On subdivise (par exemple au milieu) les éléments dans les zones où la valeur locale de l'erreur est importante. On peut également regrouper ceux où l'erreur est la plus faible (diminution du degré de liberté). Elle est bien adaptée pour capter les singularités.
- méthode globale de *h* remaillage : cette fois ci, on regénère complètement le maillage. Elle permet ainsi d'uniformiser efficacement la distribution de l'erreur. Coffignal l'a initialisé pour les problèmes d'élasticité et de plasticité en dimension deux.

2. *r*-adaptation :

Apparue en 1973, elle est fondée sur l'amélioration de la solution en optimisant la position des nœuds dans le maillage sans en ajouter de nouveaux et sans en modifier les connectivités. L'inconvénient majeur est que la précision de la solution calculée est limitée par rapport au nombre de degrés de liberté disponibles.

3. *p*-adaptation [20, 223] :

On augmente le degré d'interpolation des éléments en conservant la topologie du maillage. Ainsi le maillage modifié contient autant d'éléments mais plus de degrés de liberté. Un des avantages est que le maillage utilisé comporte peu d'éléments. Par contre il est difficile de l'introduire avec des formulations mixtes ainsi que de prévoir le degré d'interpolation à utiliser pour respecter une qualité donnée tout en minimisant le coût de calcul.

Les méthodes h et p peuvent être combinées dans l'adaptation de maillage. Il s'agit alors de la hp -adaptation [19, 224].

Le critère d'adaptation le plus simple est le raffinement uniforme. Tous les éléments du maillage sont traités de la même manière. Mais on aboutit alors à un nombre de degrés de liberté important. On l'utilisera donc principalement pour obtenir la solution de référence sur un maillage très fin.

Les autres critères de raffinement sont les suivants :

- une valeur seuil absolue : tous les éléments dont l'erreur est supérieure à la valeur seuil seront modifiés. On l'adopte dans le Chapitre 2 comme suit :
 - ◊ construction d'un maillage initial et calcul de la solution approchée
 - ◊ calcul des estimateurs locaux afin d'obtenir une carte locale de l'erreur
 - ◊ on fixe une tolérance δ et on raffine tous les éléments T tels que $\eta_T \geq \delta$
 On recommence à partir d'un nouveau maillage tant qu'il reste des estimateurs locaux supérieurs à δ .
- une valeur seuil relative : tous les éléments dont l'erreur est supérieure à un pourcentage de la valeur maximale sont raffinés.
- une fraction d'éléments : un certain pourcentage dont l'erreur est la plus importante seront modifiés.

Dans le but d'améliorer la qualité d'une solution approchée obtenue avec un maillage relativement grossier, on décide d'appliquer dans le Chapitre 3 les techniques d'adaptation de maillages développées en élasticité dans [73, 157]. Le but des procédures d'adaptation est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision noté η_0 avec un moindre coût de calcul. On utilise la h -adaptation dans laquelle la taille et la topologie des éléments sont modifiées alors que le degré d'interpolation est conservé.

Définition 1.1.1

Un maillage T^* est dit optimal par rapport à la mesure de l'erreur η^* si (voir [155]) :

$$\begin{cases} \eta^* = \eta_0 \\ N \text{ minimal } (N : \text{nombre d'éléments (ou de degrés de liberté) dans } T^*) \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour résoudre le problème (1.1), la procédure suivante (voir Figure 1.1) est appliquée :

1. une première analyse est effectuée sur un maillage régulier uniforme T_h ,
2. l'erreur globale correspondante η et les contributions locales η_T sont calculées,
3. les caractéristiques du maillage optimal T_h^* sont déterminées afin de minimaliser le coût de calcul par rapport à l'erreur globale,
4. on recommence l'analyse sur le nouveau maillage T_h^* .

Le maillage optimal T_h^* est déterminé par le calcul du coefficient de modification de taille r_T sur chaque élément T du maillage T_h : $r_T = h_T^*/h_T$, où h_T est la taille actuelle de l'élément et h_T^* représente la taille qui doit être imposée aux éléments de T_h^* situés dans la zone de T afin d'assurer l'optimalité. Le calcul des coefficients r_T est basé sur la vitesse

de convergence de l'erreur qui dépend du type d'élément utilisé mais aussi de la régularité de la solution [73]. Ainsi pour calculer les coefficients r_T , on utilise la technique détaillée dans [74] qui prend automatiquement en compte les régions à fort gradient de contraintes. Le maillage T_h^* est généré à l'aide d'un mailleur capable de respecter la précision de la carte de taille. Pour obtenir plus de précision, on répète l'algorithme autant de fois qu'il le faut pour atteindre une précision proche de la précision désirée η_0 (voir [73]).

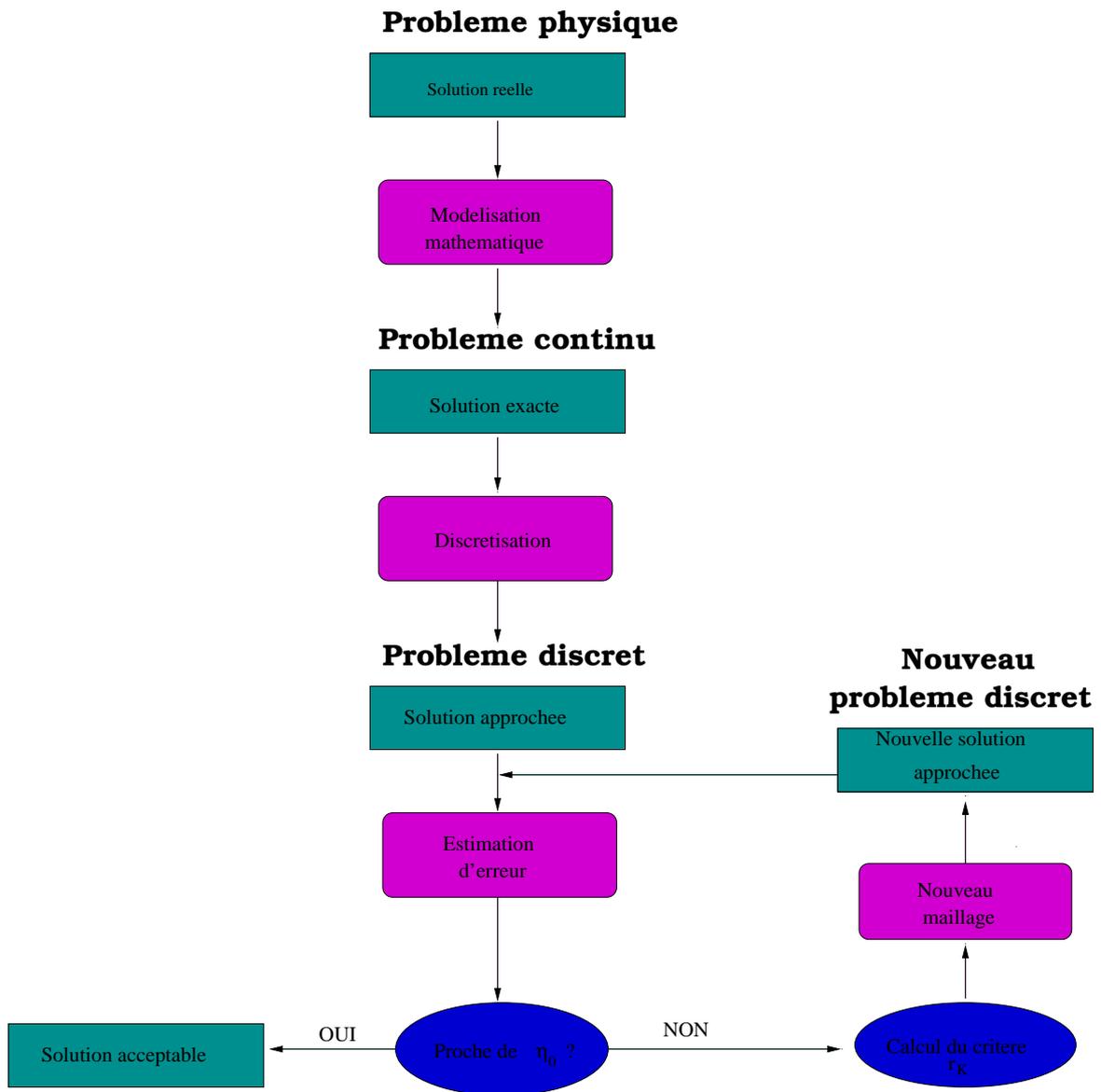


FIG. 1.1 – Algorithme d'adaptation

1.2 Méthode des éléments finis étendus : XFEM

La mécanique de la rupture suppose l'existence d'une ou plusieurs macro-fissures présentes dans le matériau de part et d'autre desquelles les déplacements, les déformations et contraintes sont discontinus. Les fissures sont de nouvelles frontières internes. On appelle lèvres de la fissure les deux surfaces qui forment la nouvelle frontière d'une fissure. Les équations à résoudre pour obtenir les déplacements, déformations et contraintes en tout point du solide fissuré sont les mêmes que celles pour le solide non fissuré mais une condition aux limites supplémentaires sur les nouvelles frontières internes est imposée. La présence de fissures dans un corps est associée à :

- un champ de déplacement discontinu le long de la fissure
- un champ de contraintes présentant une singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ en pointe de fissure, r désignant la distance à la pointe de fissure.

La simulation numérique des problèmes de fissuration est essentiellement basée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Malgré son cadre mathématique bien établi et maîtrisé, son efficacité et sa puissance pour résoudre de nombreux problèmes en mécanique des solides, l'un des défauts de la méthode des éléments finis classique pour les problèmes de fissuration est la gestion des maillages. En effet celui-ci doit respecter scrupuleusement la géométrie de la fissure : la fissure doit être localisée sur les faces des éléments du maillage et la pointe de fissure doit se situer sur un nœud du maillage afin de modéliser la discontinuité. De plus, l'approximation du champ de déplacement solution est formulée à l'aide de fonctions polynômiales. Mais ces fonctions polynômiales ne permettent pas d'obtenir la singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ du champ des contraintes en pointe de fissure. La pointe de fissure doit être maillée très finement à cause du fort gradient de contraintes ce qui augmente le nombre d'éléments et donc le temps de calcul de la solution. En effet, les éventuelles irrégularités de la géométrie de la structure aboutissent à une solution analytique singulière (qui a une valeur infinie des contraintes). Dans ce cas, le maillage doit être suffisamment raffiné près des surfaces irrégulières afin d'obtenir une approximation acceptable. Comme les frontières internes changent d'une analyse à l'autre, cette opération de maillage doit être recommencée à chaque étape, au moins dans une zone entourant la formation de nouvelles frontières. Cette opération peut être coûteuse en temps de calcul. Finalement, la disparité de la géométrie des éléments finis sur l'interface peut poser problème pour l'application des lois de contact et de frottement.

Hormis la méthode des éléments finis, il y a d'autres approches possibles : la première, initiée par Ortiz, Leroy et Needleman [194], consiste à introduire des fonctions d'approximation discontinues au sein des éléments, la seconde basée sur une discrétisation nodale consiste à bâtir l'approximation sur un ensemble de points (méthode "meshless" [32]). Celle-ci peut incorporer des modes discontinus afin de modéliser la présence de fissures et la propagation des fissures sans remaillage est alors possible. Mais elles requièrent un effort numérique plus important (au niveau du temps CPU) que les méthodes basées sur un maillage. L'imposition de condition aux limites reste aussi problématique. Une troisième approche est la méthode XFEM (méthode des éléments finis étendus) apparue récemment et que l'on a choisi d'analyser.

Cette dernière a été introduite en 1999 dans [182, 183] (dans le contexte de l'élasticité linéaire) afin d'éviter de remailler les domaines avec des fissures qui se propagent. Elle propose une simple extension de la méthode classique en autorisant un maillage indépendant de la géométrie du problème.

Elle se base sur la méthode des éléments finis avec un maillage normal sans tenir compte de la géométrie de la fissure. Puis on remplace les éléments qui sont coupés par une fissure par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de la fissure (fonctions escaliers de type Heaviside) et de prendre en compte l'aspect asymptotique du champ des contraintes en pointe de fissure (comme dans la méthode d'enrichissement singulier introduite dans [218]). Cette stratégie permet d'utiliser un maillage indépendant de la géométrie de la fissure et l'ajout des champs asymptotiques en bout de fissure améliore la précision en mécanique de la rupture élastique. L'enrichissement reste valable quelle que soit la dimension du problème et quel que soit le type des éléments utilisés.

Moës, Dolbow et Belytschko présentent la méthode à 2 dimensions en 1999 et Moës, Belytschko, Moran, Sukumar [219] celle en 3 dimensions en 2000 pour les fissures statiques. La thèse de Dolbow [81] a mené à de nombreuses publications : Gravouil, Sukumar, Moran, Béchet, Minnebo, Burgardt ont continué par la suite, améliorant les performances de la méthode XFEM et explorant ses capacités. Elle a été développée sur une grande variété de problèmes : fissuration, plaques, plasticité, mécanique quantique, mécanique stochastique, fluide...

1.2.1 Description de la méthode

Les premières méthodes d'approximation de problèmes faisant intervenir des fonctions singulières (Singular Function Method) ont été introduites pour les problèmes où le bord du domaine contient des points singuliers [218]. Amara, Destuynder et Djaoua [7, 80] ont considéré le problème d'élasticité linéaire en dimension 2 avec une fissure et ont étudié l'ajout de deux singularités en fond de fissure. Belytschko et Black [31] ont commencé à incorporer les champs asymptotiques dans l'approximation du déplacement. Puis Moës et al ont introduit la fonction Heaviside dans l'approximation enrichie du déplacement et la méthode XFEM est née. L'idée principale de la méthode des éléments finis étendus consiste à enrichir la base de la méthode classique des éléments finis par :

- des fonctions singulières sur la pointe de fissure afin de représenter l'aspect asymptotique du champ des contraintes en bout de fissure. Cela permet une représentation fidèle des phénomènes physiques ayant lieu en fond de fissure.
- des fonctions discontinues localisées le long de la fissure pour prendre en compte la discontinuité du champ de déplacement autour de la fissure. Elle prend en compte la géométrie de la fissure.

L'approximation éléments finis classiques est rappelée : $\mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x$ où a_x sont les degrés de liberté de déplacement au nœud x et \mathcal{N}_h est l'ensemble des nœuds du maillage. On note par ψ_x les fonctions de base d'élément fini classique P_1 au nœud $x \in \mathcal{N}_h$ satisfaisant $\psi_x(x') = \delta_{x,x'}$, pour tout $x' \in \mathcal{N}_h$.

L'approximation enrichie s'écrit :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^F} \sum_{i=1}^4 c_{xi} F_i \psi_x \quad a_x, b_x, c_{xi} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Le premier terme est le terme classique continu. Le second terme correspond à l'enrichissement avec la fonction Heaviside. \mathcal{N}_h^H est l'ensemble des nœuds enrichis par la fonction H (voir Définition 2.2.3, ces nœuds sont encerclés sur la Figure 1.2). Les b_x sont les degrés de liberté enrichis. D'une part, les fonctions discontinues le long de la fissure sont construites en utilisant une fonction de type Heaviside H qui est égale à 1 d'un côté de la fissure (que l'on a prolongé par une extension plane : voir Figure 2.4) et -1 de l'autre côté. Les nœuds dont le support de la fonction de base est entièrement traversé par la fissure sont enrichis par une fonction de type Heaviside :

$$H(x) = +1 \quad \text{si } (x - x^*) \cdot n \geq 0, \quad \text{et } -1 \quad \text{ailleurs,}$$

où x^* désigne la pointe de la fissure et n est une normale à la fissure.

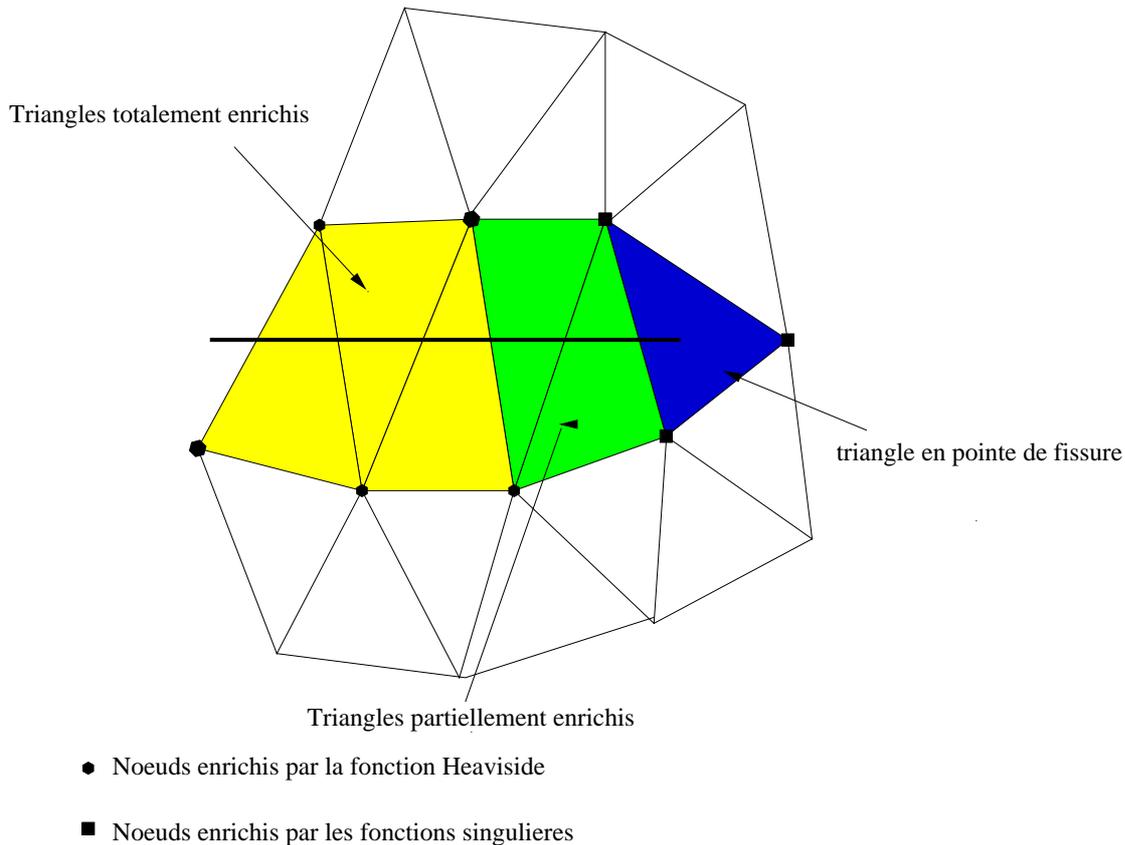


FIG. 1.2 – Nœuds enrichis par la fonction Heaviside et par les fonctions singulières

D'autre part, l'approximation du champ de déplacement est enrichie avec des fonctions basées sur les développements asymptotiques du champ de déplacement en mécanique de la rupture élastique linéaire. Pour un matériau homogène isotrope, les solutions sont :

- mode I dit mode d'ouverture traduisant la discontinuité normale

$$u_I = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (\delta - \cos \theta) \\ \sin \frac{\theta}{2} (\delta - \cos \theta) \end{pmatrix},$$

- mode II dit mode de cisaillement plan traduisant la discontinuité tangentielle ou glissement plan

$$u_{II} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (\delta + 2 + \cos \theta) \\ \cos \frac{\theta}{2} (2 - \delta - \cos \theta) \end{pmatrix}.$$

où ν désigne le coefficient de Poisson, E le module de Young, la constante de Kolosov $\delta = 3 - 4\nu$ dans le problème d'élasticité plane et (r, θ) correspond aux coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure (voir Figure 1.3 et [163]).

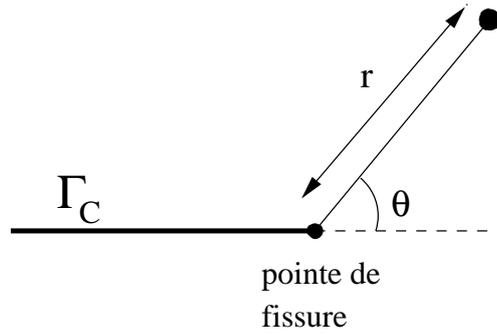


FIG. 1.3 – Coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure

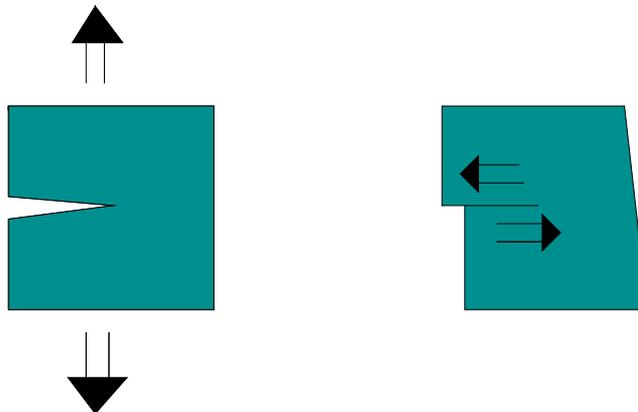


FIG. 1.4 – A gauche : mode I. A droite : mode II.

La base permettant de décrire ces champs comporte quatre fonctions en coordonnées polaires : $\sqrt{r} \cos(\theta/2)$, $\sqrt{r} \cos(\theta/2) \cos \theta$, $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$, $\sqrt{r} \sin(\theta/2) \cos \theta$. On choisit la base équivalente et les fonctions singulières sont alors construites en utilisant les quatre fonctions singulières de base :

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{r} \sin(\theta/2), \\ F_2 &= \sqrt{r} \cos(\theta/2), \\ F_3 &= \sqrt{r} \sin \theta \sin(\theta/2), \\ F_4 &= \sqrt{r} \sin \theta \cos(\theta/2). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont les solutions de Westergaard. Seule la première fonction est discontinue au travers de la fissure entre $-\pi$ et π . Ces fonctions sont dites singulières car leurs dérivées sont singulières en $r = 0$. \mathcal{N}_h^F est l'ensemble des nœuds enrichis par les fonctions singulières, c'est-à-dire l'ensemble des éléments contenant la pointe de fissure (ces nœuds sont entourés d'un carré dans la Figure 1.2) et $F_j \in C^2(\Omega - x^*)$.

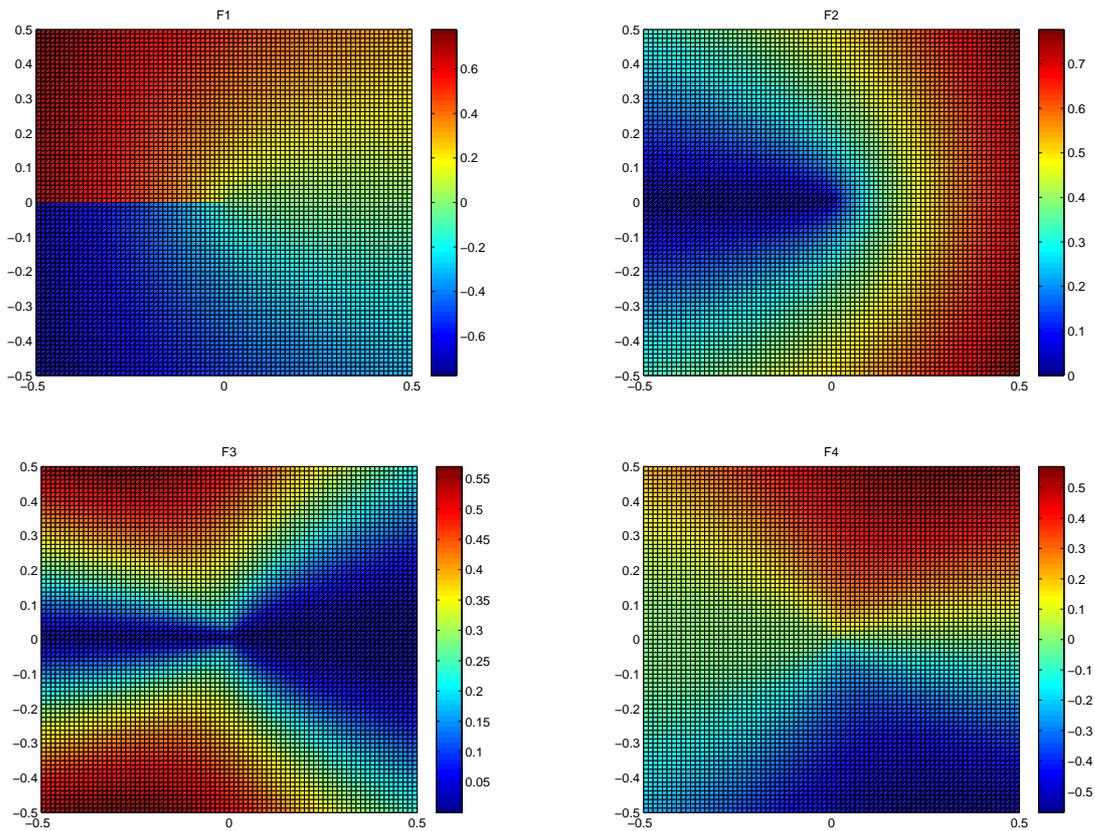


FIG. 1.5 – Graphique des fonctions singulières

Pour chaque composante du déplacement, on a donc ajouté un degré de liberté pour chaque nœud de \mathcal{N}_h^H et quatre degrés pour chaque nœud de \mathcal{N}_h^F . Bien que réduisant l'erreur et bien qu'on utilise un espace enrichi, le taux de convergence est le même que celui de la méthode classique des éléments finis. Il est égal à 0.5 pour des éléments P_1 , P_2 et P_3 (voir [154]). Une des raisons est que la surface enrichie par les fonctions singulières devient de plus en plus petite lorsque le paramètre h tend vers 0. On va décrire maintenant une variante permettant d'améliorer la vitesse de convergence.

1.2.2 Méthode XFEM avec une surface d'enrichissement fixe

Dans cette variante, on ne limite plus la zone d'enrichissement par les fonctions singulières à une seule couche d'éléments et on l'élargit à une zone de taille fixe, indépendante du raffinement de maillage (i.e. le paramètre h). Les auteurs de [25] montrent qu'une zone d'enrichissement fixe permet d'obtenir une vitesse de convergence presque optimale et [154] teste les taux de convergence pour les formulations polynômiales d'ordre supérieur. L'espace enrichi introduit par [25, 154] est défini par :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}^R} \sum_{i=1}^4 c_{xi} F_i \psi_x \quad a_x, b_x, c_{xi} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

où \mathcal{N}^R est l'ensemble des nœuds contenus dans la boule $B(x^*, R)$ (voir Figure 1.6). Cette variante réduit l'erreur par rapport à XFEM classique et améliore la vitesse de convergence d'ordre h pour la norme H^1 (voir Figure 1.8). Mais XFEM avec une surface d'enrichissement fixe est une stratégie coûteuse car un nombre important de degrés de liberté est enrichi par les fonctions singulières. Le conditionnement du système linéaire associé est dégradé par rapport à la méthode XFEM.

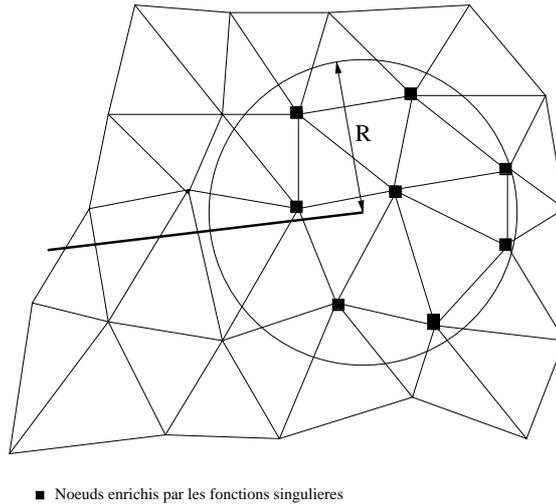


FIG. 1.6 – Zone d'enrichissement fixe

On présente alors une variante avec un meilleur conditionnement.

1.2.3 Méthode XFEM avec une fonction cut-off

La méthode XFEM avec une fonction cut-off consiste à introduire un enrichissement singulier globalisé au voisinage du fond de la fissure via une fonction de localisation. En 1973, Strang et Fix [218] ont introduit une méthode d'enrichissement non régulier en utilisant une fonction cut-off pour un maillage dépendant de la géométrie du domaine. L'espace des éléments finis est défini par :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \chi \sum_{i=1}^4 c_i F_i \right. \\ \left. = \mathbf{v}_{h,r} + \chi \mathbf{v}_{h,s}, \quad a_x, b_x, c_i \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

où $\chi \in C^2(\bar{\Omega})$ est une fonction cut-off définie comme suit. On se donne $0 < r_0 < r_1$ et en notant r la distance jusqu'à la pointe de fissure, on a :

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq r_0, \\ \rho \in (0, 1) & \text{si } r_0 < r < r_1, \\ 0 & \text{si } r \geq r_1. \end{cases} \quad (1.2)$$

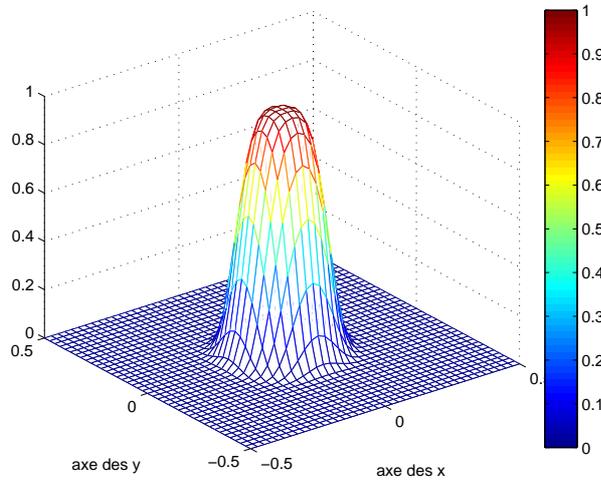


FIG. 1.7 – Exemple de fonction cut-off exponentielle pour $r_0 = 0.01$ et $r_1 = 0.49$

La fonction cut-off χ a été introduite dans [61, 63] afin d'améliorer les performances en terme de convergence de la méthode originale introduite dans [183]. La méthode avec fonction cut-off réduit le coût de calcul et conserve la convergence optimale. De plus, le conditionnement du système est grandement amélioré. La Figure 1.8 montre les vitesses de convergence pour la méthode classique des éléments finis, pour la méthode XFEM avec surface d'enrichissement fixe et pour XFEM avec fonction cut-off pour la norme H^1 . La méthode avec cut-off et la méthode avec surface d'enrichissement fixe ont des

taux de convergence très proches mais les valeurs de l'erreur sont plus importantes pour la fonction cut-off. Cependant la fonction cut-off réduit significativement les coûts de calcul (voir Tableau 1.1). Le Tableau 1.1 et la Figure 1.8 ont été obtenus pour une fissure rectiligne sur un carré en mode I d'ouverture.

Nombre d'éléments sur $[0,1]$	40	60	80
FEM	3402	7502	13202
XFEM avec surface d'enrichissement	4962	11014	19578
XFEM avec cut-off	3410	7510	13210

TAB. 1.1 – Nombre de degrés de liberté en fonction des méthodes

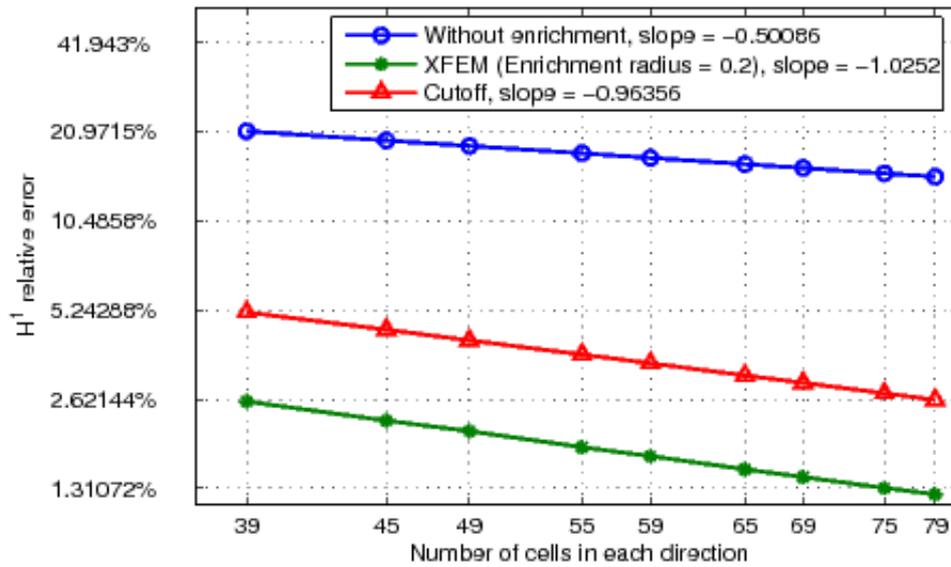


FIG. 1.8 – Norme H^1 de l'erreur en fonction du nombre d'éléments sur le bord du carré en mode I [60]

D'autres variantes de la méthode XFEM (raccord intégral, spider XFEM, base réduite) ont été développées dans [60].

Chapitre 2

Estimateurs a posteriori pour la méthode XFEM

DANS ce chapitre, on propose, analyse et implémente un estimateur a posteriori par résidu pour le problème de Laplace et pour le système de l'élasticité en dimension deux d'espace approximés par la méthode des éléments finis étendus (XFEM). La méthode XFEM permet d'améliorer les calculs éléments finis sur les domaines fissurés en utilisant des maillages sur le domaine non fissuré et en ajoutant des fonctions de base de type Heaviside et des fonctions singulières afin de prendre en compte la géométrie de la fissure et la singularité en pointe de fissure. Les résultats numériques sont réalisés sous la librairie éléments finis Getfem++.

Ce travail a abouti à un article paru dans *ESAIM proceedings* intitulé **A posteriori error analysis for Poisson's equation approximated by XFEM** [125] et un article soumis intitulé **A residual error estimator for the XFEM approximation of the elasticity problem**[126].

Sommaire

2.1	Les problèmes de Laplace et de l'élasticité sur un domaine fissuré	61
2.2	Discrétisation des problèmes de Laplace et de l'élasticité avec la méthode XFEM	64
2.3	Opérateur de quasi-interpolation	67
2.3.1	Définition	67
2.3.2	Stabilité	70
2.3.3	Estimations d'erreur	74
2.4	Estimations d'erreur	77

2.4.1	Estimations a priori	77
2.4.2	Estimations a posteriori	79
2.5	Résultats numériques	85
2.5.1	Le mode I d'ouverture	85
2.5.2	Le mode II de cisaillement	89
2.5.3	L'exemple du domaine en forme de L	92
2.6	Conclusion	96

APRÈS de nombreux travaux numériques développés dans divers contextes en mécanique, le premier résultat de convergence avec une estimation a priori a été récemment obtenu pour la méthode XFEM dans [61, 63] : dans l'analyse de la convergence, une difficulté consiste à évaluer l'erreur locale sur les éléments coupés par la fissure en utilisant des opérateurs de prolongement adaptés et des estimations d'erreur spécifiques. Dans [61], les auteurs obtiennent une estimation d'erreur d'ordre h (h désigne le paramètre de discrétisation) sous la régularité $H^{2+\varepsilon}$ de la partie régulière de la solution en gardant en tête que la solution est seulement de régularité $H^{3/2-\varepsilon}$ pour tout ε positif. Un travail récent [63] prouve une estimation d'erreur optimale d'ordre h sous une régularité H^2 de la partie régulière.

Des travaux numériques remarquables ont été réalisés sur les estimateurs d'erreur a posteriori. Une technique simple de recouvrement et son estimateur associé pour la méthode XFEM a été proposé dans [41], [40] (par la méthode de recouvrement global étendu XGR), [39] (par la méthode des moindres carrés mobiles étendue XMLS) et [207] (par la méthode SPR avec polynômes conjoints). Ces estimations d'erreur basées sur le recouvrement améliorent la technique de recouvrement par patch superconvergent (SPR) introduite par Zienkiewicz et Zhu. Dans ce chapitre, on propose et on analyse un estimateur d'erreur de type résidu (voir [17], [231]) pour les problèmes de Laplace et de l'élasticité linéaire discrétisés par la méthode XFEM. Comme les maillages ne coïncident pas avec le domaine fissuré, on a besoin d'introduire et d'étudier un nouvel opérateur de quasi-interpolation (voir par exemple [35, 65, 67, 119, 208, 217] pour des opérateurs de quasi-interpolation variés). L'utilisation de ce nouvel opérateur nous permet de réaliser une première analyse a posteriori de l'erreur et d'obtenir une borne supérieure de l'erreur de discrétisation. Dans la dernière section, on présente plusieurs résultats numériques, réalisés avec la librairie éléments finis Getfem++ ([99]). Les expériences numériques montrent que l'estimateur d'erreur et l'erreur de discrétisation admettent des taux de convergence similaires lorsque le paramètre de discrétisation tend vers zéro.

Dans la suite, le symbole $|\cdot|$ désigne soit la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 , soit la longueur d'un segment, soit l'aire d'un plan. Finalement la notation $a \lesssim b$ signifie qu'il existe une constante positive C indépendante de a et b (et de la taille du maillage) telle que $a \leq C b$. La notation $a \sim b$ signifie que $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$ simultanément.

2.1 Les problèmes de Laplace et de l'élasticité sur un domaine fissuré

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 possédant une fissure, avec un bord polygonal $\partial\Omega$ où $\Gamma_F \subset \partial\Omega$ désigne la fissure (la fissure Γ_F est constituée de deux segments distincts ayant le même emplacement). On fixe une "partition" de $\partial\Omega$ de trois ensembles ouverts disjoints Γ_D , Γ_N et Γ_F où on considère des conditions homogènes de Dirichlet (sur Γ_D) et des conditions homogènes de Neumann (sur $\Gamma_N \cup \Gamma_F$). Des conditions homogènes sont choisies pour simplifier les notations et l'extension à des conditions non-homogènes peut être faite sans aucune difficulté. On suppose que $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_F$. On suppose de plus que les mesures de Γ_D et Γ_F sont positives.

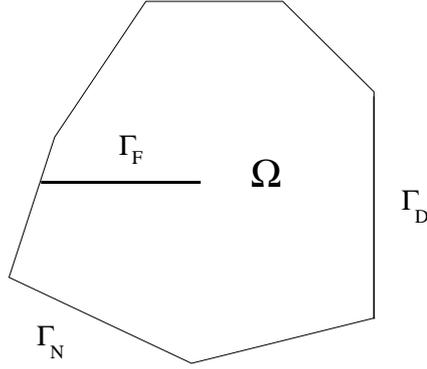


FIG. 2.1 – La géométrie du domaine fissuré Ω

Dans ce chapitre, on effectue l'analyse sur deux problèmes : l'équation de Laplace (ou problème de Poisson) et le problème de l'élasticité (voir Introduction générale pour les caractéristiques). Le problème de Poisson se résume par : pour $f \in L^2(\Omega)$ soit $u \in H^1(\Omega)$ la solution variationnelle de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma_F, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\partial u / \partial \mathbf{n}$ désigne la dérivée normale de u sur le bord.

Le problème d'élasticité est : pour $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$ soit $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2$ le champ de déplacement solution variationnelle de

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma_F, \end{cases} \quad (2.2)$$

Soit $d = 1$ pour le problème de Poisson et $d = 2$ pour l'élasticité et

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

La formulation variationnelle de (2.1) est l'unique solution u de

$$u \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in V. \quad (2.3)$$

Détaillons la pour l'élasticité. En multipliant par $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ la première équation de (2.2) et en intégrant sur Ω , on aboutit à :

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma$$

Alors en prenant en compte les conditions au bord, la solution variationnelle de (2.2) est l'unique solution \mathbf{u} de

$$\mathbf{u} \in \mathbf{V}, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.4)$$

où les notations \cdot et $:$ désignent les produits scalaires dans \mathbb{R}^2 et dans l'espace des tenseurs symétriques de second ordre dans \mathbb{R}^2 . Ces problèmes (2.3) et (2.4) s'écrivent en définissant la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$ ou $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega$ et la forme linéaire continue $L(v) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$:

$$u \in V, \quad a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Ce problème équivaut au problème de minimisation de l'énergie : $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$ sur V . Dans [84], l'existence et l'unicité de la solution de ce problème ont été montrées pour $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$.

La solution u des problèmes de Laplace et d'élasticité peut être écrite comme la somme d'une partie régulière u_r et d'une partie singulière u_s . Pour l'équation de Laplace, $u_s = K r^{1/2} \sin(\theta/2)$ et pour le problème d'élasticité $\mathbf{u}_s = K_I \mathbf{u}_I + K_{II} \mathbf{u}_{II}$ où K , K_I et K_{II} sont les facteurs d'intensité des contraintes (voir par exemple [163]) et les fonctions \mathbf{u}_I et \mathbf{u}_{II} sont définies en coordonnées polaires comme suit dans le cas d'une fissure horizontale pour $\theta = \pi$:

$$\mathbf{u}_I = \frac{\lambda + \zeta}{\mu(3\lambda + 2\zeta)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \theta \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} (a + b \cos \theta), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u}_{II} = \frac{\lambda + \zeta}{\mu(3\lambda + 2\zeta)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (c + 2 + \cos \theta) \\ \cos \frac{\theta}{2} (2 - c - \cos \theta) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Dans la définition précédente, r désigne la distance à la pointe de fissure, λ et ζ sont les coefficients de Lamé et

$$a = 2 + \frac{2\zeta}{\lambda + 2\zeta}, \quad b = -2 \frac{\lambda + \zeta}{\lambda + 2\zeta}, \quad c = \frac{\lambda + 3\zeta}{\lambda + \zeta}.$$

Notons que la composante normale (respectivement tangentielle) de \mathbf{u}_I (respectivement \mathbf{u}_{II}) est discontinue sur la fissure (i.e. pour $\theta = \pi$). On peut vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, les fonctions \mathbf{u}_I et \mathbf{u}_{II} appartiennent à $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ (voir par exemple [103, 104]).

Remarque 2.1.1

En 1957, Irwin a introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes comme un paramètre caractéristique des champs en pointe de fissure. Les facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} caractérisent l'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe et sont proportionnels à la discontinuité du champ de déplacement des lèvres de la fissure pour chaque mode élémentaire. Ils contiennent l'information sur la géométrie de la fissure et la nature des sollicitations.

2.2 Discrétisation des problèmes de Laplace et de l'élasticité avec la méthode XFEM

On approche les problèmes (2.1) et (2.2) par la méthode XFEM avec une fonction cut-off introduite dans le chapitre précédent (voir sous-section 1.2.3). On considère une famille régulière de triangulations $T_h, h > 0$ sur le domaine non-fissuré constituée de triangles fermés T tels que $\bar{\Omega} = \cup_{T \in T_h} T$ (voir [50, 54, 66]).

Définition 2.2.1

$T_h, h > 0$ est une famille régulière de triangulations de Ω avec des triangles, au sens usuel que :

- pour tout h , $\bar{\Omega}$ est l'union des éléments de T_h .
- pour tout h , l'intersection de deux éléments distincts de T_h est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier.
- le quotient h_T/ρ_T du diamètre h_T d'un élément T de T_h par le diamètre ρ_T de son cercle inscrit est inférieur ou égal à une constante σ qui ne dépend ni de T ni de h .

Définition 2.2.2

Une famille de maillages $T_h, h > 0$ est dite quasi-uniforme si et seulement si elle est régulière et s'il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$\forall T \in T_h, h_T \geq ch$$

Pour $T \in T_h$, on rappelle que h_T est le diamètre de T et $h = \max_{T \in T_h} h_T$. La régularité du maillage implique en particulier que, pour tout côté E , de T on a $h_E = |E| \sim h_T$. Comme les triangles de T_h ne coïncident pas avec la géométrie de la fissure, on définit la famille d'éléments généralisés $G_h, h > 0$ contenant les éléments suivants : (voir Figure 2.2) :

- les triangles de $T \in T_h$ dont l'intérieur n'est pas coupé par Γ_F ,
- les triangles et quadrangles obtenus lorsque la fissure partage un triangle de T_h en deux parties,
- le triangle fissuré contenant la pointe de fissure.

Cela implique que $\bar{\Omega} = \cup_{G \in G_h} \bar{G}$ et $\cup_{G \in G_h} G^\circ \subset \Omega$ où G° désigne le plus grand ensemble ouvert contenu dans G .

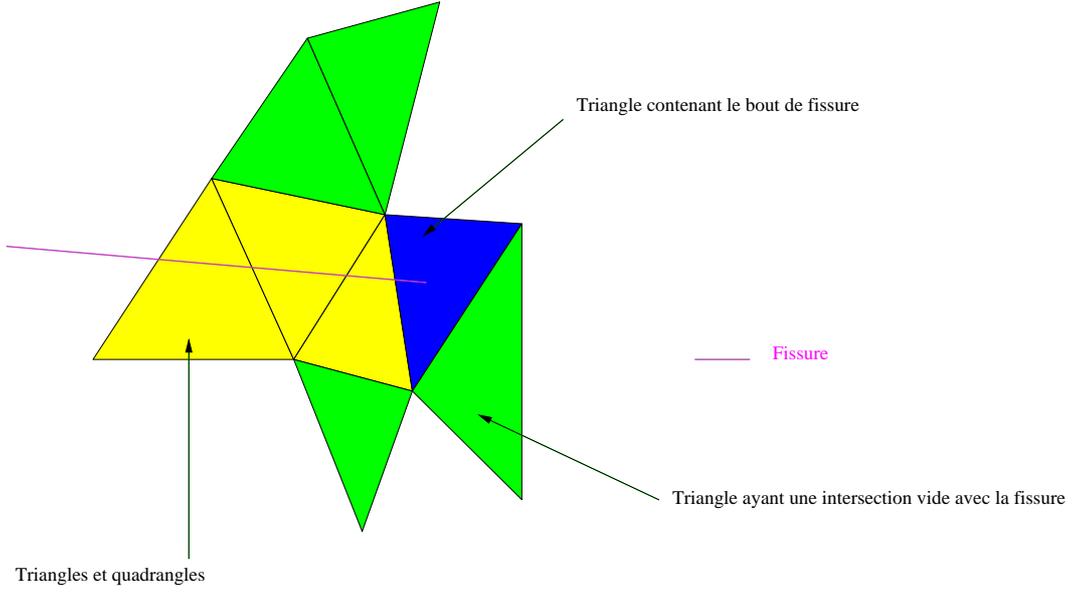


FIG. 2.2 – Eléments généralisés

Définition 2.2.3

Soit \mathcal{N}_h l'ensemble des nœuds de la triangulation T_h . On dit qu'un nœud $x \in \mathcal{N}_h$ est enrichi si le patch entourant x : $\omega_x = \cup_{T:x \in T} T$ est partagé en deux sous-ensembles (au moins) par la fissure et on note par $\mathcal{N}_h^H \subset \mathcal{N}_h$ l'ensemble des nœuds enrichis. On dit qu'un triangle est enrichi (respectivement partiellement enrichi) si trois nœuds (respectivement un ou deux nœuds) sont enrichis (voir Figure 1.2).

On note par h_x le diamètre du patch ω_x . Si $T \in T_h$ on note par ω_T l'union de tous les éléments de T_h ayant une intersection non vide avec T . De même pour un côté E d'un triangle de T_h , on désigne par ω_E l'union de tous les éléments de T_h ayant une intersection non vide avec \bar{E} (voir Figure 2.3). Soit $\mathcal{N}_h^D = \mathcal{N}_h \cap \bar{\Gamma}_D$ (les nœuds extrêmes de $\bar{\Gamma}_D$ appartiennent à \mathcal{N}_h^D).

Soit E_h l'ensemble des côtés de l'élément de G_h (les côtés sont supposés être relativement ouverts). Soit $E_h^{int} = \{E \in E_h : E \subset \Omega\}$ l'ensemble des côtés intérieurs de G_h , $E_h^{ext} = E_h \setminus E_h^{int}$. On note par $E_h^N = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_N\}$, $E_h^F = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_F\}$ l'ensemble des côtés extérieurs inclus dans la partie du bord où on impose des conditions de Neumann. Pour un élément généralisé $G \in G_h$ (respectivement élément standard $T \in T_h$), on note par E_G l'ensemble des côtés de G (respectivement par E_T l'ensemble des côtés de T) et d'après les notations précédentes, on pose $E_G^{int} = E_G \cap E_h^{int}$, $E_G^N = E_G \cap E_h^N$, $E_G^F = E_G \cap E_h^F$. Pour un côté E d'un élément généralisé G , on introduit $\mathbf{n}_{G,E} = (n_x, n_y)$ le vecteur normal unitaire sortant de G par rapport à E . De plus, pour chaque côté $E \in E_h^{int}$ on fixe un des deux vecteurs normaux et on le note par \mathbf{n}_E . Le saut d'une fonction scalaire ou vectorielle v à travers un côté $E \in E_h$ au point $\mathbf{y} \in E$ est défini par

$$\llbracket v(\mathbf{y}) \rrbracket_E = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} v(\mathbf{y} + \alpha \mathbf{n}_E) - v(\mathbf{y} - \alpha \mathbf{n}_E) & \forall E \in E_h^{int}, \\ v(\mathbf{y}) & \forall E \in E_h^{ext}. \end{cases}$$

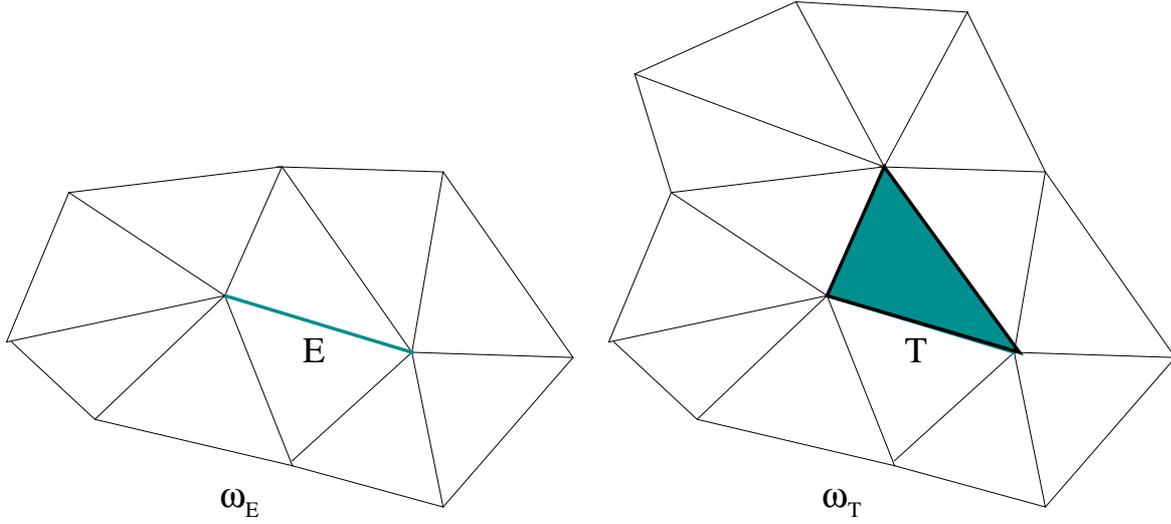


FIG. 2.3 – Patch pour un côté à droite et patch pour un triangle à gauche

L'approximation du problème de Poisson (2.3) se lit : trouver u_h telle que

$$u_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned} V_h = \left\{ v_h \in C(\Omega) : v_h &= \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + c \chi r^{1/2} \sin(\theta/2) \right. \\ &= v_{h,r} + \chi v_{h,s}, \quad a_x, b_x, c \in \mathbb{R} \left. \right\} \subset V. \end{aligned} \quad (2.8)$$

On rappelle la définition de \mathbf{V}_h pour l'élasticité :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h &= \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \chi \sum_{i=1}^4 c_i F_i \right. \\ &= \mathbf{v}_{h,r} + \chi \mathbf{v}_{h,s}, \quad a_x, b_x, c_i \in \mathbb{R}^2 \left. \right\} \end{aligned}$$

Le problème discret issu de (2.4) consiste à trouver \mathbf{u}_h telle que

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (2.9)$$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on déduit que les problèmes (2.7) et (2.9) admettent une solution unique.

2.3 Opérateur de quasi-interpolation

Dans cette section, on introduit un opérateur de quasi-interpolation qui sera utilisé dans l'analyse a posteriori dans la prochaine section.

2.3.1 Définition

On utilise un opérateur de quasi-interpolation π_h (voir par exemple [35, 65, 67, 119, 208, 217] pour des opérateurs variés). Au nœud x , la valeur de la quasi-interpolation est souvent une "moyenne" de la fonction sur le patch ω_x autour de x . Pour simplifier la discussion suivante, on suppose que les extrémités de la fissure appartenant à $\partial\bar{\Omega}$ ne sont pas soumises aux conditions de Dirichlet. On commence alors par construire l'opérateur de quasi-interpolation π_h dans le cas scalaire pour l'équation de Laplace : on pose

$$X = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

et

$$X_h = \left\{ v_h \in C(\Omega) : v_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} \alpha_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} \beta_x H \psi_x, \quad \alpha_x, \beta_x \in \mathbb{R} \right\} \subset X,$$

et on définit

$$\pi_h : X \rightarrow X_h.$$

Remarque 2.3.1

X_h n'englobe aucune fonction singulière de la pointe de fissure.

La première idée serait d'utiliser un de ces opérateurs sur le maillage régulier T_h . Une telle approche contient des termes comme $\|u - u_h\|_{1, \omega_T}$ (où $T \in T_h$) et malheureusement ni u ni u_h n'appartient à $H^1(\bar{\Omega})$ (donc $u - u_h$ n'appartient pas en général à $H^1(\omega_T)$) à cause de la discontinuité à travers la fissure.

Le seconde idée est de définir $\pi_h v$ (avec $v \in H^1(\Omega)$) séparément de chaque côté de la fissure. Si on divise Ω en Ω_1 et Ω_2 le long de la fissure et de son extension rectiligne (voir Figure 2.4), on définit d'abord $\pi_h v$ sur Ω_1 (resp. Ω_2) en utilisant uniquement les valeurs de v sur Ω_1 (resp. Ω_2). Cela consiste à définir $\pi_h v$ sur chaque élément généralisé $G \in G_h$. Cette approche mène à des difficultés techniques car les éléments de G_h sont parfois des quadrangles.

Par conséquent, on choisit une approche qui consiste à déterminer $\pi_h v$ séparément de chaque côté de la fissure en définissant $\pi_h v|_G$, $G \in G_h$ et en utilisant les valeurs de v de chaque côté de la fissure. On doit alors utiliser des opérateurs de prolongement. Comme on l'a déjà mentionné, on divise Ω en Ω_1 et Ω_2 à l'aide de l'extension rectiligne de la fissure (voir Figure 2.4). Soit $v \in H^1(\Omega)$ avec $v_1 = v|_{\Omega_1} \in H^1(\Omega_1)$ et $v_2 = v|_{\Omega_2} \in H^1(\Omega_2)$. On définit une extension \tilde{v}_1 de v_1 définie sur $\bar{\Omega}$ (voir [3, 92]) telle que

$$\|\tilde{v}_1\|_{1, \bar{\Omega}} \lesssim \|v_1\|_{1, \Omega_1} \leq \|v\|_{1, \Omega} \quad (2.10)$$

et une extension \tilde{v}_2 (définie sur $\bar{\Omega}$) de v_2 telle que

$$\|\tilde{v}_2\|_{1, \bar{\Omega}} \lesssim \|v_2\|_{1, \Omega_2} \leq \|v\|_{1, \Omega}. \quad (2.11)$$

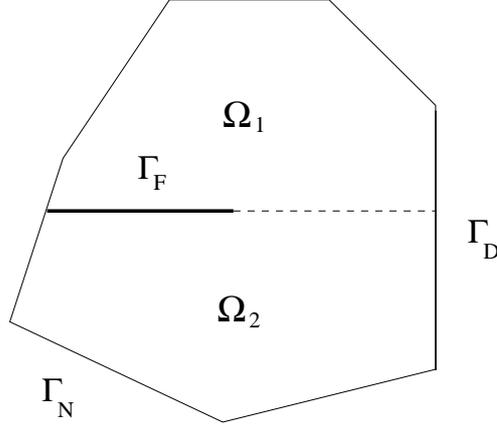


FIG. 2.4 – Décomposition du domaine en utilisant une extension rectiligne de la fissure

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on définit $\pi_h v$ comme l'unique élément de X_h tel que

$$\pi_h v = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} \alpha_x(v) \lambda_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} \beta_x(v) H \lambda_x. \quad (2.12)$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- Etape 1 : Définition de $\pi_h v$ aux nœuds \mathcal{N}_h de la triangulation T_h .

i : Nœuds non enrichis : Si $x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D$ est tel que ω_x ne soit pas coupé par la fissure (i.e. pas partagé en plusieurs parties) alors

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} v(y) dy.$$

On obtient par l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|\pi_h v(x)| \lesssim |\omega_x|^{-1/2} \|v\|_{\omega_x} \sim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} \leq h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}.$$

Les trois nœuds du triangle contenant la pointe de fissure font partie de cette section.

ii : Nœuds enrichis : Si $x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D$, $x \in \bar{\Omega}_\ell$, $\ell = 1, 2$, est tel que ω_x soit coupé par la fissure alors on pose

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_\ell(y) dy.$$

Ainsi on déduit

$$|\pi_h v(x)| \lesssim |\omega_x|^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} \sim h_x^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} \leq h_x^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} + \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_x}.$$

Notons que si x appartient à la fissure et (ii) est vérifié alors il y a deux valeurs pour $\pi_h v(x)$: l'une correspondant à $\pi_h v(x)$ sur $\bar{\Omega}_1$ et l'autre correspondant à $\pi_h v(x)$ sur $\bar{\Omega}_2$. On verra à l'étape 2 la détermination de π_h dans ce cas.

iii : *Nœuds de Dirichlet* : Si $x \in \mathcal{N}_h^D$, notons $\Gamma_x = \omega_x \cap \Gamma_D$ (on rappelle que $\bar{\Gamma}_F \cap \bar{\Gamma}_D = \emptyset$ pour simplifier) et on pose :

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\Gamma_x|} \int_{\Gamma_x} v(y) d\Gamma.$$

Par une inégalité de trace mise à l'échelle (voir par exemple [103, 113]) :

$$\|v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v\|_T + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_T, \quad \forall v \in H^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall E \in \mathcal{E}_T, \quad (2.13)$$

on déduit

$$\begin{aligned} |\pi_h v(x)| &\lesssim |\Gamma_x|^{-1/2} \|v\|_{\Gamma_x} \sim h_x^{-1/2} \|v\|_{\Gamma_x} \lesssim h_x^{-1/2} (h_x^{-1/2} \|v\|_{\omega_x} + h_x^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_x}) \\ &\lesssim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}. \end{aligned}$$

- Etape 2 : Définition de $\pi_h v$ sur Ω .

Avec les expressions nodales précédentes, on définit par interpolation linéaire la fonction $\pi_h v$ sur chaque triangle sauf ceux coupés par la fissure.

Remarque 2.3.2

Un triangle peut être totalement enrichi (i.e. ces trois nœuds sont enrichis) et ne pas être coupé par la fissure.

Si le triangle est coupé par la fissure alors il est soit enrichi (trois nœuds enrichis) ou partiellement enrichi (un ou deux nœuds enrichis) (voir Figure 1.2). La définition pour les triangles coupés par la fissure est donnée ci-dessous.

On considère en premier lieu un triangle totalement enrichi T avec par exemple $x_1 \in \Omega_1$ et $x_2, x_3 \in \Omega_2$. Pour déterminer $(\pi_h v)|_{\Omega_1 \cap T}$, on écrit :

$$\tilde{\pi}_h^1 v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_1(y) dy. \quad (2.14)$$

pour $x = x_1, x_2, x_3$. Alors $\tilde{\pi}_h^1 v$ est défini par interpolation linéaire sur T et $\pi_h v$ est défini sur $T \cap \Omega_1$ comme la restriction de $\tilde{\pi}_h^1 v$ à $T \cap \Omega_1$.

De même on définit $(\pi_h v)|_{\Omega_2 \cap T}$ par la restriction sur $T \cap \Omega_2$ de $\tilde{\pi}_h^2 v$ définie pour $x = x_1, x_2, x_3$ par :

$$\tilde{\pi}_h^2 v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_2(y) dy. \quad (2.15)$$

Une construction similaire est accomplie pour les triangles partiellement enrichis : si un nœud x n'est pas enrichi alors on calcule la valeur de $\pi_h v(x)$ au nœud et s'il est enrichi, on calcule les deux quantités (2.14) et (2.15) correspondant à \tilde{v}_1 et \tilde{v}_2 en ce nœud.

Remarque 2.3.3

De la construction précédente de $\pi_h v$ et l'expression (2.12), on voit que :

$$\alpha_x(v) = \pi_h v(x) \quad \text{si } x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^H.$$

Si $x \in \mathcal{N}_h^H$, $x \in \bar{\Omega}_k$ et en notant $\ell = 3 - k$, on obtient :

$$\alpha_x(v) + \beta_x(v)H(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_k(y) dy, \quad \text{et} \quad \alpha_x(v) - \beta_x(v)H(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_\ell(y) dy.$$

D'où

$$\alpha_x(v) = \frac{1}{2|\omega_x|} \int_{\omega_x} (\tilde{v}_k(y) + \tilde{v}_\ell(y)) dy, \quad \text{et} \quad \beta_x(v) = \frac{H(x)}{2|\omega_x|} \int_{\omega_x} (\tilde{v}_k(y) - \tilde{v}_\ell(y)) dy.$$

2.3.2 Stabilité

Maintenant on considère les propriétés de stabilité de notre opérateur sur les éléments généralisés :

Lemme 2.3.1

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et tout $T \in T_h$ on a :

(i) Si aucun nœud de T n'est enrichi (ainsi la fissure ne partage pas T) alors :

$$\|\pi_h v\|_T \lesssim \|v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

(ii) Si les trois nœuds de T sont enrichis, alors pour $\ell = 1$ et $\ell = 2$, on obtient :

$$\|\pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iii) Si un (ou deux nœuds) de T est enrichi et si ω_T est coupé par la fissure ($T \subset \bar{\Omega}_\ell$ pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$) on a :

$$\|\pi_h v\|_T \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iv) Si un (ou deux nœuds) de T est enrichi et si ω_T contient la pointe de fissure alors pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, on a :

$$\|\pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + \|v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$

Remarque 2.3.4

Par régularité du maillage, il existe un nombre fini indépendant du maillage de triangles satisfaisant (iv) : plus précisément cet ensemble est contenu dans ω_{T^*} où T^* est le triangle contenant la pointe de fissure (voir Figure 2.5). Quelques triangles de cet ensemble sont coupés par la fissure et les autres non.

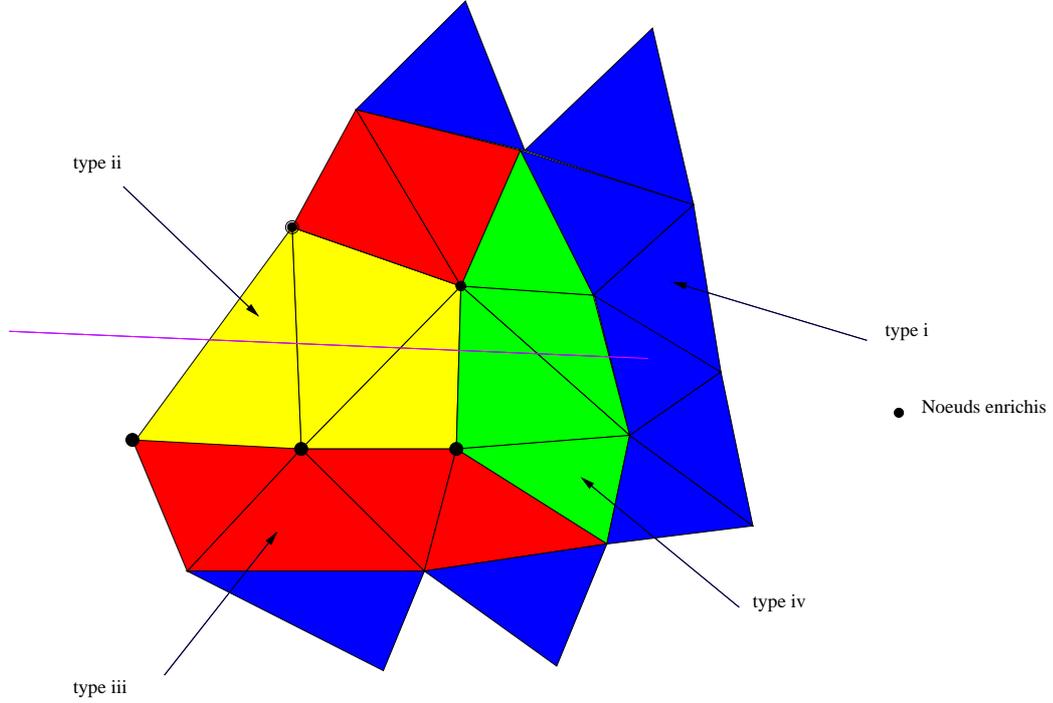


FIG. 2.5 – Les différentes configurations du Lemme 2.3.1

Démonstration : (i). Si aucun des nœuds n'est enrichi alors pour chacun des trois nœuds de T , on a :

$$|\pi_h v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}.$$

En écrivant $\pi_h v = \sum_{x \in T} \pi_h v(x) \psi_x$ sur T et en utilisant le fait que $\|\psi_x\|_T \sim h_T \sim h_x$, le résultat découle.

(ii). Prenons par exemple $\ell = 1$. En notant que pour chacun des trois nœuds de T , on a

$$|\tilde{\pi}_h^1 v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|\tilde{v}_1\|_{\omega_x} + \|\nabla \tilde{v}_1\|_{\omega_x},$$

et en se servant de la même estimation que dans (i), on aboutit au résultat. Le même résultat est valable lorsque $\ell = 2$.

(iii) et (iv). Ces estimations sont obtenues comme les précédentes. ■

Maintenant on considère les propriétés de stabilité de π_h sur les côtés des éléments généralisés non localisés sur la fissure.

Lemme 2.3.2

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et tout côté E d'un triangle $T \in T_h$, on a :

(i) Si les deux extrémités de E ne sont pas enrichies :

$$\|\pi_h v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E},$$

(ii) Si les deux extrémités de E sont enrichies alors pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, on obtient :

$$\|\pi_h v\|_{E \cap \tilde{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iii) Si seulement une des extrémités de E est enrichie et si ω_E est coupé par la fissure (ainsi $E \subset \tilde{\Omega}_\ell$ pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$), on a :

$$\|\pi_h v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iv) Si seulement une des extrémités de E est enrichie et si ω_E contient la pointe de fissure alors pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, on obtient :

$$\|\pi_h v\|_{E \cap \tilde{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{-1/2} \|v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E}.$$

Remarque 2.3.5

Il y a un nombre fini indépendant du maillage de côtés satisfaisant (iv). Plus précisément tous ces côtés ont une extrémité appartenant au triangle contenant le bout de la fissure.

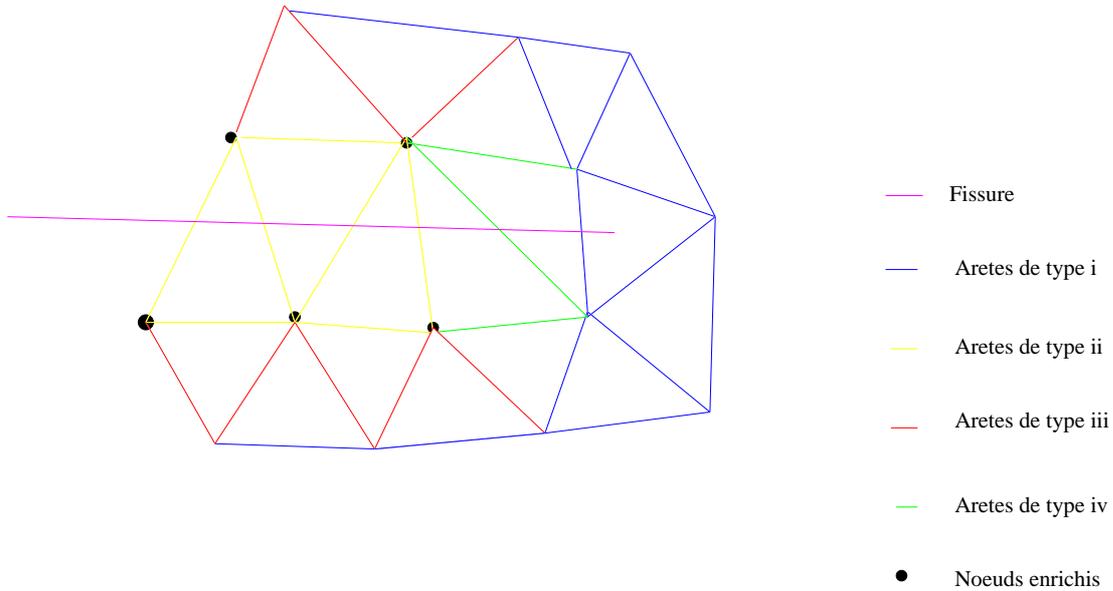


FIG. 2.6 – Les différentes configurations du Lemme 2.3.2

Démonstration : (i). Pour les deux extrémités de E , on a :

$$|\pi_h v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}.$$

En écrivant $\pi_h v = \sum_{x \in E} \pi_h v(x) \psi_x$ et en utilisant $\|\psi_x\|_E \sim h_E^{1/2}$, $h_E \leq h_x$, on aboutit au résultat.

(ii). On suppose d'abord que E appartient à $\bar{\Omega}_\ell$. Alors $E \cap \bar{\Omega}_\ell = E$ et pour les deux sommets de E , on déduit :

$$|\tilde{\pi}_h^l v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} + \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_x}.$$

L'estimation est obtenue comme pour (i). Si E est coupée par la fissure, la discussion est la même avec $E \cap \bar{\Omega}_\ell = E_1$.

(iii) et (iv). Directe (voir (i) et (ii)). ■

Maintenant on étudie la stabilité de l'opérateur de quasi-interpolation π_h sur la fissure. On note par $F_h \subset E_h$ l'ensemble des côtés vivant sur la fissure (ces côtés correspondent aux côtés des éléments généralisés sur la fissure).

Lemme 2.3.3

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et tout côté $F \in F_h$, on a :

(i) Si $F \subset T \in T_h$ où T est totalement enrichi alors pour $\ell = 1$ et $\ell = 2$, on obtient :

$$\|(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(ii) Si $F \subset T \in T_h$ où T est partiellement enrichi, alors pour $\ell = 1$ et $\ell = 2$, on a :

$$\|(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} h_T^{-1} \|v\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

(iii) Si $F \subset T \in T_h$ avec la pointe de fissure contenue dans T , (alors $(\pi_h v)|_{\Omega_1} = (\pi_h v)|_{\Omega_2}$ sur F), on a :

$$\|\pi_h v\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|v\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$

Démonstration : (i), (ii) et (iii). On considère un côté $F = (a, b)$ et on fixe $\ell = 1$ ou $\ell = 2$. Sur F , on a

$$(\pi_h v)|_{\Omega_\ell} = (\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(a) \psi_a + (\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(b) \psi_b,$$

où ψ_a et ψ_b sont les fonctions de base des côtés en a et b . Soit $T = x_1 x_2 x_3 \in T_h$ le triangle contenant F . Comme $(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}$ est construit comme la restriction de l'extension affine sur T , alors $(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(a)$ et $(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(b)$ sont des combinaisons convexes de $\tilde{\pi}_h^l v(x_i)$ et de $\pi_h v(x_i)$ dépendant du fait que x_i soit enrichi ou non. On obtient soit :

$$|\tilde{\pi}_h^l v(x_i)| \lesssim h_{x_i}^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_{x_i}} + \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_{x_i}},$$

soit

$$|\pi_h v(x_i)| \lesssim h_{x_i}^{-1} \|v\|_{\omega_{x_i}} + \|\nabla v\|_{\omega_{x_i}}.$$

Les résultats (i), (ii) et (iii) proviennent de $\|\psi_a\|_F \sim \|\psi_b\|_F \sim h_F^{1/2}$. ■

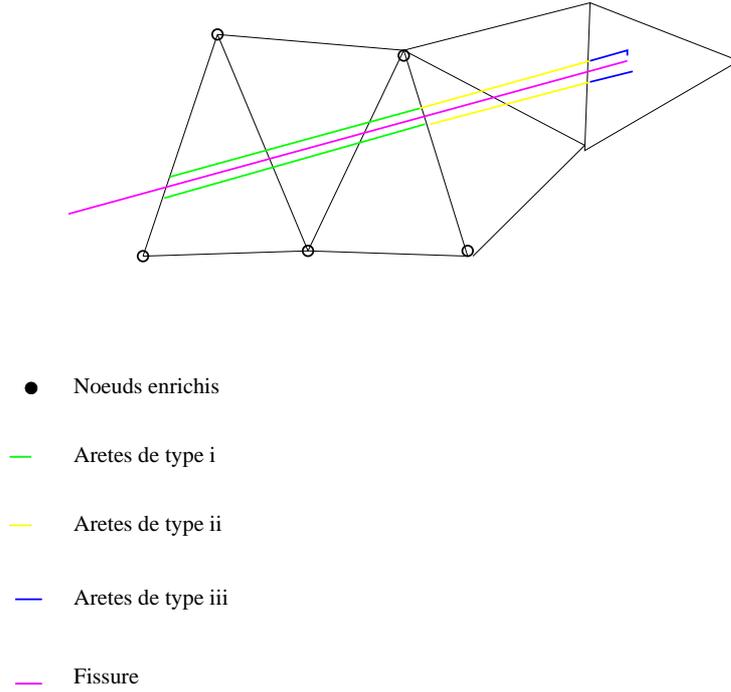


FIG. 2.7 – Les différentes configurations du Lemme 2.3.3

2.3.3 Estimations d'erreur

On considère désormais les estimations locales de l'erreur en norme L^2 .

Lemme 2.3.4

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et tout $T \in T_h$ on a :

(i) Si aucun des nœuds de T n'est enrichi alors

$$\|v - \pi_h v\|_T \lesssim h_T \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

(ii) Si les trois nœuds de T sont enrichis alors pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, on a :

$$\|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iii) Si un (ou deux nœuds) de T sont enrichis et si ω_T est coupé par la fissure (alors $T \subset \bar{\Omega}_\ell$ pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$), on a :

$$\|v - \pi_h v\|_T \lesssim h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iv) Si un (ou deux nœuds) de T est enrichi et si ω_T contient la pointe de fissure alors pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, on obtient :

$$\|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim h_T \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\Omega} + \|\nabla v\|_{\Omega}).$$

Démonstration : En supposant que les fonctions constantes sont prolongées de l'autre côté de la fissure par les mêmes fonctions constantes, π_h préserve les fonctions constantes. Ainsi, pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et toute fonction constante $c(x) = c$ on écrit :

$$v - \pi_h v = v - c - \pi_h(v - c).$$

(i) Dans ce cas

$$\|v - \pi_h v\|_T \leq \|v - c\|_{\omega_T} + \|\pi_h(v - c)\|_T \lesssim h_T \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

en utilisant le Lemme 2.3.1(i) et en choisissant $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} v(x) dx$ avec $h_T \sim h_{\omega_T}$.

En effet,

$$\begin{aligned} \|v - c\|_{\omega_T} &= \|\omega_T^{-1} \int_{\omega_T} (v(t) - v(x)) dx\|_{\omega_T} \\ &\leq |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \|(v(x + ah) - v(x))\|_{\omega_T} dx \\ &\leq |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \|\nabla v\|_{\omega_T} |a| h_{\omega_T} dx \\ &= \|\nabla v\|_{\omega_T} |a| h_{\omega_T} \end{aligned}$$

(ii) On écrit, pour toute fonction constante c :

$$\begin{aligned} \|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + \|\pi_h(v - c)\|_{T \cap \Omega_\ell} \\ &\lesssim \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} \\ &\lesssim h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} \end{aligned}$$

où $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \tilde{v}_\ell(x) dx$ et on conclut comme pour (i) en utilisant le Lemme 2.3.1(ii).

(iii) Comme pour les cas précédents.

(iv) Cette estimation est obtenue en utilisant le Lemme 2.3.1(iv) et en choisissant $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \tilde{v}_\ell(x) dx$:

$$\begin{aligned} \|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + \|\pi_h(v - c)\|_{T \cap \Omega_\ell} \\ &\lesssim \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + \|v - c\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T} \\ &\lesssim \|\tilde{v}_\ell - v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T}. \end{aligned}$$

De plus, en notant 1_X la fonction indicatrice de l'ensemble X , on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{\omega_T} &= \|(\tilde{v}_\ell - v) 1_{\omega_T}\|_{\Omega} \\ &\leq \|\tilde{v}_\ell - v\|_{L^q(\Omega)} \|1_{\omega_T}\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}(\Omega)} \\ &\lesssim h_T^{1-\frac{2}{q}} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{L^q(\Omega)} \\ &\lesssim q^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{q}} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{1,\Omega} \\ &\lesssim q^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{q}} \|\nabla(\tilde{v}_\ell - v)\|_{\Omega} \\ &\lesssim q^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{q}} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\Omega} + \|\nabla v\|_{\Omega}) \end{aligned}$$

où $2 < q < \infty$ et l'inégalité de Sobolev $\|w\|_{L^q(\Omega)} \leq Cq^{1/2} \|w\|_{1,\Omega}$ a été utilisée, voir [95].

Par minimisation de la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{x}}$, on choisit $q = -\ln(h_T)$ et on obtient finalement l'estimation. ■

Lemme 2.3.5

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et tout côté E d'un triangle $T \in T_h$ on a :

(i) Si deux des extrémités de E ne sont pas enrichies :

$$\|v - \pi_h v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E},$$

(ii) Si deux des extrémités de E sont enrichies alors pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, on a :

$$\|v - \pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iii) Si seulement un des deux sommets de E est enrichi et si ω_E est coupé par la fissure (ainsi $E \subset \bar{\Omega}_\ell$ pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$), on a :

$$\|v - \pi_h v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iv) Si seulement une des extrémités de E est enrichie et si ω_E contient la pointe de fissure alors pour $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, on a :

$$\|v - \pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{1/2} \sqrt{-\ln(h_E)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_\Omega + \|\nabla v\|_\Omega).$$

Démonstration : (i) Comme π_h préserve les fonctions constantes, on a pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et toute fonction constante $c(x) = c : v - \pi_h v = v - c - \pi_h(v - c)$. Ainsi par l'inégalité de trace mise à l'échelle (2.13) et le Lemme 2.3.2(i), on obtient

$$\|v - \pi_h v\|_E \leq \|v - c\|_E + \|\pi_h(v - c)\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v - c\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E},$$

et on choisit $c = |\omega_E|^{-1} \int_{\omega_E} v(x) dx$ avec $h_E \sim h_{\omega_E}$.

(ii, iii) Comme dans le cas précédent avec $c = |\omega_E|^{-1} \int_{\omega_E} \tilde{v}_\ell(x) dx$.

(iv) L'estimation est obtenue en utilisant le Lemme 2.3.2(iv) et en choisissant $c = |\omega_E|^{-1} \int_{\omega_E} \tilde{v}_\ell(x) dx$. On effectue les mêmes calculs que dans le Lemme 2.3.4(iv) :

$$\begin{aligned} \|v - \pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_E + \|\pi_h(v - c)\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_E} + h_E^{-1/2} \|v - c\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{1/2} \sqrt{-\ln(h_E)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_\Omega + \|\nabla v\|_\Omega). \end{aligned}$$

■

Le prochain lemme consiste à estimer l'erreur commise par l'opérateur moyenné sur les côtés des éléments généralisés localisés sur la fissure. L'ensemble de ces côtés est noté F_h .

Lemme 2.3.6

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et tout côté $F \in F_h$, on a :

(i) Si $F \subset T \in T_h$ où T est totalement enrichi, alors pour $\ell = 1$ et $\ell = 2$, on a :

$$\|(v - \pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_T^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(ii) Si $F \subset T \in T_h$ où T est partiellement enrichi, alors pour $\ell = 1$ et $\ell = 2$, on a :

$$\|(v - \pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_T^{1/2} \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_\Omega + \|\nabla v\|_\Omega),$$

(iii) Si $F \subset T \in T_h$ où la pointe de fissure se situe dans l'intérieur de T , (alors $(\pi_h v)|_{\Omega_1} = (\pi_h v)|_{\Omega_2}$ sur F), on a :

$$\|v|_{\Omega_\ell} - \pi_h v\|_F \lesssim h_T^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$

Démonstration : (i) Comme π_h préserve les fonctions constantes, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et toute fonction constante $c(x) = c : v - \pi_h v = v - c - \pi_h(v - c)$. Par l'inégalité de trace mise à l'échelle généralisée (voir [103, 113]) :

$$\|w\|_F \lesssim h_T^{-1/2} \|w\|_T + h_T^{1/2} \|\nabla w\|_T,$$

et le Lemme 2.3.3, on obtient

$$\begin{aligned} \|(v - \pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_F + \|\pi_h(\tilde{v}_\ell - c)\|_F \\ &\lesssim h_T^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell - c\|_T + h_T^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_T + h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion avec $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \tilde{v}_\ell(x) dx$. La preuve de (ii) et (iii) est la même que précédemment. ■

Ayant défini et analysé l'opérateur de quasi-interpolation $\pi_h : X \rightarrow X_h$ dans le cas scalaire, l'extension au cas vectoriel est immédiat en définissant

$$\boldsymbol{\pi}_h^* v : \mathbf{V} = X \times X \rightarrow X_h \times X_h$$

tel que pour tout $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in X \times X$ on ait $\boldsymbol{\pi}_h^* v = (\pi_h v_1, \pi_h v_2)$. Bien sûr les estimations d'erreur des Lemmes 2.3.4, 2.3.5 et 2.3.6 sont encore valables pour $\boldsymbol{\pi}_h^*$.

2.4 Estimations d'erreur

2.4.1 Estimations a priori

Une estimation d'erreur a priori quasi optimale a été montrée [61, 62] : les auteurs ont obtenu une convergence d'ordre h sous la régularité $(H^{2+\varepsilon}(\Omega))^2$ pour $\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s$. Plus récemment, une estimation d'erreur a priori optimale a été obtenue dans [63] pour la méthode XFEM avec une fonction cut-off χ , pour $d = 1$ ou $d = 2$:

Théorème 2.4.1

Soient u la solution de (2.3) (respectivement (2.4)) et u_h solution de (2.7) (respectivement (2.9)). Sous la régularité $(H^2(\Omega))^d$ pour $u - \chi u_s$, on a :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim h \|u - \chi u_s\|_{2,\Omega}.$$

Ceux-ci ont également montré une estimation a priori pour la méthode XFEM avec surface d'enrichissement :

Théorème 2.4.2

Soient u solution de (2.3) (respectivement 2.4) telle que $u - u_s \in (H^2(\Omega))^d$ et u_h solution de (2.7) (respectivement 2.9). L'estimation suivante a lieu pour R un rayon fixe indépendant du paramètre de maillage :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim h (\|u - u_s\|_{2,\Omega} + \|u_s\|_{1,\Omega} + \|u_s\|_{2,\Omega \setminus B(x^*, R/2)}).$$

Notons qu'en utilisant une méthode classique par éléments finis, on obtient un taux de convergence de seulement $h^{1/2-\epsilon}$ car \mathbf{u} appartient à $(H^{3/2-\epsilon}(\Omega))^2$.

De plus, l'influence du rayon de la fonction cut-off a été comparée sur plusieurs situations dans la Figure 2.8. Le taux de convergence est faiblement modifié et le niveau d'erreur est influencé par la zone de transition de l'enrichissement. Ceci est dû à la norme H^2 de la fonction cut-off. Pour les résultats numériques, on choisira donc $r_0 = 0.01$ et $r_1 = 0.49$.

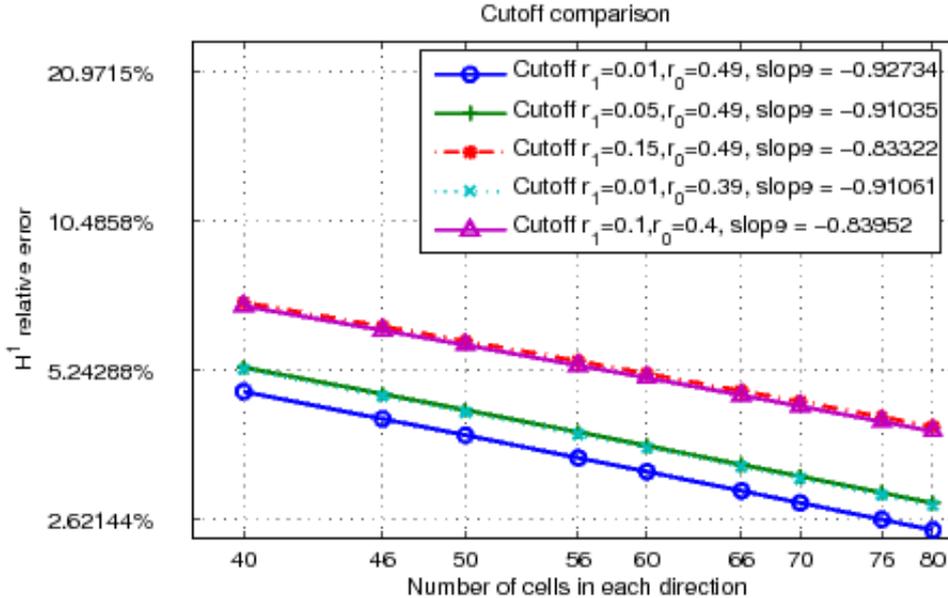


FIG. 2.8 – Influence du rayon de la fonction cut-off pour le mode I [60]

2.4.2 Estimations a posteriori

Définition de l'estimateur par résidu

En écrivant $u_h = u_{h,r} + \chi u_{h,s}$ comme dans (2.8) et (2.9), le résidu exact par élément est défini par :

$$R_G = f + \Delta u_h = f + \Delta(\chi u_{h,s}) = f + c\Delta(\chi r^{1/2} \sin(\theta/2)) \quad \text{pour le problème de Poisson}$$

$$R_G = \mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) = \mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s}) \quad \text{pour l'élasticité}$$

sur chaque élément généralisé $G \in G_h$. Comme $\Delta(r^{1/2} \sin(\theta/2)) = 0$ (respectivement $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,s}) = 0$), on déduit que l'expression $\Delta(\chi r^{1/2} \sin(\theta/2))$ (respectivement $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})$) disparaît sauf sur les éléments (éloignés de la pointe de fissure) ayant une intersection non vide avec l'anneau où χ varie entre 0 et 1.

Définition 2.4.1 (*Estimateur d'erreur résiduel pour le problème de Laplace*)

Soit $G \in G_h$ et $T \in T_h$ le triangle contenant G . Les estimateurs d'erreur locaux et global sont définis par

$$\begin{aligned} \eta_{1G} &= h_T C(h_T) \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G, \\ \eta_{2G} &= h_T^{1/2} D(h_T) \left(\sum_{E \in E_G^{int} \cup E_G^N \cup E_G^F} \|[\partial u_h / \partial \mathbf{n}]_E\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_G &= (\eta_{1G}^2 + \eta_{2G}^2)^{1/2}, \quad \eta = \left(\sum_{G \in G_h} \eta_G^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où $C(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$ pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.4, sinon $C(h_T) = 1$ et $D(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$ pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.5 ou du cas (ii) du Lemme 2.3.6, sinon $D(h_T) = 1$.

Définition 2.4.2 (*Estimateur d'erreur résiduel pour le problème d'élasticité*)

Soit $G \in G_h$ et $T \in T_h$ un triangle contenant G . Les estimateurs résiduels locaux et global sont définis par :

$$\begin{aligned} \eta_{1G} &= h_T C(h_T) \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G, \\ \eta_{2G} &= h_T^{1/2} D(h_T) \left(\sum_{E \in E_G^{int} \cup E_G^N \cup E_G^F} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}]_E\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_G &= (\eta_{1G}^2 + \eta_{2G}^2)^{1/2}, \quad \eta = \left(\sum_{G \in G_h} \eta_G^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où $C(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$ pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.4, sinon $C(h_T) = 1$ et $D(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$ pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.5 ou du cas (ii) du Lemme 2.3.6, sinon $D(h_T) = 1$.

Remarque 2.4.1

On obtient le résidu exact par élément $\|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G$ qui mesure la non vérification de l'équation d'équilibre intérieure :

```
for (unsigned ii=0; ii < pail->nb_points_on_convex(); ++ii) {
  base_small_vector res = sol_f(pail->point(ii));
  ctx1.set_xref(pail->point(ii));
  pfl->interpolation_hess(ctx1, coeff1, hess1, dim_type(qdim));
  for (size_type i = 0; i < N; ++i)
    for (size_type j = 0; j < N; ++j)
      res[i] += (lambda + zeta) * hess1(j, i*N+j) + zeta * hess1(i, j*N+j);
  ERR[cv] += radius*radius*ctx1.J()*pail->coeff(ii)*ctx1.J()*pail->coeff(ii)*gmm::
    vect_norm2_sqr(res);
}
```

où l'on a utilisé l'expression suivante pour l'équation d'équilibre pour $i = 1, 2$:

$$(\lambda + \zeta) \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{div} \mathbf{u}) + \zeta \Delta u_i + f_i = 0$$

D'autre part on a le terme de résidu de bord $\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}]\|_E^2$: s'il vaut $\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}]\|_E$, $\forall E \in E_G^{int}$, il mesure la discontinuité du vecteur contraintes dans la direction \mathbf{n}_E à l'interface entre deux éléments :

```
for (short_type f1=0; f1 < mesh.structure_of_convex(cv)->nb_faces(); ++f1) {
  if (gmm::abs(mmls(mesh.trans_of_convex(cv)->convex_ref()->points_of_face(f1)[0])) < 1E-7
    * radius) continue;
  for (unsigned ii=0; ii < pail->nb_points_on_face(f1); ++ii) {

    ctx1.set_xref(pail->point_on_face(f1, ii));
    gmm::mult(ctx1.B(), pgt1->normals()[f1], up);
    scalar_type norm = gmm::vect_norm2(up);
    up /= norm;
    scalar_type coefficient = pail->coeff_on_face(f1, ii) * ctx1.J()* norm;
    pfl->interpolation_grad(ctx1, coeff1, grad1, dim_type(qdim));
    gmm::copy(grad1, E); gmm::add(gmm::transposed(grad1), E);
    gmm::scale(E, 0.5);
    scalar_type trace = gmm::mat_trace(E);
    gmm::copy(gmm::identity_matrix(), S1);
    gmm::scale(S1, lambda * trace);
    gmm::add(gmm::scaled(E, 2*mu), S1);

    ctx2.set_xref(xref2);
    pfl2->interpolation_grad(ctx2, coeff2, grad2, dim_type(qdim));
    gmm::copy(grad2, E); gmm::add(gmm::transposed(grad2), E);
    gmm::scale(E, 0.5);
    trace = gmm::mat_trace(E);
    gmm::copy(gmm::identity_matrix(), S2);
    gmm::scale(S2, lambda * trace);
    gmm::add(gmm::scaled(E, 2*mu), S2);
    gmm::mult(S1, up, jump);
    gmm::mult_add(S2, gmm::scaled(up, -1.0), jump);
    ERR[cv] += radius*coefficient*coefficient*gmm::vect_norm2_sqr(jump);
  }
}
```

et s'il vaut $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}, \forall E \in E_G^N \cup E_G^F$, il mesure la non vérification des conditions d'équilibre sur le bord.

```
for (unsigned ii=0; ii < pai_crack->nb_points(); ++ii) {
  ctx1.set_xref(pai_crack->point(ii));
  mmls.grad(pai_crack->point(ii), gradls);
  gradls /= gmm::vect_norm2(gradls);
  gmm::mult(ctx1.B(), gradls, up);
  scalar_type norm = gmm::vect_norm2(up);
  up /= norm;
  scalar_type coefficient = pai_crack->coeff(ii)*ctx1.J();

  for (scalar_type e = -1.0; e < 2.0; e += 2.0) {
    base_node ptref = pai_crack->point(ii) + e * 1.0E-7 * gradls;
    if (pgt1->convex_ref()->is_in(ptref) > 0.) continue;
    ctx1.set_xref(ptref);
  }
}
```

```

pfl->interpolation_grad(ctx1, coeff1, grad1, dim_type(qdim));
gmm::copy(grad1, E); gmm::add(gmm::transposed(grad1), E);
gmm::scale(E, 0.5);
scalar_type trace = gmm::mat_trace(E);
gmm::copy(gmm::identity_matrix(), S1);
gmm::scale(S1, lambda * trace);
gmm::add(gmm::scaled(E, 2*mu), S1);
gmm::mult(S1, up, jump);
ERR[cv] +=radius*coefficient*coefficient*gmm::vect_norm2_sqr(jump);

```

Dans ces derniers programmes, on a utilisé la loi de Hooke définie en (2.29) ainsi que les transformations des calculs d'intégration et de dérivation par rapport à l'élément de référence.

Remarque 2.4.2

La présence des termes en $\ln(h_T)$ dans l'estimateur est valable que pour un nombre fini (indépendant du maillage) d'éléments proche de la pointe de fissure. D'un point de vue numérique, ces termes en $\ln(h_T)$ sont négligeables. Dans le cas de la méthode standard des éléments finis avec le maillage coïncidant avec la fissure, on a $G_h = T_h$ et $G = T$ (évidemment la méthode XFEM n'est pas une généralisation de la méthode standard par éléments finis pour les maillages non coïncidants avec la fissure). Dans le cas des maillages coïncidant avec la fissure, on voit que les termes en $\ln(h_T)$ disparaissent (i.e., $C(h_T) = D(h_T) = 1$) et on retrouve l'estimateur résiduel classique (voir par exemple [36, 231]).

Borne supérieure

Théorème 2.4.3

Soit $u \in V$ la solution de (2.3) (respectivement (2.4)) et soit $u_h \in V_h$ la solution de (2.7) (respectivement (2.9)). Alors

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim \eta.$$

Démonstration : • Démarrons la preuve pour le problème de Poisson :

En notant l'erreur :

$$e = u - u_h,$$

on a, d'après (2.3) et (2.7) :

$$\begin{aligned}
\|\nabla e\|_{\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - u_h) \\
&= \int_{\Omega} f(u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - u_h) \\
&= \int_{\Omega} f(u - v_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - v_h), \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned}$$

En partageant les intégrales sur chaque élément généralisé $G \in G_h$ et en écrivant $u_h = u_{h,r} + \chi u_{h,s}$, on aboutit à

$$\begin{aligned}
 \|\nabla e\|_{\Omega}^2 &= \sum_{G \in G_h} \int_G f(u - v_h) \\
 &\quad - \sum_{G \in G_h} \int_G \nabla u_{h,r} \cdot \nabla(u - v_h) - \sum_{G \in G_h} \int_G \nabla(\chi u_{h,s}) \cdot \nabla(u - v_h) \\
 &= \sum_{G \in G_h} \int_G (f + \Delta(\chi u_{h,s}))(u - v_h) - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E \llbracket \partial u_{h,r} / \partial \mathbf{n}_E \rrbracket_E (u - v_h) \\
 &\quad - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}}(u - v_h), \quad \forall v_h \in V_h,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

où l'on a utilisé la formule de Green sur chaque élément généralisé (remarquons que bien que le triangle contenant la pointe de fissure ait un bord non Lipschitz, on peut le diviser en deux parties en utilisant l'extension rectiligne de la fissure et utiliser séparément la formule de Green sur chaque partie, voir Annexe B pour une autre preuve) et le fait que $\Delta u_{h,r} = 0$ sur G et $\llbracket \partial(\chi u_{h,s}) / \partial \mathbf{n} \rrbracket_E = 0$ pour tout $E \in E_h^{int}$.

A cette étape, on fixe le choix de v_h . On pose

$$v_h = u_h + \pi_h(u - u_h).$$

On considère (2.16) : avec le choix figurant ci-dessus, on peut estimer chaque terme de droite de l'expression précédente. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\sum_{G \in G_h} \int_G (f + \Delta(\chi u_{h,s}))(u - v_h) \leq \sum_{G \in G_h} \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G \|u - v_h\|_G.$$

Il reste alors à estimer $\|u - v_h\|_G$ pour tout élément généralisé G . Soit $T \in T_h$ le triangle contenant G . En utilisant le Lemme 2.3.4, on obtient pour les triangles considérés dans les cas (i)–(iii) :

$$\|u - v_h\|_G = \|e - \pi_h e\|_G \lesssim h_T \|\nabla e\|_{\omega_T} \tag{2.17}$$

ou

$$\|u - v_h\|_G = \|e - \pi_h e\|_G \lesssim h_T \|\nabla \tilde{e}\|_{\omega_T}, \tag{2.18}$$

où \tilde{e} est une extension de l'erreur le long de la fissure (voir (2.10), (2.11)). Si T appartient à l'ensemble fini des triangles du cas (iv) du Lemme 2.3.4, on a

$$\|u - v_h\|_G = \|e - \pi_h e\|_G \lesssim h_T \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\Omega} + \|\nabla e\|_{\Omega}). \tag{2.19}$$

Ainsi, dépendant des cas (i)–(iv) du Lemme 2.3.4 et en utilisant les estimations (2.17)–(2.19), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{G \in G_h} \int_G (f + \Delta(\chi u_{h,s}))(u - v_h) \\
 &\lesssim \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} h_T^2 \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\omega_T} + \|\nabla e\|_{\omega_T})^2 \right)^{1/2} \\
 &\quad + \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} h_T^2 (-\ln(h_T)) \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\Omega} + \|\nabla e\|_{\Omega})^2 \right)^{1/2} \\
 &\lesssim \eta \|\nabla e\|_{\Omega}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Maintenant on s'occupe de l'estimation des termes restants : comme précédemment on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'où

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E \llbracket \partial u_{h,r} / \partial \mathbf{n}_E \rrbracket (u - v_h) - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}} (u - v_h) \\
 = & - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \int_E \llbracket \partial u_h / \partial \mathbf{n} \rrbracket (e - \pi_h e) \\
 \leq & \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \|\llbracket \partial u_h / \partial \mathbf{n} \rrbracket\|_E \|e - \pi_h e\|_E. \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

En utilisant les Lemmes 2.3.5(i,ii,iii) et 2.3.6(i,iii) et en notant $T \in T_h$ un triangle contenant E , on obtient

$$\|e - \pi_h e\|_E \lesssim h_T^{1/2} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\omega_T} + \|\nabla e\|_{\omega_T}). \tag{2.22}$$

Si E appartient au nombre fini de triangles étudiés dans le Lemme 2.3.5(iv) ou dans le Lemme 2.3.6(ii), on a

$$\|e - \pi_h e\|_E \lesssim h_T^{1/2} \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\Omega} + \|\nabla e\|_{\Omega}). \tag{2.23}$$

En regroupant les estimations (2.22), (2.23), (2.21) et (2.20), on termine la preuve.

• Pour la preuve pour le problème d'élasticité, on procède comme suit :
on a, d'après (2.4), (2.9) et l'inégalité de Korn :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}\|_{1,\Omega}^2 & \lesssim \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
 & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
 & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.
 \end{aligned}$$

En découpant les intégrales sur chaque élément généralisé $G \in G_h$ et en écrivant $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{h,r} + \chi \mathbf{u}_{h,s}$, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}\|_{1,\Omega}^2 & \lesssim \sum_{G \in G_h} \int_G \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
 & \quad - \sum_{G \in G_h} \int_G \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{G \in G_h} \int_G \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
 = & \sum_{G \in G_h} \int_G (\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) \mathbf{n}_E \rrbracket \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
 & \quad - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de Green sur chaque élément généralisé avec $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) = \mathbf{0}$ sur G et $\llbracket \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s}) \mathbf{n}_E \rrbracket = \mathbf{0}$ pour tout $E \in E_h^{int}$.

On pose $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h + \boldsymbol{\pi}_h^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$. On considère (2.24) et pour le premier terme, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\sum_{G \in G_h} \int_G (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \leq \sum_{G \in G_h} \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_G.$$

En procédant comme pour le problème de Poisson, suivant les cas (i)–(iv) du Lemme 2.3.4 on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{G \in G_h} \int_G (\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ & \lesssim \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} h_T^2 \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \omega_T} + \|\mathbf{e}\|_{1, \omega_T})^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} h_T^2 (-\ln(h_T)) \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \Omega} + \|\mathbf{e}\|_{1, \Omega})^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim \eta \|\mathbf{e}\|_{1, \Omega}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les termes restants mène à

$$\begin{aligned} & - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) \mathbf{n}_E]_E \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ & = - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \int_E [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}]_E \cdot (\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}) \\ & \leq \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}]_E\|_E \|\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}\|_E. \end{aligned} \tag{2.26}$$

En utilisant les Lemmes 2.3.5(i,ii,iii) et 2.3.6(i,iii) puis en notant par $T \in T_h$ un triangle contenant E , on obtient

$$\|\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}\|_E \lesssim h_T^{1/2} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \omega_T} + \|\mathbf{e}\|_{1, \omega_T}). \tag{2.27}$$

Si E appartient à l'ensemble fini des triangles du Lemme 2.3.5(iv) ou du Lemme 2.3.6(ii), on déduit

$$\|\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}\|_E \lesssim h_T^{1/2} \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \Omega} + \|\mathbf{e}\|_{1, \Omega}). \tag{2.28}$$

Par les estimations (2.27) et (2.28) avec (2.26) et (2.25), on achève la preuve du théorème. ■

2.5 Résultats numériques

Dans cette section, on implémente l'estimateur par résidu pour le système de l'élasticité de la Définition 2.4.2 sur trois exemples en utilisant la librairie éléments finis Getfem++ (voir [99]). On suppose que le corps Ω est homogène isotrope tel que la loi de Hooke $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ soit donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))I + 2\zeta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (2.29)$$

où I représente la matrice identité, tr est l'opérateur trace, $\lambda \geq 0$ et $\zeta > 0$ sont les coefficients de Lamé.

2.5.1 Le mode I d'ouverture

On commence par un cas-test simple : simplicité de la géométrie, de la position et de la forme de la fissure qui modélise un problème dont on connaît la solution analytique afin de pouvoir calculer la véritable erreur de discrétisation. On définit alors le domaine $\Omega = (0, 1)^2$ illustré dans la Figure 2.9 avec la fissure $(0, 0.5) \times \{0.5\}$ et $\Gamma_N = \emptyset$. Dans ce cas le maillage coïncide avec la fissure donc $T_h = G_h$. On impose des conditions de Dirichlet sur le bord Γ_D .

```
getfem::mesh_region border_faces;
getfem::outer_faces_of_mesh(mesh, border_faces);
for (getfem::mr_visitor i(border_faces); !i.finished(); ++i) {
    mesh.region(DIRICHLET_BOUNDARY_NUM).add(i.cv(), i.f());}
```

Les coefficients de Lamé valent $\zeta = 150$ et $\lambda = 200$. La fonction cut-off χ définie en (1.2) est choisie polynomiale de degré cinq avec $r_0 = 0.01$ et $r_1 = 0.49$ et elle est définie par :

$$\chi(r) = \frac{-6r^5 + 15(r_0 + r_1)r^4 - 10(r_0^2 + 4r_0r_1 + r_1^2)r^3 + 30r_0r_1(r_0 + r_1)r^2 - 30r_1^2r_0^2r + r_0^3(r_0^2 - 5r_1r_0 + 10r_1^2)}{(r_1 - r_0)^5}$$

si $r_0 \leq r \leq r_1$.

La géométrie de la fissure est définie par deux level sets de fonctions ξ_h et ζ_h . On a alors (voir [216]) :

$$H(x) = \text{sign}(\xi_h(x)), \quad r = \sqrt{\xi_h^2 + \zeta_h^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan \frac{\xi_h}{\zeta_h}.$$

```
base_small_vector ls_function(const base_node P, int option) {
    scalar_type x = P[0], y = P[1];
    base_small_vector res(2);
    switch (option) {
        case 0: //definition de la fissure pour les premier et second exemples
            res[0] = y - 0.5;
            res[1] = x - 0.5;
            break;
        case 1: //definition de la fissure pour le troisieme exemple
            res[0] = (2.*x - y - 0.5) / sqrt(5);
            res[1] = (7./8. - (x + 2.*y)) / sqrt(5);
            break;
        default: assert(0);
    }
    return res;
}
```

Remarque 2.5.1

Cette technique peut être étendue à des fissures plus compliquées.

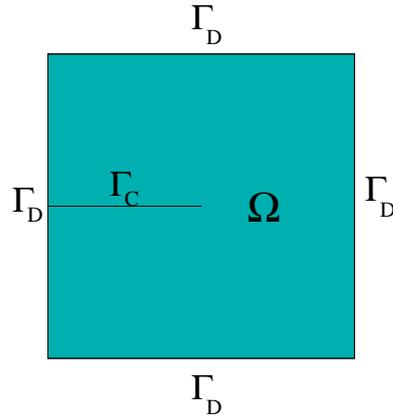


FIG. 2.9 – Premier exemple : le corps fissuré

Raffinement uniforme

Le domaine est discrétisé à l'aide d'une famille de maillages triangulaires uniformes. Par la suite, on note N_D le nombre d'éléments du maillage sur un côté du carré unitaire $(0, 1)^2$. Comme on utilise des maillages uniformes, le paramètre N_D mesure la taille du maillage. La solution exacte $\mathbf{u} = \mathbf{u}_I$ est connue (donnée par (2.5)). Ainsi on peut évaluer la norme $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ et par conséquent l'indice d'efficacité qui est égal à $\eta/\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ (voir Tableau 2.1).

N_D	8	16	32	48	64	80	96	112	128
$\eta (\times 10^{-2})$	7.48248	4.34222	2.46972	1.74772	1.35644	1.10928	0.938618	0.813512	0.717829
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$ ($\times 10^{-4}$)	6.99878	4.39294	2.4652	1.71217	1.31164	1.06293	0.893545	0.770712	0.677583
Indice d'efficacité	106.91	98.84	100.18	102.07	103.41	104.36	105.04	105.55	105.93

TAB. 2.1 – Valeurs de l'estimateur η , de la norme $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ et des indices d'efficacité pour le premier exemple

On procède ici à des raffinements uniformes successifs afin d'étudier l'évolution de l'erreur globale et de l'estimateur en fonction de la taille des mailles h et d'en déduire leur comportement asymptotique. L'étude de la convergence de l'erreur estimée permettra de vérifier notre estimateur. En effet, si la convergence de l'erreur estimée est la même que l'erreur vraie alors l'estimateur est utilisable comme critère de raffinement. La Figure 2.10 représente le taux de convergence de η et $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ du Tableau 2.1. L'estimateur d'erreur η admet une vitesse de convergence semblable à celle de la norme $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ et lorsque le paramètre de discrétisation converge vers zéro, on obtient une convergence en h (sans oublier une constante).

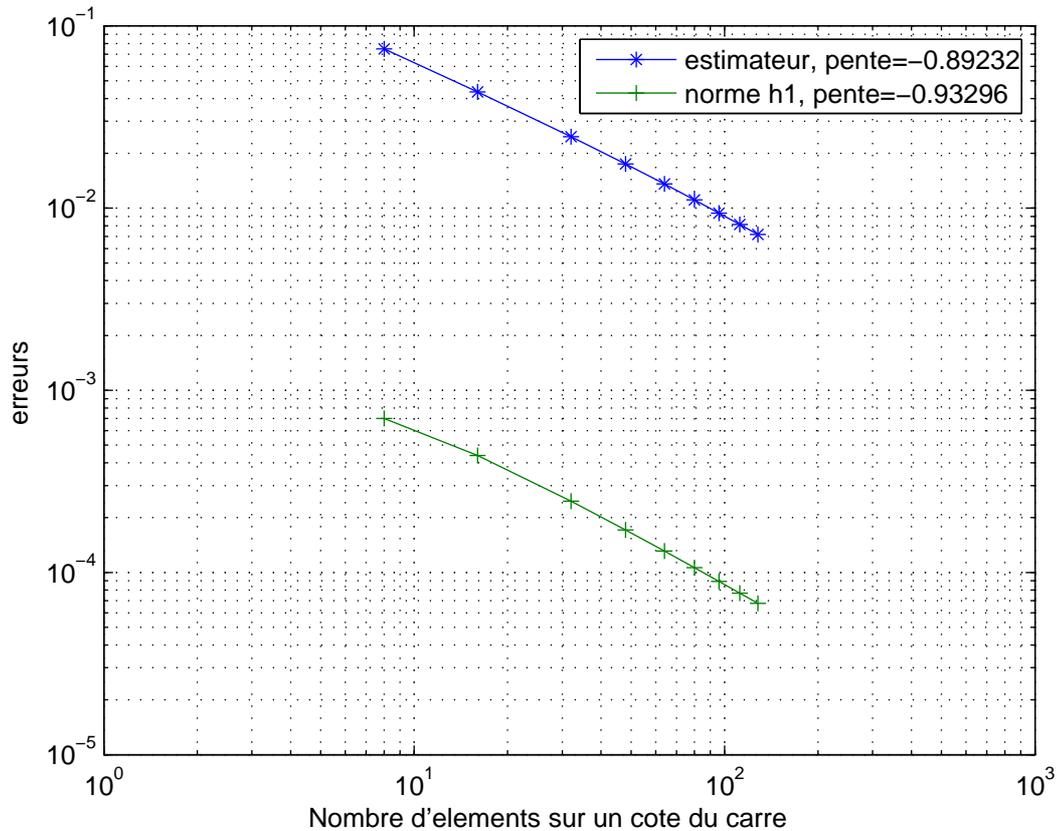


FIG. 2.10 – Convergence de l’estimateur η et de la norme d’erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$

La majeure partie de l’erreur pour η se localise à proximité de la pointe de fissure $(0.5, 0.5)$ (voir Figure 2.11).

Raffinement avec un seuil

Maintenant on raffine à l’aide d’une procédure adaptative. Le critère pour raffiner le maillage est défini par : on choisit un seuil et l’élément G est raffiné lorsque η_G est plus important que le seuil. Le raffinement de maillage est stoppé dès que η_G est plus petit que le seuil pour tout G . On démarre avec un maillage initial uniforme. En choisissant un seuil valant 10^{-5} ou 10^{-6} et une fonction cut-off exponentielle $\chi(r) = \exp(-2075r^4)$ dans Ω , on aboutit aux maillages figurant sur la Figure 2.12. En prenant une fonction polynômiale χ de degré cinq définie précédemment, on obtient les maillages affichés dans la Figure 2.13. Finalement les valeurs de l’estimateur d’erreur η obtenues à chaque maillage intermédiaire avec un seuil égal à 10^{-6} sont reportés dans le Tableau 2.2 (pour la fonction cut-off exponentielle) et dans le Tableau 2.3 (pour la fonction cut-off polynômiale de degré cinq). Dans cet exemple, les différentes fonctions cut-off mènent à des maillages raffinés différents avec une réduction de l’erreur satisfaisante dans les deux cas.

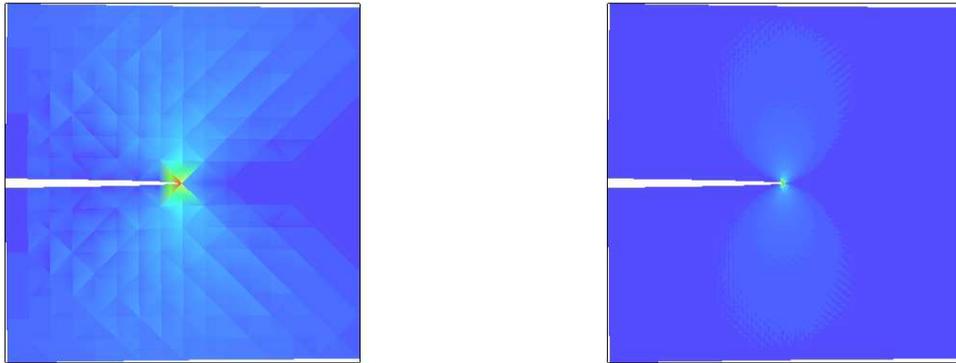


FIG. 2.11 – Carte de l'estimateur d'erreur local η_G avec $N_D = 16$ (à gauche) et $N_D = 80$ (à droite)

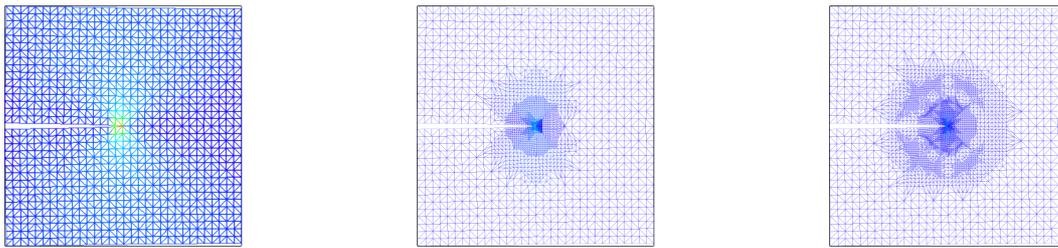


FIG. 2.12 – Cas de la fonction cut-off exponentielle χ : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-6} (à droite)

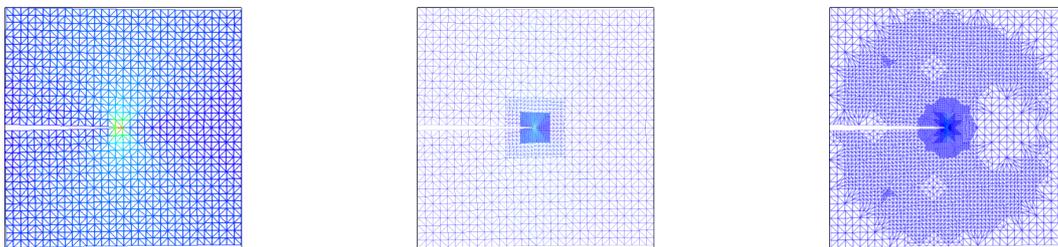


FIG. 2.13 – Cas de la fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-6} (à droite)

Degrés de liberté	730	1106	1472	1500	1526
$\eta (\times 10^{-2})$	4.45143	2.94918	2.07349	1.91532	1.82311

TAB. 2.2 – Valeurs de l’estimateur η pour une fonction cut-off exponentielle χ

Degrés de liberté	730	1666	1714	1734	1740
$\eta (\times 10^{-2})$	4.34222	2.30949	2.04415	1.93209	1.90008

TAB. 2.3 – Valeurs de l’estimateur η pour une fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq

2.5.2 Le mode II de cisaillement

Raffinement uniforme

On choisit la même géométrie et les mêmes caractéristiques matériau que pour l’exemple précédent. Maintenant la solution exacte $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{II}$ est donnée par (2.6). Dans le Tableau 2.4, on reporte les contributions de η , $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ et les indices d’efficacité pour une famille de maillages triangulaires uniformes.

N_D	8	16	32	48	64	80	96	112	128
$\eta (\times 10^{-2})$	8.65243	4.64238	2.44897	1.6639	1.26226	1.01857	0.855114	0.73785	0.649653
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$ ($\times 10^{-4}$)	9.24249	5.68551	3.14573	2.17081	1.65698	1.33966	1.12436	0.968637	0.850816
Indices d’efficacité	93.62	81.65	77.85	76.64	76.17	76.03	76.05	76.17	76.35

TAB. 2.4 – Valeurs de l’estimateur η , de la norme $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ et des indices d’efficacité pour le second exemple.

On reporte les taux de convergence de l’estimateur η et $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$ dans la Figure 2.14. Les conclusions sont les mêmes que pour le premier exemple : l’estimateur et la norme H^1 de l’erreur sont d’ordre h lorsque $h \rightarrow 0$. De plus, la majeure partie de l’erreur pour η est encore localisée à proximité de la pointe de fissure (0.5, 0.5) (voir Figure 2.15).

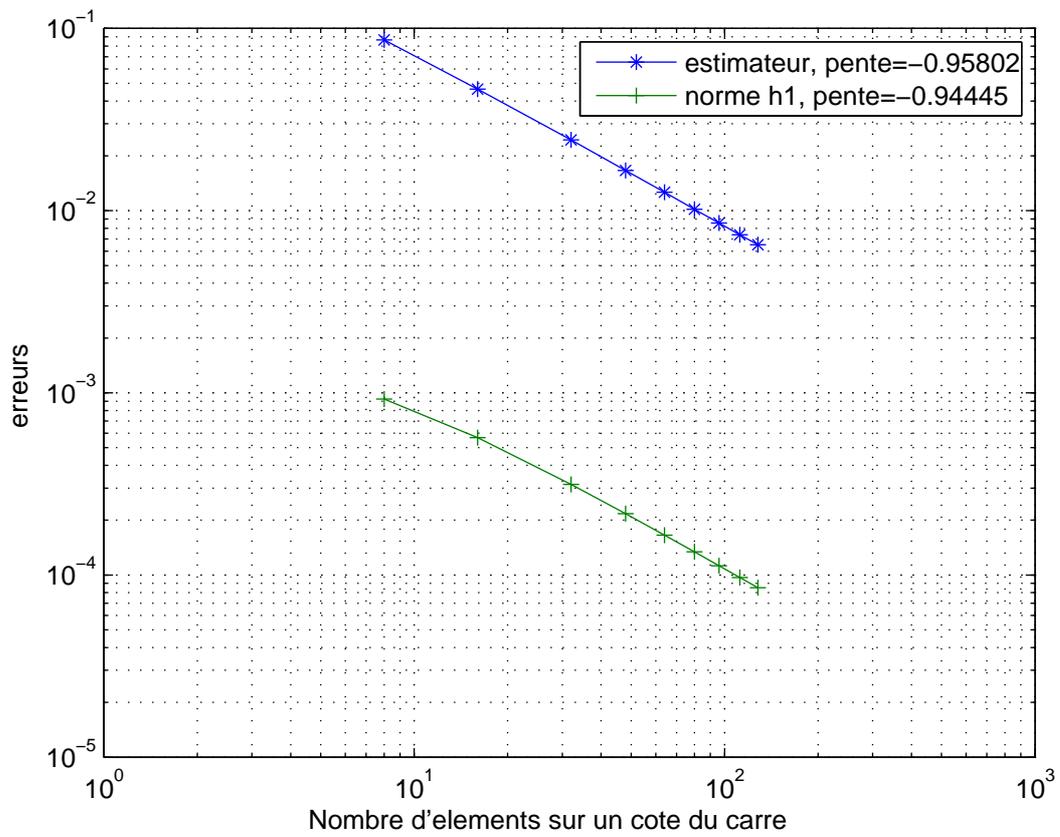


FIG. 2.14 – Convergence de l’estimateur η et de la norme d’erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$

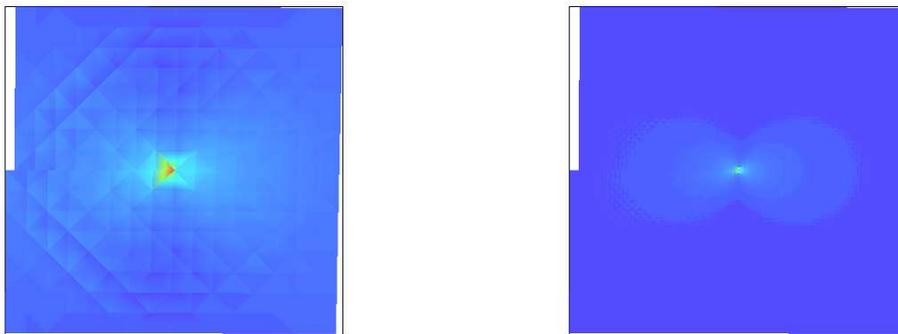


FIG. 2.15 – Carte de l’estimateur d’erreur local η_G avec $N_D = 16$ (à gauche) et $N_D = 80$ (à droite)

Raffinement avec un seuil

Le critère de raffinement est le même que précédemment. Les maillages initial et finaux utilisant une fonction cut-off exponentielle pour deux seuils différents sont illustrés Figure 2.16. La Figure 2.17 représente également ces maillages lorsque la fonction polynômiale de degré cinq est utilisée. Finalement les valeurs de l'estimateur d'erreur η obtenues à chaque maillage intermédiaire pour un seuil égal à 10^{-6} sont reportées dans le Tableau 2.5 (pour la fonction cut-off exponentielle) et dans le Tableau 2.6 (pour la fonction polynômiale de degré cinq).

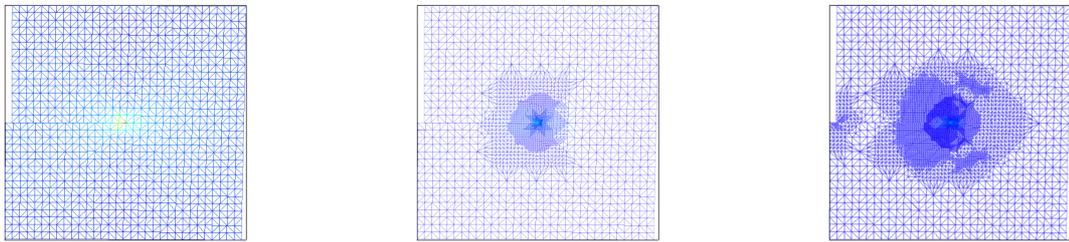


FIG. 2.16 – Cas de la fonction cut-off exponentielle χ : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-6} (à droite)

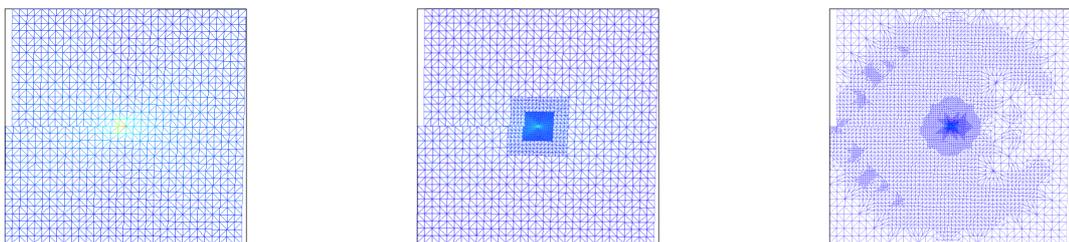


FIG. 2.17 – Cas de la fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final avec un seuil égal à 10^{-5} (au milieu) et maillage final pour un seuil valant 10^{-6} (à droite)

Degrés de liberté	730	1146	1782	1808	1850	1880
$\eta (\times 10^{-2})$	5.50767	3.87577	2.45115	2.26363	2.08548	2.07013

TAB. 2.5 – Valeurs de l’estimateur η pour une fonction cut-off exponentielle χ

Degrés de liberté	730	1668	1848	1874	1944
$\eta (\times 10^{-2})$	4.64238	2.97789	2.49811	2.32357	2.08207

TAB. 2.6 – Valeurs de l’estimateur η pour la fonction polynômiale χ de degré cinq

2.5.3 L’exemple du domaine en forme de L

Dans un troisième exemple, on considère un corps en forme de L fissuré (correspondant aux trois quarts du carré $(0, 1)^2$) représenté sur la Figure 2.18. La pointe de fissure se situe au point $(0.375, 0.25)$. Ici le maillage ne coïncide plus avec la fissure. On pose $\Gamma_D = (0, 0.5) \times \{1\}$ et Γ_N ailleurs. Une densité de forces surfaciques $F=(0,-1)$ est appliquée sur $\Gamma_{N1} = (0, 1) \times \{0\} \subset \Gamma_N$ et N désigne le nombre d’éléments du maillage sur Γ_D .

```

getfem::mesh_region border_faces;
getfem::outer_faces_of_mesh(mesh, border_faces);
for (getfem::mr_visitor i(border_faces); !i.finished(); ++i) {
  base_node un = mesh.normal_of_face_of_convex(i.cv(), i.f());
  un /= gmm::vect_norm2(un);
  if (gmm::abs(un[N-1]-1.0) < 1.0E-7) {
    base_node pt = gmm::mean_value(mesh.points_of_face_of_convex(i.cv(), i.f()));
    if (pt[N-1] > 0.9) mesh.region(DIRICHLET_BOUNDARY_NUM).add(i.cv(), i.f());
  }
  else if (gmm::abs(un[N-1]+1.0) < 1.0E-7)
    mesh.region(NEUMANN_BOUNDARY_NUM1).add(i.cv(), i.f());
  else
    mesh.region(NEUMANN_BOUNDARY_NUM2).add(i.cv(), i.f());
  break;
}

```

Les caractéristiques matériau et la fonction cut-off sont les mêmes que pour les exemples précédents.

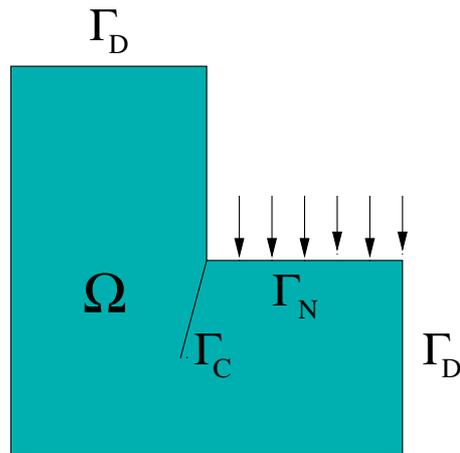


FIG. 2.18 – Troisième exemple : le corps fissuré

Raffinement uniforme

Dans cet exemple, on ne dispose pas de solution exacte. C'est pourquoi seulement les valeurs de l'estimateur η figurent dans le Tableau 2.7 pour une famille uniforme de maillages triangulaires.

N	8	16	32	48	64	80	96
$\eta (\times 10^{-2})$	28.1005	15.7341	8.323	5.69931	4.34828	3.52219	2.96384

TAB. 2.7 – Valeurs de l'estimateur η pour le troisième exemple

On peut voir sur la Figure 2.19 que la vitesse de convergence de l'estimateur est proche de 1 et qu'elle est similaire à celles obtenues dans les deux exemples précédents.

La majeure partie de l'erreur pour l'estimateur η se localise vers la pointe de fissure $(0.375, 0.25)$ (voir Figure 2.20).

Raffinement à l'aide d'un seuil

En utilisant le même critère de raffinement que dans les exemples précédents, on obtient le maillage initial et les deux maillages finaux avec une fonction cut-off exponentielle dans la Figure 2.21. Ces maillages sont représentés pour une fonction cut-off polynômiale de degré cinq dans la Figure 2.22. Finalement les valeurs de l'estimateur d'erreur η obtenues à chaque maillage intermédiaire pour un seuil de 10^{-5} sont reportées dans le Tableau 2.8 (pour la fonction cut-off exponentielle) et dans le Tableau 2.9 (pour la fonction cut-off polynômiale de degré cinq).

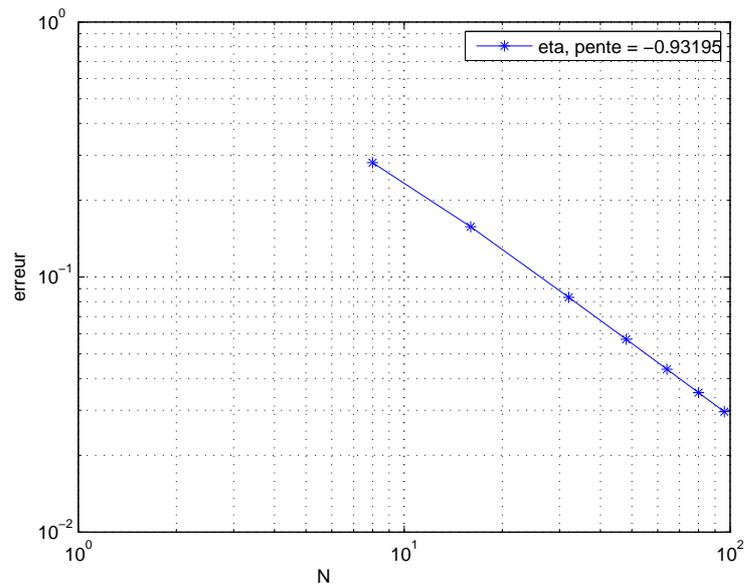


FIG. 2.19 – Convergence de l'estimateur η

Degrés de liberté	1740	2978	3242	3296	3316
η	0.195918	0.131541	0.113071	0.105575	0.103496

TAB. 2.8 – Valeurs de l'estimateur η pour une fonction cut-off exponentielle χ

Degrés de liberté	1740	3156	3244	3312	3326
η	0.157341	0.117158	0.108942	0.103859	0.102766

TAB. 2.9 – Valeurs de l'estimateur η pour une fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq

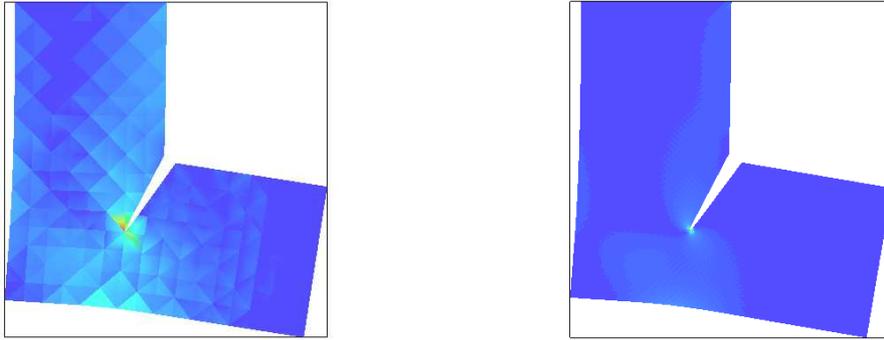


FIG. 2.20 – Carte de l'estimateur d'erreur local η_G avec $N = 8$ (à gauche) et $N = 48$ (à droite)

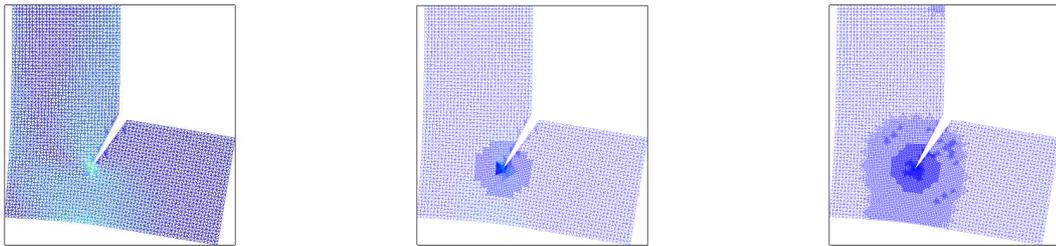


FIG. 2.21 – Cas de la fonction cut-off exponentielle χ : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 2×10^{-4} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 10^{-5} (à droite)

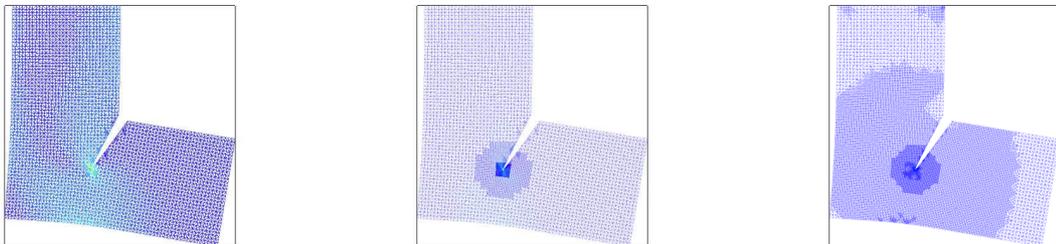


FIG. 2.22 – Cas de la fonction cut-off polynômiale χ de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant 2×10^{-4} (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à 4×10^{-6} (à droite)

2.6 Conclusion

On propose, étudie et implémente sous Getfem++ un estimateur a posteriori par résidu pour le problème de Poisson et le problème d'élasticité approché par la méthode XFEM. L'estimateur est une généralisation de celui existant dans le cadre de la méthode classique par éléments finis avec des maillages standards. Une borne supérieure de l'erreur H^1 est obtenue après définition d'un nouvel opérateur de quasi-interpolation et les simulations numériques montrent que l'estimateur et la norme de l'erreur H^1 admettent des vitesses de convergence similaires.

Notre but est de formuler et d'étudier le contact (et éventuellement le frottement) avec la méthode XFEM. Dans le prochain chapitre, on va commencer par analyser le problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb approché par la méthode classique des éléments finis.

Chapitre 3

Estimateurs a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

Ce chapitre traite des estimateurs d'erreur par résidu pour les approximations par éléments finis des problèmes de contact avec frottement de Coulomb. Un résultat récent d'unicité de Renard dans [203] pour le problème continu nous permet de réaliser l'analyse de l'erreur a posteriori. On propose, étudie et implémente deux estimateurs d'erreur associés à deux discrétisations par éléments finis. Dans les deux cas, les estimations permettent d'obtenir des bornes supérieure et inférieure de l'erreur de discrétisation.

L'article **Residual error estimators for Coulomb friction** [124] accepté dans *SIAM Journal on Numerical Analysis* et un proceeding intitulé **A residual type error estimate for the static Coulomb friction problem with unilateral contact** traitent de ce sujet.

Sommaire

3.1	Le problème de contact avec frottement de Coulomb en élasticité	100
3.1.1	Le problème continu	100
3.1.2	Résultats d'existence et d'unicité	103
3.2	Discrétisation par éléments finis	104
3.3	Estimations d'erreur	107
3.3.1	Estimations a priori	107
3.3.2	Définition de l'estimateur d'erreur par résidu η	108
3.3.3	Borne supérieure	109

3.3.4	Borne inférieure	113
3.4	Une seconde discrétisation par éléments finis	117
3.4.1	Description	118
3.4.2	Etude de l'existence et de l'unicité de la solution	119
3.5	Un second estimateur	123
3.5.1	Définition de l'estimateur par résidu associé à la seconde discrétisation	123
3.5.2	Borne supérieure	124
3.5.3	Borne inférieure	127
3.6	Résultats numériques	129
3.6.1	Un premier exemple avec glissement et séparation	130
3.6.2	Un second exemple avec adhérence, glissement et séparation	135
3.6.3	Troisième exemple : un cas avec peu de frottement ; compa- raison avec un exemple de la littérature	139
3.7	Conclusion et perspectives	143

Le problème de contact unilatéral sans frottement présente une non-linéarité sur le bord correspondant à la non-pénétration des matériaux sur la zone de contact qui mène à une inégalité variationnelle du premier ordre. Pour ce modèle, la méthode basée sur les résidus a été considérée et étudiée dans [58, 108, 237] par une approche pénalisée et dans [38] en utilisant la technique de mesure d'erreur développée dans [27]. Plus récemment, l'analyse sans terme de pénalisation a été achevée dans [127], et dans [128] pour l'approximation par éléments finis mixtes correspondante (voir aussi [30]). De plus, le concept d'erreur en relation de comportement a permis d'élaborer un estimateur d'erreur dans [71, 72, 234, 235] pour le problème du contact et l'estimation d'erreur a posteriori pour la méthode des éléments frontières a été étudiée dans [171, 172]. Plus généralement, on mentionne que l'analyse de l'erreur par résidu pour les inégalités variationnelles mène à des difficultés techniques importantes quel que soit le modèle. Notons aussi qu'un important travail a été réalisé pour les problèmes d'obstacle dans lequel l'inégalité a lieu sur tout le domaine (voir [2, 5, 47, 48, 65, 90, 133, 140, 152, 167, 189, 190, 222, 229]). D'autres analyses a posteriori contenant des inégalités liées à la plasticité ont été considérées dans [57, 201, 202, 220] et pour le problème du fluide de Bingham dans [221].

Plusieurs estimations d'erreur a posteriori ont été effectuées pour le modèle avec frottement de Coulomb : erreur pour la relation de comportement dans [69, 169] aussi bien qu'un estimateur heuristique par résidu pour la discrétisation par la méthode des éléments frontières dans [89]. Le modèle plus simple de frottement de Tresca est traité dans [43] (voir aussi [44] pour l'étude d'un problème similaire où les estimateurs par résidu sont analysés). Notons que ce dernier modèle est gouverné par une inégalité variationnelle du second ordre (voir [13]). Finalement une analyse a posteriori est traitée pour le modèle de frottement avec compliance normale dans [161].

Notre but est de s'occuper de l'analyse de l'erreur a posteriori du modèle de frottement de Coulomb et d'obtenir une estimation avec des bornes supérieure et inférieure par rapport à l'erreur de discrétisation. Dans la première section, on définit le problème continu de contact unilatéral avec frottement en élasticité linéaire en rappelant les résultats d'existence et d'unicité et on écrit le problème en utilisant une formulation mixte où les inconnues sont le champ de déplacement et les pressions de contact frottant sur la zone de contact. Ensuite on choisit une discrétisation classique à l'aide d'éléments finis continus de degré un et de multiplicateurs continus affines par morceaux sur la zone de contact. La section 3 concerne l'étude de l'estimateur d'erreur découlant de cette discrétisation. Grâce au résultat d'unicité de Renard, on obtient une borne supérieure de l'erreur. Les bornes inférieures sont aussi démontrées. Dans la partie suivante, on s'intéresse à un nouvel estimateur provenant d'une autre discrétisation. Cette seconde approche a deux propriétés intéressantes par rapport au premier estimateur : il contient moins de termes provenant du contact-frottement et ces termes ont une expression plus simple. De plus, l'analyse de l'erreur mène à des meilleures bornes. On termine par des résultats numériques et la comparaison des deux approches.

3.1 Le problème de contact avec frottement de Coulomb en élasticité

3.1.1 Le problème continu

On considère dans ce qui suit le modèle le plus simple : élasticité linéaire, petites déformations et frottement de Coulomb présenté dans le chapitre Introduction générale. On reprend les équations de l'élasticité (2) munies des équations de contact (3) et des conditions de frottement de Coulomb (4-5). Le contact est supposé être frottant et les zones d'adhérence, glissement et séparation ne sont pas connues à l'avance mais on suppose que la zone finale de contact après déformation est incluse dans Γ_C .

La formulation faible de (2)–(5) utilise les espaces de Hilbert

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}, \quad W_n = \{v_n|_{\Gamma_C} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}, \quad W_t = \{v_t|_{\Gamma_C} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\},$$

et leur espaces duaux topologiques \mathbf{V}' , W'_n , W'_t , munis des normes usuelles. Comme Γ_C est une ligne droite, on a $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C) \subset W_n \subset H^{1/2}(\Gamma_C)$ (resp. $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C) \subset W_t \subset H^{1/2}(\Gamma_C)$) qui implique $W'_n \subset H^{-1/2}(\Gamma_C)$ (resp. $W'_t \subset H^{-1/2}(\Gamma_C)$). Classiquement, $H^{1/2}(\Gamma_C)$ est l'espace des restrictions sur Γ_C des traces sur $\partial\Omega$ des fonctions dans $H^1(\Omega)$, et $H^{-1/2}(\Gamma_C)$ est l'espace dual de $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$ qui est l'espace des restrictions sur Γ_C des fonctions dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ nulles à l'extérieur de Γ_C . Pour une présentation détaillée des opérateurs et des espaces de trace, on se réfère à [164] et [3].

On introduit le cône convexe de multiplicateurs sur Γ_C : $\mathbf{M}(\mu\lambda_n) = M_n \times M_t(\mu\lambda_n)$ où

$$M_n = \left\{ \nu \in W'_n, \nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\},$$

et, pour tout $g \in M_n$

$$M_t(g) = \left\{ \nu \in W'_t, -g \leq \nu \leq g \text{ sur } \Gamma_C \right\}.$$

Les conditions d'inégalité incorporées dans les définitions de M_n et $M_t(g)$ sont à prendre au sens dual.

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, & b(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}) &= \langle \nu_n, v_n \rangle_{W'_n, W_n} + \langle \nu_t, v_t \rangle_{W'_t, W_t}, \\ L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \end{aligned}$$

pour \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbf{V} et $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n, \nu_t)$ dans $W'_n \times W'_t$. Dans ces définitions, les notations \cdot et $:$ représentent les produits scalaires canoniques dans \mathbb{R}^2 et \mathcal{S}_2 respectivement et la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W'_n, W_n}$ représente le crochet de dualité entre W'_n et W_n . On écrit par la suite des termes sous formes d'intégrale à la place des crochets de dualité.

La formulation mixte du problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb (2)–(5) consiste à trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{M}(\mu\lambda_n)$ tels que (voir [129, 203])

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu} = (\nu_n, \nu_t) \in \mathbf{M}(\mu\lambda_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.1

Cette formulation faible peut être écrite d'une manière différente : trouver $(\mathbf{u}, \lambda_n, \lambda_t) \in \mathbf{V} \times M_n \times W'_t$ tel que $\lambda_t \in M_t(\mu\lambda_n)$ et (3.1) aient lieu.

Propriétés 3.1.1

Si $(\mathbf{u}, \lambda_n, \lambda_t)$ est solution de (3.1), alors $\lambda_n = -\sigma_n(\mathbf{u})$ et $\lambda_t = -\sigma_t(\mathbf{u})$.

Démonstration : On a d'après la première équation de (3.1) :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \lambda_n v_n \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \lambda_t v_t \, d\Gamma$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{g} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} (\lambda_n + \sigma_n(\mathbf{u})) v_n \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} (\lambda_t + \sigma_t(\mathbf{u})) v_t \, d\Gamma = 0$$

En choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$, la première intégrale est nulle. Puis en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_C , on retrouve que $\mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ sur Γ_N . Finalement en identifiant les deux dernières intégrales, on obtient que $\lambda_n = -\sigma_n(\mathbf{u})$ et $\lambda_t = -\sigma_t(\mathbf{u})$. ■

L'espace W_n est muni de la norme

$$\|w\|_{W_n} = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : v_n = w \text{ sur } \Gamma_C} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega},$$

et de façon similaire pour $\|\cdot\|_{W_t}$. L'espace dual de $W_n \times W_t$ est muni de la norme

$$\|\boldsymbol{\nu}\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}}, \quad \forall \boldsymbol{\nu} = (\nu_n, \nu_t) \in W'_n \times W'_t.$$

Une autre formulation faible classique du problème (2)–(5) est l'inégalité quasi-variationnelle :

Propriétés 3.1.2

Trouver \mathbf{u} telle que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \mu \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})(|v_t| - |u_t|) \, d\Gamma \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad (3.2)$$

où \mathbf{K} désigne le cône convexe fermé des déplacements admissibles satisfaisant les conditions de non-interpénétration :

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

Démonstration : La formulation variationnelle en déplacement du problème s'écrit $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}$:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Gamma$$

Avec les notations précédentes et la décomposition en composantes normale et tangentielle, on obtient :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n - u_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t) d\Gamma$$

Pour le terme en composante normale, en utilisant le fait que $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0$ et que la relation de complémentarité annule la deuxième partie de l'intégrale, on a :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t) d\Gamma$$

Maintenant étudions le signe de $f : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$f = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| (|v_t| - |u_t|) + \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t)$. Soit $x \in \Gamma_C$

– supposons que $u_t(x) = 0$ alors $f(x) = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| |v_t| + \sigma_t(\mathbf{u})v_t \geq 0$

car $v_t \leq |v_t|$ et $|\sigma_t(\mathbf{u})| \leq -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})|$

– supposons que $u_t(x) \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) |v_t| + \mu\sigma_n(\mathbf{u}) |u_t| + \mu\sigma_n(\mathbf{u}) \frac{u_t}{|u_t|} v_t - \mu\sigma_n(\mathbf{u}) |u_t| \\ &= -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) |v_t| + \underbrace{\mu\sigma_n(\mathbf{u}) \frac{u_t}{|u_t|} v_t}_{A} \geq 0 \end{aligned}$$

car $|A| = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| |v_t| = -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) |v_t|$.

Ainsi $\forall x \in \Gamma_C, f(x) \geq 0$ d'où $\int_{\Gamma_C} f(x) d\Gamma \geq 0$ ce qui donne :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} f(x) d\Gamma \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t) d\Gamma.$$

On obtient le résultat après simplification. ■

Remarque 3.1.2

La fonctionnelle $j(\cdot, \cdot)$ donnée formellement par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mu \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) |v_t| d\Gamma$$

traduit le frottement de Coulomb.

Remarque 3.1.3

Pour le problème avec frottement de Tresca, la fonctionnelle $j(\cdot)$ continue convexe est donnée par

$$j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} s |v_t| d\Gamma$$

et

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

3.1.2 Résultats d'existence et d'unicité

Lorsque le frottement est omis ($\mu = 0$), la condition (4-5) est réduite à $\sigma_t(\mathbf{u}) = 0$ et le problème de contact sans frottement admet une unique solution selon [94] et d'après le théorème de Stampacchia (voir [149]). L'étude mathématique du problème avec frottement de Coulomb présente des difficultés considérables. Pendant longtemps, on ne savait pas si ce problème avait une solution. Le premier résultat d'existence d'une solution de (3.2) a été établi dans les années 80 pour des petits coefficients de frottement dans [187] et les bornes assurant l'existence ont été améliorées dans [137], [143] et [87]. Dans [88], l'existence est statuée pour $\mu \leq \sqrt{3 - 4\nu}/(2 - 2\nu)$ où $0 \leq \nu \leq 1/2$ désigne le coefficient de Poisson. Quand le frottement est présent, des solutions multiples aux équations décrivant le contact peuvent exister et la description du mouvement des corps en contact devient extrêmement complexe. Dans [120, 121], quelques solutions multiples du problème (2)–(5) sont exhibées pour des domaines triangulaires ou quadrangulaires. Ces solutions multiples proviennent soit d'un ensemble infini de solutions au niveau du glissement soit de deux configurations isolées (adhérence et séparation). Notons que ces exemples de non-unicité sont valides pour des coefficients de frottement assez grands (i.e. $\mu > \sqrt{(1 - \nu)/\nu}$) et des déplacements tangentiels avec un signe constant sur Γ_C . Pour le moment, il semble qu'aucune solution multiple n'ait été détectée pour un coefficient de frottement arbitrairement petit dans le cas continu, bien que de tels résultats existent pour les approximations par éléments finis dans [114], mais pour une géométrie variable. Plus récemment, un résultat d'unicité a été obtenu dans [203] : des cas sont définis pour lesquels il est possible d'affirmer l'unicité de la solution du problème de frottement de Coulomb. Plus précisément, si une solution "régulière" existe (i.e. la transition est régulière lorsque la direction de glissement change) et si le coefficient de frottement est suffisamment petit alors la solution est la seule.

On introduit maintenant l'espace des multiplicateurs M des fonctions ξ définies sur Γ_C tel que la norme équivalente suivante soit finie :

$$\|\xi\|_M = \sup_{\substack{v_t \in W_t \\ v_t \neq 0}} \frac{\|\xi \cdot v_t\|_{W_t}}{\|v_t\|_{W_t}}.$$

Comme Γ_C est supposé rectiligne, M contient pour tout $\varepsilon > 0$ l'espace $H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_C)$ (voir [180] pour une discussion complète sur la théorie des multiplicateurs dans une paire d'espaces de Hilbert).

Le résultat d'unicité est donné en supposant que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$. Il est facile de voir que cela implique $|\xi| \leq 1$ sur le support de λ_n . Plus précisément, cela implique que $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur le support de λ_n , où $\text{Dir}_t(\cdot)$ est le sous-différentiel de l'application convexe $x_t \mapsto |x_t|$. Cela signifie qu'il est possible de supposer que $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C .

Proposition 3.1.1

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu < C_0 \|\xi\|_M^{-1}$ où $C_0 > 0$ est indépendante de ξ . Alors $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est l'unique solution du problème (3.1).

Démonstration : voir [203] ■

Dans un espace bidimensionnel ($d = 2$), le cas $\xi \equiv 1$ correspond à une direction de glissement homogène et le résultat précédent est complémentaire aux résultats de non-unicité obtenus dans [120, 121]. Les multiplicateurs ξ varient de -1 à $+1$ chaque fois que le signe du déplacement tangentiel passe du négatif au positif. L'ensemble M ne contient aucun multiplicateur ayant une singularité du premier ordre. Le déplacement tangentiel de la solution \mathbf{u} ne peut pas passer d'une valeur négative à une valeur positive en passant par zéro en un seul point de Γ_C .

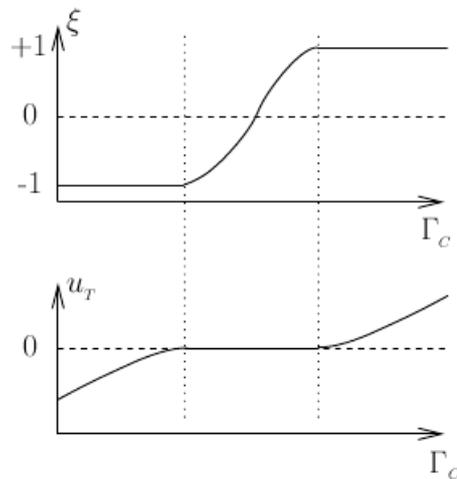


FIG. 3.1 – Exemple de déplacement tangentiel u_t et de multiplicateur ξ correspondant pour $d = 2$ [203]

Remarque 3.1.4

La loi de frottement "non locale" de Coulomb régularisant les contraintes normales a été introduite dans [85] et ce procédé de régularisation a permis d'obtenir l'existence pour tous les coefficients de frottement et l'unicité pour des coefficients de frottement petits [77, 147].

3.2 Discrétisation par éléments finis

On approxime le problème continu à l'aide d'une méthode par éléments finis standard. En effet, on fixe une famille régulière de maillages $T_h, h > 0$, faite de triangles fermés (voir Définition 2.2.1). Pour $T \in T_h$, on définit h_T le diamètre de T et $h = \max_{T \in T_h} h_T$. La régularité du maillage entraîne en particulier que pour tout côté E de T , on a $h_E = |E| \sim h_T$. Soit E_h (resp. \mathcal{N}_h) l'ensemble des côtés (resp. nœuds) de la triangulation et posons $E_h^{int} = \{E \in E_h : E \subset \Omega\}$ l'ensemble des côtés intérieurs de T_h (les côtés sont supposés

être relativement ouverts). On désigne par $E_h^N = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_N\}$ l'ensemble des côtés appartenant au bord de Neumann, et $E_h^C = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_C\}$ désigne l'ensemble des côtés extérieurs inclus dans la zone de contact. Soit $\mathcal{N}_h^D = \mathcal{N}_h \cap \overline{\Gamma_D}$ (notons que les nœuds extrêmes de $\overline{\Gamma_D}$ appartiennent à \mathcal{N}_h^D). Pour un élément T , on désigne par E_T l'ensemble des côtés de T et d'après les notations précédentes, on pose $E_T^{int} = E_T \cap E_h^{int}$, $E_T^N = E_T \cap E_h^N$, $E_T^C = E_T \cap E_h^C$. Pour tout côté intérieur E , on fixe un des deux vecteurs normaux unitaires et on le note \mathbf{n}_E . Le saut d'une fonction vectorielle \mathbf{v} à travers un côté $E \in E_h^{int}$ au point $\mathbf{y} \in E$ est défini par :

$$[[\mathbf{v}]]_E(\mathbf{y}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(\mathbf{y} + \alpha \mathbf{n}_E) - \mathbf{v}(\mathbf{y} - \alpha \mathbf{n}_E), \quad \forall E \in E_h^{int}.$$

Notons que le signe de $[[\mathbf{v}]]_E$ dépend de l'orientation de \mathbf{n}_E . Finalement on introduit les patches : en notant x un nœud, E un côté et T un élément, on pose $\omega_x = \cup_{\{T:x \in T\}} T$, $\omega_E = \cup_{\{x:x \in \overline{E}\}} \omega_x$ et $\omega_T = \cup_{\{x:x \in T\}} \omega_x$. L'espace des éléments finis utilisé dans Ω est alors défini par :

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v}_h \in (C(\overline{\Omega}))^2 : \forall T \in T_h, \quad \mathbf{v}_h|_T \in (\mathbb{P}_1(T))^2, \quad \mathbf{v}_h|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \}.$$

On rappelle que la zone de contact est pour simplifier un segment de droite. L'extension de la zone de contact à une ligne brisée peut être effectuée sans difficulté supplémentaire (voir par exemple [128]). Afin d'exprimer les contraintes de contact à l'aide de multiplicateurs de Lagrange, on introduit l'image de \mathbf{V}_h par l'opérateur de trace normal sur Γ_C :

$$W_h = \{ \nu_h \in C(\overline{\Gamma_C}) : \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ telle que } \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = \nu_h \text{ sur } \Gamma_C \},$$

qui coïncide avec l'image de \mathbf{V}_h par l'opérateur de trace tangentiel sur Γ_C . Le choix de l'espace W_h nous permet de définir les cônes convexes fermés suivants :

$$M_{hn} = \left\{ \nu_h \in W_h : \int_{\Gamma_C} \nu_h \psi_h \, d\Gamma \geq 0, \quad \forall \psi_h \in W_h, \psi_h \geq 0 \right\}$$

et pour $g \in M_{hn}$:

$$M_{ht}(g) = \left\{ \nu_h \in W_h : \left| \int_{\Gamma_C} \nu_h \psi_h \, d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_C} g \psi_h \, d\Gamma, \quad \forall \psi_h \in W_h, \psi_h \geq 0 \right\}.$$

Remarque 3.2.1

Les fonctions de M_{hn} ne sont pas nécessairement positives. De même, les fonctions de $M_{ht}(g)$ ne satisfont pas partout $|\nu_h| \leq g$.

La formulation discrétisée du problème de contact avec frottement de Coulomb est de trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{M}_h(\mu \lambda_{hn}) = M_{hn} \times M_{ht}(\mu \lambda_{hn})$ satisfaisant :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\boldsymbol{\nu}_h - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u}_h) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu}_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{M}_h(\mu \lambda_{hn}). \end{cases} \quad (3.3)$$

On sait que le problème discrétisé par éléments finis associé au problème statique de frottement de Coulomb admet toujours une solution [111, 112] et que cette solution est

unique si le coefficient de frottement est assez petit. En effet, la référence [69] établit en utilisant un argument de point fixe que le problème (3.3) admet au moins une solution et que la solution est unique lorsque $\mu \leq C(h)$, ($C(h) \sim h^{1/2}$). Malheureusement la borne assurant l'unicité s'annule quand on raffine le maillage, voir par exemple, [112]. Un résultat de convergence de solutions discrètes vers une solution du problème continu est démontré dans [111]. Les résultats obtenus pour l'unicité prouvent que la taille des mailles influe de manière négligeable sur les conditions d'unicité. Hild montre sur un exemple très simple (un élément fini) que le problème discret peut admettre une, plusieurs ou une infinité de solutions et que le nombre de solutions décroît dans certains cas lorsque le coefficient de frottement augmente.

Le résultat suivant donne explicitement les conditions discrètes de contact avec frottement de (3.3) :

Proposition 3.2.1

Soit $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution de (3.3). On suppose que $\dim(W_h) = p$ et on pose ψ_{x_i} , $1 \leq i \leq p$ les fonctions de base de W_h sur Γ_C . La matrice de masse d'ordre p $\mathcal{M} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ sur Γ_C est définie par $m_{ij} = \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} \psi_{x_j}$. Soient U_N et U_T les vecteurs ayant pour composantes les valeurs nodales de u_{hn} et u_{ht} respectivement et soient L_N et L_T les vecteurs de composantes respectives les valeurs nodales de λ_{hn} et λ_{ht} . Alors les conditions discrètes de contact frottant de (3.3) sont les suivantes ; pour tout $1 \leq i \leq p$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}L_N)_i &\geq 0, & (U_N)_i &\leq 0, & (\mathcal{M}L_N)_i (U_N)_i &= 0, \\ |(\mathcal{M}L_T)_i| &\leq \mu (\mathcal{M}L_N)_i, \\ |(\mathcal{M}L_T)_i| &< \mu (\mathcal{M}L_N)_i &\implies (U_T)_i &= 0, \\ (\mathcal{M}L_T)_i (U_T)_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration : voir [69] ■

Opérateur de quasi-interpolation

On considère l'opérateur de quasi-interpolation π_h : pour tout $v \in L^1(\Omega)$, on définit $\pi_h v$ comme l'unique élément de $V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : \forall T \in T_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T), v_h|_{\Gamma_D} = 0\}$ tel que :

$$\pi_h v = \sum_{x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D} \left(\frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} v(y) dy \right) \psi_x,$$

où pour tout $x \in \mathcal{N}_h$, ψ_x est la fonction de base standard de V_h satisfaisant $\psi_x(x') = \delta_{x,x'}$, pour tout $x' \in \mathcal{N}_h$. On pourrait considérer d'autres opérateurs de quasi-interpolation comme ceux figurant dans [65] ou dans [67].

Cet opérateur π_h possède des propriétés d'approximation locale :

Propriétés 3.2.1

Les estimations suivantes ont lieu ([232]) : pour tout $v \in H^1(\Omega)$ s'annulant sur Γ_D , on a :

$$\|v - \pi_h v\|_T \lesssim h_T \|\nabla v\|_{\omega_T}, \forall T \in T_h,$$

et

$$\|v - \pi_h v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E}, \forall E \in E_h.$$

Comme on s'intéresse à des fonctions à valeurs vectorielles, on définit l'opérateur vectoriel (que l'on note encore π_h pour simplifier) dont les composantes sont définies ci-dessus. Donc on a :

Lemme 3.2.1

Pour toute fonction $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ (fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$),

$$\|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}\|_T \leq C_1 h_T \|\mathbf{v}\|_{1, \omega_T}, \forall T \in T_h, \quad (3.4)$$

$$\|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}\|_E \leq C_2 h_E^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{1, \omega_E}, \forall E \in E_h. \quad (3.5)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont difficiles à évaluer et dépendent du paramètre de régularité σ (voir Définition 2.2.1). En particulier $\pi_h \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ pour tout $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$.

3.3 Estimations d'erreur

3.3.1 Estimations a priori

L'analyse a priori de l'erreur de (3.3) reste un problème ouvert. Une estimation d'erreur est obtenue dans [129] pour une approximation légèrement différente des conditions de contact et frottement (voir aussi [111] pour un résultat de convergence) :

Théorème 3.3.1

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ la solution du problème continu (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu < C_{is} C_0 \|\xi\|_M^{-1}$. La constante C_0 est celle de la Proposition 3.1.1 et C_{is} désigne la constante indépendante de h intervenant dans la condition inf-sup de Babuška-Brezzi. Supposons que $\mathbf{u} \in (H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega))^2$ avec $\epsilon > 0$. Soit $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution du problème discret (3.3). Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et \mathbf{u} telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C} \leq C h^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\epsilon, \Omega}$$

Quand le frottement est absent, un nombre important d'analyses a priori de l'erreur ont été effectuées (voir par exemple [33, 135]). Dans [70], des estimations d'erreur a priori ont été obtenues par la méthode des éléments finis mixtes pour le problème sans frottement et les taux de convergence des différentes méthodes ont été comparés numériquement.

Laborde et Hild ont obtenu des estimations a priori pour la méthode des éléments finis quadratiques [123]. Ainsi ils améliorent la précision des calculs par rapport aux éléments linéaires lorsque la régularité du problème le permet [148, 185]. Remarquons que même dans le cas sans frottement, la preuve de l'estimation d'ordre h avec la norme $(H^1(\Omega))^2$ sous la régularité $(H^2(\Omega))^2$ reste un problème ouvert.

3.3.2 Définition de l'estimateur d'erreur par résidu η

Le résidu de l'équation d'équilibre (2) est défini par $\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f} = \mathbf{f}$ sur T . Comme d'habitude, cette quantité peut être remplacée par une approximation polynômiale $\mathbf{f}_T \in (\mathbb{P}_k(T))^2$ et la différence $\mathbf{f} - \mathbf{f}_T$ est traitée comme une oscillation des données. Un choix classique est de prendre $\mathbf{f}_T = \int_T \mathbf{f}(x) / |T|$. De même, \mathbf{g} est approchée par la quantité notée \mathbf{g}_E définie pour tout $E \in E_h^N$.

Définition 3.3.1

L'estimateur résiduel global η et les contributions locales η_T sont définis par :

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_T = \left(\sum_{i=1}^8 \eta_{iT}^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_{1T} &= h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \\ \eta_{2T} &= h_T^{1/2} \left(\sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_{3T} &= h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \eta_{4T} &= h_T^{1/2} \|\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \eta_{5T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} -\lambda_{hn} u_{hn} \right)^{1/2}, \\ \eta_{6T} &= \|\lambda_{hn-}\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \eta_{7T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{ht} u_{ht})_- \right)^{1/2}, \\ \eta_{8T} &= \|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C}, \end{aligned}$$

où les notations $+$ et $-$ désignent respectivement les parties positives et négatives; $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ désigne le saut de contrainte de \mathbf{u}_h dans la direction normale, i.e.,

$$J_{E,n}(\mathbf{u}_h) = \begin{cases} \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_E \rrbracket_E, \forall E \in E_h^{int}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} - \mathbf{g}_E, \forall E \in E_h^N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Les termes local et global d'oscillation de données sont définis par :

$$\zeta_T = \left(h_T^2 \sum_{T' \subset \omega_T} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{T'}\|_{T'}^2 + h_E \sum_{E \in E_T^N} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 \right)^{1/2}, \quad \zeta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}. \quad (3.7)$$

On voit qu'il y a huit contributions pour chaque estimateur local η_T . Il y a deux contributions classiques pour tous les éléments dont aucun côté n'appartient à Γ_C : η_{1T} le résidu d'équilibre et η_{2T} le terme de saut intérieur et sur le bord de Neumann. Les éléments restants sur la zone de contact ont six termes supplémentaires. Les termes η_{3T} et η_{4T} représentent la déviation des forces de traction de l'équilibre dans l'approximation par éléments finis mixtes, les termes η_{5T} et η_{6T} (respectivement η_{7T} et η_{8T}) représentent la non vérification des lois de contact unilatéral (3) (respectivement des conditions de frottement (4-5)).

3.3.3 Borne supérieure

On donne maintenant une borne supérieure de l'erreur de discrétisation. Dans le théorème suivant, on suppose que la solution du problème continu satisfait le critère d'unicité de [203].

Théorème 3.3.2

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ la solution du problème (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu \|\xi\|_M$ suffisamment petit. Soit $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution du problème discret (3.3). Alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \eta + \zeta.$$

Démonstration : Pour simplifier la notation, on pose $\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$; de la \mathbf{V} -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et des équations d'équilibre de (3.1) et (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ &= L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_h - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h). \end{aligned}$$

En intégrant par parties sur chaque triangle T , en utilisant la définition de $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ dans (3.6) et les conditions complémentaires $\int_{\Gamma_C} \lambda_n u_n = \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_{hn} = 0$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_C} \lambda_{ht} u_{ht} - \int_{\Gamma_C} \lambda_t u_t \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

En partageant les intégrales sur Γ_C en composantes normale et tangentielle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{ht})(u_{ht} - u_t) + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_{hn} - u_n) + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_{ht} - u_t) \\
= & \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{ht})(u_{ht} - u_t) \\
& + I + II + III + IV + V.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

On a besoin d'estimer chaque terme à droite dans l'inégalité. Pour cela, on choisit

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h + \pi_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \tag{3.9}$$

où π_h est l'opérateur de quasi-interpolation défini dans le Lemme 3.2.1.

On commence par le terme I . De la définition de \mathbf{v}_h et (3.4), on en tire :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_T = \|\mathbf{e}_\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_T \lesssim h_T \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}$$

pour chaque triangle T . Cette estimation couplée avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$\begin{aligned}
|I| & \lesssim \sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}\|_T h_T \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}\|_T^2 h_T^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}_T\|_T^2 h_T^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad + \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T^2 h_T^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \eta_{1T}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega} + \left(\sum_{T \in T_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega} \\
& \lesssim (\eta + \zeta) \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

On considère maintenant les termes intérieurs et sur le bord de Neumann dans (3.8) : comme précédemment l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz mène à :

$$|II| \leq \sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_E.$$

En utilisant l'expression (3.9) et l'estimation (3.5), on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_E = \|\mathbf{e}_\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_E}.$$

En insérant cette estimation dans la précédente, on déduit que :

$$\begin{aligned}
|II| & \lesssim \left(\sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 h_E \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_E}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \eta_{2T}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega} \\
& \lesssim \eta \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

De plus

$$|III| \lesssim \zeta \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}. \quad (3.12)$$

Les deux termes restants sont traités de la même manière que les précédents. Ainsi

$$|IV| + |V| \lesssim \eta \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}. \quad (3.13)$$

Notons que $u_{hn} \leq 0$ sur Γ_C , donc

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} \leq 0, \quad (3.14)$$

et il reste à estimer deux termes dans (3.8). En utilisant la condition discrète complémentaire $\int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_{hn} = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n &= \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} (u_n - u_{hn}) = \int_{\Gamma_C} (\lambda_{hn+} - \lambda_{hn-}) (u_n - u_{hn}) \\ &\leq - \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn+} u_{hn} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn-} (u_n - u_{hn}) \\ &\leq \eta^2 - \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn-} (u_n - u_{hn}) \\ &= \eta^2 + VI. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le dernier terme dans l'expression précédente est estimé à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young :

$$|VI| \leq \sum_{E \in E_h^C} \|\lambda_{hn-}\|_E \|u_n - u_{hn}\|_E \leq \sum_{E \in E_h^C} \left(\alpha \|u_n - u_{hn}\|_E^2 + \frac{1}{4\alpha} \|\lambda_{hn-}\|_E^2 \right),$$

pour tout $\alpha > 0$. Un théorème standard de trace implique que :

$$|VI| \leq \alpha \|u_n - u_{hn}\|_{\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\alpha} \sum_{E \in E_h^C} \|\lambda_{hn-}\|_E^2 \lesssim \alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\eta^2}{4\alpha}. \quad (3.16)$$

Les estimations (3.15) et (3.16) donnent

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n \lesssim \alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \eta^2 \left(1 + \frac{1}{4\alpha} \right) \quad (3.17)$$

pour tout $\alpha > 0$.

On estime maintenant le terme de frottement :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) &= \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \mu \lambda_{hn} \xi)(u_t - u_{ht}) + \int_{\Gamma_C} (\mu \lambda_{hn} \xi - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) \\ &= \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \mu \lambda_{hn} \xi)(u_t - u_{ht}) + \int_{\Gamma_C} \mu (\lambda_{hn} - \lambda_n) \xi (u_t - u_{ht}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$, $\lambda_t = \mu\lambda_n\xi$. Le second terme de (3.18) est majoré comme suit :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_C} \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n)\xi(u_t - u_{ht}) \right| &\leq \mu\|\xi\|_M \|u_t - u_{ht}\|_{W_t} \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_{W_t'} \\ &\lesssim \mu\|\xi\|_M \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \\ &\lesssim \mu\|\xi\|_M \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \eta + \zeta). \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on a utilisé (3.23). On déduit de l'inégalité de Young :

$$\left| \int_{\Gamma_C} \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n)\xi(u_t - u_{ht}) \right| \lesssim (1 + \alpha)\mu\|\xi\|_M \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu\|\xi\|_M}{2\alpha} (\eta^2 + \zeta^2) \quad (3.19)$$

pour tout α positif.

De plus, le premier terme de (3.18) est traité comme suit :

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \mu\lambda_{hn}\xi)(u_t - u_{ht}) \\ = &\int_{\Gamma_C} \lambda_{ht}u_t - \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn+}\xi u_t + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn+}\xi u_{ht} + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}\xi(u_t - u_{ht}) - \int_{\Gamma_C} \lambda_{ht}u_{ht} \\ = &\int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht}u_t - \mu\lambda_{hn+}|u_t|) + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn+}\xi u_{ht} + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}\xi(u_t - u_{ht}) - \int_{\Gamma_C} \lambda_{ht}u_{ht} \\ \leq &\int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_t| + \int_{\Gamma_C} (\mu\lambda_{hn+}|u_{ht}| - \lambda_{ht}u_{ht}) + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}|u_t - u_{ht}| \\ \leq &\int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_t - u_{ht}| + \int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_{ht}| \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\mu\lambda_{hn+}|u_{ht}| - |\lambda_{ht}||u_{ht}|) + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}|u_t - u_{ht}| + \int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}||u_{ht}| - \lambda_{ht}u_{ht}) \\ \lesssim &\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} (\|(|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+\|_{\Gamma_C} + \mu\|\lambda_{hn-}\|_{\Gamma_C}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} [(|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_{ht}| - (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+}) |u_{ht}|] + 2 \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht}u_{ht})_- \\ \lesssim &\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} (\|(|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+\|_{\Gamma_C} + \mu\|\lambda_{hn-}\|_{\Gamma_C}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht}u_{ht})_-. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De (3.19) et (3.20), on obtient pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) &\lesssim (\alpha + (1 + \alpha)\mu\|\xi\|_M) \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 \\ &+ \frac{\mu\|\xi\|_M + 2\alpha + 1 + \mu^2}{2\alpha} (\eta^2 + \zeta^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

En regroupant les estimations (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.17) et (3.21) avec α suffisamment petit dans (3.8), et en utilisant l'inégalité de Young, on déduit que : si $\mu\|\xi\|_M$ est suffisamment petit alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim \eta + \zeta. \quad (3.22)$$

On cherche maintenant une borne supérieure pour l'erreur de discrétisation $\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h$ correspondant aux multiplicateurs. Soient $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Des équations d'équilibre de (3.1) et (3.3), on déduit :

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}) &= b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) \\ &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\ &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Une intégration par parties sur chaque élément T aboutit à :

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_n - v_{hn}) - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_t - v_{ht}) \\ &\quad + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \pi_h \mathbf{v}$ où π_h est l'opérateur de quasi-interpolation défini au Lemme 3.2.1 et en accomplissant un calcul similaire à (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13), on déduit que :

$$|b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v})| \lesssim (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \eta + \zeta) \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Par conséquent :

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \eta + \zeta. \quad (3.23)$$

Le résultat en découle en regroupant les deux estimations (3.22) et (3.23). ■

3.3.4 Borne inférieure

On rappelle quelques outils au préalable tels que les inégalités inverses [231] et les fonctions bulles :

Proposition 3.3.1 (Fonctions bulles)

Les coordonnées barycentriques de x dans le triangle T sont notées $\beta_{T,1}(x), \beta_{T,2}(x)$ et $\beta_{T,3}(x)$. On définit la fonction bulle $0 \leq b_T \leq 1$ associée au triangle T par :

$$b_T = \begin{cases} 27\beta_{T,1}\beta_{T,2}\beta_{T,3} & \text{sur } T, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus T. \end{cases}$$

Soit E un côté entre T_1 et T_2 . On note $\beta_{T_i,1}$ et $\beta_{T_i,2}$ les fonctions de base associées aux extrémités du côté. La fonction bulle $0 \leq b_E \leq 1$ associée au côté E est définie par :

$$b_E = \begin{cases} 4\beta_{T_i,1}\beta_{T_i,2} & \text{sur } T_i, i = 1, 2, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (T_1 \cup T_2). \end{cases}$$

Cette définition peut s'étendre aux côtés du bord.

Proposition 3.3.2 (Inégalités inverses)

Soit r un entier positif. Pour tout polynôme v de $P_r(T)$

$$c\|v\|_T \leq \|vb_T^{1/2}\|_T \leq c'\|v\|_T$$

$$\|vb_T\|_{1,T} \leq ch_T^{-1}\|v\|_T$$

Pour tout polynôme v de $P_r(E)$

$$c\|v\|_E \leq \|vb_E^{1/2}\|_E \leq c'\|v\|_E$$

En définissant $L_{E,T}$ opérateur de relèvement des polynômes de $P_r(E)$ s'annulant sur ∂E en des polynômes sur T s'annulant sur $\partial T \setminus E$, on a pour tout triangle T possédant E comme côté :

$$\|L_{E,T}(v)b_E\|_T \leq ch_E^{1/2}\|v\|_E$$

$$\|L_{E,T}(v)b_E\|_{1,T} \leq ch_E^{1/2}h_T^{-1}\|v\|_E$$

Les constantes dépendent encore du paramètre de régularité σ mais sont plus faciles à évaluer.

Remarque 3.3.1

Les inégalités inverses se démontrent par passage à l'élément de référence, grâce à l'équivalence des normes sur un espace de dimension finie.

Théorème 3.3.3

Soient $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution du problème discret (3.3) et $\eta = \eta(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ l'estimateur correspondant. Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$. Pour tous les éléments T , les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\eta_{1T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \tag{3.24}$$

$$\eta_{2T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T. \tag{3.25}$$

Pour tous les éléments T possédant un côté sur Γ_C (i.e. $T \cap \Gamma_C = E$), les bornes locales inférieures sont obtenues :

$$\eta_{iT} \lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4, \tag{3.26}$$

$$\eta_{jT} \leq 2(1 + \mu) \left(\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E^{1/2} \|\mathbf{u}\|_E^{1/2} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda}\|_E^{1/2} \right), \quad j = 5, 7, \tag{3.27}$$

$$\eta_{lT} \leq (1 + \mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E, \quad l = 6, 8. \tag{3.28}$$

Démonstration : On précise que l'on ne suppose pas que la solution du problème continu est unique. Bien sûr, notre résultat reste valide lorsque $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est l'unique solution donnée par la Proposition 3.1.1. Notons également que la solution du problème discret n'est pas supposée unique.

Les estimations de η_{1T} et η_{2T} dans (3.24) et (3.25) sont standard ([231]). En effet,

$$\|\mathbf{f}_T\|_T = \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_T$$

Or, par l'élasticité linéaire, une inégalité inverse et l'inégalité de Korn :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_T^2 &\lesssim \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)) \\ &\quad - \int_T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_T)(b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)) \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E)(b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)) \\ &\lesssim (h_T^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T)\|b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)\|_T \end{aligned}$$

où b_T désigne la fonction bulle sur E (nulle sur Γ_N). Ainsi

$$\|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_T \lesssim h_T^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T$$

D'où

$$\begin{aligned} h_T\|\mathbf{f}_T\|_T &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + h_T\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T \\ &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T. \end{aligned}$$

D'où le résultat pour η_{1T} . Pour η_{2T} , on distingue le cas des côtés intérieurs et des côtés appartenant au bord de Neumann. De plus, on sait qu'en utilisant $w_E = b_E L_{E,T}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_E]_E$, pour $E \in E_T^{int}$:

$$\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_E]_E\|_E \lesssim (h_E^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_E} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_{T'})\|w_E\|_{\omega_E}$$

D'où en utilisant le résultat pour η_1 et une inégalité inverse

$$h_E^{1/2}\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_E]_E\|_E \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T$$

D'autre part, en utilisant $w_E = b_E L_{E,T}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - \mathbf{g}_E)$, pour tout $E \in E_T^N$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - \mathbf{g}_E\|_E &\lesssim (h_E^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_E} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{\omega_E} + \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E \\ &\quad + \sum_{T' \subset \omega_E} \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_{T'})\|w_E\|_{\omega_E} \end{aligned}$$

D'où

$$h_E^{1/2}\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - \mathbf{g}_E\|_E \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T$$

On estime à présent η_{3T} . En écrivant $\mathbf{w}_E = w_{En}\mathbf{n} + w_{Et}\mathbf{t}$ sur $E \in E_T^C$ et en choisissant $w_{En} = (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))b_E$ et $w_{Et} = 0$ pour l'élément T contenant E (ici on fait un petit

abus de notation afin de simplifier) et $\mathbf{w}_E = \mathbf{0}$ dans $\bar{\Omega} \setminus T$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 &\sim \int_E (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)) w_{En} \\
 &= b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{w}_E) + \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) \\
 &= b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{w}_E) - \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) + \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) \\
 &= b(\boldsymbol{\lambda}_h - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}_E) + L(\mathbf{w}_E) - \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) \\
 &\lesssim \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{w}_E\|_E + \|\mathbf{f}\|_T \|\mathbf{w}_E\|_T + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} \|\mathbf{w}_E\|_{1,T}.
 \end{aligned}$$

Une inégalité inverse et l'estimation (3.24) impliquent

$$\begin{aligned}
 h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + h_T \|\mathbf{f}\|_T \\
 &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T.
 \end{aligned}$$

Cette estimation donne la borne de η_{3T} dans (3.26). L'estimation pour η_{4T} dans (3.26) est obtenue comme précédemment en choisissant $w_{En} = 0$ et $w_{Et} = (\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) b_E$.

On considère maintenant η_{5T} . Si $E \in E_T^C$, soit $F \subset E$ la partie du côté où $\lambda_{hn} = \lambda_{hn+}$. Donc

$$\begin{aligned}
 \int_E -\lambda_{hn+} u_{hn} &= \int_F -\lambda_{hn} u_{hn} \\
 &= \int_F (\lambda_{hn} - \lambda_n)(u_n - u_{hn}) - \int_F \lambda_{hn} u_n - \int_F \lambda_n u_{hn} \\
 &= \int_F (\lambda_{hn} - \lambda_n)(u_n - u_{hn}) - \int_F (\lambda_{hn} - \lambda_n) u_n - \int_F \lambda_n (u_{hn} - u_n) \\
 &\leq \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E.
 \end{aligned}$$

La dernière estimation donne la borne de η_{5T} dans (3.27) en prenant la racine carrée.

L'estimation de η_{6T} dans (3.28) est évidente. Comme $\lambda_n \geq 0$, on a $0 \leq \lambda_{hn-} \leq |\lambda_n - \lambda_{hn}|$ sur Γ_C . Ainsi

$$\|\lambda_{hn-}\|_E \leq \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_E \leq \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E.$$

Puis on estime η_{7T} . Si $E \in E_T^C$, soit $F \subset E$ la partie du côté où $-(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+}) = (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_-$. Donc

$$\begin{aligned}
 &\int_E (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- \\
 &= \int_F (-|\lambda_{ht}| + \mu \lambda_{hn+}) |u_{ht}| + \int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- \\
 &= \int_F (-|\lambda_{ht}| + \mu \lambda_{hn}) |u_{ht}| + \int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- + \int_F \mu \lambda_{hn-} |u_{ht}|. \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Le premier terme de (3.29) est estimé comme suit en utilisant (4-5) :

$$- \int_F (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn}) |u_{ht}|$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_F (|\lambda_{ht}| - |\lambda_t| - \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n))(|u_{ht}| - |u_t|) \\
 &\quad - \int_F (|\lambda_{ht}| - |\lambda_t| - \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n))|u_t| - \int_F (|\lambda_t| - \mu\lambda_n)(|u_{ht}| - |u_t|) \\
 &\leq (1 + \mu) (\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E).
 \end{aligned}$$

Le second terme de (3.29) est borné en remarquant que $\lambda_t u_t \geq 0$ sur Γ_C . Donc

$$\begin{aligned}
 0 \leq (\lambda_{ht} u_{ht})_- &\leq |\lambda_t u_t - \lambda_{ht} u_{ht}| \\
 &= |\lambda_t(u_t - u_{ht}) + (\lambda_t - \lambda_{ht})(u_{ht} - u_t) + (\lambda_t - \lambda_{ht})u_t|.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- \leq \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E.$$

Le troisième terme de (3.29) mène (en utilisant l'estimation de η_{6T}) à :

$$\int_F \mu \lambda_{hn-} |u_{ht}| \leq \int_E \mu \lambda_{hn-} |u_{ht} - u_t| + \int_E \mu \lambda_{hn-} |u_t| \leq \mu \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\mathbf{u}\|_E).$$

Ainsi la borne de η_{7T} est prouvée. On termine par l'estimation de η_{8T} . On a

$$0 \leq (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+ = (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn} - \mu \lambda_{hn-})_+ \leq (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn})_+.$$

Comme $|\lambda_t| - \mu \lambda_n \leq 0$, on obtient

$$(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn})_+ \leq \|\lambda_{ht}| - |\lambda_t| - \mu \lambda_{hn} + \mu \lambda_n\| \leq |\lambda_{ht} - \lambda_t| + \mu |\lambda_{hn} - \lambda_n|$$

Ainsi

$$\|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_E \leq \|\lambda_t - \lambda_{ht}\|_E + \mu \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_E \leq (1 + \mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.3.2

Supposons que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ (donc $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))^2$), et que l'estimation d'erreur a priori optimale ait lieu (cette question est entièrement ouverte et la présente remarque est simplement destinée à illustrer notre résultat) et on définit :

$$\eta_i = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 8.$$

Alors on aurait $\eta_i \lesssim h, 1 \leq i \leq 4$; $\eta_j \lesssim h^{1/4}, j = 5, 7$; $\eta_l \lesssim h^{1/2}, l = 6, 8$. Donc $\eta \lesssim h^{1/4}$.

3.4 Une seconde discrétisation par éléments finis

Le but de cette section est de considérer une discrétisation par éléments finis des conditions de contact et de frottement qui permet d'obtenir un estimateur d'erreur plus simple. Plus précisément on utilise une formule de quadrature différente pour les conditions de contact frottant (voir [147] pour les premières idées).

3.4.1 Description

Pour tout $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in W_h \times W_h$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, on définit la forme bilinéaire $c(.,.)$ telle que

$$c(\boldsymbol{\nu}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Gamma_C} (I_h(\nu_{hn}v_{hn}) + I_h(\nu_{ht}v_{ht})) d\Gamma$$

où I_h est l'opérateur classique d'interpolation de Lagrange affine par morceaux aux nœuds de $\overline{\Gamma_C}$. Soit $K_{hn} = \{\nu_h \in W_h : \nu_h \geq 0\}$ le cône convexe fermé des fonctions positives de W_h . Pour $g \in K_{hn}$, on pose $K_{ht}(g) = \{\nu_h \in W_h : |\nu_h| \leq g\}$.

Ensuite, on considère le problème suivant :

trouver $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ et $(\tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{\lambda}_{hn}) = K_{hn} \times K_{ht}(\mu\tilde{\lambda}_{hn})$ satisfaisant :

$$\begin{cases} a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ c(\boldsymbol{\nu}_h - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu}_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{\lambda}_{hn}). \end{cases} \quad (3.30)$$

Les conditions de contact avec frottement discrètes incorporées dans l'inégalité de (3.30) sont les suivantes :

Proposition 3.4.1

Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ une solution de (3.30). Supposons $\dim(W_h) = p$ et soient ψ_{x_i} , $1 \leq i \leq p$ les fonctions de base de W_h sur Γ_C . Soient \tilde{U}_N et \tilde{U}_T les vecteurs de composantes les valeurs nodales de \tilde{u}_{hn} et \tilde{u}_{ht} respectivement et soient \tilde{L}_N et \tilde{L}_T les vecteurs de composantes respectives les valeurs nodales de $\tilde{\lambda}_{hn}$ et $\tilde{\lambda}_{ht}$. Alors les conditions discrètes de contact frottant de (3.30) sont les suivantes pour tout $1 \leq i \leq p$:

$$(\tilde{L}_N)_i \geq 0, \quad (\tilde{U}_N)_i \leq 0, \quad (\tilde{L}_N)_i(\tilde{U}_N)_i = 0, \quad (3.31)$$

$$|(\tilde{L}_T)_i| \leq \mu(\tilde{L}_N)_i, \quad (3.32)$$

$$|(\tilde{L}_T)_i| < \mu(\tilde{L}_N)_i \implies (\tilde{U}_T)_i = 0, \quad (3.33)$$

$$(\tilde{L}_T)_i(\tilde{U}_T)_i \geq 0. \quad (3.34)$$

Démonstration : De $\tilde{\lambda}_{hn} \in K_{hn}$, on a immédiatement la première condition de (3.31). La condition

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})\tilde{u}_{hn}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn}$$

est équivalente à :

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = 0. \quad (3.35)$$

En choisissant dans l'inégalité de (3.35), $\nu_{hn} = \psi_{x_i}$ et en écrivant

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\psi_{x_i}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = \tilde{u}_{hn}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma,$$

on aboutit à la seconde inégalité de (3.31).

L'égalité $\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = \sum_{i=1}^p \tilde{\lambda}_{hn}(x_i)\tilde{u}_{hn}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma = 0$ implique $(\tilde{L}_N)_i(\tilde{U}_N)_i = 0$, $1 \leq i \leq p$.

L'inégalité (3.32) provient directement de $\tilde{\lambda}_{ht} \in K_{ht}(\mu\tilde{\lambda}_{hn})$. Comme

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{ht} \in K_{ht}(\mu\tilde{\lambda}_{hn}) \quad (3.36)$$

on choisit ν_{ht} dans (3.36) comme suit : $\nu_{ht} = \mu\tilde{\lambda}_{hn}$ au nœud x_i et $\nu_{ht} = \tilde{\lambda}_{ht}$ aux $p-1$ autres nœuds. On obtient

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht})d\Gamma = (\mu\tilde{\lambda}_{hn}(x_i) - \tilde{\lambda}_{ht}(x_i))\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i}d\Gamma \leq 0. \quad (3.37)$$

Similairement, on prend $\nu_{ht} = -\mu\tilde{\lambda}_{hn}$ au nœud x_i et $\nu_{ht} = \tilde{\lambda}_{ht}$ aux $p-1$ autres nœuds. On obtient

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht})d\Gamma = (-\mu\tilde{\lambda}_{hn}(x_i) - \tilde{\lambda}_{ht}(x_i))\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i}d\Gamma \leq 0. \quad (3.38)$$

En regroupant (3.37) et (3.38), on déduit (3.33).

Il reste à prouver (3.34). On définit ν_{ht} dans (3.36) comme suit : $\nu_{ht} = \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{ht}$ au nœud x_i et $\nu_{ht} = \tilde{\lambda}_{ht}$ aux $p-1$ autres nœuds. Ainsi

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht}) d\Gamma = -\frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{ht}(x_i)\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma \leq 0.$$

D'où l'inégalité (3.34). ■

3.4.2 Etude de l'existence et de l'unicité de la solution

Proposition 3.4.2

Pour tout μ positif, le problème (3.30) admet au moins une solution.

Démonstration : Soit $\mu > 0$ donné. On introduit le problème de frottement $P(\tilde{g}_{hn})$ avec un seuil donné $\mu\tilde{g}_{hn}$ où $\tilde{g}_{hn} \in K_{hn}$.

Il consiste à trouver $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ et $(\tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn}) = K_{hn} \times K_{ht}(\mu\tilde{g}_{hn})$ satisfaisant :

$$P(\tilde{g}_{hn}) \begin{cases} a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ c(\boldsymbol{\nu}_h - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu}_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn}). \end{cases} \quad (3.39)$$

Le problème (3.39) est équivalent à trouver un point selle $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}) = (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn})$ vérifiant

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \boldsymbol{\nu}_h) \leq \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \forall \boldsymbol{\nu}_h \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn}),$$

où

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{hn}v_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{ht}v_{ht}) d\Gamma - L(\mathbf{v}_h).$$

En utilisant des arguments standards de problèmes de point selle comme dans [112] (Theorème 3.9, p.339), on déduit qu'il existe un tel point selle. La stricte convexité de $a(.,.)$ implique que le premier argument $\tilde{\mathbf{u}}_h$ est unique. En supposant que le second argument n'est pas unique, l'égalité (3.39) implique :

$$c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^1 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^2, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

La définition de W_h nous permet de choisir $\mathbf{v}_h = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^1 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^2$ sur Γ_C . D'après la définition de $c(.,.)$, on aboutit à la conclusion que $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^1 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^2 = \mathbf{0}$. Par conséquent, le second argument $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h$ est unique et (3.39) admet une unique solution. Le lemme suivant est une conséquence directe de la définition des problèmes (3.30) et (3.39).

Lemme 3.4.1

Les solutions du problème discret de contact avec frottement (3.30) sont les solutions de $P(\tilde{\lambda}_{hn})$ où $\tilde{\lambda}_{hn}$ est un point fixe de Φ_h . La fonction Φ_h est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_h : K_{hn} &\longrightarrow K_{hn} \\ \tilde{g}_{hn} &\longmapsto \tilde{\lambda}_{hn}, \end{aligned}$$

où $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ est la solution de $P(\tilde{g}_{hn})$.

Pour établir l'existence d'un point fixe de Φ_h , on utilise le théorème de Brouwer.

Etape 1. Tout d'abord, on prouve que l'application Φ_h est continue.

On pose $\tilde{\mathbf{V}}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : v_{ht} = 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$. De la définition de W_h , il est facile de vérifier que la définition de $\|\cdot\|_{-\frac{1}{2},h}$ donnée par :

$$\|\nu\|_{-\frac{1}{2},h} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h} \frac{\int_{\Gamma_C} I_h(\nu v_{hn}) d\Gamma}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}},$$

est une norme sur W_h . Soient $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht})$ et $(\overline{\mathbf{u}}_h, \overline{\lambda}_{hn}, \overline{\lambda}_{ht})$ les solutions de $P(\tilde{g}_{hn})$ et $P(\overline{g}_{hn})$ respectivement. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma &= L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \\ a(\overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\overline{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma &= L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h. \end{aligned}$$

En soustrayant les égalités précédentes et en utilisant la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, on a

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\tilde{\lambda}_{hn} - \overline{\lambda}_{hn}) v_{hn}) d\Gamma = a(\overline{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

Ainsi nous avons une première estimation

$$\|\tilde{\lambda}_{hn} - \overline{\lambda}_{hn}\|_{-\frac{1}{2},h} \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}. \tag{3.40}$$

D'autre part, (3.30) donne :

$$a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht} v_{ht}) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.41)$$

$$a(\overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\overline{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\overline{\lambda}_{ht} v_{ht}) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (3.42)$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h$ dans (3.41) et $\mathbf{v}_h = \overline{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h$ dans (3.42), on obtient par addition :

$$\begin{aligned} a(\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h) &= \int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})(\tilde{u}_{hn} - \overline{u}_{hn})) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})(\tilde{u}_{ht} - \overline{u}_{ht})) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Notons que l'inégalité dans (3.39) est équivalente aux deux conditions suivantes :

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})\tilde{u}_{hn}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn}, \quad (3.44)$$

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{ht} \in K_{ht}(\mu\tilde{g}_{hn}). \quad (3.45)$$

D'après la définition de K_{hn} , on peut choisir $\nu_{hn} = 0$ et $\nu_{hn} = 2\tilde{\lambda}_{hn}$ dans (3.44) ce qui aboutit à :

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn},$$

duquel on déduit que :

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})(\tilde{u}_{hn} - \overline{u}_{hn})) d\Gamma \leq 0.$$

Ainsi (3.43) devient :

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 \lesssim \int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})(\tilde{u}_{ht} - \overline{u}_{ht})) d\Gamma. \quad (3.46)$$

De la définition de $K_{ht}(\mu\tilde{g}_{hn})$, on a

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\overline{u}_{ht}) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} I_h(|\tilde{\lambda}_{ht}||\overline{u}_{ht}|) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} I_h(\mu\tilde{g}_{hn}|\overline{u}_{ht}|) d\Gamma.$$

Une expression similaire peut être obtenue en intégrant le terme $I_h(\overline{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht})$. De plus (3.45) donne

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma &\leq - \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \\ &= - \sum_{i=1}^p \nu_{ht}(x_i)\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma, \quad \forall \nu_{ht} \text{ tel que } |\nu_{ht}| \leq \mu\tilde{g}_{hn}. \end{aligned}$$

Si $\tilde{u}_{ht}(x_i) \geq 0$, on prend $\nu_{ht}(x_i) = \mu\tilde{g}_{hn}(x_i)$ et si $\tilde{u}_{ht}(x_i) \leq 0$, on choisit $\nu_{ht}(x_i) = -\mu\tilde{g}_{hn}(x_i)$. Ceci mène à la borne suivante :

$$-\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \leq -\mu \sum_{i=1}^p \tilde{g}_{hn}(x_i) |\tilde{u}_{ht}(x_i)| \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma = -\int_{\Gamma_C} I_h(\mu\tilde{g}_{hn} |\tilde{u}_{ht}|) d\Gamma.$$

Puis on obtient un résultat similaire en intégrant le terme $I_h(\overline{\lambda_{ht}\overline{u_{ht}}})$. Finalement, (3.46) devient

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \mu \int_{\Gamma_C} I_h((\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}})(|\overline{u_{ht}}| - |\tilde{u}_{ht}|)) d\Gamma \\ &\leq \mu \int_{\Gamma_C} I_h(|\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}}| |\overline{u_{ht}} - \tilde{u}_{ht}|) d\Gamma \\ &= \mu \sum_{i=1}^p |(\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}})(x_i)| |(\overline{u_{ht}} - \tilde{u}_{ht})(x_i)| \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma \\ &\lesssim \mu \left(\sum_{i=1}^p |(\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}})(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^p |(\overline{u_{ht}} - \tilde{u}_{ht})(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \mu C(h) \|\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}}\|_{-\frac{1}{2},h} \|\overline{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

où l'équivalence des normes en dimension finie a été utilisée ainsi que le théorème de trace. La combinaison de (3.47) et (3.40) implique qu'il existe une constante $C(h)$ telle que

$$\|\tilde{\lambda}_{hn} - \overline{\lambda_{hn}}\|_{-\frac{1}{2},h} \lesssim \mu C(h) \|\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}}\|_{-\frac{1}{2},h}. \quad (3.48)$$

Ainsi Φ_h est continue.

Etape 2. Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht})$ la solution de $P(\tilde{g}_{hn})$. En prenant $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h$ dans (3.39) on a

$$a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma = L(\tilde{\mathbf{u}}_h). \quad (3.49)$$

Sachant que :

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \geq 0,$$

on déduit de (3.49), de la \mathbf{V} -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et de la continuité de $L(\cdot)$:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 \lesssim a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) \leq L(\tilde{\mathbf{u}}_h) \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}.$$

On déduit alors que $\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}$ est borné. Par ailleurs

$$a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

mène à

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) d\Gamma \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

C'est pourquoi $\|\Phi_h(\tilde{g}_{hn})\|_{-\frac{1}{2},h} = \|\tilde{\lambda}_{hn}\|_{-\frac{1}{2},h} \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} + 1 \lesssim 1$, pour tout $\tilde{g}_{hn} \in M_{hn}$. La bornitude et la continuité de Φ_h prouvent qu'il existe au moins une solution au problème discret de contact avec frottement de Coulomb d'après le théorème de point fixe de Brouwer. ■

Proposition 3.4.3

La solution du problème (3.30) est unique lorsque $\mu C(h) < 1$.

Démonstration: De (3.48), on obtient un résultat d'unicité dépendant de la taille de maillage lorsque $\mu C(h) < 1$. Il y a donc unicité lorsque μ est suffisamment petit (où le terme "petit" dépend du paramètre de discrétisation).

Une étude plus détaillée montrerait que le critère d'unicité disparaît lorsque h tend vers 0 (i.e., $\lim_{h \rightarrow 0} C(h) = +\infty$). ■

3.5 Un second estimateur

3.5.1 Définition de l'estimateur par résidu associé à la seconde discrétisation

Comme pour la première discrétisation, le résidu est défini par $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_h) + \mathbf{f} = \mathbf{f}$ sur T . La donnée \mathbf{f} est approchée par $\mathbf{f}_T \in (\mathbb{P}_k(T))^2$ et la différence $\mathbf{f} - \mathbf{f}_T$ est traitée comme une oscillation de données. De même \mathbf{g} est approchée par une quantité plus simple notée \mathbf{g}_E pour tout $E \in E_h^N$.

Définition 3.5.1

L'estimateur global par résidu $\tilde{\eta}$ et les contributions locales $\tilde{\eta}_T$ sont définis par

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \left(\sum_{T \in T_h} \tilde{\eta}_T^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_T = \left(\sum_{i=1}^6 \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2}, \\ \tilde{\eta}_{1T} &= h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \\ \tilde{\eta}_{2T} &= h_T^{1/2} \left(\sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \tilde{\eta}_{3T} &= h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \tilde{\eta}_{4T} &= h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \tilde{\eta}_{5T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \right)^{1/2}, \\ \tilde{\eta}_{6T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que $J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$ est le saut de contrainte de $\tilde{\mathbf{u}}_h$ dans la direction normale défini par (3.6). Comme dans la section précédente, les termes local et global d'oscillation des données ζ_T et ζ sont définis par (3.7).

Remarque 3.5.1

D'après les définitions précédentes, on a $\tilde{\eta}_{1T} = \eta_{1T}$. On remarque l'absence de termes semblables à η_6 et η_8 pour $\tilde{\eta}$ car $\tilde{\lambda}_{hn} \geq 0$ et $|\tilde{\lambda}_{ht}| \leq \mu \tilde{\lambda}_{hn}$.

3.5.2 Borne supérieure

Comme pour l'énoncé du Théorème 2.4.3, on a besoin de supposer que la solution du problème continu satisfait le critère d'unicité de [203] afin d'obtenir la borne supérieure de l'erreur de discrétisation.

Théorème 3.5.1

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ la solution du problème (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu \|\xi\|_M$ est suffisamment petit. Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ une solution du problème discret (3.30). Alors

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \tilde{\eta} + \zeta.$$

Démonstration : On adopte les notations suivantes pour le terme de l'erreur dans le déplacement : $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h$. Comme dans le Théorème 2.4.3, on obtient pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &+ \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &+ \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_{hn} - u_n) + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_{ht} - u_t) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{hn}(v_{hn} - \tilde{u}_{hn})) - \tilde{\lambda}_{hn}(v_{hn} - \tilde{u}_{hn})) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{ht}(v_{ht} - \tilde{u}_{ht})) - \tilde{\lambda}_{ht}(v_{ht} - \tilde{u}_{ht})) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{hn} - \lambda_n)(u_n - \tilde{u}_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}) \\ &= \tilde{I} + \tilde{II} + \tilde{III} + \tilde{IV} + \tilde{V} + \tilde{VI} + \tilde{VII} + \tilde{VIII} \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Comme pour le Théorème 2.4.3, on prend \mathbf{v}_h de la forme (3.9). Ainsi

$$|\tilde{I}| + |\tilde{II}| + |\tilde{III}| + |\tilde{IV}| + |\tilde{V}| \lesssim (\tilde{\eta} + \zeta) \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}. \quad (3.51)$$

Maintenant on estime les deux termes de (3.50) avec l'opérateur d'interpolation en utilisant une estimation d'erreur d'intégration numérique : la formule du trapèze :

$$\begin{aligned} |\tilde{VI}| &= \left| \int_{\Gamma_C} \left(I_h(\tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n) - \tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n \right) \right| \\ &= \left| \sum_{E \in E_h^C} \int_E \left(I_h(\tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n) - \tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n \right) \right| \\ &\lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n)''| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{hn}((\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n)'| \\
 & \leq \sum_{E \in E_h^C} h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|((\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n)'\|_E \\
 & \lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{3/2} \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,T} \\
 & \lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{3/2} \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \\
 & = \sum_{E \in E_h^C} h_E^{3/2} \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \\
 & \lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \\
 & \lesssim \tilde{\eta} \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}, \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

où T est l'élément contenant E . Ci-dessus, on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la stabilité H^1 de π_h , prouvée au Lemme 3.1 de [65] (ou [231]) et l'inégalité de trace sur un élément ([231]). D'une manière similaire, on obtient :

$$\left| V\tilde{II} \right| \lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \leq \tilde{\eta} \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}. \tag{3.53}$$

Remarquons que $\tilde{u}_{hn} \leq 0$ et $\tilde{\lambda}_{hn} \geq 0$ sur Γ_C , on a $\int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_{hn} u_n \leq 0$, $\int_{\Gamma_C} \lambda_n u_n = 0$ et $\int_{\Gamma_C} \lambda_n \tilde{u}_{hn} \leq 0$. Par conséquent, on obtient :

$$V\tilde{III} \leq \int_{\Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \leq \tilde{\eta}^2. \tag{3.54}$$

Il reste à estimer un terme dans (3.50) : celui provenant de l'approximation du frottement. Comme dans (3.18) et (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}) \\
 & = \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi)(u_t - \tilde{u}_{ht}) + \int_{\Gamma_C} \mu (\tilde{\lambda}_{hn} - \lambda_n) \xi (u_t - \tilde{u}_{ht}) \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

où $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$, $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, et

$$\left| \int_{\Gamma_C} \mu (\tilde{\lambda}_{hn} - \lambda_n) \xi (u_t - \tilde{u}_{ht}) \right| \lesssim (1 + \alpha) \mu \|\xi\|_M \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu \|\xi\|_M}{2\alpha} (\tilde{\eta}^2 + \zeta^2) \tag{3.56}$$

pour tout α positif. Le premier terme de (3.55) est écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi)(u_t - \tilde{u}_{ht}) & = \int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_{ht} u_t - \int_{\Gamma_C} \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi u_t + \int_{\Gamma_C} \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi \tilde{u}_{ht} - \int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht} \\
 & = \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} u_t - \mu \tilde{\lambda}_{hn} |u_t|) + \int_{\Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \underbrace{\int_{\Gamma_C} (|\tilde{\lambda}_{ht}| - \mu\tilde{\lambda}_{hn}) |u_t|}_{\leq 0} + \int_{\Gamma_C} (-\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht} + \mu\tilde{\lambda}_{hn}|\tilde{u}_{ht}|) \\
&\leq \tilde{\eta}^2.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Par (3.56) et (3.57), on obtient pour tout α positif :

$$\int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}) \lesssim (1 + \alpha)\mu\|\xi\|_M\|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu\|\xi\|_M + 2\alpha}{2\alpha} (\tilde{\eta}^2 + \zeta^2). \tag{3.58}$$

En regroupant les estimations (3.51), (3.52), (3.53), (3.54) et (3.58) dans (3.50) et en utilisant l'inégalité de Young, on aboutit à la conclusion que si $\mu\|\xi\|_M$ est suffisamment petit (voir aussi (3.22)) :

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \lesssim \tilde{\eta} + \zeta. \tag{3.59}$$

Maintenant on cherche la borne supérieure de l'erreur de discrétisation $\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h$ correspondant aux multiplicateurs. Soient $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Des équations d'équilibre (3.1) et (3.30) on déduit :

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}) &= b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h) + b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) \\
&= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + a(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\
&\quad + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) \\
&= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}) - a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\
&\quad + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h).
\end{aligned}$$

Une intégration par parties sur chaque élément T mène à :

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}) &\lesssim \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}) - \sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\
&\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_n - v_{hn}) - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_t - v_{ht}) \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) - \tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{ht}v_{ht}) - \tilde{\lambda}_{ht}v_{ht}) \\
&\quad + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h).
\end{aligned}$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \pi_h \mathbf{v}$ comme pour la preuve du Théorème 2.4.3, on obtient

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} + \tilde{\eta} + \zeta. \tag{3.60}$$

Les deux estimations (3.59) et (3.60) achèvent la démonstration. ■

3.5.3 Borne inférieure

Théorème 3.5.2

Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ une solution du problème discret (3.30) et soit $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ l'estimateur correspondant. Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$. Pour tout élément T , les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{1T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \\ \tilde{\eta}_{2T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T.\end{aligned}$$

Pour tout élément T ayant une côté dans Γ_C (i.e., $T \cap \Gamma_C = E$), les estimations locales inférieures suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{iT} &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4, \\ \tilde{\eta}_{5T} &\lesssim \tilde{\eta}_{3T}^{1/2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}^{1/2},\end{aligned}\tag{3.61}$$

$$\tilde{\eta}_{6T} \lesssim (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T})^{1/2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}^{1/2}.\tag{3.62}$$

Démonstration : Comme pour le Théorème 3.3.3, on a besoin d'estimer $\tilde{\eta}_{3T}$, $\tilde{\eta}_{4T}$, $\tilde{\eta}_{5T}$ et $\tilde{\eta}_{6T}$. Les estimations de $\tilde{\eta}_{1T}$ et $\tilde{\eta}_{2T}$ sont standard. De plus, les bornes de $\tilde{\eta}_{3T}$, $\tilde{\eta}_{4T}$ sont obtenues comme dans le Théorème 3.3.3. Ainsi on considère $\tilde{\eta}_{5T}$. Si $E \in E_T^C$, on a d'après la formule d'intégration du trapèze, une inégalité inverse et l'inégalité de trace :

$$\begin{aligned}\int_E -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} &= \int_E (I_h(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) - \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) \\ &\lesssim h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn})''| \\ &\lesssim h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{hn}| \\ &\leq h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &= h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &\lesssim h_E \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &\lesssim h_E^{1/2} \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &\lesssim \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}.\end{aligned}$$

La dernière estimation implique (3.61) en prenant la racine carrée.

Enfinement on considère $\tilde{\eta}_{6T}$. D'après la Proposition 3.4.1 on a pour tout nœud x_i de $\overline{\Gamma_C}$: $(\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})(x_i) = ((\mu \tilde{\lambda}_{hn} - |\tilde{\lambda}_{ht}|) |\tilde{u}_{ht}|)(x_i) = 0$. Soit $E \in E_T^C$; il est facile de voir que \tilde{u}_{ht} est soit d'un signe constant sur E (i.e., négatif ou positif) soit $\tilde{u}_{ht}(x_1) \tilde{u}_{ht}(x_2) < 0$ (où x_1 et x_2 sont les extrémités de E) et \tilde{u}_{ht} admet un zéro unique noté m dans E .

On commence par considérer le second cas : on note $E_1 = (x_1, m)$ et $E_2 = (m, x_2)$ et on suppose sans perte de généralité que $\tilde{u}_{ht} > 0$ sur E_1 et $\tilde{u}_{ht} < 0$ sur E_2 . On désigne par J_h l'opérateur d'interpolation de Lagrange affine par morceaux sur E aux points x_1, m, x_2 . Comme $(\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})(m) = 0$ et en utilisant les mêmes arguments que pour $\tilde{\eta}_{5T}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_E (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \\
&= \int_{E_1} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) + \int_{E_2} (-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \\
&= \int_{E_1} \left((\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) - J_h(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right) \\
&\quad + \int_{E_2} \left((-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) - J_h(-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right) \\
&\lesssim h_{E_1}^3 |(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_{E_1} + h_{E_2}^3 |(-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_{E_2} \\
&\leq h_E^3 |(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht})''|_E + h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_E \\
&\lesssim h_E^3 \mu |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{ht}| + h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_{ht}| \\
&\leq h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht}\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
&= h_E^2 \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E + h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
&\lesssim h_E \mu \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E + h_E \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
&\lesssim h_E^{1/2} (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
&\lesssim (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}.
\end{aligned}$$

Ainsi découle (3.62) en prenant la racine carrée. Le premier cas (\tilde{u}_{ht} est soit négative ou positive sur E) se montre directement comme précédemment. \blacksquare

Remarque 3.5.2

En supposant que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ (ainsi $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))^2$), et que les estimations optimales a priori ont lieu (comme pour la première approximation, cette question est entièrement ouverte et le seul but de cette remarque est d'essayer d'illustrer notre résultat) on définit :

$$\tilde{\eta}_i = \left(\sum_{T \in T_h} \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Ainsi on peut vérifier que $\tilde{\eta}_i \lesssim h, 1 \leq i \leq 4; \eta_j \lesssim h^{1/2}, j = 5, 6$. Donc $\tilde{\eta} \lesssim h^{1/2}$.

Remarque 3.5.3

En supposant que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ (ainsi $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))^2$) et $1 < q < \infty$, $\tilde{\eta}_{5T}$ peut être bornée de la manière suivante ([128], Remarque 5.7) :

$$\begin{aligned}
& \int_E -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} = \int_E (I_h(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) - \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) \\
&\lesssim h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn})''| \lesssim h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{hn}| = h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{hn}\|_{L^1(E)} \\
&\leq h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_{L^1(E)} + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_n\|_{L^1(E)} \\
&\lesssim h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_E + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{u}'_n\|_{L^q(\Gamma_C)} \\
&\lesssim h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_E + h_E^2 \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\
&\lesssim h_E \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))\|_E \|(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_E + h_E^2 h_E^{\frac{q-2}{2q}} \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}
\end{aligned}$$

$$\lesssim h_E^{1/2} \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_{hn}\|_{1,E} + h_E \sqrt{-\ln(h_E)} \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}$$

Pour $\tilde{\eta}_{6T}$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_E (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \\ & \leq h_E^3 |(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht})''|_E + h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_E \\ & \lesssim h_E^3 \mu |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{ht}| + h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_{ht}| \\ & = h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{ht}\|_{L^1(E)} + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_{ht}\|_{L^1(E)} \\ & \leq h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn} (\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_{L^1(E)} + h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_t\|_{L^1(E)} \\ & \quad + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht} (\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_{L^1(E)} + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_t\|_{L^1(E)} \\ & \lesssim h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \mu \|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{u}'_t\|_{L^q(\Gamma_C)} \\ & \quad + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht}\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht}\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{u}'_t\|_{L^q(\Gamma_C)} \\ & \lesssim h_E^2 \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \sqrt{q} \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\ & \quad + h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\ & \lesssim h_E \mu \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 h_E^{\frac{q-2}{2q}} \sqrt{q} \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \\ & \quad + h_E \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 h_E^{\frac{q-2}{2q}} \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\ & \lesssim h_E^{1/2} (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t\|_{1,E} + h_E \sqrt{-\ln(h_E)} (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

On a choisi $q = -\ln(h_E)$ (par minimisation d'une fonctionnelle) où h_E est supposé suffisamment petit et on a utilisé le fait que pour tout réel $p \in [1, \infty[$:

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Gamma_C)} \leq C \sqrt{p} \|\mathbf{v}\|_{H^{1/2}(\Gamma_C)}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^{1/2}(\Gamma_C)$$

On a alors $\tilde{\eta}_i \lesssim h, 1 \leq i \leq 4$; $\eta_j \lesssim -\ln(h)^{1/4} h^{3/4}, j = 5, 6$. Donc on a l'estimation $\tilde{\eta} \lesssim (-\ln(h))^{1/4} h^{3/4}$.

3.6 Résultats numériques

Dans cette section, on s'occupe de l'implémentation numérique sous CAST3M des estimateurs par résidu issus des deux discrétisations par éléments finis. L'information donnée par les estimateurs d'erreur est couplée avec une procédure d'adaptation de maillage décrite au Chapitre 1. Dans ce qui suit, on suppose que les corps sont des matériaux homogènes isotropes et suivent la loi de Hooke (1) donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))I + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

où I représente la matrice identité, tr est l'opérateur trace, E et ν désignent le module de Young et le coefficient de Poisson, respectivement avec $E > 0$ et $0 \leq \nu < 1/2$.

Notre but principal est de discuter les résultats théoriques en calculant les différentes contributions des estimateurs η et $\tilde{\eta}$ et leurs ordres de convergence lorsque h tend vers zéro. En particulier on s'intéresse aux termes suivants (où on adopte les notations des remarques 3.3.2 et 3.5.2) :

$$\eta_i = \left(\sum_{T \in T_h} \eta_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 8, \quad \tilde{\eta}_i = \left(\sum_{T \in T_h} \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Dans ce type de problème, la gestion du contact occupe une proportion importante du temps de calcul. On note également les contributions au contact avec frottement :

$$\eta_C = \left(\sum_{i=3}^8 \eta_i^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_C = \left(\sum_{i=3}^6 \tilde{\eta}_i^2 \right)^{1/2}.$$

Dans la suite, on désigne par N_C , le nombre d'éléments du maillage sur Γ_C . Dans le cas de maillages uniformes, ce paramètre mesure la taille du maillage. De plus, on suppose que le coefficient de frottement μ et la taille du maillage h sont tels que les deux problèmes discrets (3.3) et (3.30) admettent des solutions uniques $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$. En prenant $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h$ dans (3.3) et $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans (3.30) puis par différence, on vérifie que $\mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h$ et que par conséquent $c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) = b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ ce qui implique que $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$.

3.6.1 Un premier exemple avec glissement et séparation

On considère le domaine $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ avec les caractéristiques matériaux $E = 10^6$ et $\nu = 0.3$. Le corps est fixé sur $\Gamma_D = \{0\} \times (0, 1)$,

```
rig1 = bloq depl l3;
tab1 . 'BLOCAGES_MECANIQUES' = rig1 et rig1s ;
```

il est initialement en contact avec $\Gamma_C = \{1\} \times (0, 1)$

```
rig2 = impo 'MAIL' l1 (inve l1s);
maf1 = impf rig2;
modf1 = modl maf1 frottement coulomb;
matf1 = matr modf1 mu mul;
tab1 . 'CARACTERISTIQUES' = (mat1 et mat1s et matf1);
tab1 . 'MODELE' = (mod1 et mod1s et modf1);
tab1 . 'CONTACT' = rig2;
tab1 . 'FROTTEMENT' = maf1;
```

et aucune force n'est appliquée sur $\Gamma_N = (0, 1) \times (\{0\} \cup \{1\})$. Le corps Ω est soumis à la force verticale uniforme $\mathbf{f} = (0, f_2)$ avec $f_2 = -76518$ et le coefficient de frottement μ vaut 0.2. On utilise des maillages en croisillons (i.e. le corps est partagé en carrés identiques, eux mêmes partagés en quatre triangles semblables). La Figure 3.2 représente les configurations initiale et déformée avec $N_C = 32$.

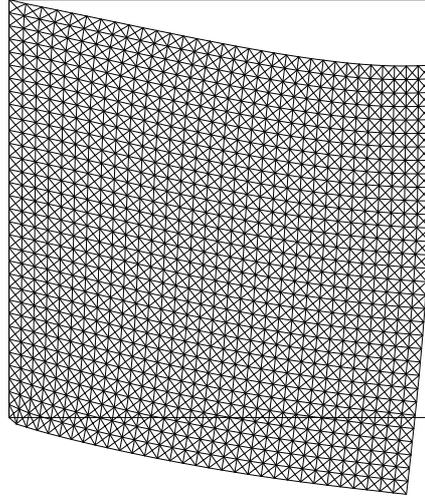


FIG. 3.2 – Premier exemple. Configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.2$ et $N_C = 32$.

On observe que tous les nœuds de Γ_C ont un déplacement tangentiel négatif et que Γ_C est divisé en deux parties : une partie supérieure où le corps reste en contact avec l'axe $x = 1$ (nœuds glissants) et une partie inférieure de Γ_C où il se sépare de l'axe à partir du point $(1, 0.65)$ (Figure 3.3).

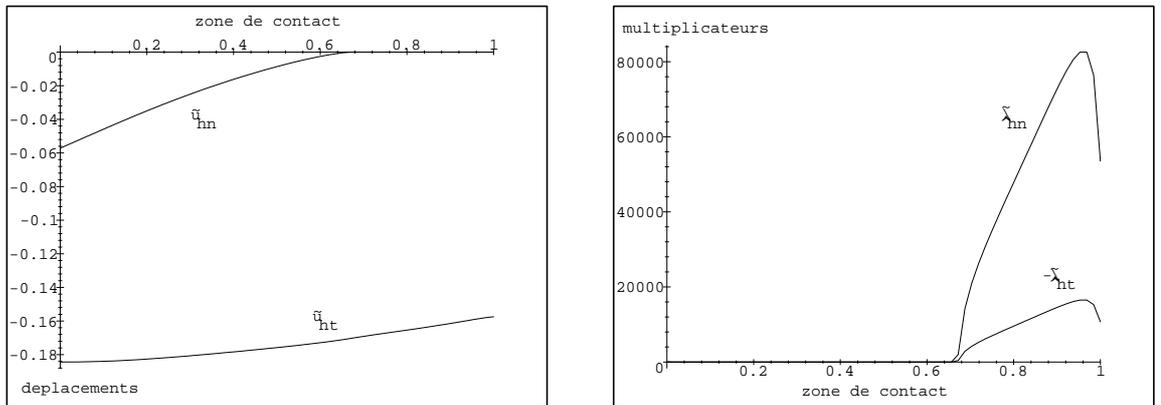


FIG. 3.3 – Premier exemple. A gauche : déplacements normal et tangentiel ($\tilde{u}_{hn}, \tilde{u}_{ht}$) sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangentiel ($\tilde{\lambda}_{hn}, -\tilde{\lambda}_{ht}$) sur Γ_C .

Dans le Tableau 3.1, on reporte les taux de convergence en faisant la moyenne des taux entre $N_C = 2$ et $N_C = 64$. Notons que le taux de convergence des termes $\eta_1 = \tilde{\eta}_1 = h(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}_T\|_T^2)^{1/2} \sim h$ vaut 1.

Erreurs	$N_C = 1$	$N_C = 2$	$N_C = 4$	$N_C = 8$	$N_C = 16$	$N_C = 32$	$N_C = 64$	Taux de convergence
$\eta_2 = \tilde{\eta}_2$	71943	89950	72476	48412	29533	17687	12504	0.57
η_3	32980	21134	6826.6	2366.7	960.54	565.63	322.29	1.21
$\tilde{\eta}_3$	11092	8681.4	4165.7	1868.4	778.11	391.41	223.87	1.06
η_4	30028	15319	6299.3	2594.8	1012.5	457.45	244.01	1.19
$\tilde{\eta}_4$	29379	14325	6079.3	2542.3	997.58	448.78	239.20	1.18
η_5	13.674	8.1415	3.0994	1.5381	0.50073	0.21377	0.036429	1.56
$\tilde{\eta}_5$	14.503	3.9747	3.1219	0.77988	0.42660	0.13956	0.039897	1.33
η_6	12680	11242	1599.8	1945.9	416.70	385.61	79.730	1.43
$\tilde{\eta}_6$	0	0	0	0	0	0	0	-
η_7	12.121	13.619	4.8373	4.6372	1.8200	1.4717	0.54418	0.93
η_8	2535.9	2248.4	319.95	389.18	83.339	77.122	15.946	1.43

TAB. 3.1 – Contributions de η et $\tilde{\eta}$ pour le premier exemple.

Pour programmer la plupart des estimateurs, on a utilisé la formule d'intégration :

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right).$$

Voici l'exemple sur η_4 :

```
SI ( NBC EGA coa4 ) ;
pin1 = arei poin 1 ;
pin2 = arei poin 2 ;
SI ( coor 2 pin1 EGA 0 ) ;
SI ( coor 2 pin2 EGA 0 ) ;

SIG1 = REDU SIG ( ELEM 1 ELC2 ) ;
SXY = (EXTR SIG1 SMXY 1 1 1);
lamG = EXTR prlytan scal (POIN 1 PARE) ;
lamD = EXTR prlytan scal (POIN 2 PARE) ;
sautg = sxy+lamG ;
sautd = sxy+lamD ;
valg = sautg**2;
valm = ((sautg + sautd)**2)/4.;
vald = sautd**2;

ea4 = diam * (msur/6.) * (valg + vald + (4.*valm));
a4 = a4+ea4 ;

FINSI ;
FINSI ;
FINSI ;
```

Des calculs on observe que tous les termes η_i et $\tilde{\eta}_i$ convergent vers zéro lorsque h tend vers zéro et que $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$ est évidemment le terme convergeant le plus lentement vers zéro. La partie principale de l'erreur dans η et $\tilde{\eta}$ se localise près des points singuliers $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Les termes d'erreur pour lesquels l'analyse optimale de l'erreur n'est pas disponible

(i.e. $\eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8, \tilde{\eta}_5, \tilde{\eta}_6$) convergent plus rapidement que les autres excepté η_7 . Notons que $\tilde{\eta}_6 = 0$ car $u_{ht} < 0$ et $\mu\tilde{\lambda}_{hn} = -\tilde{\lambda}_{ht}$ sur Γ_C . L'erreur $\tilde{\eta}_5$ est localisée sur l'élément proche du point de séparation alors que $\eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8$ sont situées sur Γ_C , sur la zone de séparation.

On note par $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ la norme en énergie de l'erreur de discrétisation qui est équivalente à la norme $(H^1(\Omega))^2$ de l'erreur. On reporte, dans le Tableau 3.2, les valeurs de $\eta, \tilde{\eta}, (a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ et les indices d'efficacité $\xi = \frac{\eta}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$ et $\tilde{\xi} = \frac{\tilde{\eta}}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$. Comme on ne connaît pas la solution exacte \mathbf{u} du problème, on prend alors pour solution de référence la solution approchée correspondant au maillage le plus fin (ici $N_C = 64$).

	η	$\tilde{\eta}$	$(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$	ξ	$\tilde{\xi}$
$N_C = 2$	94360	91496	38492	2.45	2.38
$N_C = 4$	73087	72850	25384	2.88	2.87
$N_C = 8$	48580	48515	16283	2.98	2.98
$N_C = 16$	29569	29560	10627	2.78	2.78
$N_C = 32$	17706	17697	6795.3	2.60	2.60

TAB. 3.2 – Estimateurs, erreur exacte et indices d'efficacité.

On voit les taux de convergence de $\eta, \tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ sur la Figure 3.4 (échelle log-log). Les courbes de η et $\tilde{\eta}$ sont confondues.

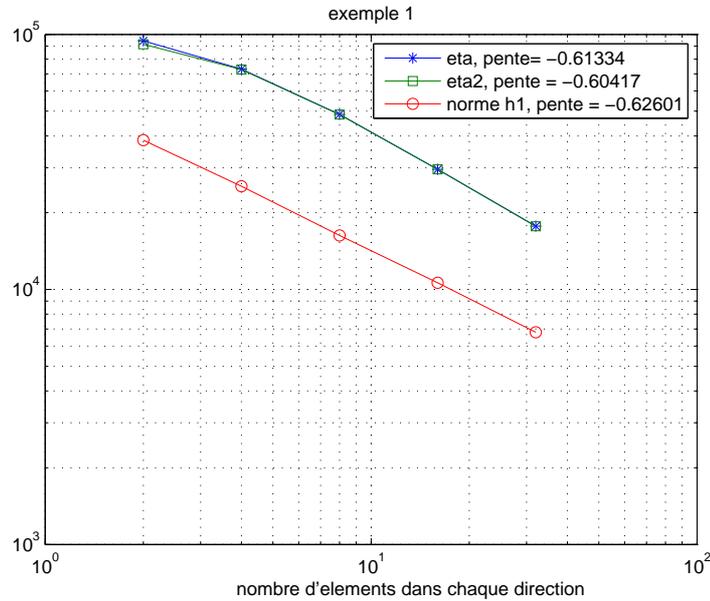


FIG. 3.4 – Premier exemple. Taux de convergence de $\eta, \tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$.

On couple l'estimateur d'erreur avec la procédure adaptative décrite dans la section 1.1.2 :

```

*** construction de la carte des diametres***
NELEM = NBEL s1 ;
diamE = MANU CHAM MOD2 POSI GRAVITE 'CERR' 1 1 0. ;
* boucle sur les elements

REPETER ALGO5 NELEM ;

  IELE = &ALGO5 ;
  ELT = ELEM IELE s1 ;
  SUEL = CONT ELT ;

  ARE1 = ELEM 1 SUEL ;
  ARE2 = ELEM 2 SUEL ;
  ARE3 = ELEM 3 SUEL ;
  Md1 = MESU ARE1 ;
  Md2 = MESU ARE2 ;
  Md3 = MESU ARE3 ;
  toto = prog md1 md2 md3 ; *liste de md1 md2 md3
  diam = maxi toto ;

  m01 = MANU CHAM MOD2 POSI GRAVITE 'CERR' IELE 1 diam ;
  diamE = diamE + m01 ;
  fin algo5 ;
  TITRE 'Carte des diametres ' ;
  trac diamE mod2 ;

*** construction du maillage optimise ***
hetoileE = cerg * somepsE ;
hetoileE = (hetoileE)**0.5 ;
hetoileE = (hetoileE)**(-1) ;
hetoileE = hetoileE * diamE ;
hetoileE = hetoileE * (eta * coeffreduction) ;
hetoileE = chan chpo mod2 hetoileE ;
TITRE 'Carte de taille ' ;
trac hetoileE s1 ;

*****
NNNEL1 = nbel l1 ;
  ELT = ELEM 1 l1 ;
  pi = elt poin initial ;
  pf = elt poin final ;
  hi = redu hetoileE pi ;
  hi = maxi hi ;
  hf = redu hetoileE pf ;
  hf = maxi hf ;
  r11 = D pi pf 'DINI' hi 'DFIN' hf ;

REPETER ALGO6 (NNNEL1-1) ;
*
  IELE = &ALGO6+1 ;
  ELT = ELEM IELE l1 ;
  pi = elt poin initial ;
  pf = elt poin final ;
  hi = redu hetoileE pi ;
  hi = maxi hi ;
  hf = redu hetoileE pf ;
  hf = maxi hf ;
  dd = D pi pf 'DINI' hi 'DFIN' hf ; *droite avec densite associee aux points initial et final
  r11 = r11 et dd ;
FIN ALGO6 ;

l1 = r11 ;
**memes boucles sur les autres bords

***trace du maillage actualise***
nbbre = NBNO S1 ;
NBDOF = 2*nbbre ;
list nbdof ;
cont1 = l1 et 12 et 13 et 14 ;
s1 = surf hetoileE cont1 plan ;

```

On obtient une famille de maillages adaptés qui sont raffinés près des singularités $(0, 0)$ et $(0, 1)$ (voir Figure 3.5). On observe aussi que la différence entre les valeurs de η et $\tilde{\eta}$ n'est pas significative lorsqu'on raffine et on note que les contributions du contact η_C (respectivement $\tilde{\eta}_C$) sont dominées par η_3, η_4 (respectivement $\tilde{\eta}_3, \tilde{\eta}_4$), les autres termes étant petits (cette observation est aussi valable pour les exemples 2 et 3). Notons N le

nombre d'inconnues, on observe que les estimateurs η et $\tilde{\eta}$, calculés sur les maillages adaptés générés, se comporte comme $N^{-0.5}$ et que les contributions du contact se comportent approximativement comme $N^{-0.8}$. La Figure 3.5 montre $\tilde{\eta}$ et $\tilde{\eta}_C$ comme fonctions de N .

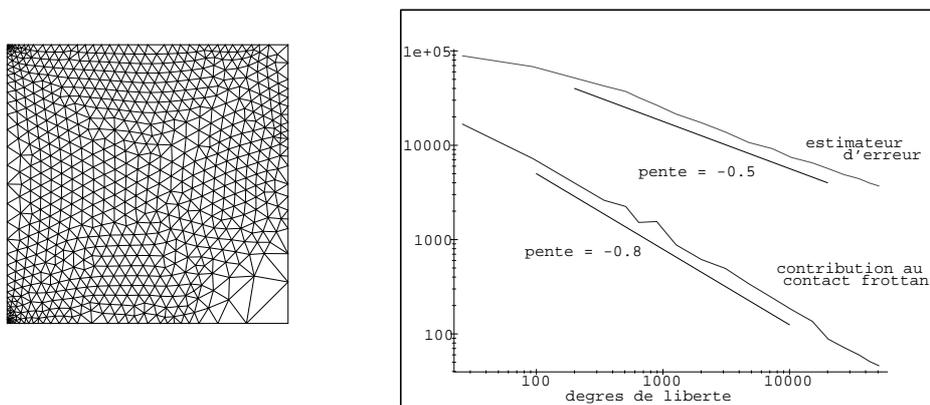


FIG. 3.5 – Premier exemple. A gauche : maillage adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de la contribution du contact frottant $\tilde{\eta}_C$ avec le raffinement adaptatif.

3.6.2 Un second exemple avec adhérence, glissement et séparation

On étudie maintenant un exemple où aucun terme η_i et $\tilde{\eta}_i$ ne s'annule ($i \geq 2$), où les trois différentes zones caractérisant le frottement (adhérence, glissement et séparation) sont présentes et des singularités de coin ne sont pas présentes contrairement à l'exemple précédent. On considère la géométrie $\hat{\Omega} = (0, 2) \times (0, 1)$ et on adopte des conditions de symétrie (i.e. $u_n = 0, \sigma_t(\mathbf{u}) = 0$) sur $\Gamma_S = \{1\} \times (0, 1)$. On effectue les calculs sur le carré $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. On pose $\Gamma_C = (0, 1) \times \{0\}$ et $\Gamma_N = ((0, 1) \times \{1\}) \cup (\{0\} \times (0, 1))$. Un coefficient de Poisson de $\nu = 0.2$, un module de Young de $E = 10^4$ et un coefficient de frottement $\mu = 0.5$ sont choisis. Une densité de forces surfaciques \mathbf{F} d'amplitude $1N.m^{-2}$ orientée vers l'intérieur du corps Ω est appliqué sur $\{0\} \times (0.5, 1)$ et $(0.5, 1) \times \{1\}$. Une telle configuration correspond au cas **K**-elliptique (voir [112], Théorème 6.3). La Figure 3.6 représente les configurations initiale et après déformation du corps. La déformation est amplifiée par un facteur 2000. Le bord Γ_C présente également une partie en contact et une séparation à partir du point de transition $(0.26, 0)$. De plus, la partie en contact est divisée en une partie glissante (à gauche) et une partie adhérente (à droite) avec un point de séparation proche de $(0.47, 0)$ (voir Figure 3.7).

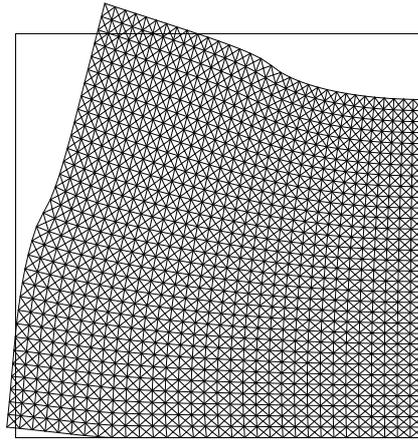


FIG. 3.6 – Second exemple. Configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.5$ et $N_C = 32$.

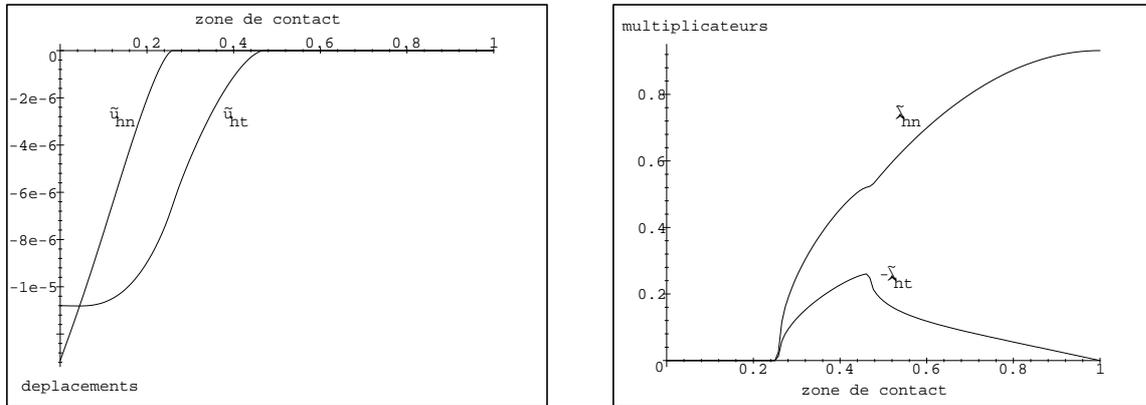


FIG. 3.7 – Second exemple. A gauche : déplacements normal et tangentiel ($\tilde{u}_{hn}, \tilde{u}_{ht}$) sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangentiel ($\tilde{\lambda}_{hn}, -\tilde{\lambda}_{ht}$) sur Γ_C .

Il est facile de vérifier que les conditions de symétrie sur Γ_C mènent à des termes d'erreur supplémentaires semblables à ceux de η_4 et $\tilde{\eta}_4$ et on ajoute ces termes à $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$:

```
SI ( NBC EGA coa2 ) ;
pin1 = arei poin 1 ;
pin2 = arei poin 2 ;
SI (coor 1 pin1 EGA 1) ;
SI (coor 1 pin2 EGA 1) ;

SIG1 = REDU SIG ( ELEM 1 ELC2 ) ;
SXY = (EXTR SIG1 SMXY 1 1 1) ;

VSX = 0. SXY ;
VSY = SXY 0. ;
VSGN = ( VSX PSCA NOR1 ) ( VSY PSCA NOR1 ) ;

ea2 = ((norm VSGN)**2) * MSUR * diam ;
a2 = a2 + ea2 ;
FINSI ;
FINSI ;
FINSI ;
```

De plus on a $\eta_1 = \tilde{\eta}_1 = 0$. Les résultats concernant η et $\tilde{\eta}$ sont reportés dans le Tableau 3.3 où les taux de convergence sont moyennés entre $N_C = 2$ et $N_C = 128$.

Erreurs $\times 10^5$	$N_C = 2$	$N_C = 4$	$N_C = 8$	$N_C = 16$	$N_C = 32$	$N_C = 64$	$N_C = 128$	Taux de convergence
$\eta_2 = \tilde{\eta}_2$	87774	53444	32022	18577	10449	5740.85	3109.85	0.80
η_3	16925	5164.72	2111.32	857.613	359.365	113.333	43.3032	1.44
$\tilde{\eta}_3$	10176	4448.27	1665.89	642.493	256.814	93.1164	35.8664	1.36
η_4	17166	7553.27	3860.54	1818.65	848.092	388.834	184.881	1.09
$\tilde{\eta}_4$	9237.09	5292.69	2825.89	1376.62	631.021	278.175	127.115	1.03
η_5	39.1890	6.22418	3.65335	3.48613	2.18880	0.873704	0.113440	1.41
$\tilde{\eta}_5$	52.2094	24.4419	9.21759	2.94782	0.220389	0.544605	0.197534	1.34
η_6	8624.25	1500.79	228.240	505.892	647.810	226.079	8.07287	1.68
$\tilde{\eta}_6$	34.2719	16.9743	6.48435	1.95881	0.607762	0.212090	0.0769817	1.47
η_7	33.4342	19.1663	9.98284	7.51870	6.30249	3.09423	0.494072	1.01
η_8	4157.91	780.210	509.431	501.907	323.932	113.182	9.04330	1.47

TAB. 3.3 – Contributions de η et $\tilde{\eta}$ pour le second exemple.

On observe que les erreurs η et $\tilde{\eta}$ sont principalement localisées près des singularités $(0, 0.5)$ et $(0.5, 1)$ et aussi près du point de transition entre le contact et la séparation. L'erreur près du point de transition entre adhérence et glissement est plus petite. Comme dans l'exemple précédent, $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$ est le terme principal de l'estimateur avec le plus petit taux de convergence (mais meilleur que précédemment) et les termes d'erreur pour lesquels aucun résultat de convergence optimale n'est disponible (i.e. $\eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8, \tilde{\eta}_5, \tilde{\eta}_6$) convergent avec un meilleur taux que le taux théorique. La particularité dans cet exemple est que beaucoup de termes (en particulier η_6) convergent vers 0 avec un taux de convergence non uniforme.

Comme pour le premier exemple, les valeurs de η , $\tilde{\eta}$, $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ et les indices d'efficacité $\xi = \frac{\eta}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$ et $\tilde{\xi} = \frac{\tilde{\eta}}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$ figurent dans le Tableau 3.4. Comme on ne connaît pas la solution exacte \mathbf{u} du problème, on prend alors pour solution de référence la solution approchée correspondant au maillage le plus fin (ici $N_C = 128$).

	η	$\tilde{\eta}$	$(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$	ξ	$\tilde{\xi}$
$N_C = 2$	0.91526	0.88843	0.26068	3.51	3.41
$N_C = 4$	0.54248	0.53889	0.15376	3.53	3.50
$N_C = 8$	0.32328	0.32190	0.088040	3.67	3.66
$N_C = 16$	0.18699	0.18639	0.04863	3.84	3.83
$N_C = 32$	0.10514	0.10471	0.02576	4.08	4.06
$N_C = 64$	0.05760	0.05748	0.0122	4.72	4.71

TAB. 3.4 – Estimateurs, erreur exacte et indices d'efficacité.

On voit les taux de convergence de η , $\tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ sur la Figure 3.8 (échelle log-log) où les courbes pour les deux estimateurs sont encore confondues.

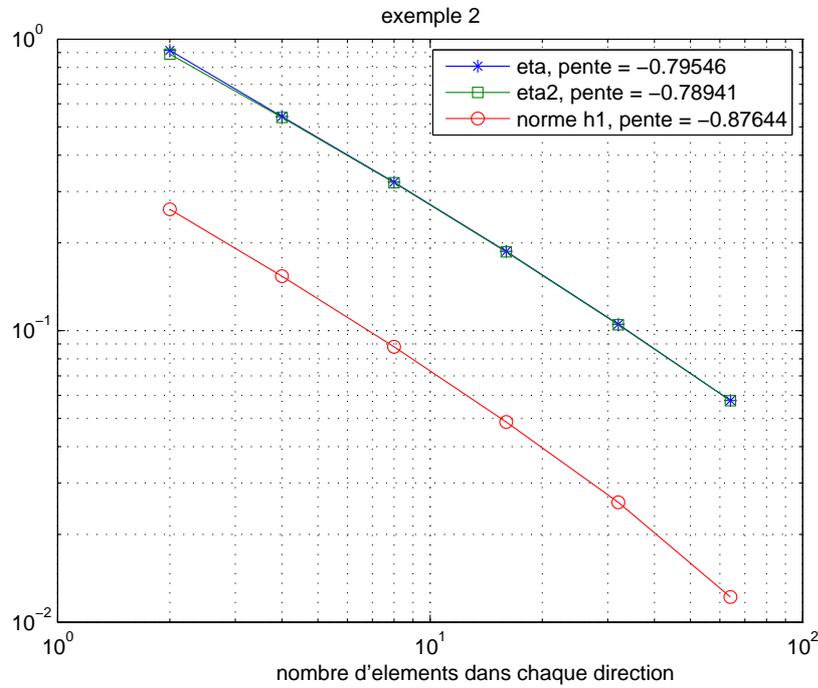


FIG. 3.8 – Second exemple. Taux de convergence de η , $\tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$.

On applique la procédure d'adaptation décrite au Chapitre 1 et on reporte le maillage initial et deux maillages raffinés dans la Figure 3.9. Comme précédemment, en utilisant le raffinement, l'erreur décroît avec un taux de $N^{-0.5}$ et elle décroît un peu plus rapidement qu'avec le raffinement uniforme (proche de $N^{-0.45}$, voir Figure 3.10). La Figure 3.10 montre également la convergence de la contribution du contact $\tilde{\eta}_C$ et on observe que $\tilde{\eta}_C/\tilde{\eta} \sim N^{-0.2}$ qui s'annule lorsque $N \rightarrow \infty$. Les résultats sont similaires lorsqu'on considère η au lieu de $\tilde{\eta}$.

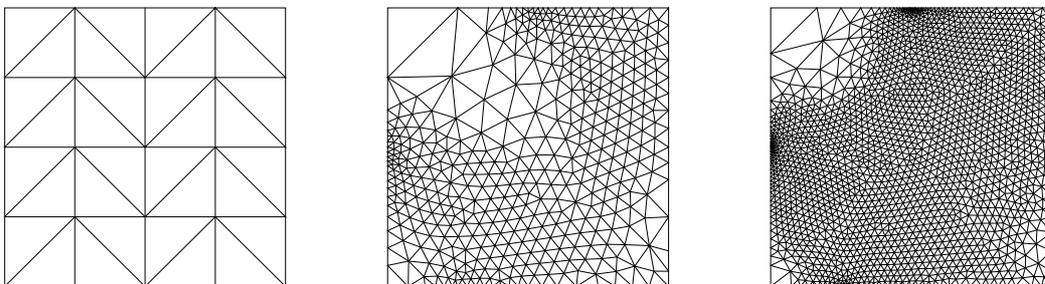


FIG. 3.9 – Second exemple. Maillages initial (à gauche) et raffinés

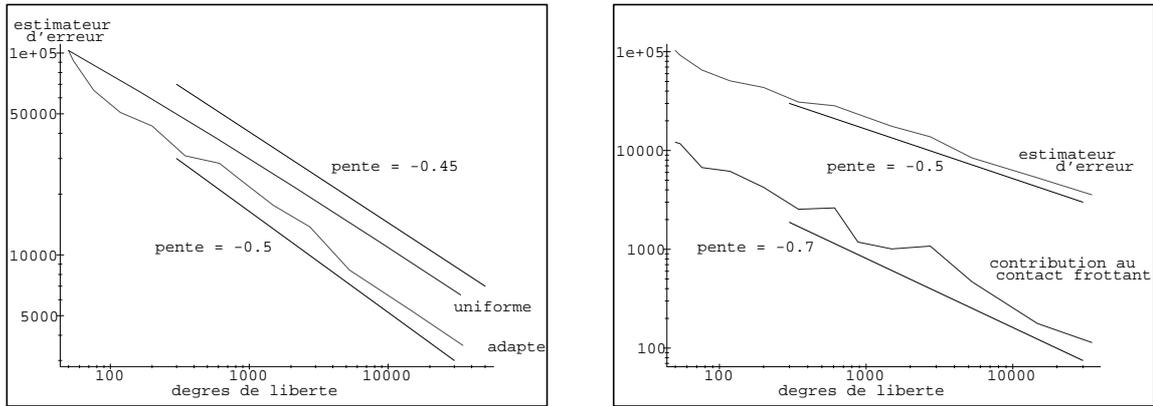


FIG. 3.10 – Second exemple. A gauche : Convergence de l’estimateur $\tilde{\eta}$ avec des raffinements uniforme et adapté. A droite : Convergence de l’estimateur $\tilde{\eta}$ et de sa contribution $\tilde{\eta}_C$ au contact frottant avec un raffinement adapté.

3.6.3 Troisième exemple : un cas avec peu de frottement ; comparaison avec un exemple de la littérature

Finalement on considère un exemple de la littérature (voir [234]) qui est quelque peu plus régulier que les précédents. En effet on considère la géométrie $\tilde{\Omega} = (0, 1) \times (0, 1)$ avec des conditions de symétrie sur $\Gamma_S = \{0.5\} \times (0, 1)$ et on calcule les solutions sur $\Omega = (0, 0.5) \times (0, 1)$. On pose $\Gamma_C = (0, 0.5) \times \{0\}$, $\Gamma_N = ((0, 0.5) \times \{1\}) \cup (\{0\} \times (0, 1))$, $\nu = 0.3$ et $E = 10^4$. Une densité de forces surfaciques dirigées vers l’intérieur $\mathbf{F}(x, y) = -x^2(1-x)^2$ (respectivement $\mathbf{F}(x, y) = 2y^2(1-y)^2$) est appliquée sur $(0, 0.5) \times \{1\}$ (respectivement $\{0\} \times (0, 1)$) :

```
x1 = coor 1 l3 ;
y1 = coor 2 l4 ;
xx1 = x1 * x1 * (1-x1) * (1-x1) ;
yy1 = y1 * y1 * (1-y1) * (1-y1) * 2 ;
ef1 = press mass mod1 xx1 ;
ef2 = press mass mod1 yy1 ;
ef = ef1 et ef2 ;
```

On choisit un petit coefficient de frottement $\mu = 0.1$ sachant que l’exemple numérique de [234] est sans frottement. La Figure 3.11 représente les configurations initiale et déformée du corps (avec $N_C = 64$). Le bord Γ_C présente un point de transition entre le contact et la séparation proche de $(0.08, 0)$. A cause du petit frottement, on observe que le dernier élément du contact près de $(0.5, 0)$ est collé à la fondation. La Figure 3.12 montre les déplacements et les forces sur Γ_C .

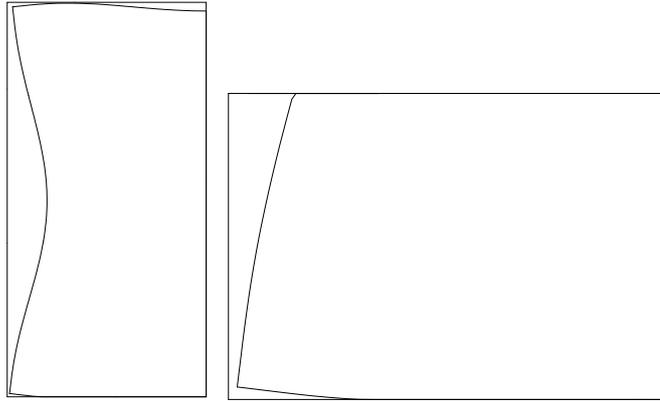


FIG. 3.11 – Troisième exemple. A gauche : configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.1$. A droite : Zoom près de la zone de séparation.

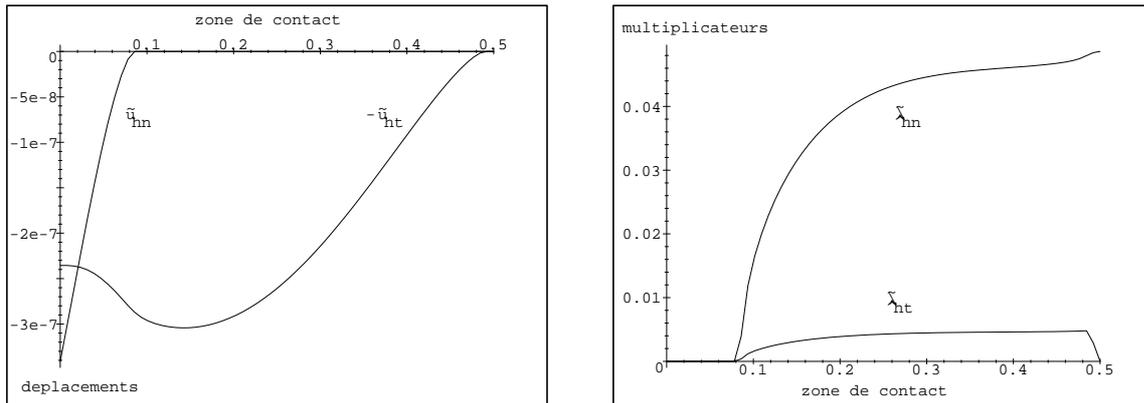


FIG. 3.12 – Troisième exemple. A gauche : déplacements normal et tangiel ($\tilde{u}_{hn}, -\tilde{u}_{ht}$) sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangiel ($\tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}$) sur Γ_C .

La procédure adaptative est résumée dans les Figures 3.13 et 3.14. Le maillage initial et les deux maillages raffinés apparaissent dans la Figure 3.13. Les maillages raffinés sont plus uniformes que dans les exemples précédents et contiennent plus de petits éléments près du bord (mis à part où il y a symétrie). Notons que le taux d'erreur est optimal (comme $N^{-0.5}$) pour les maillages uniformes et que la contribution au contact frottant dans l'estimateur se comporte approximativement comme $N^{-0.85}$, voir Figure 3.14. Ces résultats obtenus pour un petit coefficient de frottement présentent beaucoup de similitudes par rapport à ceux obtenus dans le cas sans frottement (voir Figures 3.15 et 3.16).

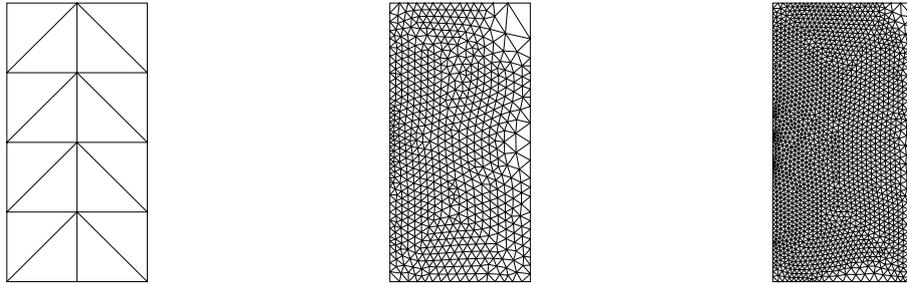
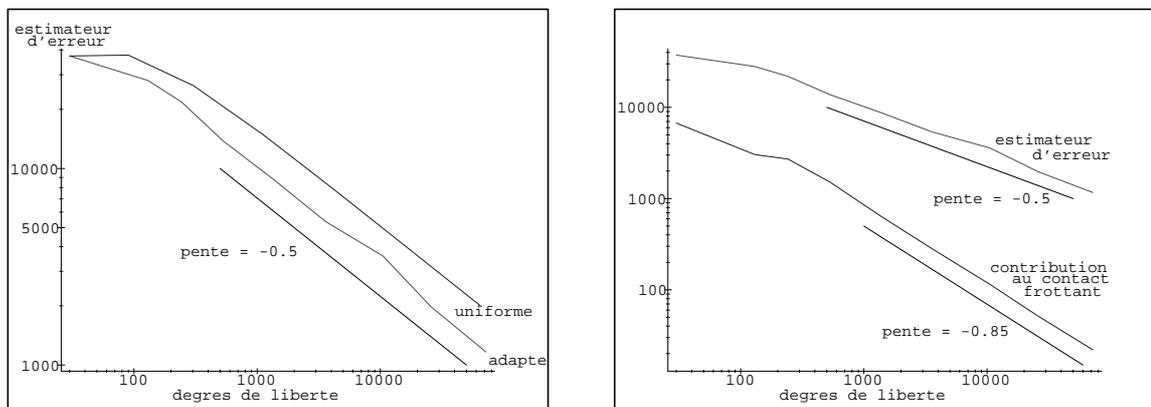


FIG. 3.13 – Troisième exemple. Maillages initial (à gauche) et raffinés

FIG. 3.14 – Troisième exemple. A gauche : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ avec un raffinement uniforme et adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de sa contribution au contact $\tilde{\eta}_C$ avec un raffinement adapté.

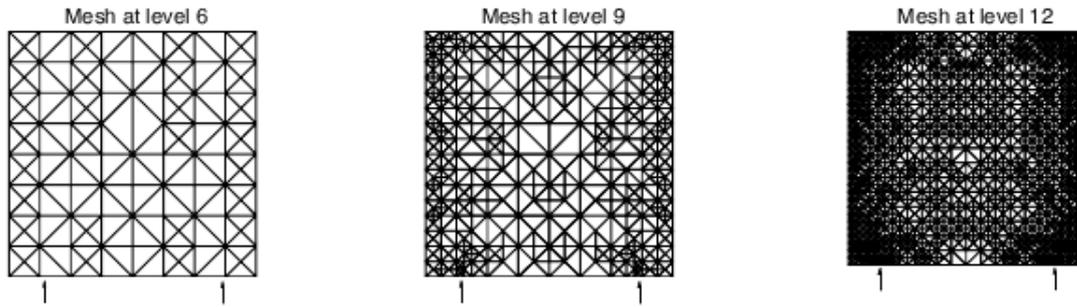


FIG. 3.15 – Maillages raffinés au niveau 6, 9 et 12 [234].

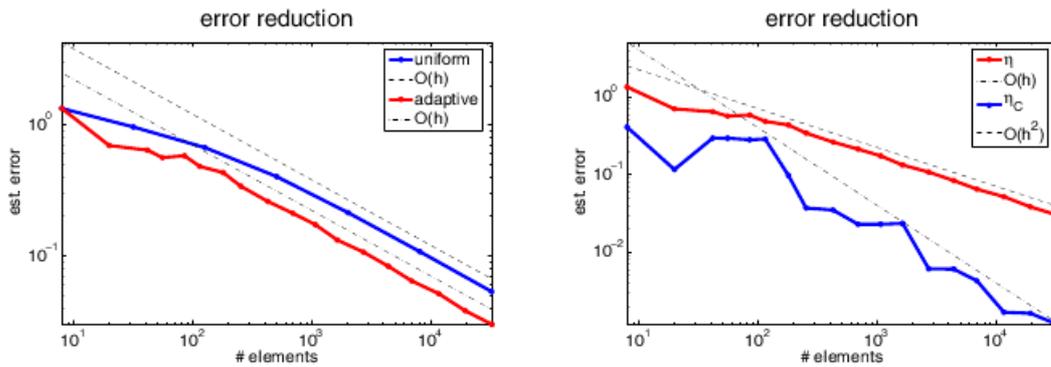


FIG. 3.16 – A gauche : Convergence de l'estimateur [234] avec un raffinement uniforme et adapté. A droite : Convergence de l'estimateur [234] et de sa contribution au contact avec un raffinement adapté.

3.7 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre on propose, analyse et implémente deux estimateurs d'erreur par résidu η et $\tilde{\eta}$ correspondant à deux discrétisations par éléments finis du problème statique de frottement de Coulomb en utilisant le résultat d'unicité partiel de [203]. On obtient des bornes supérieure et inférieure pour l'erreur de discrétisation. Des définitions et des estimations théoriques, on observe que $\tilde{\eta}$ est plus simple à définir et mène à de meilleures bornes. On tire des expériences numériques que tous les termes de η et $\tilde{\eta}$ pour lesquels aucun résultat théorique optimal n'a été prouvé se comportent mieux que théoriquement. On a ainsi élargi le résultat obtenu par Hild et Nicaise [128] pour le problème de Signorini au problème de contact avec frottement de Coulomb.

Une des perspectives possibles est d'obtenir un résultat d'unicité pour le problème quasi-statique en adaptant les techniques de [203] et de traiter l'analyse a posteriori (les résultats d'existence ont été obtenus dans [11, 206] pour les problèmes quasi-statiques de même type que le problème statique traité dans ce chapitre).

Pour l'instant, désirant étudier le contact pour la méthode XFEM, on se propose de formuler et d'analyser une méthode par éléments finis mixte stabilisée appliquée au problème de contact frottant. Elle nous permettra notamment de contourner la condition inf-sup de Babuška-Brezzi.

Chapitre 4

Estimateurs a posteriori pour une méthode par éléments finis mixte stabilisée appliquée au problème de contact frottant

ON s'intéresse dans ce chapitre à une méthode par éléments finis mixte ne nécessitant pas de condition inf-sup de Babuška-Brezzi : il s'agit d'une méthode de type Barbosa et Hughes que l'on généralise au problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. On justifie l'existence et l'unicité du problème discret et on met en exergue un estimateur a posteriori.

Le début de ce chapitre a abouti à un article paru dans *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* intitulé **A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of frictional contact problems in elastostatics** [168].

Sommaire

4.1	Discrétisation par une méthode stabilisée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange	147
4.1.1	Problème discret	147
4.1.2	Etude de l'existence et de l'unicité de la solution	148
4.2	Estimateurs d'erreur a posteriori	156
4.2.1	Définition de l'estimateur par résidu	156
4.2.2	Borne supérieure	158
4.2.3	Borne inférieure	162
4.3	Conclusion	163

POUR le modèle de contact unilatéral sans frottement, on dispose de nombreuses méthodes par éléments finis faisant intervenir des multiplicateurs de Lagrange [29, 33, 70], des éléments finis quadratiques [28, 123] ou un Lagrangien augmenté [64]. En fait, toutes les méthodes citées ci-dessus ont besoin d'une condition inf-sup (voir [14, 53, 54]) et seul un choix judicieusement approprié des espaces éléments finis fournira des approximations convergentes. Les deux conditions clé qui assurent le succès de la convergence sont la coercivité vérifiée par la forme bilinéaire associée à l'opérateur d'élasticité et la condition inf-sup ou de Babuška-Brezzi dont l'influence a été étudiée dans [14]. Cette seconde condition joue un rôle important dans les problèmes de minimisation sous contraintes qui peuvent être reformulés comme des problèmes de point-selle par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La condition inf-sup s'exprime de la manière suivante :

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn})} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{-1/2, \Gamma_C} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \Omega}} \geq \beta$$

où \mathbf{V}_h et $\mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn})$ sont les espaces des champs de déplacement et de contrainte normale discrétisés et β est une constante strictement positive indépendante de la taille du maillage.

Dans ce chapitre, on considère une méthode par éléments finis mixte (dont les formulations font intervenir des multiplicateurs de Lagrange en tant qu'inconnues) qui ne requiert pas de condition inf-sup. De telles méthodes qui assurent la stabilité des multiplicateurs en ajoutant des termes supplémentaires dans la formulation faible ont été introduites par Hughes et Brooks en 1987. Hughes, Franca et Balestra [136] les ont développées pour le problème de Stokes et elles ont été analysées dans [21, 22]. Le gros avantage de ces méthodes comparées aux classiques dans [14] est que les espaces d'éléments finis pour les variables primales et duales peuvent être choisis indépendamment. Dans les méthodes de pénalisation, la pénétration entre deux bords se touchant est introduite et la force normale de contact est reliée à la pénétration par un paramètre de pénalisation ([6, 195]). De plus, contrairement aux techniques de pénalisation, pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la stabilité est améliorée sans compromettre la consistance de la méthode. Plus tard, la connection entre la méthode stabilisée de Barbosa et Hughes [21, 22] et celle antérieure de Nitsche [188] a été réalisée dans [215]. Les études de [21, 22] ont été généralisées à un système d'inégalités variationnelles dans [23] (pour les problèmes de type Signorini entre autres). Cette méthode a aussi été étendue aux problèmes d'interface sur les maillages non conformes dans [26, 110] et plus récemment pour le problème de contact bilatéral (voir [116]).

Mon but dans ce chapitre est d'étendre le travail d'Hild et Renard dans [130] au modèle plus général de contact avec frottement de Coulomb. Dans une première section, on propose une extension du concept "Barbosa-Hughes-Nitsche's" au problème de contact avec frottement et on étudie les propriétés d'existence et d'unicité du problème discret. Ensuite on s'intéresse aux estimateurs d'erreur a posteriori.

4.1 Discrétisation par une méthode stabilisée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange

Le problème continu ainsi que les résultats d'existence et d'unicité sont les mêmes que dans le chapitre précédent (voir section 3.1)

4.1.1 Problème discret

Soit $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ une famille d'espaces de dimension finie indexés par $h > 0$ et soit une famille régulière T_h (voir [50, 54, 66]) de triangulations du domaine Ω . Pour $T \in T_h$, soit h_T le diamètre de T et $h = \max_{T \in T_h} h_T$. On choisit des fonctions standard continues et affines par morceaux, i.e. :

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v}_h \in (C(\overline{\Omega}))^2 : \mathbf{v}_h|_T \in (P_1(T))^2, \forall T \in T_h, \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \}.$$

Puis, on pose x_0, \dots, x_N des points distincts appartenant à $\overline{\Gamma_C}$ (notons que l'on ne suppose pas que ces nœuds coïncident avec des nœuds de la triangulation T_h). Ces nœuds forment une famille monodimensionnelle de maillages de Γ_C notée \mathcal{T}_H et on définit $H = \max_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$.

Afin d'exprimer les contraintes du contact en utilisant des multiplicateurs de Lagrange sur la zone de contact, on introduit l'espace W_H de dimension finie approximant W'_n et W'_t :

$$W_H = \{ \nu_H \in L^2(\Gamma_C) : \nu_H|_{]x_i, x_{i+1}[} \in P_0(]x_i, x_{i+1}[), \forall 0 \leq i \leq N-1 \}.$$

Le choix pour l'espace W_H nous permet de définir les cônes convexes fermés suivants :

$$M_{Hn} = \{ \nu_H \in W_H : \nu_H \geq 0 \}$$

et, pour $g \in M_{Hn}$:

$$M_{Ht}(g) = \{ \nu_H \in W_H : |\nu_H| \leq g \}.$$

Le problème discret consiste à trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\boldsymbol{\lambda}_H = (\lambda_{Hn}, \lambda_{Ht}) \in \mathbf{M}_H(\mu\lambda_{Hn}) = M_{Hn} \times M_{Ht}(\mu\lambda_{Hn})$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h)d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h)d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \\ b(\boldsymbol{\nu}_H - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Ht} - \lambda_{Ht})(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma \leq 0, \quad \forall (\nu_{Hn}, \nu_{Ht}) \in \mathbf{M}_H(\mu\lambda_{Hn}), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où γ est constante sur chaque élément T et $\gamma = \gamma_0 h_T$ où $\gamma_0 > 0$ est indépendante de h .

Remarque 4.1.1

La particularité de (4.1) est la présence des termes de stabilisation incluant γ .

La méthode est consistante au sens que λ_{Hn} et $-\sigma_n(\mathbf{u}_h)$ (resp. λ_{Ht} et $-\sigma_t(\mathbf{u}_h)$) sont des approximations de $\lambda_n = -\sigma_n(\mathbf{u})$ (resp. $\lambda_t = -\sigma_t(\mathbf{u})$) et le terme de stabilisation additionnel converge vers la solution du problème continu. Bien sûr le terme de stabilisation modifie la solution discrète. En effet, cela renforce la correspondance entre λ_{Hn} et $-\sigma_n(\mathbf{u}_h)$ (resp. λ_{Ht} et $-\sigma_t(\mathbf{u}_h)$).

4.1.2 Etude de l'existence et de l'unicité de la solution

Remarque 4.1.2

Lorsque $\gamma=0$, en utilisant un théorème de point fixe, la référence [69] établit l'existence d'une solution et l'unicité lorsque $\mu \leq C(h)$ ($C(h) \sim h^{\frac{1}{2}}$).

Proposition 4.1.1

Pour tout coefficient μ positif et pour γ_0 suffisamment petit, le problème (4.1) admet au moins une solution.

Démonstration : Soit $\mu > 0$ fixé. On introduit le problème de frottement $P(g_{Hn})$ avec un seuil fixé μg_{Hn} où $g_{Hn} \in M_{Hn}$. Cela consiste à trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\boldsymbol{\lambda}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}) = M_{Hn} \times M_{Ht}(\mu g_{Hn})$ satisfaisant :

$$P(g_{Hn}) \begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h)d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h)d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\boldsymbol{\nu}_H - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Ht} - \lambda_{Ht})(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}). \end{cases} \quad (4.2)$$

Le problème (4.2) est équivalent à trouver un point-selle $(\mathbf{u}_h, \lambda_{Hn}, \lambda_{Ht}) = (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn})$ vérifiant

$$\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_H) \leq \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H) \leq \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_H), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \forall \boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\nu}_H) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\nu}_H, \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

Remarque 4.1.3

L'avantage de cette formulation est que la fonction \mathcal{L}_γ est régulière par rapport aux deux variables.

Soit E un côté (d'un triangle) sur Γ_C et soit $T \in T_h$ un élément contenant E . Sans perte de généralité, on peut supposer que Γ_C est un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses et on écrit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Par conséquent, on déduit pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(\mathbf{v}_h)\|_E &= \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_E = \frac{|E|^{1/2}}{|T|^{1/2}} \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_T \\ &\sim h_E^{-1/2} \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_T \sim h_T^{-1/2} \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_T \end{aligned}$$

Soit h_{Γ_C} la fonction égale à $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ et indépendante de γ_0 . Par sommation sur les côtés $E \subset \Gamma_C$, on obtient

$$\|h_{\Gamma_C}^{1/2} \sigma_n(\mathbf{v}_h)\|_{\Gamma_C}^2 \leq C \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_{\Omega}^2 \leq C \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2. \quad (4.3)$$

On obtient la même inégalité avec $\sigma_t(\mathbf{v}_h)$. Ainsi par l'inégalité de Korn et (4.3), lorsque γ_0 est suffisamment petit, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C} \gamma(\sigma_n(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma(\sigma_t(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma \geq C \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2. \quad (4.4)$$

En utilisant des arguments classiques sur les points-selles d'Haslinger, Hlaváček et Nečas ([112], p.338), on déduit qu'il existe un tel point-selle. En effet, l'existence d'une solution au problème (4.2) lorsque γ_0 est suffisamment petit provient du fait que :

- \mathbf{V}_h et $\mathbf{M}_H(\mu g_{Hn})$ sont deux ensembles convexes fermés non vides,
- $\mathcal{L}_\gamma(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{V}_h \times W_H^2$,
- $\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, \cdot)$ (resp. $\mathcal{L}_\gamma(\cdot, \boldsymbol{\nu}_H)$) est strictement concave (resp. strictement convexe) pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ (resp. pour tout $\boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn})$),
- en prenant $\boldsymbol{\nu}_H = 0$ et par (4.4) avec γ_0 suffisamment petit, on obtient

$$\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, 0) \geq \frac{C}{2} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 - \|L\|_V \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}$$

qui tend vers l'infini lorsque $\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \rightarrow \infty$. Ainsi

$$\lim_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, 0) = +\infty$$

- en choisissant $\mathbf{v}_h = 0$ on aboutit à

$$\begin{aligned} & \lim_{\boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}), \|\gamma^{1/2} \boldsymbol{\nu}_H\|_{0,\Gamma_C} \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\gamma(0, \boldsymbol{\nu}_H) \\ &= -1/2 \int_{\Gamma_C} \gamma \nu_{Hn}^2 d\Gamma - 1/2 \int_{\Gamma_C} \gamma \nu_{Ht}^2 d\Gamma = -\infty. \end{aligned}$$

La stricte convexité de $a(\cdot, \cdot)$ entraîne que le premier argument \mathbf{u}_h est unique.

De plus, on suppose que le second argument n'est pas unique. L'inégalité de (4.2) nous permet d'écrire en choisissant $\nu_{Hn} = \lambda_{Hn}^2$ et $\nu_{Ht} = \lambda_{Ht}^2$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn}^2 - \lambda_{Hn}^1) u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\lambda_{Hn}^2 - \lambda_{Hn}^1) (-\lambda_{Hn}^1 - \sigma_n(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Ht}^2 - \lambda_{Ht}^1) u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\lambda_{Ht}^2 - \lambda_{Ht}^1) (-\lambda_{Ht}^1 - \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \leq 0 \end{aligned}$$

et en choisissant $\nu_{Hn} = \lambda_{Hn}^1$ et $\nu_{Ht} = \lambda_{Ht}^1$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn}^1 - \lambda_{Hn}^2) u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\lambda_{Hn}^1 - \lambda_{Hn}^2) (-\lambda_{Hn}^2 - \sigma_n(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Ht}^1 - \lambda_{Ht}^2) u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\lambda_{Ht}^1 - \lambda_{Ht}^2) (-\lambda_{Ht}^2 - \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \leq 0 \end{aligned}$$

Par addition on obtient $-\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn}^1 - \lambda_{Hn}^2)\|_{\Gamma_C}^2 - \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht}^1 - \lambda_{Ht}^2)\|_{\Gamma_C}^2 \geq 0$ et on arrive à la conclusion que $\lambda_{Hn}^1 = \lambda_{Hn}^2, \lambda_{Ht}^1 = \lambda_{Ht}^2$. Par conséquent, le second argument $\boldsymbol{\lambda}_H$ est unique et (4.2) admet une solution unique.

La définition suivante est une conséquence directe de la définition des problèmes (4.1) et (4.2).

Lemme 4.1.1

Les solutions du problème discret de contact et frottement de Coulomb (4.1) sont les solutions de $P(\lambda_{Hn})$ où λ_{Hn} est un point fixe de Φ_H définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_H : M_{Hn} &\longrightarrow M_{Hn} \\ g_{Hn} &\longmapsto \lambda_{Hn}. \end{aligned}$$

où $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ est la solution de $P(g_{Hn})$.

Pour établir l'existence d'un point fixe de Φ_H , on utilise le théorème du point fixe de Brouwer.

Etape 1. On prouve que l'application Φ_H est continue.

Soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_{Hn}, \lambda_{Ht})$ et $(\overline{\mathbf{u}}_h, \overline{\lambda_{Hn}}, \overline{\lambda_{Ht}})$ les solutions de $(P(g_{Hn}))$ et $(P(\overline{g_{Hn}}))$ respectivement. D'une part, on a :

$$\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C}^2 = \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn}^2 d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn} \overline{\lambda_{Hn}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma$$

En utilisant (4.2) et $\nu_{Ht} = \lambda_{Ht}$, on obtient $\forall \nu_{Hn} \in M_{Hn}$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\nu_{Hn} - \lambda_{Hn}) u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\nu_{Hn} - \lambda_{Hn}) (-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h)) d\Gamma &\leq 0 \\ \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn}^2 d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn} - \nu_{Hn}) u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\nu_{Hn} - \lambda_{Hn}) \sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma \nu_{Hn} \lambda_{Hn} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Hn}} - \nu_{Hn}) \overline{u_{hn}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\nu_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}}) \sigma_n(\overline{\mathbf{u}}_h) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma \nu_{Hn} \overline{\lambda_{Hn}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.6)$$

En prenant $\nu_{Hn} = \overline{\lambda_{Hn}}$ dans (4.5) et $\nu_{Hn} = \lambda_{Hn}$ dans (4.6) et (4.3), on déduit :

$$\begin{aligned} \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C}^2 &\leq \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}}) u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn}) \sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn}) \overline{u_{hn}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}}) \sigma_n(\overline{\mathbf{u}}_h) d\Gamma \\ &\leq \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \gamma_0^{-1/2} \|h_{\Gamma_C}^{-1/2} (u_{hn} - \overline{u_{hn}})\|_{\Gamma_C} \\ &\quad + \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \gamma_0^{1/2} \|h_{\Gamma_C}^{1/2} (\sigma_n(\mathbf{u}_h) - \sigma_n(\overline{\mathbf{u}}_h))\|_{\Gamma_C} \\ &\lesssim \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \gamma_0^{-1/2} \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \\ &\quad + \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \gamma_0^{1/2} \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient la première estimation

$$\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \lesssim (\gamma_0^{1/2} + \gamma_0^{-1/2})\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}. \quad (4.7)$$

D'autre part, on déduit de (4.2) $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &+ \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} v_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} v_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (4.8)$$

et

$$\begin{aligned} a(\overline{\mathbf{u}_h}, \mathbf{v}_h) &+ \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Hn}} v_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\overline{\lambda_{Hn}} - \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_n(\mathbf{v}_h) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} v_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\overline{\lambda_{Ht}} - \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\mathbf{v}_h) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (4.9)$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}$ dans (4.8) et $\mathbf{v}_h = \overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h$ dans (4.9), on obtient par addition :

$$\begin{aligned} &a(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}, \mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}) \\ &= \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn})(u_{hn} - \overline{u_{hn}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h) + \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notons que l'inégalité dans (4.2) est équivalente aux deux conditions suivantes :

$$\int_{\Gamma_C} (\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{Hn} \in M_{Hn}, \quad (4.11)$$

$$\int_{\Gamma_C} (\nu_{Ht} - \lambda_{Ht})u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))(\nu_{Ht} - \lambda_{Ht})d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{Ht} \in M_{Ht}(\mu g_{Hn}). \quad (4.12)$$

D'après la définition de M_{Hn} , on peut prendre $\nu_{Hn} = 0$ et $\nu_{Hn} = 2\lambda_{Hn}$ dans (4.11) qui donne $\forall \nu_{Hn} \in M_{Hn}$

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\lambda_{Hn} d\Gamma = 0$$

et

$$\int_{\Gamma_C} \nu_{Hn} u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\nu_{Hn} d\Gamma \leq 0.$$

On déduit alors que :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn} \sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma = - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn}^2 d\Gamma, \\ & \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Hn}} u_{hn} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \lambda_{Hn} d\Gamma. \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Hn}} \overline{u_{hn}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \sigma_n(\overline{\mathbf{u}}_h) d\Gamma = - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma \\ & \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} \overline{u_{hn}} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn} \sigma_n(\overline{\mathbf{u}}_h) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \lambda_{Hn} d\Gamma. \end{aligned}$$

En notant α la constante d'ellipticité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, (4.10) devient

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 & \leq - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \lambda_{Hn} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn}^2 d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma \sigma_n(\overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\ & = - \int_{\Gamma_C} \gamma (\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn})^2 d\Gamma + \gamma_0 \|h_{\Gamma_C}^{1/2} \sigma_n(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h)\|_{\Gamma_C}^2 \\ & \quad + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\ & \leq C \gamma_0 \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) d\Gamma \quad (4.13) \end{aligned}$$

En combinant (4.12) et (4.3), $\forall \nu_{Ht} \in M_{Ht}(\mu g_{Hn})$ et $\forall \overline{\nu_{Ht}} \in M_{Ht}(\mu \overline{g_{Hn}})$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} \overline{u_{ht}} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} (\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Ht} (\overline{\lambda_{Ht}} + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} \lambda_{Ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)^2 d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Ht} \sigma_t(\mathbf{u}_h) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} \overline{u_{ht}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h) d\Gamma \\ & \leq \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} \overline{u_{ht}} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} (\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Ht} (\overline{\lambda_{Ht}} + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} \lambda_{Ht} d\Gamma + \gamma_0 \|h_{\Gamma_C}^{1/2} \sigma_t(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h)\|_{\Gamma_C}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_C} \nu_{Ht} u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \nu_{Ht} (\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Ht}^2 d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_C} \overline{\nu_{Ht}} \overline{u_{ht}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\nu_{Ht}} (\overline{\lambda_{Ht}} + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}}^2 d\Gamma \\
& \leq - \int_{\Gamma_C} \nu_{Ht} (u_{ht} - \gamma \lambda_{Ht} - \gamma \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \overline{\nu_{Ht}} (\overline{u_{ht}} - \gamma \overline{\lambda_{Ht}} - \gamma \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} (\overline{u_{ht}} - \gamma \overline{\lambda_{Ht}} - \gamma \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} (u_{ht} - \gamma \lambda_{Ht} - \gamma \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\
& \quad - \int_{\Gamma_C} \gamma (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma + C \gamma_0 \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Pour évaluer la dernière inégalité, on commence par introduire les matrices $M_1 = (m1_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$, $M_2 = (m2_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$, $M_3 = (m3_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r}$ sur Γ_C définies par :

$$m1_{ij} = \int_{\Gamma_C} \phi_i \phi_j d\Gamma, \quad m2_{ij} = \int_{\Gamma_C} \phi_i \psi_j d\Gamma, \quad m3_{ij} = \int_{\Gamma_C} \phi_i \chi_j d\Gamma$$

où ϕ_i et χ_i sont les fonctions de base sur $\mathbf{V}_h|_{\Gamma_C}$ et ψ_i sont les fonctions de base sur W_H .

Soient $U_T, \overline{U_T}, \Lambda_T, \overline{\Lambda_T}, \Sigma_T, \overline{\Sigma_T}, G_N, \overline{G_N}$ les vecteurs ayant pour composantes les valeurs des éléments de $u_{ht}, \overline{u_{ht}}, \lambda_{Ht}, \overline{\lambda_{Ht}}, \sigma_t(\mathbf{u}_h), \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h), g_{Hn}$ et $\overline{g_{Hn}}$ respectivement. De la définition de $M_{Ht}(\mu g_{Hn})$, on obtient $\forall N \in \mathbb{R}^p$ tel que $|N_i| \leq \mu(G_N)_i, 1 \leq i \leq p$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_C} \nu_{Ht} (u_{ht} - \gamma \lambda_{Ht} - \gamma \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\
& = - \int_{\Gamma_C} \sum_{i=1}^p \nu_{Ht}(x_i) \phi_i \left(\sum_{j=1}^p u_{ht}(x_j) \phi_j - \sum_{j=1}^q \gamma \lambda_{Ht}(x_j) \psi_j - \sum_{j=1}^r \gamma \sigma_t(\mathbf{u}_h)(x_j) \chi_j \right) d\Gamma \\
& = - \sum_{i=1}^p N_i ((M_1 U_T)_i - \gamma (M_2 \Lambda_T)_i - \gamma (M_3 \Sigma_T)_i).
\end{aligned}$$

Il est facile de construire un vecteur N minimisant la somme :

si $(M_1 U_T)_i - \gamma (M_2 \Lambda_T)_i - \gamma (M_3 \Sigma_T)_i \geq 0$, on choisit $N_i = \mu(G_N)_i$ et

si $(M_1 U_T)_i - \gamma (M_2 \Lambda_T)_i - \gamma (M_3 \Sigma_T)_i \leq 0$, on choisit $N_i = -\mu(G_N)_i$

et on aboutit à la borne suivante :

$$- \int_{\Gamma_C} \nu_{Ht} (u_{ht} - \gamma \lambda_{Ht} - \gamma \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma = - \sum_{i=1}^p \mu(G_N)_i |(M_1 U_T)_i - \gamma (M_2 \Lambda_T)_i - \gamma (M_3 \Sigma_T)_i|.$$

Une expression similaire peut être obtenue en intégrant le terme $-\int_{\Gamma_C} \overline{\nu_{Ht}} (\overline{u_{ht}} - \gamma \overline{\lambda_{Ht}} - \gamma \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) d\Gamma$. De plus par la définition de $M_{Ht}(\mu g_{Hn})$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} (\overline{u_{ht}} - \gamma \overline{\lambda_{Ht}} - \gamma \sigma_t(\overline{\mathbf{u}}_h)) d\Gamma & = \sum_{i=1}^p (\Lambda_T)_i ((M_1 \overline{U_T})_i - \gamma (M_2 \overline{\Lambda_T})_i - \gamma (M_3 \overline{\Sigma_T})_i) \\
& \leq \sum_{i=1}^p |(\Lambda_T)_i| |(M_1 \overline{U_T})_i - \gamma (M_2 \overline{\Lambda_T})_i - \gamma (M_3 \overline{\Sigma_T})_i| \\
& \leq \sum_{i=1}^p \mu(G_N)_i |(M_1 \overline{U_T})_i - \gamma (M_2 \overline{\Lambda_T})_i - \gamma (M_3 \overline{\Sigma_T})_i|
\end{aligned}$$

Puis en intégrant le terme $\int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}}(u_{ht} - \gamma\lambda_{Ht} - \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma$. Finalement, (4.14) mène avec l'inégalité de Hölder à :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h)d\Gamma \\
\lesssim & \mu \sum_{i=1}^p (G_N - \overline{G_N})_i \\
& (|(M_1\overline{U_T})_i - \gamma(M_2\overline{\Lambda_T})_i - \gamma(M_3\overline{\Sigma_T})_i| - |(M_1U_T)_i - \gamma(M_2\Lambda_T)_i - \gamma(M_3\Sigma_T)_i|) \\
& + C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
\lesssim & \mu \sum_{i=1}^p (G_N - \overline{G_N})_i \\
& |(M_1\overline{U_T})_i - \gamma(M_2\overline{\Lambda_T})_i - \gamma(M_3\overline{\Sigma_T})_i - (M_1U_T)_i + \gamma(M_2\Lambda_T)_i + \gamma(M_3\Sigma_T)_i| \\
& + C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
\lesssim & \mu \left(\sum_{i=1}^p (G_N - \overline{G_N})_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{i=1}^p (M_1(U_T - \overline{U_T}))_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^p (\gamma M_2(\Lambda_T - \overline{\Lambda_T}))_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. + \left(\sum_{i=1}^p (\gamma M_3(\Sigma_T - \overline{\Sigma_T}))_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
\lesssim & \mu\|G_N - \overline{G_N}\|_{\mathbb{R}^p} (\|U_T - \overline{U_T}\|_{\mathbb{R}^p, M_1} + \gamma\|\Lambda_T - \overline{\Lambda_T}\|_{\mathbb{R}^p, M_2} + \gamma\|\Sigma_T - \overline{\Sigma_T}\|_{\mathbb{R}^p, M_3}) \\
& + C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

Les notations $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p, M_k}$ représentent des normes sur \mathbb{R}^p . Par conséquent, il existe des constantes dépendant de h telles que :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h)d\Gamma \\
\lesssim & C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
& + \mu C_1(h)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|u_{ht} - \overline{u_{ht}}\|_{\Gamma_C} \\
& + \mu C_2(h)\gamma_0\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|_{\Gamma_C} \\
& + \mu C_3(h)\gamma_0\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|h_{\Gamma_C}^{1/2}(\sigma_t(\mathbf{u}_h) - \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\|_{\Gamma_C} \\
\lesssim & C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 - \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|_{\Gamma_C}^2 \\
& + \mu C_4(h)(1 + \gamma_0)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega} \\
& + \mu C_2(h)\gamma_0\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|_{\Gamma_C}
\end{aligned}$$

où le théorème de trace et (4.3) ont été utilisés.

De plus, en utilisant l'inégalité de Young, on obtient pour tout $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h)d\Gamma \\
\lesssim & C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 - \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|_{\Gamma_C}^2 + \beta\mu^2\gamma_0^2C_5(h)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}^2 \\
& + \frac{1}{4\beta}\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|_{\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\beta}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 \\
& + \beta\mu^2C_6(h)(1 + \gamma_0)^2\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}^2 \\
\lesssim & C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 + \beta\mu^2\gamma_0^2C_5(h)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}^2 \\
& + \beta\mu^2C_6(h)(1 + \gamma_0)^2\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\beta}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 \tag{4.15}
\end{aligned}$$

De (4.15) et (4.13) découle :

$$\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega} \lesssim \mu \frac{\sqrt{(1 + \gamma_0)^2C_6(h) + \gamma_0^2C_5(h)}}{\sqrt{1 - 2\gamma_0}} \|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \tag{4.16}$$

La combinaison de (4.16) et (4.7) entraîne que

$$\begin{aligned}
& \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \\
\lesssim & \mu(\gamma_0^{1/2} + \gamma_0^{-1/2}) \frac{\sqrt{(1 + \gamma_0)^2C_6(h) + \gamma_0^2C_5(h)}}{\sqrt{1 - 2\gamma_0}} \|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Ainsi Φ_H est continue.

Etape 2. Soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_{Hn}, \lambda_{Ht})$ la solution de $(P(g_{Hn}))$. En prenant $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans (4.2) on a :

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{u}_h)d\Gamma \\
+ \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht}u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{u}_h)d\Gamma = L(\mathbf{u}_h).
\end{aligned}$$

D'après

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\lambda_{Hn}d\Gamma = 0$$

et

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht}u_{ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\lambda_{Ht}d\Gamma \geq 0,$$

on déduit :

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Hn}^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_n(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Ht}^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma \leq L(\mathbf{u}_h).$$

Par (4.4) et la continuité de $L(\cdot)$:

$$C\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 \leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_n(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma \leq L(\mathbf{u}_h) \leq C'\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}.$$

Ainsi, on a

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C'}{C}.$$

A d'autres égards,

$$\begin{aligned} \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}^2 &= \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Hn}^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}u_{hn} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Hn}\sigma_n(\mathbf{u}_h)d\Gamma \\ &\lesssim \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{-1/2}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{1/2}\|h_{\Gamma_C}^{1/2}\sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{\Gamma_C} \\ &\lesssim \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{-1/2}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{1/2}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Cela implique

$$\|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C} \lesssim (\gamma_0^{-1/2} + \gamma_0^{1/2})\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim (\gamma_0^{-1/2} + \gamma_0^{1/2})\frac{C'}{C}$$

Finalement

$$\|\gamma^{1/2}\Phi_H(g_{Hn})\|_{\Gamma_C} \lesssim 1, \quad \forall g_{Hn} \in M_{Hn},$$

La bornitude de Φ_H associée à la continuité de Φ_H prouve qu'il existe au moins une solution au problème discret de contact et frottement de Coulomb d'après le théorème du point fixe de Brouwer. ■

Proposition 4.1.2

Lorsque μ et γ_0 sont suffisamment petits, le problème (4.1) admet une solution unique.

Démonstration : De (4.17), on déduit le résultat d'unicité dépendant de la taille du maillage

lorsque $C\mu(\gamma_0^{1/2} + \gamma_0^{-1/2})\frac{\sqrt{(1+\gamma_0)^2C_6(h) + \gamma_0^2C_5(h)}}{\sqrt{1-2\gamma_0}} < 1$. Ce résultat signifie qu'il y a unicité lorsque μ et γ_0 sont suffisamment petits. ■

Remarque 4.1.4

Lorsque $\mu = 0$, il y a existence et unicité de la solution si γ_0 est suffisamment petit.

4.2 Estimateurs d'erreur a posteriori

4.2.1 Définition de l'estimateur par résidu

Comme dans le chapitre précédent, on définit le résidu de l'équation d'équilibre (2) $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f} = \mathbf{f}$ sur T . On note également l'élément résiduel approché $\mathbf{f}_T \in (\mathbb{P}_k(T))^2$. Un choix classique est de prendre $\mathbf{f}_T = \int_T \mathbf{f}(x) / |T|$. Pour $\mathbf{f} \in (H^1(\Omega))^2$, $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T \lesssim h_T\|\mathbf{f}\|_{1,T}$ est négligeable par rapport à l'estimateur η défini juste après. De même \mathbf{g} est approché par la quantité calculable \mathbf{g}_E pour tout $E \in E_h^N$.

Définition 4.2.1

Les estimateurs résiduels global et locaux sont définis par :

$$\begin{aligned}
 \eta &= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_T = \left(\sum_{i=1}^9 \eta_{iT}^2 \right)^{1/2}, \\
 \eta_{1T} &= h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \\
 \eta_{2T} &= h_T^{1/2} \left(\sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2}, \\
 \eta_{3T} &= h_T^{1/2} \left(\sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2}, \\
 \eta_{4T} &= h_T^{1/2} \left(\sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2}, \\
 \eta_{5T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} \right)^{1/2}, \\
 \eta_{6T} &= \left(\sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \right)^{1/2}, \\
 \eta_{7T} &= \left(\sum_{E \in E_T^C} \|u_{hn+}\|_{1,E}^2 \right)^{1/2}, \\
 \eta_{8T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{Ht} u_{ht})_- \right)^{1/2}, \\
 \eta_{9T} &= \|(|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C}
 \end{aligned}$$

où les notations v_+ et v_- désignent les parties positive et négative de v ; $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ désigne le saut de contrainte de \mathbf{u}_h dans la direction normale, i.e.

$$J_{E,n}(\mathbf{u}_h) = \begin{cases} \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_E \rrbracket_E, \forall E \in E_h^{int}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} - \mathbf{g}_E, \forall E \in E_h^N. \end{cases} \quad (4.18)$$

Les termes d'approximation locaux et global sont définis par :

$$\zeta_T = \left(h_T^2 \sum_{T' \subset \omega_T} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{T'}\|_{T'}^2 + h_E \sum_{E \subset E_T^N} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 \right)^{1/2}, \quad \zeta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}.$$

4.2.2 Borne supérieure

Proposition 4.2.1

On suppose que la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ du problème (3.1) est telle que $\lambda_t = \mu\lambda_n\xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu\|\xi\|_M$ suffisamment petit. Soit γ_0 suffisamment petit. Alors une solution $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ du problème (4.1) satisfait l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_{-1/2,\Gamma_C} \lesssim \eta + \zeta.$$

Démonstration : On note le terme d'erreur de déplacement par :

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h.$$

Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. De la \mathbf{V} -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et des équations d'équilibre (3.1) et (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ &= L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h). \end{aligned}$$

En intégrant par parties sur chaque triangle T , en utilisant la définition de $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ (4.18) et la condition complémentaire $\int \lambda_n u_n = 0$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_C} \lambda_t u_t \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h). \end{aligned}$$

En décomposant les intégrales sur Γ_C en composantes normale et tangentielle, cela donne :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}(u_n - u_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{Ht})(u_{ht} - u_t) + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_{hn} - u_n) + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_{ht} - u_t) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} (u_n - u_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{Ht}) (u_{ht} - u_t) \\
 &\quad + I + II + III + IV + V \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)) \sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) \sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

On estime maintenant chaque terme de droite. On procède comme dans le chapitre précédent en choisissant :

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h + \pi_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$$

où π_h est l'opérateur de quasi-interpolation défini au Lemme 3.2.1.

Les termes I à V sont bornés, comme au chapitre précédent, par :

$$I + II + III + IV + V \lesssim (\eta + \zeta) \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}. \tag{4.20}$$

On estime le terme de stabilisation en se servant de (4.3) et de la stabilité H^1 de π_h :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)) \sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\
 &= \sum_{E \in E_C^h} \int_E \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)) \sigma_n(\pi_h(\mathbf{e}_u)) \\
 &= \sum_{E \in E_C^h} \int_E \gamma_0 h_E^{1/2} (\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)) h_E^{1/2} \sigma_n(\pi_h(\mathbf{e}_u)) \\
 &\leq \gamma_0 \left(\sum_{E \in E_C^h} h_E \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \|\pi_h(\mathbf{e}_u)\|_{1,\Omega} \\
 &\leq \gamma_0 \left(\sum_{E \in E_C^h} h_E \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega} \\
 &\leq \gamma_0 \eta \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

En procédant de la même manière et en utilisant η_{AT} , on obtient :

$$\int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) \sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \leq \gamma_0 \eta \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}. \tag{4.22}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} (u_n - u_{hn}) \\
 &= \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn+} - \lambda_{Hn-}) (u_n - u_{hn}) \\
 &\leq - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-} (u_n - u_{hn}) \\
 &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn+} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-} (u_n - u_{hn}).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Le terme suivant est estimée à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et Young :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn}) \right| &= \left| \sum_{E \in E_h^C} \int_E \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn}) \right| \\ &\leq \sum_{E \in E_h^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E \|u_n - u_{hn}\|_E \\ &\leq \sum_{E \in E_h^C} \left(\alpha \|u_n - u_{hn}\|_E^2 + \frac{1}{4\alpha} \|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \right), \end{aligned}$$

pour tout $\alpha > 0$. Un théorème de trace standard implique l'existence de $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn}) \right| &\leq \alpha \|u_n - u_{hn}\|_{\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\alpha} \sum_{E \in E_h^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \\ &\leq C\alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\eta^2}{4\alpha}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le dernier terme provenant du contact est borné par :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_n (u_{hn+} - u_{hn-}) + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-} u_{hn+} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn+} + \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn+} - \lambda_{Hn}) u_{hn+} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} (\lambda_n - \lambda_{Hn}) u_{hn+} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn+} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn+} + \|\lambda_{Hn} - \lambda_n\|_{W_t'} \|u_{hn+}\|_{W_t} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn+} + \|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C} \|u_{hn+}\|_{1,\Gamma_C} \end{aligned} \quad (4.25)$$

En regroupant les estimations (4.23), (4.24) et (4.25) et en utilisant l'inégalité de Young, on aboutit à

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}(u_n - u_{hn}) + \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} \\ &\lesssim \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} + \alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\eta^2}{4\alpha} + \|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C} \|u_{hn+}\|_{1,\Gamma_C} \\ &\lesssim \eta^2 \left(1 + \frac{1}{4\alpha} \right) + \alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \alpha \|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\alpha} \|u_{hn+}\|_{1,\Gamma_C}^2 \\ &\lesssim \eta^2 \left(1 + \frac{1}{2\alpha} \right) + \alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \alpha \|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C}^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

pour tout $\alpha > 0$.

Pour le terme correspondant au frottement, en procédant comme dans le chapitre précédent, on obtient pour tout α positif :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Ht} - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) &\lesssim (\alpha + (1 + \alpha)\mu \|\xi\|_M) \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 \\ &\quad + \frac{\mu \|\xi\|_M + 2\alpha + 1 + \mu^2}{2\alpha} (\eta^2 + \zeta^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

En regroupant les estimations (4.20), (4.21), (4.22), (4.26) et (4.27) avec α et γ_0 suffisamment petits dans (4.19) et en utilisant (4.29), on aboutit à la conclusion que si $\mu\|\xi\|_M$ est suffisamment petit :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim \eta + \zeta. \quad (4.28)$$

On cherche maintenant une borne pour l'erreur de discrétisation $\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H$ correspondant aux multiplicateurs. Soient $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Des équations d'équilibre (3.1) et (4.1), on tire :

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}) &= b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h) \\ &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h) \\ &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Une intégration par parties sur chaque élément T mène à :

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \int_E \mathbf{J}_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_n - v_{hn}) - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_t - v_{ht}) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

En procédant comme pour le début de la preuve et en posant $\mathbf{v}_h = \pi_h \mathbf{v}$, on arrive à :

$$|b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v})| \lesssim (\eta + \zeta + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}) \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Par conséquent

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \eta + \zeta + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}. \quad (4.29)$$

Le regroupement des estimations (4.28) et (4.29) achève la preuve. ■

4.2.3 Borne inférieure

Théorème 4.2.1

Soient $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ une solution du problème discret (4.1) et $\eta = \eta(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ l'estimateur correspondant. Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$. Pour tous les éléments T , les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}\eta_{1T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \\ \eta_{2T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T.\end{aligned}$$

Pour tous les éléments T possédant un côté sur Γ_C (i.e. $T \cap \Gamma_C = E$), les bornes locales inférieures sont obtenues :

$$\begin{aligned}\eta_{iT} &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4, \\ \eta_{jT} &\leq 2(1 + \mu) \left(\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E^{1/2} \|\mathbf{u}\|_E^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda}\|_E^{1/2} \right), \quad j = 5, 8,\end{aligned}\tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\eta_{lT} &\leq (1 + \mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E, \quad l = 6, 9, \\ \eta_{7T} &\leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}\|_E.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Démonstration : On précise que l'on ne suppose pas que la solution du problème continu est unique. Bien sûr, notre résultat reste valide lorsque $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est l'unique solution donnée par la Proposition 3.1.1. Notons également que la solution du problème discret n'est pas supposée unique.

La preuve de ces estimations inférieures est la même que pour le premier estimateur du chapitre précédent exceptée pour les bornes de η_{5T} et η_{7T} . On montre (4.30). Si $E \in E_T^C$, soit $F \subset E$ la partie du côté où $u_{hn} = u_{hn-}$. Donc comme $u_n \leq 0$ et $\int_F \lambda_n u_n = 0$:

$$\begin{aligned}\int_E \lambda_{Hn+} u_{hn-} &= \int_F \lambda_{Hn+} u_{hn} = \int_F (\lambda_{Hn} + \lambda_{Hn-}) u_{hn} \\ &= \int_F (\lambda_{Hn} - \lambda_n) (u_{hn} - u_n) + \int_F \lambda_{Hn} u_n + \int_F \lambda_n u_{hn} + \int_F \lambda_{Hn-} u_{hn} \\ &= \int_F (\lambda_{Hn} - \lambda_n) (u_{hn} - u_n) + \int_F (\lambda_{Hn} - \lambda_n) u_n + \int_F \lambda_n (u_{hn} - u_n) + \int_F \lambda_{Hn-} (u_{hn} - u_n) \\ &\leq \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\lambda_{Hn-}\|_E.\end{aligned}$$

En utilisant la borne inférieure de η_{6T} , on aboutit au résultat. On termine par l'estimation de η_{7T} dans (4.31). Comme $u_n \leq 0$, on a $0 \leq u_{hn+} \leq |u_{hn} - u_n|$ sur Γ_C . Ainsi

$$\|u_{hn+}\|_E \leq \|u_{hn} - u_n\|_E \leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E.$$

Cependant on veut estimer $\|u_{hn+}\|_{1,E}$. Lorsque $u_{hn+} > 0$ sur E par une inégalité inverse et l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|u'_{hn+}\|_E \leq h_E^{-1} \|u_{hn+}\|_E \leq h_E^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E.$$

Pour $u_{hn+} \geq 0$ sur E , sa dérivée appartient à P_0 . Par prolongement de la constante strictement positive, on obtient :

$$\|u'_{hn+}\|_E \leq h_E^{-1} \|u_{hn}\|_E \leq h_E^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}\|_E.$$

Donc

$$\|u_{hn+}\|_{1,E} \leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}\|_E. \quad \blacksquare$$

L'amélioration de la borne de η_{7T} est un problème ouvert. On ne sait pas trouver la norme de $\|u'_{hn+}\|_E$. Il faudrait plutôt obtenir les estimateurs avec la norme $\|\gamma^{1/2}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H)\|_{\Gamma_C}$. On peut cependant voir l'efficacité de l'estimateur dans des résultats numériques.

4.3 Conclusion

On a adapté la technique de stabilisation de Barbosa-Hughes au problème d'élasticité avec contact et frottement de Coulomb. On a obtenu un résultat d'existence et d'unicité. On a donné des estimateurs d'erreur théoriques pour ce modèle. Cependant la borne inférieure reste un problème ouvert ainsi que les estimateurs a posteriori avec la norme $\|\gamma^{1/2}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H)\|_{\Gamma_C}$ pour l'erreur de discrétisation correspondant aux multiplicateurs.

La caractéristique de la méthode de stabilisation de Barbosa-Hughes est de contourner la condition inf-sup de Babuška-Brezzi. Les avantages de la méthode de stabilisation peuvent être exploités lorsque la condition inf-sup de Babuška-Brezzi est difficile ou impossible à obtenir. C'est pourquoi on va adapter cette technique à la méthode XFEM en suivant les idées de [113].

Chapitre 5

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

A FIN de justifier la formulation du contact avec la méthode XFEM et d'étudier la convergence de la méthode, on choisit de combiner l'approche XFEM avec la formulation stabilisée de Barbosa-Hughes présentée au chapitre précédent pour obtenir une méthode de domaine fictif [113].

Sommaire

5.1	Le problème continu	166
5.2	Discrétisation par une méthode stabilisée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange	172
5.2.1	Problème discret	172
5.2.2	Etude de la convergence	175
5.3	Conclusion	182

PEU de travaux ont été effectués sur le traitement du contact dans le cadre de la méthode XFEM. Les problèmes de contact font partie des problèmes difficiles à résoudre. En effet, les discontinuités proviennent des conditions de contact sous forme d'inéquations. Des études récentes ([97, 98, 184]) ont pris en compte les conditions de contact et/ou de frottement dans la méthode XFEM. Pour la méthode des éléments finis étendus, deux principales méthodes sont employées pour formuler les problèmes de contact : l'approche par pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Dans la première, la pénétration entre deux corps en contact est autorisée et la force normale de contact est liée à la pénétration par un terme de pénalisation ([195]). Dolbow et al ont donné une formulation pénalisée du contact frottant en dimension deux. Dans [145], le contact frottant avec XFEM est explicité ainsi qu'un algorithme [146] et la formulation par pénalisation est donnée en plasticité. Concernant les multiplicateurs de Lagrange, les forces de contact sont prises en tant qu'inconnues primaires et la condition de pénétration est respectée ([96, 212]). Géniat [97] a choisi un cadre proche du Lagrangien augmenté en utilisant une formulation hybride continue [34] adaptée à la méthode XFEM. Les méthodes de contact classiques, celles basées sur des multiplicateurs de Lagrange ont été adaptées avec un certain succès au cadre XFEM sur des cas bidimensionnels. Cependant le choix des espaces de discrétisation des déplacements et des pressions de contact respectant la condition inf-sup conduit à des oscillations des pressions de contact.

On choisit alors de combiner l'approche XFEM avec la formulation stabilisée de Barbosa-Hughes pour obtenir une méthode de domaine fictif [113]. L'ajout de degrés de liberté supplémentaires dus aux multiplicateurs de Lagrange n'est pas problématique car ces multiplicateurs sont restreints à la zone fissurée.

Dans une première section, on énonce les nouvelles formulations du contact sur la fissure et on donne le problème continu. On met en exergue le fait que la contrainte normale n'a pas de partie singulière. Dans la section suivante, on approche le problème continu par la méthode de Barbosa-Hughes combinée avec la méthode de domaine fictif introduite dans [113]. On démontre un résultat de convergence pour terminer.

5.1 Le problème continu

On reprend les équations de l'élasticité (2). A l'état initial, le corps est supposé être en contact sur la fissure Γ_C et on suppose que la zone finale de contact après déformation est incluse dans Γ_C . Dans le cadre d'un contact entre les faces de la fissure, on se ramène à un contact entre deux corps en utilisant Γ_{C+} et Γ_{C-} pour représenter chaque face de la fissure (voir Figure 5.1). Dans la configuration initiale, on a $\Gamma_C = \Gamma_{C+} = \Gamma_{C-}$. On définit $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ la normale sortante unitaire sur Γ_{C+} . On obtient alors $\sigma_n^+(\mathbf{u}) = (\sigma_n^+(\mathbf{u})\mathbf{n}^+) \cdot \mathbf{n}^+$ et $\sigma_n^-(\mathbf{u}) = (\sigma_n^-(\mathbf{u})\mathbf{n}^-) \cdot \mathbf{n}^-$. Ainsi le principe d'action-réaction s'exprime $\sigma_n(\mathbf{u}) = \sigma_n^+(\mathbf{u}) = \sigma_n^-(\mathbf{u})$. Les équations de contact (3) sont alors remplacées par :

$$[u_n] \leq 0, \quad \sigma_n^+(\mathbf{u}) = \sigma_n^-(\mathbf{u}) = \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \cdot [u_n] = 0 \quad (5.1)$$

où $[u_n]$ désigne le saut du déplacement normal à travers la fissure Γ_C , c'est-à-dire $[u_n] = \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}^- = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+$ avec \mathbf{u}^+ et \mathbf{u}^- représentant les déplacements

de chaque côté de la fissure. La première inégalité représente la non interpénétration de deux corps puis la seconde donne les efforts normaux en compression auxquels on ajoute la relation de complémentarité.

L'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par :

$$\sigma_t^+(\mathbf{u}) = \sigma_t^-(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.2)$$

où les contraintes tangentielles sont définies par $\sigma_t^+(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}^+ - \sigma_n^+(\mathbf{u})\mathbf{n}^+$ et $\sigma_t^-(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}^- - \sigma_n^-(\mathbf{u})\mathbf{n}^-$.

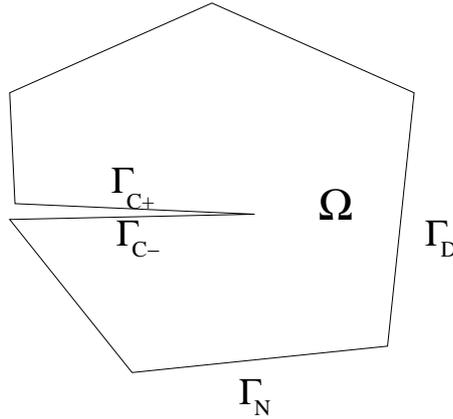


FIG. 5.1 – La géométrie du domaine fissuré Ω

La formulation faible de (2)–(5.1)–(5.2) utilise l'espace de Hilbert

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$

et le cône convexe de multiplicateurs sur Γ_C :

$$M^+ = \left\{ \nu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C) : \langle \nu, \psi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_C} \geq 0 \text{ pour tout } \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \psi \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_C \right\},$$

où la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_C}$ représente le crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, & b(\nu, \mathbf{v}) &= \langle \nu, [v_n] \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_C}, \\ L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \end{aligned}$$

pour tout \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbf{V} et ν dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$. Dans ces définitions, les notations \cdot et $:$ représentent les produits scalaires dans \mathbb{R}^2 et \mathcal{S}_2 respectivement. Pour simplifier les notations, on écrit par la suite des termes sous formes d'intégrale à la place des crochets de dualité.

La formulation mixte du problème de contact sans frottement (2)–(5.1)–(5.2) consiste à trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ et $\lambda \in M^+$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\lambda, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\nu - \lambda, \mathbf{u}) \leq 0, & \forall \nu \in M^+. \end{cases} \quad (5.3)$$

Le problème (5.3) est équivalent à trouver $(\mathbf{u}, \lambda) \in \mathbf{V} \times M^+$ vérifiant

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \nu) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall \nu \in M^+,$$

où $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ est le Lagrangien classique défini par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \nu) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + b(\nu, \mathbf{v}).$$

Une autre formulation faible classique du problème (2)–(5.1)–(5.2) est l'inégalité variationnelle :

Propriétés 5.1.1

Trouver \mathbf{u} telle que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad (5.4)$$

où \mathbf{K} désigne le cône convexe fermé des déplacements admissibles satisfaisant les conditions de non-interpénétration :

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : [v_n] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

Démonstration : La formulation variationnelle en déplacement du problème s'écrit $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}$:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Gamma$$

Avec les notations précédentes et la décomposition en composantes normale et tangentielle, on obtient :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n - u_n) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t) \, d\Gamma$$

Pour le terme en composante normale, on décompose suivant Γ_{C+} et Γ_{C-} et le terme tangentiel s'annule par l'absence de frottement :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_{C+}} \sigma_n^+(\mathbf{u})(v_n^+ \cdot \mathbf{n}^+ - u_n^+ \cdot \mathbf{n}^+) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{C-}} \sigma_n^-(\mathbf{u})(v_n^- \cdot \mathbf{n}^- - u_n^- \cdot \mathbf{n}^-) \, d\Gamma$$

Comme $\sigma_n^-(\mathbf{u}) = \sigma_n^+(\mathbf{u}) = \sigma_n(\mathbf{u})$, on obtient :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})([v_n] - [u_n]) \, d\Gamma$$

L'utilisation de la relation de complémentarité et du fait que $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0$ donne le résultat. ■

L'existence et l'unicité de (\mathbf{u}, λ) solution de (5.3) a été prouvée dans [112]. De plus, la solution \mathbf{u} de (5.3) est également l'unique solution du problème (5.4) et $\lambda = -\sigma_n(\mathbf{u})$.

On adopte les mêmes notations que dans le Chapitre 2 et on décompose la solution \mathbf{u} comme la somme d'une partie régulière \mathbf{u}_r et d'une partie singulière \mathbf{u}_s : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \chi\mathbf{u}_s$ avec $\mathbf{u}_r \in (H^2(\Omega))^2$ et $\mathbf{u}_s \in (H^{\frac{3}{2}-\eta}(\Omega))^2$ où χ est la fonction cut-off décrite au Chapitre 1. Cette décomposition est unique.

Lemme 5.1.1

La contrainte normale ne présente pas de partie singulière sur la zone de contact pour le problème sans frottement et $\lambda = \lambda_r$.

Démonstration : On calcule la partie singulière de la contrainte dans un voisinage de la pointe de fissure où le contact a lieu. On restreint l'étude à une zone où le contact se produit sur la fissure. Ainsi on peut utiliser des outils classiques pour calculer le déplacement asymptotique.

En utilisant le lemme div-rot, on réécrit les composantes du vecteur contraintes à l'aide de la fonction d'Airy ϕ :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}.$$

En élasticité isotrope bidimensionnelle, la loi de Hooke est donnée par (2.29) ; Ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\zeta)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\zeta)\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= \zeta(\epsilon_{xy} + \epsilon_{yx}) = 2\zeta\epsilon_{xy} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = -\frac{1}{2\zeta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \epsilon_{xx} &= \left((\lambda + 2\zeta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \frac{1}{4\zeta(\lambda + \zeta)} \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{1}{4\zeta(\lambda + \zeta)} \left(\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - (\lambda + 2\zeta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2\zeta} \left(2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{4\zeta(\lambda + \zeta)} \left[(\lambda + 2\zeta) \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - \lambda \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4\zeta(\lambda + \zeta)} \left[\lambda \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - (\lambda + 2\zeta) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right] \end{aligned}$$

La relation de compatibilité mène à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \iff \frac{\lambda + 2\zeta}{4\zeta(\lambda + \zeta)} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] & \\ \iff \Delta^2 \phi = 0 & \end{aligned}$$

dont la solution générale en coordonnées polaires est une combinaison linéaire des termes élémentaires suivants :

$$r^{s+1} \cos(s-1)\theta, \quad r^{s+1} \cos(s+1)\theta, \quad r^{s+1} \sin(s-1)\theta, \quad r^{s+1} \sin(s+1)\theta.$$

Soit $\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$. En coordonnées polaires, on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial \phi}{\partial y} r \cos \theta$$

$$\text{Donc } \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

De plus, $\sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{xy} \mathbf{j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \mathbf{i} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \phi \wedge \mathbf{k})$ où $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est

un trièdre direct et $\sigma_{xy} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \phi \wedge \mathbf{k})$.

$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k})$ est un trièdre direct et $\nabla \phi \wedge \mathbf{k}$ est indépendant de x, y .

Comme $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \phi \wedge \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{k} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{k} \right) \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta &= -\frac{\partial}{\partial r} (\nabla \phi \wedge \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \right) \mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\zeta) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\zeta) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{xy} &= \zeta (\epsilon_{xy} + \epsilon_{yx}) = \zeta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

et $\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} u_r \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r} u_\theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$ où u_r et u_θ sont les composantes radiale et angulaire du déplacement. Donc

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\zeta) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{(\lambda + 2\zeta)}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{r\theta} &= \zeta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= (\lambda + 2\zeta) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} &= \frac{(\lambda + 2\zeta)}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} &= \zeta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right)\end{aligned}$$

Grisvard [105] a donné le déplacement correspondant en coordonnées polaires avec

$$\rho = 1 + \frac{2\zeta}{\lambda + \zeta} :$$

$$\begin{aligned}u_r &= r^s (a \sin(s+1)\theta + b \cos(s+1)\theta + c(\rho - s) \sin(s-1)\theta - d(\rho - s) \cos(s-1)\theta) \\ u_\theta &= r^s (a \cos(s+1)\theta - b \sin(s+1)\theta - c(\rho + s) \cos(s-1)\theta - d(\rho + s) \sin(s-1)\theta)\end{aligned}\tag{5.5}$$

où a, b, c, d sont des constantes. La méthode des éléments finis P_1 n'approche pas les termes de cette forme qui ne sont pas au moins dans $H^2(\Omega)$. Il nous faut donc déterminer les termes pour lesquels la partie réelle de s vérifie $0 < \text{Re}(s) < 1$.

Les conditions au bord traduisant le contact sans frottement sur la fissure pour $\theta = \pi$ s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}u_\theta(r, \pi) - u_\theta(r, -\pi) &= 0, \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \pi) - \sigma_{\theta\theta}(r, -\pi) &= 0, \\ \sigma_{r\theta}(r, \pi) = \sigma_{r\theta}(r, -\pi) &= 0.\end{aligned}$$

La première égalité traduit le contact : le saut du déplacement normal s'annule car il ne peut y avoir ouverture et la dernière ligne exprime l'absence de frottement.

En traduisant ces conditions avec les expressions (5.5), on obtient :

$$\begin{aligned}u_\theta(r, \pi) - u_\theta(r, -\pi) &= 2r^s (-b \sin(s+1)\pi - d(\rho + s) \sin(s-1)\pi) \\ &= 2r^s (b \sin(s\pi) + d(\rho + s) \sin(s\pi)) \\ \sigma_{r\theta}(r, \pi) &= \zeta r^{s-1} (2as \cos(s+1)\pi - 2bs \sin(s+1)\pi - 2cs^2 \cos(s-1)\pi \\ &\quad - 2ds^2 \sin(s-1)\pi) \\ &= 2\zeta r^{s-1} (-as \cos(s\pi) + bs \sin(s\pi) + cs^2 \cos(s\pi) + ds^2 \sin(s\pi)) \\ \sigma_{r\theta}(r, -\pi) &= 2\zeta r^{s-1} (-as \cos(s\pi) - bs \sin(s\pi) + cs^2 \cos(s\pi) - ds^2 \sin(s\pi)) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \pi) - \sigma_{\theta\theta}(r, -\pi) &= r^{s-1} (\lambda(2as \sin(s+1)\pi + 2c(\rho - s)s \sin(s-1)\pi) \\ &\quad + (\lambda + 2\zeta)(-2as \sin(s+1)\pi + 2cs(\rho + s - 2) \sin(s-1)\pi)) \\ &= r^{s-1} (4\lambda cs(\rho - 1) \sin(s-1)\pi + 2\zeta(-2as \sin(s+1)\pi \\ &\quad + 2cs(\rho + s - 2) \sin(s-1)\pi)) \\ &= r^{s-1} (-4\zeta as \sin(s+1)\pi + 4cs\zeta(s+1) \sin(s-1)\pi) \\ &= r^{s-1} (4\zeta as \sin(s\pi) - 4cs\zeta(s+1) \sin(s\pi))\end{aligned}$$

Le déterminant du système est égal à :

$$D = 2r^s \sin(s\pi) 4\zeta s r^{s-1} \sin(s\pi) (2\zeta r^{s-1} s)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\cos(s\pi) & -\cos(s\pi) \\ 1 & 0 & \sin(s\pi) & -\sin(s\pi) \\ 0 & -s-1 & s \cos(s\pi) & s \cos(s\pi) \\ \rho+s & 0 & s \sin(s\pi) & -s \sin(s\pi) \end{vmatrix}$$

$$= 64\zeta^3 s^3 r^{4s-3} \rho \sin^3(\pi s) \cos(s\pi)$$

$D = 0$ aboutit à $\sin^3(\pi s) \cos(s\pi) = 0$ dont l'unique solution vérifiant $0 < Re(s) < 1$ est $s = \frac{1}{2}$.

Pour $s = \frac{1}{2}$, on obtient :

- $\sigma_{\theta\theta}(r, \pi) - \sigma_{\theta\theta}(r, -\pi) = 0 \iff r^{-1/2}(2\zeta a - 3c\zeta) = 0 \iff a = \frac{3}{2}c$
- $u_\theta(r, \pi) - u_\theta(r, -\pi) = 0 \iff 2r^{1/2} \left(b + d \left(\rho + \frac{1}{2} \right) \right) = 0 \iff d = b = 0$
- $\sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0 \iff b = -\frac{d}{2}$

ce qui signifie qu'un seul mode singulier est présent. Pour ce mode singulier, on a également : $\sigma_{\theta\theta}(r, \pi) = \sigma_{\theta\theta}(r, -\pi) = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \pi) &= r^{-1/2}(-\lambda c(\rho - 1) + \zeta c(3 - \rho)) \\ &= r^{-1/2}c \left(-\lambda \frac{2\zeta}{\lambda + \zeta} + \zeta \left(2 - \frac{2\zeta}{\lambda + \zeta} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Cette propriété correspond à une conditions de Neumann classique sur les lèvres de la fissure. Par conséquent il n'y a pas de mode singulier supplémentaire que le mode de cisaillement classique et la composante normale des contraintes n'est pas singulière sur les lèvres de fissure. On obtient alors $\lambda = \lambda_r$. ■

5.2 Discrétisation par une méthode stabilisée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange

5.2.1 Problème discret

On approche le problème par la méthode XFEM avec fonction cut-off présentée dans le Chapitre 1 et on adapte la technique de stabilisation de Barbosa-Hughes introduite dans le Chapitre 3. Soit une famille régulière quasi-uniforme (voir Définition 2.2.2) T_h de triangulations du domaine Ω . Pour $T \in T_h$, soit h_T le diamètre de T et $h = \max_{T \in T_h} h_T$. Cette triangulation ne prend pas en compte la fissure et les nœuds et arêtes des triangles ne coïncident pas avec la fissure dans le cas général. On rappelle la définition de \mathbf{V}_h pour la méthode XFEM avec fonction cut-off :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : v_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \chi \sum_{i=1}^4 c_i F_i \right. \\ &\quad \left. = \mathbf{v}_{h,r} + \chi \mathbf{v}_{h,s}, \quad a_x, b_x, c_i \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathbf{V} \end{aligned}$$

Soient x_0, \dots, x_N des points distincts appartenant à $\overline{\Gamma_C}$ (notons que l'on ne suppose pas que ces nœuds coïncident avec des nœuds de la triangulation T_h). Ces nœuds forment une famille monodimensionnelle de maillages de Γ_C notée \mathcal{T}_H et on définit $H = \max_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$.

Le maillage \mathcal{T}_H permet de définir un ensemble convexe fermé non vide M_H^+ approximant M^+ :

$$M_H^+ = \left\{ \nu_H \in L^2(\Gamma_C) : \nu_H|_{]x_i, x_{i+1}[} \in P_0(]x_i, x_{i+1}[), \forall 0 \leq i \leq N-1, \nu_H \geq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\},$$

Le problème discret consiste à trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\lambda_H \in M_H^+$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\lambda_H, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_H - R_h(\mathbf{u}_h))R_h(\mathbf{v}_h)d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\nu_H - \lambda_H, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_H - \lambda_H)(-\lambda_H - R_h(\mathbf{u}_h))d\Gamma \leq 0, & \forall \nu_H \in M_H^+ \end{cases} \quad (5.6)$$

où γ est constante sur chaque élément T et $\gamma = \gamma_0 h_T$. Ici $\gamma_0 > 0$ est indépendante de h et H . Le symbole R_h désigne un opérateur de \mathbf{V}_h dans $L^2(\Gamma_C)$ qui approche la composante normale du vecteur contraintes sur Γ_C .

Le problème (5.6) est équivalent à trouver $(\mathbf{u}_h, \lambda_H) \in \mathbf{V}_h \times M_H^+$ vérifiant

$$\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{u}_h, \nu_H) \leq \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{u}_h, \lambda_H) \leq \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, \lambda_H), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \forall \nu_H \in M_H^+,$$

où $\mathcal{L}_\gamma(., .)$ est le Lagrangien défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, \nu_H) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) + b(\nu_H, \mathbf{v}_h) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_H + R_h(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \nu_H) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_H + R_h(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

Comme dans le Chapitre 2 à propos de la méthode XFEM, on partage Ω en Ω_1 et Ω_2 en utilisant la fissure et son extension rectiligne (voir Figure 2.4). L'ensemble Ω est vu comme un domaine fictif de Ω_1 et Ω_2 . On utilise la méthode introduite dans [113] qui permet de traiter facilement des conditions au bord complexes, en particulier lorsque les bords sont indépendants du maillage.

On construit alors l'opérateur R_h (voir [113]) qui permet d'obtenir une propriété de stabilité avec une intersection arbitraire entre le maillage T_h et le domaine Ω_i pour $i = 1, 2$. Soit \tilde{r} un petit rayon donné a priori ($\tilde{r} \ll 1$). Pour chaque élément $T \in T_h$ tel que $T \cap \Omega_i \neq \emptyset$, on désigne par T' (voir Figure 5.2) :

- soit l'élément T lui-même s'il existe une boule $B(\tilde{y}_T, \tilde{r}) \subset \tau_T^{-1}(T \cap \Omega_i)$ où τ_T est une transformation affine régulière de \mathbb{R}^2 et \tilde{T} désigne l'élément référence tel que $T = \tau_T(\tilde{T})$. T est alors un "bon élément".
- soit un élément voisin vérifiant la propriété précédente que ne possède pas T . Dans ce cas, T est un "mauvais élément".

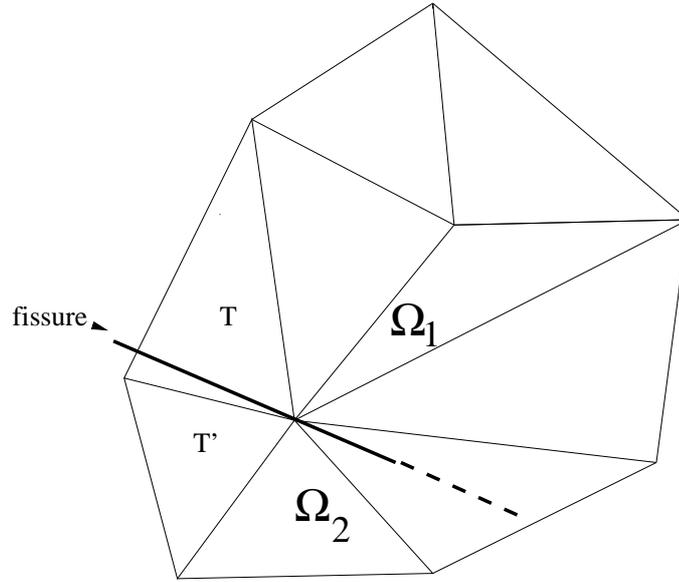


FIG. 5.2 – Le choix de T' : T est un "mauvais élément" pour Ω_2 , T' est un "bon élément" pour Ω_2

Remarque 5.2.1

$\tilde{r} > 0$ est suffisamment petit afin que T' existe toujours.

L'opérateur R_h est égal à $\sigma_n(\mathbf{v}_h^{T,T'})$ où $\mathbf{v}_h^{T,T'}$ vaut soit $\mathbf{v}_h|_T$ si $T' = T$ soit l'extension naturelle de $\mathbf{v}_h|_{T'}$ sur T si $T' \neq T$.

Cet opérateur vérifie une propriété importante :

Lemme 5.2.1

On suppose qu'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ indépendantes de h et $T \in T_h$ telles que $|\Gamma_C \cap T| \leq C_1 h_T$ et $\|\nabla \tau_T\|_{L^\infty(T)} \leq C_2 h_T$ et $\|\nabla \tau_T^{-1}\|_{L^\infty(T)} \leq C_2 h_T^{-1}$ alors :

$$\|h_{\Gamma_C}^{1/2} R_h(\mathbf{v}_h)\|_{\Gamma_C}^2 \leq C \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad h > 0.$$

Démonstration : Elle s'effectue en se rappelant que :

Sans perte de généralité, on peut supposer que Γ_C est un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses et on écrit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Par conséquent, on déduit pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned} \|h_{\Gamma_C}^{1/2} R_h(\mathbf{v}_h)\|_{\Gamma_C}^2 &= \|h_{\Gamma_C}^{1/2} \sigma_n(\mathbf{v}_h^{T,T'})\|_{\Gamma_C}^2 \\ &= \|h_{\Gamma_C}^{1/2} \sigma_{yy}(\mathbf{v}_h^{T,T'})\|_{\Gamma_C}^2 \leq C h_{\Gamma_C} \|\mathbf{v}_h^{T,T'}\|_{1,\Gamma_C}^2. \end{aligned}$$

et en utilisant le Lemme suivant dont la démonstration figure dans [113] :

Lemme 5.2.2

Soit \mathbf{v}_h définie sur $T \in T_h$ par $\mathbf{v}_h(x) = \hat{\mathbf{v}}(\tau_T^{-1}(x))$ avec $\hat{\mathbf{v}} \in P_k(\mathbb{R}^2)$.
Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et T telle que :

$$\int_{\Gamma_C \cap T} \mathbf{v}_h^2 d\Gamma \leq Ch_T^{-1} \int_{\Omega_i \cap T} \mathbf{v}_h^2 dx$$

■

Ainsi par l'inégalité de Korn et le Lemme 5.2.1, lorsque γ_0 est suffisamment petit, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C} \gamma(R_h(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma \geq C \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2.$$

5.2.2 Etude de la convergence

Définissons pour tout $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$ et tout $\nu \in L^2(\Gamma_C)$ les normes suivantes :

$$\|\mathbf{v}\| = a(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2},$$

$$\|(\mathbf{v}, \nu)\| = (\|\mathbf{v}\|^2 + \|\gamma^{1/2}\nu\|_{\Gamma_C}^2)^{1/2}.$$

Pour étudier la convergence de l'erreur, on commence par définir au préalable un opérateur d'interpolation adapté Π_h (voir [62]) sur les différentes catégories de triangles (voir Figure 1.2).

Définition 5.2.1

L'opérateur Π_h satisfait :

$$\Pi_h \mathbf{u} = I_h \mathbf{u}_r + \chi \mathbf{u}_s \quad \text{pour un triangle non enrichi par la fonction Heaviside } H$$

$$\Pi_h \mathbf{u} = I_h \tilde{\mathbf{u}}_{r1} + \chi \mathbf{u}_s \quad \text{pour un triangle totalement enrichi par la fonction } H \text{ sur } \Omega_1$$

$$\Pi_h \mathbf{u} = I_h \tilde{\mathbf{u}}_{r2} + \chi \mathbf{u}_s \quad \text{pour un triangle totalement enrichi par la fonction } H \text{ sur } \Omega_2$$

où I_h désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange classique associé à la méthode par éléments finis et $\tilde{\mathbf{u}}_{ri}$ est l'extension de \mathbf{u}_r de Ω_i à $\bar{\Omega}$ pour $i = 1, 2$ telle que $\|\tilde{\mathbf{u}}_{ri}\|_{2,\bar{\Omega}} \lesssim \|\mathbf{u}_r|_{\Omega_i}\|_{2,\Omega_i}$.

Remarque 5.2.2

Cette fonction d'interpolation pour XFEM est unique sur le domaine Ω .

En utilisant les résultats de [63], on a :

Proposition 5.2.1

- Pour un triangle totalement enrichi par la fonction H et $\sigma_T = h_T \rho_T^{-1}$:

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T \cap \Omega_i} \lesssim h_T \sigma_T \|\tilde{\mathbf{u}}_{r_i}\|_{2,T}$$

- Pour un triangle contenant la pointe de fissure et $T^* = T \setminus \Gamma_C$:

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T^*} \lesssim h_T (|\tilde{\mathbf{u}}_{r1}|_{2,B(0,h_T)} + |\tilde{\mathbf{u}}_{r2}|_{2,B(0,h_T)})$$

- Pour un triangle partiellement enrichi :

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T} \lesssim h_T (|\tilde{\mathbf{u}}_{r1}|_{2,B(0,2h_T)} + |\tilde{\mathbf{u}}_{r2}|_{2,B(0,2h_T)})$$

- Pour un triangle non enrichi :

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T} \lesssim h_T \sigma_T \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T}$$

La proposition suivante donne une estimation de l'erreur pour l'approximation obtenue (5.6).

Proposition 5.2.2

On suppose que $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_C)$ et $\mathbf{u}_r \in H^2(\Omega)$. Soit (\mathbf{u}, λ) la solution du problème (5.3). Soit γ_0 suffisamment petit et soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_H)$ une solution de problème discret (5.6). On a alors l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \lambda - \lambda_H)\| &\lesssim h \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,\Omega} + h^{1/2} H^{1/2} \|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \\ &\quad + H^{3/4-\eta/2} (\|\mathbf{u}\|_{3/2-\eta,\Omega} + \|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C}). \end{aligned}$$

Démonstration : On a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2 + \|\gamma^{1/2}(\lambda - \lambda_H)\|_{\Gamma_C}^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2 + \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda^2 d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda \lambda_H d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\lambda_H)^2 d\Gamma.$$

De (5.3) et (5.6), on déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda^2 d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda \nu d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu) [u_n] d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma (\nu - \lambda) \lambda d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda \nu d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu) [u_n] d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\nu - \lambda) \sigma_n(\mathbf{u}) d\Gamma, \quad \forall \nu \in M^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \gamma (\lambda_H)^2 d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_H \nu_H d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu_H) [u_{hn}] d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma (\nu_H - \lambda_H) R_h(\mathbf{u}_h) d\Gamma, \\ &\quad \forall \nu_H \in M_H^+. \end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}
 \|\gamma^{1/2}(\lambda - \lambda_H)\|_{\Gamma_C}^2 &\leq \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu - \lambda_H)\lambda d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_H - \lambda)\lambda_H d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu)[u_n]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu_H)[u_{hn}]d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu - \lambda)\sigma_n(\mathbf{u})d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_H - \lambda_H)R_h(\mathbf{u}_h)d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu)[u_n]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_H - \lambda)(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu_H)([u_{hn}] - \gamma(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h)))d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \lambda)([u_{hn}] - [u_n])d\Gamma, \quad \forall \nu \in M^+, \forall \nu_H \in M_H^+. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

D'après (5.6) on obtient pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2 &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
 &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\
 &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \lambda)([v_{hn}] - [u_{hn}])d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_H - R_h(\mathbf{u}_h))R_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)d\Gamma. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

En additionnant (5.7) et (5.8), on déduit que :

$$\begin{aligned}
 \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \lambda - \lambda_H)\|^2 &\leq a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \lambda)([v_{hn}] - [u_n])d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu)[u_n]d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu_H)([u_{hn}] - \gamma(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h)))d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_H - \lambda)(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda - R_h(\mathbf{u}_h))R_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)d\Gamma. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, $\nu \in M^+$ et $\nu_H \in M_H^+$. Le dernier terme de l'inégalité précédente est estimé comme suit, en utilisant le Lemme 5.2.1 et en rappelant que $\lambda = -\sigma_n(\mathbf{u})$:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda - R_h(\mathbf{u}_h))R_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)d\Gamma \\
 &\leq \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{u}_h))\|_{\Gamma_C} \gamma_0^{1/2} \|h_{\Gamma_C}^{1/2}(R_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h))\|_{\Gamma_C} \\
 &\lesssim \gamma_0^{1/2} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h\| \left(\|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C} + \gamma_0^{1/2} \|h_{\Gamma_C}^{1/2}(R_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h))\|_{\Gamma_C} \right) \\
 &\lesssim \gamma_0 \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h\|^2 + \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C}^2 \quad \text{par l'inégalité de Young} \\
 &\lesssim \gamma_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2 + \gamma_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|^2 + \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C}^2. \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

En combinant (5.9) et (5.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \lambda - \lambda_H)\|^2 \\
 \lesssim & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\| + \|\gamma^{1/2}(\lambda - \lambda_H)\|_{\Gamma_C} \|\gamma^{-1/2}([v_{hn}] - [u_n])\|_{\Gamma_C} \\
 & + \|\gamma^{1/2}(\lambda - \lambda_H)\|_{\Gamma_C} \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C} \\
 & + \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu)[u_n]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu_H)([u_{hn}] - \gamma(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h)))d\Gamma \\
 & + \gamma_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2 + \gamma_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|^2 + \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C}^2
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on aboutit à la conclusion que lorsque γ_0 est suffisamment petit :

$$\begin{aligned}
 & \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \lambda - \lambda_H)\|^2 \\
 \lesssim & \left[\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|^2 + \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C}^2 + \|\gamma^{-1/2}([v_{hn}] - [u_n])\|_{\Gamma_C}^2 \right) \right. \\
 & \left. + \inf_{\nu \in M^+} \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu)[u_n]d\Gamma + \inf_{\nu_H \in M_H^+} \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu_H)([u_{hn}] - \gamma(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h)))d\Gamma \right].
 \end{aligned}$$

On choisit $\mathbf{v}_h = \Pi_h \mathbf{u}$ défini dans la Définition 5.2.1. on a alors :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|^2 &= \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|^2 = \sum_{T \in T_h} \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T}^2 \\
 &= \sum_{\substack{T \text{ totalement} \\ \text{enrichi}}} \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T}^2 + \sum_{\substack{T \text{ partiellement} \\ \text{enrichi}}} \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T}^2 \\
 &+ \sum_{\substack{T \text{ non} \\ \text{enrichi}}} \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T}^2 + \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,T^*}^2 \\
 &\lesssim \sum_{\substack{T \text{ totalement} \\ \text{enrichi}}} h_T^2 \sigma_T^2 \|\tilde{\mathbf{u}}_{ri}\|_{2,T}^2 + \sum_{\substack{T \text{ partiellement} \\ \text{enrichi}}} h_T^2 (|\tilde{\mathbf{u}}_{r1}|_{2,B(0,2h_T)} + |\tilde{\mathbf{u}}_{r2}|_{2,B(0,2h_T)})^2 \\
 &+ \sum_{\substack{T \text{ non} \\ \text{enrichi}}} h_T^2 \sigma_T^2 \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T}^2 + h_T^2 (|\tilde{\mathbf{u}}_{r1}|_{2,B(0,h_T)} + |\tilde{\mathbf{u}}_{r2}|_{2,B(0,h_T)})^2 \\
 &\lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,\Omega}^2 \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

De plus, prenons E une arête de Γ_C du triangle $T \in T_h$. Pour un triangle non enrichi, on obtient (voir [66] par exemple) :

$$\begin{aligned}
 \|\gamma^{-1/2}([u_n] - [v_{hn}])\|_E &= \|\gamma^{-1/2}([u_n] - [(\Pi_h \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}])\|_E \\
 &= \|\gamma^{-1/2}([u_{nr}] + [\chi u_{ns}] - [(I_h \mathbf{u}_{ri}) \cdot \mathbf{n}] - [\chi u_{ns}])\|_E \\
 &\lesssim h^{-1/2} h^{3/2} \|u_{nr}\|_{3/2,E} \\
 &\lesssim h \|\mathbf{u}_r\|_{2,T} = h \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T},
 \end{aligned}$$

et pour un triangle totalement enrichi, par la définition de Π_h :

$$\begin{aligned} \|\gamma^{-1/2}([u_n] - [v_{hn}])\|_E &= \|\gamma^{-1/2}([u_{nr}] + [\chi u_{ns}] - [(I_h \tilde{\mathbf{u}}_{ri}) \cdot \mathbf{n}] - [\chi u_{ns}])\|_E \\ &\lesssim \|\gamma^{-1/2}([\tilde{u}_{nr}] - [(I_h \tilde{\mathbf{u}}_{ri}) \cdot \mathbf{n}])\|_E \\ &\lesssim h \|\tilde{\mathbf{u}}_{ri}\|_{2,T} \lesssim h \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T}. \end{aligned}$$

Par sommation sur toutes les arêtes $E \subset \Gamma_C$, on déduit :

$$\|\gamma^{-1/2}([u_n] - [v_{hn}])\|_{\Gamma_C}^2 \lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,\Omega}^2. \quad (5.12)$$

Estimons maintenant $\|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C}^2$. On a

$$\begin{aligned} &\|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C} \\ &= \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C \cap \Omega_1} + \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C \cap \Omega_2} \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{E \in T \\ \text{bon élément de } \Omega_i}} \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_E \\ &+ \sum_{\substack{E \in T \\ \text{mauvais élément de } \Omega_i}} \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_E \end{aligned}$$

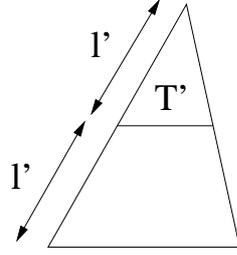
Sans perte de généralité, on peut supposer que Γ_C est parallèle à l'axe des abscisses. Ainsi lorsque E est une arête de Γ_C d'un "bon" triangle $T \in T_h$,

$$\begin{aligned} \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_E &= \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - \sigma_n(\Pi_h \mathbf{u}))\|_E \\ &= \|\gamma^{1/2} \sigma_{yy}(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_E \\ &\lesssim \gamma^{1/2} (h^{-\frac{1}{2}} \|\sigma_{yy}(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_T + h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \sigma_{yy}(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_T) \\ &= \gamma^{1/2} (h^{-\frac{1}{2}} \|\sigma_{yy}(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_T + h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \sigma_{yy}(\mathbf{u}_r)\|_T) \\ &\lesssim \gamma^{1/2} (h^{-\frac{1}{2}} \|(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_{1,T} + h^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_r\|_{2,T}) \\ &\lesssim \gamma^{1/2} h^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T} \\ &\lesssim h \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T} \end{aligned}$$

Si T est un "mauvais" élément, on procède comme dans [113]. Soit T' un "bon voisin". On prolonge T' en construisant le nouvel élément T_d présenté sur la Figure 5.3.

On définit \tilde{I}_h la restriction à T_d de l'opérateur d'interpolation de Lagrange de $\mathbf{v}|_{T'}$, construit sur T' de domaine de définition \mathbb{R}^2 . On remplace alors I_h dans la définition de Π_h par \tilde{I}_h et on obtient :

$$\begin{aligned} \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_E &= \|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - \sigma_n(\Pi_h \mathbf{u}))\|_E \\ &= \|\gamma^{1/2} \sigma_{yy}(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_E \\ &\lesssim \gamma^{1/2} (h^{-\frac{1}{2}} \|\sigma_{yy}(\mathbf{u}_r - \tilde{I}_h \mathbf{u})\|_T + h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \sigma_{yy}(\mathbf{u}_r - \tilde{I}_h \mathbf{u})\|_T) \\ &= \gamma^{1/2} (h^{-\frac{1}{2}} \|\sigma_{yy}(\mathbf{u}_r - \tilde{I}_h \mathbf{u})\|_T + h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \sigma_{yy}(\mathbf{u}_r)\|_T) \\ &\lesssim \gamma^{1/2} (h^{-\frac{1}{2}} \|(\mathbf{u}_r - \tilde{I}_h \mathbf{u})\|_{1,T} + h^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_r\|_{2,T}) \\ &\lesssim \gamma^{1/2} h^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T} \\ &\lesssim h \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,T} \end{aligned}$$


 FIG. 5.3 – Prolongation de T'

Par conséquent :

$$\|\gamma^{1/2}(\sigma_n(\mathbf{u}) - R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C}^2 \lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,\Omega}^2. \quad (5.13)$$

Il reste à estimer les termes d'erreur provenant de l'approximation du contact

$$\inf_{\nu \in M^+} \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu)[u_n] d\Gamma \quad (5.14)$$

et

$$\inf_{\nu_H \in M_H^+} \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu_H)([u_{hn}] - \gamma(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h))) d\Gamma. \quad (5.15)$$

En choisissant $\nu = 0$ dans (5.14), on obtient :

$$\inf_{\nu \in M^+} \int_{\Gamma_C} (\lambda_H - \nu)[u_n] d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} \lambda_H [u_n] d\Gamma \leq 0. \quad (5.16)$$

Pour (5.15), on choisit $\nu_H = \pi_{H0}\lambda = \pi_{H0}\lambda_r$ (par le Lemme 5.1.1) où π_{H0} désigne l'opérateur de projection $L^2(\Gamma_C)$ sur l'espace

$$W_{H0} = \left\{ \nu_H \in L^2(\Gamma_C) : \nu_H|_{[x_i, x_{i+1}[} \in P_0([x_i, x_{i+1}[), \forall 0 \leq i \leq N-1 \right\}.$$

On rappelle que l'opérateur π_{H0} est défini pour tout $v \in L^2(\Gamma_C)$ par

$$\pi_{H0}v \in W_{H0}, \quad \int_{\Gamma_C} (v - \pi_{H0}v)\nu d\Gamma = 0, \quad \forall \nu \in W_{H0},$$

et satisfait l'estimation d'erreur suivante pour tout $0 \leq r \leq 1$:

$$H^{-1/2}\|v - \pi_{H0}v\|_{-1/2,\Gamma_C} + \|v - \pi_{H0}v\|_{\Gamma_C} \leq CH^r \|v\|_{r,\Gamma_C}. \quad (5.17)$$

On voit que $\pi_{H0}\lambda \in M_H^+$ et

$$\begin{aligned} & \inf_{\nu_H \in M_H^+} \int_{\Gamma_C} (\lambda - \nu_H)([u_{hn}] - \gamma(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h))) d\Gamma \\ & \leq \int_{\Gamma_C} (\lambda - \pi_{H0}\lambda)[u_{hn}] d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\pi_{H0}\lambda - \lambda)(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h)) d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.18)$$

La première intégrale de (5.18) est estimée en utilisant (5.17) :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_C} (\lambda - \pi_{H0}\lambda)[u_{hn}]d\Gamma \\
 = & \int_{\Gamma_C} (\lambda - \pi_{H0}\lambda)([u_{hn}] - [u_n])d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \pi_{H0}\lambda)[u_n]d\Gamma \\
 = & \int_{\Gamma_C} (\lambda - \pi_{H0}\lambda)([u_{hn} - u_n])d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \pi_{H0}\lambda)([u_n] - \pi_{H0}[u_n])d\Gamma \\
 \leq & \|\pi_{H0}\lambda - \lambda\|_{-1/2,\Gamma_C} \|u_{hn} - u_n\|_{1/2,\Gamma_C} + \|\pi_{H0}\lambda - \lambda\|_{\Gamma_C} \|u_n - \pi_{H0}u_n\|_{\Gamma_C} \\
 \lesssim & H\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + H^{3/2-\eta}\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \|u_n\|_{1-\eta,\Gamma_C} \\
 \lesssim & H\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + H^{3/2-\eta}\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \|\mathbf{u}\|_{3/2-\eta,\Omega}
 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_C} (\lambda - \pi_{H0}\lambda)[u_{hn}]d\Gamma \tag{5.19} \\
 \lesssim & \alpha\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2 + \alpha^{-1}H^2\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C}^2 + H^{3/2-\eta}\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \|\mathbf{u}\|_{3/2-\eta,\Omega} \\
 \lesssim & \alpha\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2 + \alpha^{-1}H^2\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C}^2 + \alpha^{-1}H^{3/2-\eta}\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C}^2 + \alpha H^{3/2-\eta} \|\mathbf{u}\|_{3/2-\eta,\Omega}^2.
 \end{aligned}$$

Maintenant, on considère la seconde intégrale de (5.18) et en utilisant (5.17), le Lemme 5.2.1, (5.13), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_C} \gamma(\pi_{H0}\lambda - \lambda)(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\
 = & \int_{\Gamma_C} \gamma(\pi_{H0}\lambda - \lambda)(\lambda_H - \lambda)d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\pi_{H0}\lambda - \lambda)(-\sigma_n(\mathbf{u}) + R_h(\mathbf{v}_h))d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_C} \gamma(\pi_{H0}\lambda - \lambda)(-R_h(\mathbf{v}_h) + R_h(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\
 \lesssim & \gamma_0^{1/2}h^{1/2}\|\pi_{H0}\lambda - \lambda\|_{\Gamma_C} \|\gamma^{1/2}(\lambda_H - \lambda)\|_{\Gamma_C} \\
 & + \gamma_0^{1/2}h^{1/2}\|\pi_{H0}\lambda - \lambda\|_{\Gamma_C} \|\gamma^{1/2}(-\sigma_n(\mathbf{u}) + R_h(\mathbf{v}_h))\|_{\Gamma_C} \\
 & + \gamma_0h^{1/2}\|\pi_{H0}\lambda - \lambda\|_{\Gamma_C} \|h^{1/2}R_h(u_h - v_h)\|_{\Gamma_C} \\
 \lesssim & \gamma_0^{1/2}h^{1/2}H^{1/2}\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \|\gamma^{1/2}(\lambda_H - \lambda)\|_{\Gamma_C} \\
 & + \gamma_0^{1/2}h^{1/2}H^{1/2}\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} h\|\mathbf{u} - \chi\mathbf{u}_s\|_{2,\Omega} \\
 & + \gamma_0h^{1/2}H^{1/2}\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Comme $\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + h\|\mathbf{u} - \chi\mathbf{u}_s\|_{2,\Omega}$, on déduit pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_C} \gamma(\pi_{H0}\lambda - \lambda)(\lambda_H + R_h(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\
 \lesssim & \alpha^{-1}hH\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C}^2 + \alpha\|\gamma^{1/2}(\lambda_H - \lambda)\|_{\Gamma_C}^2 + \alpha h^2\|\mathbf{u} - \chi\mathbf{u}_s\|_{2,\Omega}^2 + \alpha\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2. \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

En regroupant les estimations (5.11, 5.12, 5.13, 5.16, 5.19, 5.20), on aboutit au résultat. \blacksquare

On obtient une vitesse de convergence d'ordre $h^{3/4-\eta/2}$ (lorsque $h = H$ dans la Proposition 5.2.2). Pour la méthode des éléments finis classique, Hild et Renard [130] avait obtenu une estimation en $h^{3/4}$.

5.3 Conclusion

En adaptant la technique de domaine fictif introduite dans [113], on a obtenu une estimation d'erreur a priori pour le problème avec contact approché par la méthode XFEM. On a obtenu une convergence en $h^{3/4-\eta/2}$ pour des hypothèses H^2 sur la partie régulière de la solution alors que pour la méthode classique des éléments finis, le résultat est en $h^{3/4}$ lorsque la solution est dans H^2 . Une des perspectives est de vérifier cette convergence numériquement et ensuite d'effectuer l'analyse a posteriori.

Troisième partie

Simulation numérique en mécanique
des fluides

Chapitre 1

Simulation numérique de la dynamique des globules rouges

DANS ce chapitre, nous proposons une méthode numérique permettant de prendre en compte trois aspects essentiels (comportement mécanique des globules rouges, interactions fluide/structures et interactions de contacts structures/structures). L'outil numérique joue alors un rôle primordial : il permet de valider les modèles physiques avancés, d'accéder à des données difficiles à obtenir expérimentalement et de déterminer la dépendance du comportement de l'écoulement en fonction des paramètres du modèle. Nous limitons notre étude au cas bidimensionnel qui, bien que simplificateur, nous permet de reproduire une palette assez importante d'observations expérimentales comme l'illustrent les simulations numériques obtenues.

Ce travail a été effectué en partie lors du CEMRACS 2008 avec Olivier Pantz et Cuc Bui et a donné lieu à un article intitulé **Dynamics of red blood cells in 2D** [55] dans *ESAIM Proceedings*.

Sommaire

1.1	Introduction	187
1.2	Un peu de biologie	188
1.3	Modélisation des globules rouges dans un fluide	190
1.3.1	Comportement mécanique des globules	190
1.3.2	Position du problème	191
1.3.3	Formulation variationnelle	193
1.4	Algorithme	193
1.4.1	Discrétisation en temps	194

1.4.2	Discrétisation en espace	195
1.4.3	Approximation de l'énergie de la membrane	195
1.4.4	Un algorithme de base	198
1.4.5	Contacts	198
1.4.6	Conservation du volume et de la surface	200
1.4.7	Algorithme complet	201
1.5	Simulations numériques	202
1.5.1	Cas d'un seul globule sans force externe hydrodynamique .	202
1.5.2	Sous cisaillement	202
1.5.3	Sous écoulement de Poiseuille	205
1.6	Conclusion	208

1.1 Introduction

LE sang est pour l'essentiel composé de globules rouges, globules blancs et de plaquettes en suspension dans le plasma sanguin. S'il peut être considéré comme un fluide homogène lorsqu'il circule dans des vaisseaux de diamètre important, une telle approximation est dénuée de sens dès qu'il atteint des vaisseaux dont le diamètre est comparable à la taille des cellules qu'ils transportent. Dans ce cas, l'influence de ces dernières sur l'écoulement ne peut plus être homogénéisée. Le comportement mécanique des globules rouges (qui comptent pour 99% des cellules présentes dans le sang), leur interaction avec le fluide environnant ou entre eux mêmes (par contact) doivent être pris en compte.

Dans ce contexte, les simulations numériques peuvent être un outil utile pour tester les différentes modélisations, améliorer les expérimentations qui peuvent être difficiles à réaliser "in vitro" ou "in vivo", déterminer différents paramètres physiques en comparant les résultats expérimentaux et numériques, étudier les effets d'une modification de ces paramètres, qui sont, in vivo, des possibles sources de maladies. Tout ceci a stimulé une activité intense ces dernières années et un large panel de méthodes numériques a été proposé, la plupart en dimension 2 : frontière immergée [166], pénalisation [162], treillis de Boltzmann [186, 238], dynamique de collision entre des particules multiples [191, 192], méthode intégrale [153, 199, 200], courbes de niveau et champ de phase [24, 37, 82], méthode par éléments finis conformes [76]. En parallèle, beaucoup d'expérimentations ont été améliorées, permettant une meilleure compréhension de la dynamique des vésicules et mettant en lumière plusieurs phénomènes : force de portance (les vésicules tendent à se concentrer au milieu des vaisseaux, poussées par les forces hydrodynamiques induites par les parois des vaisseaux [1, 56]), comportement varié des vésicules sous cisaillement ("tumbling", "tank-treading" et "oscillation-respiration" [141, 142, 170, 181]), formation de rouleaux (amas de vésicules), forme de parachute des vésicules sous écoulement de Poiseuille [233].

Dans ce chapitre, on présente une méthode numérique pour résoudre le système fluide/structure formé par les globules rouges et le fluide environnant en dimension 2. L'énergie de la membrane est supposée proportionnelle au carré de la courbure et le fluide environnant est supposé incompressible et newtonien [78, 117]. Une méthode par éléments finis avec des maillages conformes pour le fluide et les membranes a été implémentée sous FreeFem++, un logiciel d'éléments finis [115]. Plusieurs problèmes ont été relevés. Tout d'abord, il a fallu prendre correctement en compte le couplage fluide/structure afin d'obtenir un schéma stable. Comme la membrane est incompressible, la surface des globules reste constante au cours du temps. De plus, en raison de l'incompressibilité du fluide et de l'imperméabilité de la membrane, le volume des vésicules reste aussi constant [209]. Ces deux contraintes doivent être vérifiées avec assez de précision pour obtenir des simulations réalistes. Finalement, un algorithme robuste permet de traiter les éventuels contacts entre les globules ou entre les globules et les parois des vaisseaux. Si les globules et les parois des vaisseaux sont régulières, des forces hydrodynamiques évitent tout contact en temps fini [132]. Néanmoins, il semble que des interactions intercellulaires (pas prises en compte dans ce chapitre) rivalisent avec les forces hydrodynamiques et peuvent aboutir à des contacts entre les cellules. De toute façon, des contacts peuvent se produire "numériquement" à

cause de la discrétisation du problème et de l'importante concentration des globules. Afin d'éviter aux globules de se chevaucher, on ajoute une nouvelle contrainte assurant une distance minimale entre deux globules et entre les globules et les parois [196].

Dans la section suivante, on rappelle la composition des globules qui leur procure la géométrie particulière et certaines propriétés leur permettant de traverser tous les capillaires. Ensuite on présente le modèle adopté dans les simulations décrivant la dynamique des globules. Puis on décrit l'algorithme utilisé. Enfin on présente plusieurs résultats numériques obtenus. Finalement, on termine par quelques conclusions et quelques nouvelles directions de recherche.

1.2 Un peu de biologie

Le plasma sanguin contient principalement des globules rouges, des globules blancs et des plaquettes. Il y a 25 000 milliards de globules rouges soit 4 à 5 millions par mm^3 de sang. Ils jouent ainsi un rôle primordial dans la rhéologie sanguine : assurer le transport de l'oxygène des poumons vers les tissus.



FIG. 1.1 – Des globules au microscope

Le globule rouge ou érythrocyte est une cellule se présentant sous la forme d'une lentille creuse des deux côtés (biconcave) d'un diamètre de 7 à 8 μm et 2 μm d'épaisseur et leur durée de vie est de 120 jours. Ces cellules sont dépourvues de noyau et issues des érythroblastes médullaires ("bébés" globules rouges).

Les cellules les plus nombreuses du sang contiennent de l'hémoglobine qui est un pigment de couleur rouge constitué de protéines associées à du fer. La membrane des globules rouges est constituée d'une double couche phospholipidique avec des protéines. Sur ces protéines se fixent des substances telles que le glucose ou le galactose qui sont à l'origine de la détermination des groupes sanguins. Les phospholipides sont eux constitués de petites molécules contenant des phosphates chargés négativement (appelée la tête hydrophile) et de deux chaînes d'acides gras hydrophobes (appelées les queues). Dans un environnement aqueux, les phospholipides forment spontanément une double couche dont la configuration permet d'isoler les queues des phospholipides du fluide.

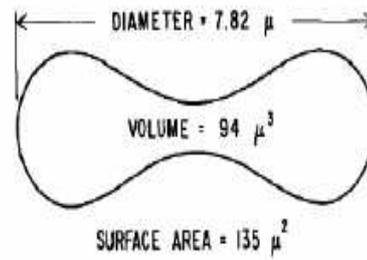


FIG. 1.2 – Volume, surface et diamètre d'un globule en μm^3 , μm^2 et μm .

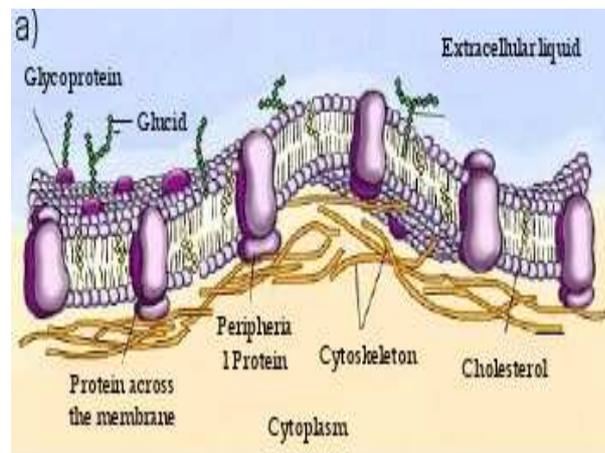


FIG. 1.3 – Composition d'un globule rouge

Cette géométrie particulière ainsi que les propriétés élastiques de la spectrine donne aux globules rouges une certaine élasticité dont ils ont besoin pour voyager à travers les différents capillaires (dont le diamètre de certains ne dépasse pas 2 à 3 μm).

1.3 Modélisation des globules rouges dans un fluide

1.3.1 Comportement mécanique des globules

Le comportement mécanique d'un globule est dirigé par la nature de la membrane qui est principalement composé de phospholipides (voir Figure 1.3). Modifier la surface d'une telle couche bilipidique est très coûteux énergiquement car il exposerait des queues à l'environnement. Ainsi, leurs surfaces (qui est le périmètre dans le cas 2D) restent constantes. Si les lipides résistent très peu aux contraintes de cisaillement, ils résistent à la courbure. Un modèle répandu est de considérer que la double couche est munie d'une énergie élastique, plus connue sous le nom de fonction d'Helfrich (parfois aussi appelée Willmore dans certains contextes) :

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |H|^2 d\Sigma, \quad (1.1)$$

où Σ est la surface occupée par la membrane, φ correspond à la déformation du globule, $d\Sigma$ la mesure de la surface, H la courbure de la surface et k le module d'élasticité.

On a vu dans la section précédente qu'à côté de la double couche lipidique, les globules possèdent aussi un squelette protidique. Celui-ci assure une petite résistance du globule aux contraintes de l'écoulement. L'énergie totale du globule est alors donnée par :

$$J_{RBC}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |H|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} W(\nabla\varphi) d\Sigma, \quad (1.2)$$

où Σ_0 est la configuration de référence de la membrane et W la fonction de conservation de l'énergie de la membrane. De plus, la conservation de l'énergie de la membrane $W(\nabla\varphi)$ dépend seulement du tenseur métrique $\nabla\varphi^t\nabla\varphi$. Dans le cas de la dimension 2, la condition d'inextensibilité locale implique que le tenseur métrique doit être égal à l'identité. Il s'ensuit que $J_{RBC} = J$. Comme on travaille en dimension 2, la distinction entre globules et vésicules, dont les énergies internes sont respectivement données par (1.1) et (1.2) est hors de propos.

Remarque 1.3.1

La situation est différente pour la dimension 3. En effet, la conservation locale de la surface de la membrane n'entraîne pas que le tenseur métrique de la déformation soit réduit à l'identité.

1.3.2 Position du problème

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 correspondant au domaine du fluide. On suppose que les globules sont entourés par un fluide incompressible newtonien caractérisé par sa densité ρ et sa viscosité μ . La viscosité du fluide μ est supposée constante à l'intérieur comme à l'extérieur des vésicules respectivement égale à μ_{in} et μ_{out} .

Soient $\mathbf{u} :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ la vitesse du fluide, $\mathbf{p} :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la pression et les déformations des globules sont notées par $\varphi :]0, T[\times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, où Σ_0 est la configuration de référence de la membrane des globules.

Remarque 1.3.2

On note $\Sigma_0 = \cup_{i=1}^m \Sigma_{0i}$ avec m le nombre de globules rouges et Σ_{0i} leur configuration initiale. Σ_0 correspond à l'union des boucles difféomorphiques au cercle unité S^1 et $\Sigma = \varphi(\Sigma_0)$.

Le problème est le suivant :

– Fluide

Comme l'inertie du fluide n'est pas négligée, le fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressible auxquelles il faut ajouter les conditions aux limites sur $\partial\Omega$, les conditions initiales sur le fluide et sur la déformation initiale des globules :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \mu \Delta \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0) \quad (1.3)$$

La contrainte d'incompressibilité du fluide donne :

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0) \quad (1.4)$$

– Membrane

Comme l'inertie des membranes des globules est négligée, les forces qu'elles exercent sur le fluide sont égales aux contraintes internes et ont deux composantes. L'une d'elle provient directement de l'énergie de courbure J , alors que l'autre est due à l'incompressibilité de la membrane. A chaque instant, les globules sont supposés être en équilibre quasi-statique :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\mathbf{p}_{inext} \boldsymbol{\tau}) = -[\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}] \quad (1.5)$$

où $J(\cdot)$ est l'énergie interne des globules rouges, $\mathbf{p}_{inext} :]0, T[\times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$, appelée "pression inextensible" car elle joue un rôle similaire à la pression \mathbf{p} assurant l'incompressibilité du fluide. Il s'agit d'un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité de la surface, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})/2$ est le tenseur des déformations, \mathbf{n} est le vecteur normal sortant de la surface des globules et pour toute quantité c , $[c]$ désigne le saut de la quantité c à travers la surface du globule :

$$[c] = c_{interieur} - c_{exterieur}.$$

L'incompressibilité de la membrane des globules s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \varphi(\Sigma_0) \quad (1.6)$$

– **Couplage**

L'égalité des vitesses sur la surface des globules rouges mène à :

$$\frac{d\varphi}{dt}(t, x) = \mathbf{u}(t, \varphi(x)) \text{ pour tout } x \in \Sigma_0. \quad (1.7)$$

Pour être plus précis, la condition d'inextensibilité locale vient des équations (1.6) et (1.7). En dérivant (1.7) par rapport à $s \in \Sigma_0$, on obtient que :

$$(\nabla \mathbf{u}) \circ \varphi(t, s) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s).$$

Soit $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangentiel unitaire de la surface des globules :

$$\boldsymbol{\tau} \circ \varphi = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

il s'ensuit que :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \circ \varphi(t, s) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s),$$

et de l'équation (1.6), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s) = 0,$$

et finalement l'inextensibilité de la membrane vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2 = 0.$$

Une avancée majeure dans l'étude théorique des équations de Navier-Stokes a été obtenue par Leray en 1933, qui a prouvé les premiers résultats d'existence et d'unicité de solutions. On a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 1.3.1

Il existe une unique solution faible u de (1.3)-(1.4) qui satisfait :

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), u \in C(0, T; L^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V^{-1,2})$$

où $V^{-1,2}$ est l'espace dual de $\{u \in W_0^{1,2}(\Omega), \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega\}$.

Remarque 1.3.3

Une question ouverte est l'unicité des solutions en dimension 3.

1.3.3 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle associée aux équations précédentes consiste à déterminer la vitesse \mathbf{u} du fluide, les déformations des vésicules φ , la pression \mathbf{p} et la pression inextensible \mathbf{p}_{inext} , telles que pour toutes fonctions test \mathbf{v} , \mathbf{q} et \mathbf{q}_{inext} , on ait :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{v} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{p} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega + \langle J'(\varphi), \mathbf{v} \circ \varphi \rangle + \int_{\Sigma} \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{p}_{inext} \circ \varphi^{-1} d\Sigma = 0, \quad (1.8)$$

$$\int_{\Sigma} \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{q}_{inext} \circ \varphi^{-1} d\Sigma = 0, \quad (1.9)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{q} d\Omega = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{u} \circ \varphi \quad (1.11)$$

Les conditions au bord sont à ajouter au système.

L'équation classique de Navier-Stokes (1.8) est supplémentée par deux termes à cause de l'action de la membrane sur le fluide. On a regroupé les formulations variationnelles de (1.3) et (1.5) et utilisé la formule de Green-Riemann pour obtenir (1.8). Les formulations variationnelles de l'incompressibilité de la membrane et du fluide sont respectivement données par les équations (1.9) et (1.10). On conserve également l'équation (1.11) qui exprime simplement que la vitesse de la membrane est égale à la vitesse du fluide.

1.4 Algorithme

Les difficultés sont les suivantes :

- l'interaction fluide/structure avec le choix de la discrétisation en temps et en espace, ainsi que l'approximation de l'énergie de la membrane.
- la gestion des contacts : la force de lubrification empêche des particules lisses immergées dans un fluide newtonien d'entrer en contact en temps fini. Cependant, elles peuvent devenir arbitrairement proches les unes des autres et suite aux discrétisations en temps et en espace, des collisions numériques peuvent se produire.
- sous des conditions normales, la membrane se déforme à surface et volume constants.

1.4.1 Discrétisation en temps

On utilise une méthode par différences finies. Soit Δt le pas de temps et \mathbf{u}^n , φ^n , \mathbf{p}^n et \mathbf{p}_{inext}^n les approximations de \mathbf{u} , φ , \mathbf{p} et \mathbf{p}_{inext} au temps $t_n = n\Delta t$.

Le terme convectif non linéaire de l'équation de Navier-Stokes est traité par la méthode des caractéristiques introduite dans [198]. On définit la caractéristique \mathbf{X} qui passe par x au temps t associée au champ de vitesses \mathbf{u} par :

$$\begin{cases} \mathbf{X}(x, t, t) = x & \text{pour tout } x \in \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}(x, t, \tau) = \mathbf{u}(\tau, \mathbf{X}(x, t, \tau)). \end{cases}$$

La méthode des caractéristiques permet de discrétiser la dérivée totale : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ de façon lagrangienne. On a alors pour toute fonction $\psi(t, x)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \psi)(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} (\psi(\tau, \mathbf{X}(x, t, \tau)))|_{\tau=t}$$

$X^n = \mathbf{X}(x, t_{n+1}, t_n)$ est la position à l'instant t_n de la particule du fluide qui est en x au temps t_{n+1} . Ainsi comme $\mathbf{X}(x, t_{n+1}, t_{n+1}) = x$, en discrétisant on obtient :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \psi) \right)^{n+1} (x) \approx \frac{\psi^{n+1}(x) - \psi^n(X^n(x))}{\Delta t}$$

La caractéristique est supposée être une ligne polygonale ayant pour origine x et pour extrémité X^n . Le temps mis pour parcourir la longueur de cette ligne polygonale correspond au pas de temps.

Notre schéma consiste alors à résoudre la suite de problèmes suivants :

Trouver \mathbf{u}^{n+1} , φ^{n+1} , \mathbf{p}^{n+1} et \mathbf{p}_{inext}^{n+1} telles que pour toutes fonctions test \mathbf{v} , \mathbf{q} et \mathbf{q}_{inext} :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \circ X^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{p}^{n+1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \\ & + \langle J'(\varphi^{n+1}), \mathbf{v} \circ \varphi^n \rangle + \int_{\Sigma} \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{p}_{inext}^{n+1} \circ (\varphi^n)^{-1} d\Sigma = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\int_{\Sigma} \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{q}_{inext} \circ (\varphi^n)^{-1} d\Sigma = 0, \quad (1.13)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{q} d\Omega = 0, \quad (1.14)$$

avec, en discrétisant (1.11) :

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}$$

1.4.2 Discrétisation en espace

La déformation des globules est discrétisée en utilisant des éléments finis P_1 de Lagrange sur le maillage \mathcal{S}_h^0 de Σ_0 indépendant du temps t_n . La pression inextensible \mathbf{p}_{inext} est discrétisée avec des éléments finis P_0 de Lagrange sur le même maillage. On note par \mathbf{V}_h et \mathbf{W}_h l'ensemble des éléments finis P_1 et P_0 de Lagrange sur \mathcal{S}_h^0 , i.e

$$\mathbf{V}_h = \{\boldsymbol{\varphi}_h \in H^1(\Sigma_0; \mathbb{R}^2) \text{ telle que } \boldsymbol{\varphi}_{h|_e} \in P_1 \text{ pour toute arête } e \text{ de } \mathcal{S}_h^0\},$$

$$\mathbf{W}_h = \{\mathbf{p}_h \in L^2(\Sigma_0; \mathbb{R}) \text{ telle que } \mathbf{p}_{h|_e} \in P_0 \text{ pour toute arête } e \text{ de } \mathcal{S}_h^0\}.$$

D'un autre côté, on utilise un maillage conforme pour calculer la vitesse et la pression à chaque pas de temps t_n . Plus précisément, à chaque itération $n > 0$, on introduit le maillage $\mathcal{S}_h^n = \boldsymbol{\varphi}^n(\mathcal{S}_h^0)$ de $\Sigma_h^n = \boldsymbol{\varphi}^n(\Sigma_0)$. Les vitesse et pression au temps $n + 1$ sont calculées sur un maillage triangulaire régulier \mathcal{T}_h^n tel que \mathcal{S}_h^n soit un sous maillage de \mathcal{T}_h^n . Ainsi, chaque arête de \mathcal{S}_h^n est une arête de \mathcal{T}_h^n . Une formulation P_1 -bulle/ P_1 est utilisée, i.e. P_1 -bulle pour la vitesse \mathbf{u} et des éléments finis P_1 pour la pression \mathbf{p} . On note par \mathbf{P}_h^n et \mathbf{U}_h^n les ensembles des éléments finis P_1 et P_1 -bulle de Lagrange sur \mathcal{T}_h^n , i.e.

$$\mathbf{P}_h^n = \{\mathbf{v}_h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \text{ telle que } \mathbf{v}_{h|_K} \in P_1 \text{ pour tout triangle } K \text{ de } \mathcal{T}_h^n\}$$

et

$$\mathbf{U}_h^n = (\mathbf{P}_h^n)^2 \oplus \mathbf{B}_h^n$$

où $\mathbf{B}_h^n = \{\mathbf{v}_h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ telle que } \mathbf{v}_{h|_K} \in P_3 \text{ pour tout triangle } K \text{ et } \mathbf{v}_{h|_e} = 0 \text{ pour toute arête } e \text{ de } \mathcal{T}_h^n\}$.

1.4.3 Approximation de l'énergie de la membrane

Comme la membrane des globules est supposée inextensible, la fonction de Helfrich (1.1) adopte une forme simple particulière. En effet, on a :

$$J(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} k \left| \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}}{ds^2} \right|^2 d\Sigma.$$

Cependant, cette énergie n'est jamais finie pour les éléments choisis pour la discrétisation en espace de la déformation (il s'agit des éléments finis P_1 de Lagrange). Pour surmonter ce problème, on approxime la fonctionnelle J par

$$J_h(\boldsymbol{\varphi}_h) = \inf_{\substack{\boldsymbol{\Phi}_h \in H^2(\Sigma_0; \mathbb{R}^2) \\ \boldsymbol{\Phi}_h(x_i) = \boldsymbol{\varphi}_h(x_i)}} J(\boldsymbol{\Phi}_h), \quad (1.15)$$

où (x_i) décrit l'ensemble des sommets du maillage \mathcal{S}_h^0 de Σ_0 . La solution du problème de minimisation (1.15) appartient à l'ensemble des splines cubiques des éléments finis d'Hermite de \mathcal{S}_h^0 . Malheureusement, le logiciel éléments finis utilisé dans ce chapitre se restreint aux éléments finis de Lagrange. On contourne cette limitation en reformulant ce

problème de minimisation en (1.16) sur l'espace des éléments finis P_3 de Lagrange \mathbf{R}_h . On pose

$$\mathbf{R}_h = \{\Phi_h \in H^1(\Sigma_0; \mathbb{R}^2) \text{ telle que } \Phi_h|_e \in P_3 \text{ pour toute arête } e \text{ de } \mathcal{S}_h^0\},$$

et on a :

$$J_h(\varphi_h) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^n} \int_e k \left| \frac{d^2(\Phi_h^{n+1} \circ (\varphi_h^n)^{-1})}{ds^2} \right|^2 d\Sigma : \Phi_h \in \mathbf{R}_h; \Phi_h(x_i) = \varphi_h(x_i) \right. \\ \left. \text{pour tout nœud } x_i \in \mathcal{S}_h^0 \text{ et } b_n(\Phi_h, \mathbf{q}_\tau) = 0 \text{ pour tout } \mathbf{q}_\tau \in \mathbf{V}_h \right\}, \quad (1.16)$$

où

$$b_n(\Phi_h, \mathbf{q}_\tau) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^n} \int_e \frac{d^2(\Phi_h^{n+1} \circ (\varphi_h^n)^{-1})}{ds^2} \cdot \mathbf{q}_\tau \circ (\varphi_h^n)^{-1} d\Sigma \\ + \int_\Sigma \frac{d(\Phi_h^{n+1} \circ (\varphi_h^n)^{-1})}{ds} \cdot \frac{d(\mathbf{q}_\tau \circ (\varphi_h^n)^{-1})}{ds} d\Sigma.$$

La contrainte additionnelle $b_n(\Phi_h, \mathbf{q}_\tau) = 0$ assure que les solutions admissibles Φ_h appartiennent à $H^2(\Sigma_0)$.

Pour résoudre l'approximation de (1.12), on introduit $\Phi_h \in \mathbf{R}_h$ comme nouvelle variable de notre système. De plus, deux multiplicateurs de Lagrange sont introduits : \mathbf{p}_τ qui assure que Φ_h appartienne à l'espace H^2 et \mathbf{p}_c qui assure la condition $\Phi_h(x_i) = \varphi_h(x_i)$. Ces multiplicateurs sont des éléments finis P_1 à valeurs dans \mathbb{R}^2 . L'équation (1.12) réécrite en utilisant ce problème discret est la suivante :

Trouver $(\mathbf{u}^{n+1}, \Phi_h^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}, \mathbf{p}_{inext}^{n+1}, \mathbf{p}_\tau^{n+1}, \mathbf{p}_c^{n+1}) \in \mathbf{U}_h^n \times \mathbf{R}_h \times \mathbf{P}_h^n \times \mathbf{W}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h$ telles que pour toutes fonctions test $(\mathbf{v}, \Psi_h, \mathbf{q}, \mathbf{q}_{inext}, \mathbf{q}_\tau, \mathbf{q}_c) \in \mathbf{U}_h^n \times \mathbf{R}_h \times \mathbf{P}_h^n \times \mathbf{W}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h$, on ait :

$$\int_\Omega \rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \circ X^n}{\Delta t} \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{p}^{n+1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \\ - \Delta t \sum_{x \in \mathcal{V}_h^0} h_x^n \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{p}_c^{n+1}(x) + \int_\Sigma \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{p}_{inext}^{n+1} \circ (\varphi_h^n)^{-1} d\Sigma = 0, \quad (1.17)$$

La formulation variationnelle **stokes** donne la première intégrale de (1.17) avec la condition (1.14) intégrée. La formulation variationnelle **splinstokes** renvoie le terme somme de (1.17) et **inext** donne le dernier terme. Les inconnues sont $[\mathbf{ux}, \mathbf{uy}, \mathbf{p}]$, $[\mathbf{phix}, \mathbf{phiy}, \mathbf{ptaux}, \mathbf{ptauy}, \mathbf{pcx}, \mathbf{pcy}]$ et $[\mathbf{pinext}]$, $[\mathbf{vx}, \mathbf{vy}, \mathbf{q}]$ et $[\mathbf{rvx}, \mathbf{rvy}]$ sont les fonctions test, **Th** correspond au maillage, $[\mathbf{uxprec}, \mathbf{uyprec}]$ correspond à la vitesse au pas de temps précédent.

Pour calculer $\mathbf{u}^n \circ X^n$, on utilise la fonction **convect**. On désigne par \mathbf{u}^n le champ des vitesses éléments finis, la valeur approchée au temps n de la caractéristique passant par x au temps $n+1$ est $X^n(x) = x - \Delta t \mathbf{u}^n(x)$. Ainsi **convect** $(\mathbf{u}^n, -\Delta t, \mathbf{v}^n) = \mathbf{v}^n \circ X^n$ avec \mathbf{v} fonction éléments finis à valeurs vectorielles.

```

varf stokes ([ux,uy,p],[vx,vy,q]) =
  int2d(Th)(rho/dt*(ux*vx+uy*vy)+mu*(2*dx(ux)*dx(vx)
    +(dx(uy)+dy(ux))*(dx(vy)+dy(vx)) +2*dy(uy)*dy(vy)))
-int2d(Th)(p*dx(vx) +p*dy(vy))
-int2d(Th)(q*dx(ux) +Sq*dy(uy))
+int2d(Th)(rho/dt*convect([uxprec,uyprec],-dt,uxprec)*vx
  +rho/dt*convect([uxprec,uyprec],-dt,uyprec)*vy)
//conditions au bord pour un profil de Poiseuille
+on(1,ux=4.*vflow*(Height1/2.-y)*(y+Height1/2.)/Height1^2,uy=0.)
+on(2,4,ux=0.,uy=0.);
// ou conditions au bord pour un ecoulement de cisaillement
//+on(2,ux=vflow,uy=0.)
//+on(4,ux=-vflow,uy=0.)

varf splinestokes ([phix,phiy,ptaux,ptauy,pcx,pcy],[rvx,rvy]) =
  -int1d(Sh,bord,qfe=qf1pElump)(dt*(rvx*pcx+rvy*pcy));

varf inext ([pinext],[rvx,rvy])= int1d(Sh,bord,qfe=qf1pE) ((-ds(rvx)*N.y+ds(rvy)*N.x)*pinext);

```

$$\begin{aligned}
& \sum_{e \in \mathcal{E}_h^n} \int_e k \frac{d^2(\Phi_h^{n+1} \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds^2} \frac{d^2(\Psi_h \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds^2} + \frac{d^2(\Psi_h \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds^2} \cdot \mathbf{p}_\tau^{n+1} \circ (\varphi^n)^{-1} d\Sigma \\
& + \int_\Sigma \frac{d(\Psi_h \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds} \cdot \frac{d(\mathbf{p}_\tau^{n+1} \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds} d\Sigma + \sum_{x \in \mathcal{V}_h^0} h_x^n \Psi_h(x) \cdot \mathbf{p}_c^{n+1}(x) = 0, \quad (1.18)
\end{aligned}$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^n} \int_e \frac{d^2(\Phi_h^{n+1} \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds^2} \cdot \mathbf{q}_\tau \circ (\varphi^n)^{-1} d\Sigma + \int_\Sigma \frac{d(\Phi_h^{n+1} \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds} \cdot \frac{d(\mathbf{q}_\tau \circ (\varphi^n)^{-1})}{ds} d\Sigma = 0, \quad (1.19)$$

$$\sum_{x \in \mathcal{V}_h^0} h_x^n (\Phi_h^{n+1}(x) - \varphi^{n+1}(x)) \cdot \mathbf{q}_c(x) = 0, \quad (1.20)$$

La formulation variationnelle spline regroupe (1.18), (1.19) et (1.20). Les inconnues sont $[\text{phix}, \text{phiy}, \text{ptaux}, \text{ptauy}, \text{pcx}, \text{pcy}]$, $[\text{psix}, \text{psiy}, \text{qtaux}, \text{qtauy}, \text{qcx}, \text{qcy}]$ sont les fonctions test et le système est résolu par la factorisation multifrontale LU.

```

varf spline ([phix,phiy,ptaux,ptauy,pcx,pcy],[psix,psiy,qtaux,qtauy,qcx,qcy],solver=UMFPACK)=
  int1d(Sh,bord,qfe=qf2pE)(k/dt*(dss(phix)*dss(psix)+dss(phiy)*dss(psiy)))
//Impose phi dans H2
+int1d(Sh,bord,qfe=qf2pE)(dss(phix)*qtaux+dss(psix)*ptaux+dss(phiy)*qtauy+dss(psiy)*ptauy
  + ds(phix)*ds(qtaux)+ds(psix)*ds(ptaux)+ds(phiy)*ds(qtauy)+ds(psiy)*ds(ptauy))
// Impose phi=x sur les sommets du bord
+int1d(Sh,bord,qfe=qf1pElump)( phix*qcx+phiy*qcy + psix*pcx+psiy*pcy)

```

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}, \quad (1.21)$$

où \mathcal{E}_h^n est l'ensemble des arêtes du maillage S_h^n de Σ , \mathcal{V}_h^n les ensembles des sommets et

$$h_x^n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_h^0 \\ x \in \partial e}} |\varphi^n(e)|.$$

1.4.4 Un algorithme de base

L'algorithme numérique que l'on propose est le suivant :

1. **Initialisation** de la vitesse initiale \mathbf{u}^0 du fluide et de la déformation φ^0 des vésicules ;
2. **Calcul de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} et des déformations φ^{n+1}** au temps $(n+1)\Delta t$ en utilisant (1.17-1.21) et (1.13-1.14) ;
3. **Remaillage** : On reconstruit le maillage \mathcal{T}_h^{n+1} du domaine Ω pour que l'ensemble des arêtes contienne les arêtes du maillage $\mathcal{S}_h^{n+1} = \varphi^{n+1}(\Sigma_0)$;
4. Retour au (2) jusqu'à ce que le temps final T soit atteint.

1.4.5 Contacts

L'algorithme précédent ne tient pas correctement compte des contacts probables entre les vésicules elles-mêmes et entre les vésicules et les bords du domaine. On sait que d'après [132], les corps rigides ne peuvent pas entrer en contact en un temps fini en dimension 2. Cela suggère que c'est également impossible pour les vésicules déformables. Quelle que soit la réponse, des collisions peuvent se produire numériquement. Afin d'éviter tout échec de création de maillage, on doit assurer à chaque itération que les globules ne s'intersectent pas entre eux ou avec le bord du domaine. C'est pourquoi on ajoute une étape de projection de la déformation φ^{n+1} sur l'ensemble des déformations sans intersection qui ne traverse pas le bord du domaine. Plus précisément, à la place de l'étape (3), on calcule la déformation $\varphi^{n+1} \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon}$ telle que :

$$d(\varphi^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon}} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1}) \quad (1.22)$$

où $\tilde{\varphi}^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1} \circ \varphi^n$, $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$ est l'ensemble des déformations admissibles et $d(\cdot, \cdot)$ est une distance.

La fonction distance utilisée est une approximation de la norme H^2 de $\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}$. La norme H^2 n'est pas correctement définie. En effet, φ^{n+1} et $\tilde{\varphi}^{n+1}$ appartiennent seulement à H^1 car elles sont des éléments P_1 de Lagrange. Plus précisément, pour tout élément φ_h et ψ_h dans \mathbf{V}_h , on pose :

$$d(\varphi_h, \psi_h) = (\|\varphi_h - \psi_h\|_{L^2}^2 + J_h(\varphi_h - \psi_h))^{1/2}.$$

L'ensemble des déformations admissibles est défini par :

$$\mathcal{A}_{h,\varepsilon} = \{ \varphi_h \in \mathbf{V}_h \text{ telle que } \text{dist}(\varphi, \partial\Omega) \geq \varepsilon \text{ et } \text{dist}(\varphi_h(a), \varphi_h(b)) \geq \varepsilon \\ \text{pour toutes arêtes } a \text{ et } b \text{ de } \mathcal{S}_h, a \cap b = \emptyset \},$$

$\varepsilon > 0$ étant une petite distance de sécurité. L'ensemble admissible $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$ n'étant pas convexe, le problème (1.22) n'est pas trivial. Le minimum de $d(\cdot, \tilde{\varphi}^{n+1})$ est calculé en utilisant une méthode d'approximation interne introduite dans [196] (voir aussi [12] pour l'application aux valves aortiques en dimension 3). Cela consiste à résoudre une suite de problèmes convexes définis par :

$$d(\varphi_{p+1}^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{T}(\varphi_p^{n+1})} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1}) \quad (1.23)$$

avec $\varphi_0^{n+1} = \varphi^n$. L'application $T(\cdot)$ donne la carte de tous les éléments ψ de $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$ sur un voisinage convexe $T(\psi)$ de $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$ (voir [196] pour plus de détails ou Annexe B). Pour tout $\psi \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon}$, $T(\psi)$ est définie par :

$$T(\psi) = \{\varphi_h \in \mathbf{V}_h \text{ telle que } F_{e,x}^0(\varphi_h) \leq 0 \text{ et } F_{e,x}^1(\varphi_h) \leq 0 \text{ pour toute arête } e \text{ de } \mathcal{S}_h^0\},$$

où pour $i = 0, 1$,

$$F_{e,x}^i(\varphi_h) = \varepsilon - n_{e,x}(\psi) \cdot (\varphi_h(e_i) - \varphi_h(x)),$$

e_0 et e_1 étant les extrémités de l'arête e et $n_{e,x}(\psi)$ le vecteur unitaire défini par

$$\min_{x_e \in \bar{e}} n_{e,x}(\psi) \cdot (\psi(x_e) - \psi(x)) = \text{dist}(\psi(e), \psi(x)).$$

Remarque 1.4.1

La dépendance des fonctions $F_{e,x}^0$ et $F_{e,x}^1$ par rapport à ψ dans la définition de $T(\psi)$ est implicite.

Voici la méthode d'Uzawa appliquée pour résoudre (1.23) où Cg et Cd correspondent aux $F_{e,x}^i$:

```

...
real [int, int] fcx (NbVesTot+1, ndof+1), fcy (NbVesTot+1, ndof+1);

//initialisation des lambda
lambdag=0.; lambdad=0.;
...
//calcul de la normale
bool poursuit=true;
NiterUzawa=0;
while (poursuit)
{
  NiterUzawa++;

  //mise a jour des forces de contact
  fcx = 0; fcy = 0;
  for (int i1=0; i1<NbVesTot+1; i1++) for (int j1=0; j1<Ndof(i1); j1++) //parcours des aretes
    for (int i2=0; i2<NbVesTot+1; i2++) for (int j2=0; j2<Ndof(i2); j2++) //parcours des sommets
      if (!(i1==i2) && ((j1==j2) || (j2==((j1+1)%Ndof(i1))))){
        fcx(i2, j2) -= (lambdag(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2) + lambdad(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2))
          *nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2);
        fcy(i2, j2) -= (lambdag(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2) + lambdad(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2))
          *ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2);
        fcx(i1, j1) += lambdag(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2);
        fcy(i1, j1) += lambdag(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2);
        fcx(i1, j1+1) += lambdad(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2);
        fcy(i1, j1+1) += lambdad(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2);
      }

  // Minimisation de l'energie avec les forces de contact
  ...

  // test des conditions admissibles
  real maxl=0;
  int [int, int] nbcontraintes (NbVesTot+1, ndof);
  nbcontraintes=1;
  bool admissible=true;
  for (int i1=0; i1<NbVesTot+1; i1++) for (int j1=0; j1<Ndof(i1); j1++) //parcours des aretes
    for (int i2=0; i2<NbVesTot+1; i2++) for (int j2=0; j2<Ndof(i2); j2++) //parcours des sommets
      if (!(i1==i2) && ((j1==j2) || (j2==((j1+1)%Ndof(i1))))){
        Cg(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=epsilon - (nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*(Cx(i1, j1)-Cx(i2, j2))
          +ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*(Cy(i1, j1)-Cy(i2, j2)));
        Cd(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=epsilon - (nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*(Cx(i1, j1+1)-Cx(i2, j2))
          +ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)*(Cy(i1, j1+1)-Cy(i2, j2)));
        nbcontraintes(i2, j2)+=(Cg(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)>0)+(Cd(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)>0);
        if (!(Cd(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)<epsilon/2.) && (Cg(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)<
          epsilon/2.)) {
          admissible=false;
        }
      }
}

```

```

// Mise a jour des multiplicateurs de Lagrange avec alpha petit reel positif
for (int i1=0;i1<NbVesTot+1;i1++) for (int j1=0;j1<Ndof(i1);j1++) //parcours des aretes
  for (int i2=0;i2<NbVesTot+1;i2++) for (int j2=0;j2<Ndof(i2);j2++) //parcours des sommets
    if (!(i1==i2) && ((j1==j2) || (j2==((j1+1)%Ndof(i1))))){
      lambdag(i1*ndof+j1,i2*ndof+j2)=max(0.,lambdag(i1*ndof+j1,i2*ndof+j2)
      +alpha/nbcontraintes(i2,j2)*Cg(i1*ndof+j1,i2*ndof+j2));
      lambdad(i1*ndof+j1,i2*ndof+j2)=max(0.,lambdad(i1*ndof+j1,i2*ndof+j2)
      +alpha/nbcontraintes(i2,j2)*Cd(i1*ndof+j1,i2*ndof+j2));
      maxl=max(lambdag(i1*ndof+j1,i2*ndof+j2),maxl);}

// Critere d'arret
// delta=sqrt(int1d(ESh)((Phixprec-Phix)^2+(Phiyprec-Phiy)^2));
if (delta<1.e-4) poursuit=false;
if (!admissible) poursuit=true;
} //end Uzawa

```

1.4.6 Conservation du volume et de la surface

Même pour des temps de simulations assez courts, l'algorithme introduit dans la section précédente ne conserve pas suffisamment les volumes et périmètres des globules. En effet, il les préserve seulement à l'ordre un. Les variations à l'ordre deux font apparaître des variations significatives du volume et du périmètre en temps long. Pour éviter des grandes déviations du volume ou du périmètre de leurs valeurs initiales, on modifie l'étape de projection sur l'ensemble des déformations sans intersection en ajoutant les contraintes appropriées au problème de minimisation (1.22). Ainsi, à chaque itération, la déformation φ^{n+1} est calculée en résolvant :

$$d(\varphi^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon} \cap \mathbf{V}_h^{ad}} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1}) \quad (1.24)$$

où \mathbf{V}_h^{ad} est l'ensemble des déformations P_1 inextensibles avec volume prescrit :

$$\mathbf{V}_h^{ad} = \{ \varphi \in \mathbf{V}_h \text{ telle que } \ell_e(\varphi) = \ell_e(\varphi^0) \text{ pour toute arête } e \text{ de } \mathcal{S}_h^0 \\ \text{ et } \text{Vol}_i(\varphi) = \text{Vol}_i(\varphi^0) \text{ pour tout } i \in I \}.$$

La notation I correspond à l'ensemble des vésicules, $\text{Vol}_i(\varphi)$ est le volume de la i -ème vésicule et $\ell_e(\varphi) = |\varphi(e)|$ est la longueur de l'arête déformée $\varphi(e)$. Le volume et les contraintes d'inextensibilité ajoutés dans le problème de minimisation (1.24) ne sont pas convexes. On résout le problème de minimisation sous les contraintes d'incompressibilité de la membrane :

$$|\tilde{\varphi}^{n+1}(x_{i+1}) - \tilde{\varphi}^{n+1}(x_i)| = |x_{i+1} - x_i|$$

et sous la contrainte volumique :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \tilde{\varphi}^{n+1} \wedge \frac{d\tilde{\varphi}^{n+1}}{d\tau} d\Sigma = V_0$$

où V_0 est le volume initial. Pour résoudre ce problème, on utilise un schéma itératif de Newton, en linéarisant les contraintes à chaque étape. Ainsi, φ^{n+1} est calculée en utilisant l'algorithme suivant :

1. **Initialisation** : on pose $\varphi_0^{n+1} = \varphi^n$;

2. Pour chaque $k > 0$, on **calcule** φ_k^{n+1} telle que

$$d(\varphi_k^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon} \cap \mathbf{V}_{h,k}^{ad}} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1})$$

où

$$\mathbf{V}_{h,k}^{ad} = \{ \varphi \in \mathbf{V}_h \text{ telle que } P_{e,k}(\varphi) = P_{e,k}(\varphi_h^0) \text{ pour toutes arêtes } e \text{ de } \mathcal{S}_h^0 \\ \text{ et } L_{i,k}(\varphi) = L_{i,k}(\varphi^0) \text{ pour tout } i \in I \}$$

avec $P_{e,k} = D\ell_e(\varphi_{k-1}^{n+1})$ et $L_{i,k} = DVol_i(\varphi_{k-1}^{n+1})$;

3. **Critère d'arrêt :**

Si $|\text{Vol}_i(\varphi_k^{n+1}) - \text{Vol}_i(\varphi_k^0)| < \delta_V \text{Vol}_i(\varphi_k^0)$ et $\| |\varphi_k^{n+1}(e)| - |\varphi_k^0(e)| \| < \delta_e |\varphi_k^0(e)|$ pour toutes arêtes e de \mathcal{S}_h^0 et toutes vésicules $i \in I$ alors STOP, sinon on retourne à (2).

1.4.7 Algorithmme complet

1. **Initialisation** de la vitesse \mathbf{u}^0 du fluide et de la déformation φ^0 des vésicules, on pose $n = 0$;

2. **Calcul de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} et des déformations (avant l'étape de projection)** $\tilde{\varphi}^{n+1}$ au temps $(n+1)\Delta t$ solutions de (1.17-1.21)¹ et (1.13-1.14);

3. **Etape de projection effectuée grâce à un algorithme d'Uzawa :** calcul de la déformation φ^{n+1} au temps $(n+1)\Delta t$:

(a) **Initialisation :** On pose $\varphi_0^{n+1} = \varphi^n$, $\tilde{\varphi}^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}$ et $k = 1$;

(b) **Calculer φ_k^{n+1}** telle que

$$d(\varphi_k^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon} \cap \mathbf{V}_{h,k}^{ad}} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1});$$

i. On pose $\varphi_{k,0}^{n+1} = \varphi_{k-1}^{n+1}$ et $p = 0$;

ii. **On calcule $\varphi_{k,p+1}^{n+1}$** telle que

$$d(\varphi_{k,p+1}^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in T(\varphi_{k,p}^{n+1}) \cap \mathbf{V}_{h,k}^{ad}} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1});$$

iii. Si

$$d(\varphi_{k,p+1}^{n+1}, \varphi_{k-1,p+1}^{n+1}) < \delta / \Delta t,$$

on pose $\varphi_k^{n+1} = \varphi_{k,p+1}^{n+1}$ et on va au (3c),
sinon on augmente p et on va au 3(b)ii;

(c) **Critère d'arrêt :** Si

$$|\text{Vol}_i(\varphi_k^{n+1}) - \text{Vol}_i(\varphi_k^0)| < \delta_V \text{Vol}_i(\varphi_k^0) \text{ et } \| |\varphi_k^{n+1}(e)| - |\varphi_k^0(e)| \| < \delta_e |\varphi_k^0(e)|$$

pour toutes arêtes e de \mathcal{S}_h^0 et toutes vésicules $i \in I$ alors on pose $\varphi^{n+1} = \varphi_k^{n+1}$ et on va au (4), sinon on augmente k et on va au (3b);

4. **Remaillage :** On reconstruit un maillage \mathcal{T}_h^{n+1} du domaine Ω pour que l'ensemble des arêtes contienne les arêtes du maillage $\mathcal{S}_h^{n+1} = \varphi^{n+1}(\Sigma_0)$;

5. On augmente n et on va à l'étape (2) jusqu'à atteindre le temps final T .

¹ φ^{n+1} doit être remplacée par $\tilde{\varphi}^{n+1}$ dans l'ensemble des équations (1.17-1.21)

1.5 Simulations numériques

Les simulations ont été réalisées sous *Freefem++*.

1.5.1 Cas d'un seul globule sans force externe hydrodynamique

La Figure 1.4 illustre un globule de $8\ \mu\text{m}$ de diamètre en état d'équilibre (sans force externe hydrodynamique). La membrane des globules a un module d'élasticité valant $k = 1.8 \times 10^{-12}$ dyn-cm [91]. Les globules suspendus dans le plasma sanguin sont principalement composés d'eau à 92% par volume. Dans les simulations suivantes, on utilise la viscosité de l'eau $\mu_{out} = 1$ mPa·s pour le fluide environnant. Comme on peut le voir sur la figure, un maillage conforme est utilisé pour les calculs. Le volume réduit a été choisi afin que la forme d'équilibre de la vésicule soit en accord avec les observations de [78].

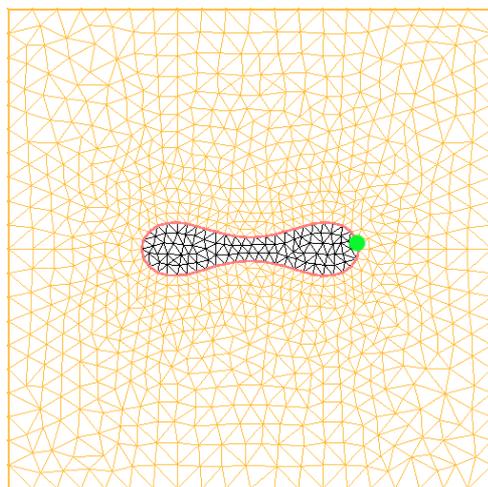


FIG. 1.4 – Un globule en état d'équilibre.

1.5.2 Sous cisaillement

Sous écoulement de cisaillement, les vésicules montrent des dynamiques différentes dépendant de paramètres liés à l'écoulement tels que le nombre capillaire ou le taux de cisaillement, et liés au globule lui-même tels que le rapport entre la viscosité externe et interne, le rapport entre la surface et le volume et le confinement [141, 142, 170]. Les deux mouvements reconnus du globule rouge sous écoulement de cisaillement sont le mouvement périodique de rotation solide (*tumbling*) et le mouvement stationnaire de chenille de char (*tank-treading*).

Mouvement de tank-treading



FIG. 1.5 – Mouvement de "tank-treading" observé au microscope

Lorsque que la viscosité interne est faible, la forme des globules reste constante après un temps de relaxation et le flux est stationnaire. Néanmoins, la déformation des globules n'est pas constante : le globule présente une orientation fixe et sa membrane tourne autour du fluide interne (voir Figure 1.5). La Figure 1.6 illustre à différents pas de temps la déformation d'un globule en mouvement de "tank-treading". On prend pour paramètres : le diamètre du globule vaut $8 \mu\text{m}$, $k = 1.8 \times 10^{-12} \text{ dyn-cm}$, $\mu_{in} = \mu_{out} = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ et le taux de cisaillement est de 2 s^{-1} . Un élément de la membrane du globule est marqué par un petit disque vert, qui permet de visualiser le mouvement. Dans l'état stationnaire, le globule forme un angle constant avec l'axe du vaisseau.

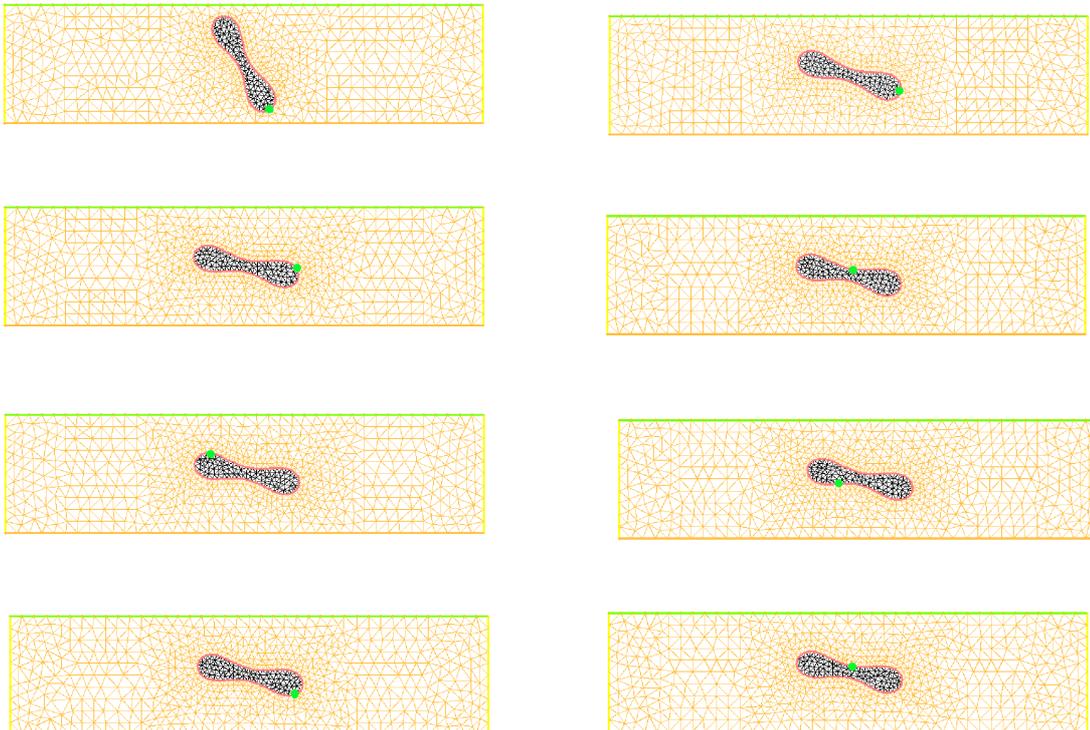


FIG. 1.6 – Mouvement stationnaire de tank-treading d'un globule sous cisaillement, aux différents pas de temps suivants, de gauche à droite, de haut en bas : $t = 0\text{s}, 2\text{s}, 4\text{s}, 20\text{s}, 30\text{s}, 50\text{s}, 70\text{s}, 90\text{s}$.

Mouvement de tumbling



FIG. 1.7 – Mouvement de "tumbling" observé au microscope

Quand le rapport entre les viscosités externe et interne μ_{in}/μ_{out} augmente, la dynamique des globules change en un mouvement de tumbling (voir Figures 1.7 et 1.8). La vésicule se comporte comme un solide et tourne périodiquement autour de son centre. Notons que la vitesse de rotation n'est pas constante. Proche de la position verticale, le globule est un peu déformé par la forte torsion exercée par le fluide et sa vitesse de rotation atteint un maximum. Le mouvement de tumbling est combiné avec le tank-treading lorsqu'il approche de l'état horizontal. Les paramètres utilisés sont les suivants : le diamètre du globule vaut $10 \mu\text{m}$, $k = 1.8 \times 10^{-12}$ dyn-cm, $\mu_{in} = 10$ mPa·s, $\mu_{out} = 1$ mPa·s et le taux de cisaillement est de 10 s^{-1} .



FIG. 1.8 – Mouvement de tumbling d'un globule sous cisaillement aux différents pas de temps suivants, de gauche à droite, de haut en bas : $t = 0\text{s}, 2\text{s}, 4.5\text{s}, 5\text{s}, 5.3\text{s}, 5.7\text{s}$.

1.5.3 Sous écoulement de Poiseuille

Dynamique à travers les capillaires

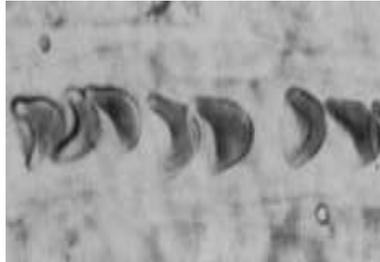


FIG. 1.9 – Forme des globules in vivo dans un capillaire de $6 \mu\text{m}$ de diamètre

La grande déformabilité des globules permet à ceux-ci de traverser les capillaires plus fins que leur diamètre. Ils adoptent une forme spécifique de parachute comme l'on voit sur la Figure 1.9. Dans la Figure 1.10, quatre globules sont placés dans un écoulement de Poiseuille. Les paramètres utilisés sont les suivants : le diamètre des globules vaut $8 \mu\text{m}$, $k = 1.8 \times 10^{-12}$ dyn-cm, $\mu_{in} = \mu_{out} = 1$ mPa·s et la vitesse de l'écoulement à l'entrée du capillaire vaut $40 \mu\text{m/s}$. Les forces hydrodynamiques évitent aux globules de toucher les parois du capillaire. De plus, la cellule a une "mémoire de forme" : lorsqu'elle est déformée par des forces externes, elle retourne ensuite à sa forme biconcave.

A une intersection

La première image en haut à gauche dans la Figure 1.11 illustre la configuration initiale de quatre globules dans un capillaire sous écoulement de Poiseuille. On voit qu'ils se collent à l'arrivée de la bifurcation où des contacts entre eux et le bord du vaisseau se produisent. Après un instant, les globules continuent de progresser dans les deux branches du capillaire alors que les contacts persistent. Finalement, chaque globule a choisi sa branche et se sépare. Les paramètres utilisés sont les suivants : le diamètre des globules vaut $8 \mu\text{m}$, $k = 1.8 \times 10^{-12}$ dyn-cm, $\mu_{in} = \mu_{out} = 1$ mPa·s et la vitesse de l'écoulement à l'entrée du vaisseau est $40 \mu\text{m/s}$. En raison du traitement des contacts entre les globules, le temps de calcul est plus important que dans les autres simulations. Le temps total de calcul est de 4477 secondes de temps CPU sur un PC de 3GHz comparé au 139s de la simulation du mouvement de "tumbling" illustré sur la Figure 1.8.

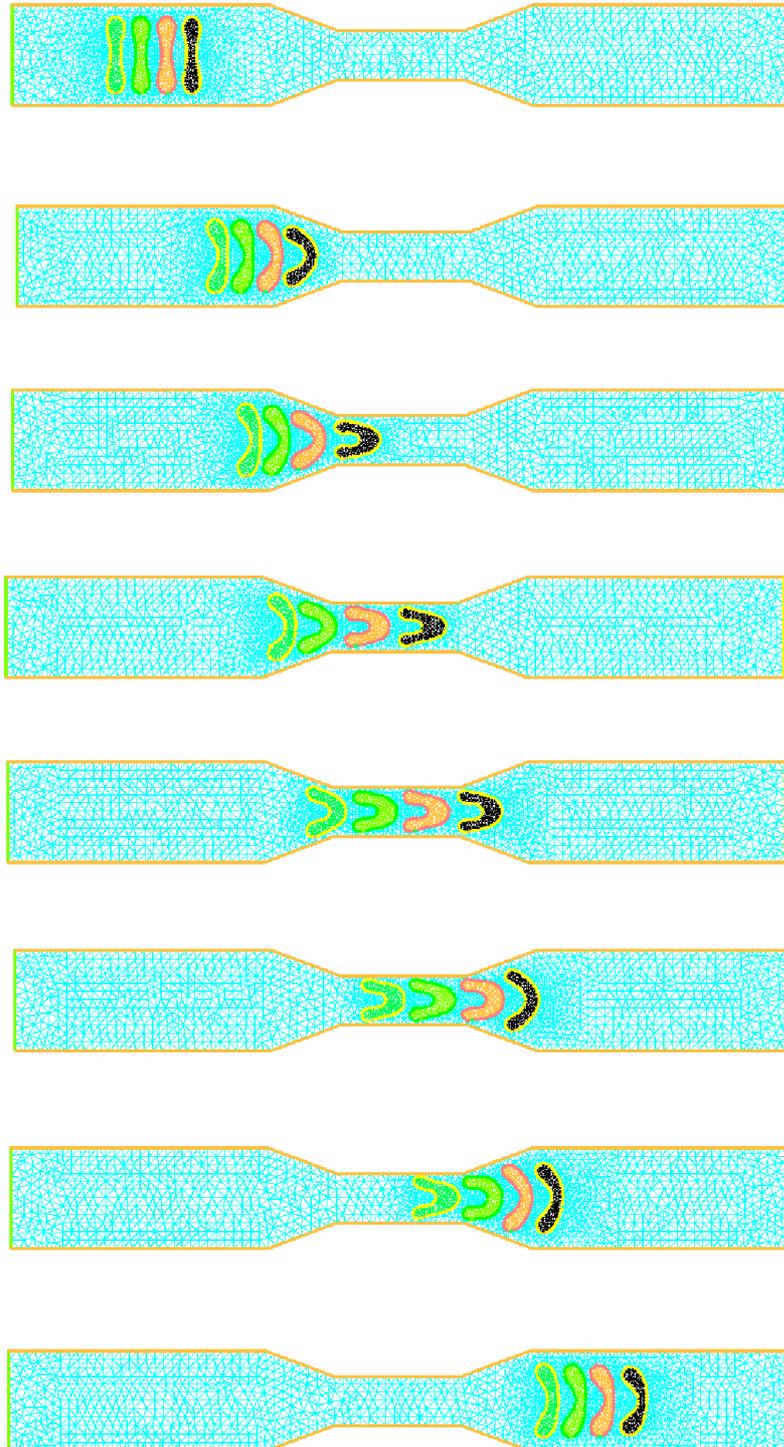


FIG. 1.10 – Simulation de quatre globules où le fluide entre sur la gauche de la paroi selon un profil de Poiseuille aux différents pas de temps suivants : $t = 0s, 0.35s, 0.4s, 0.5s, 0.6s, 0.67s, 0.8s, 1.0s$.

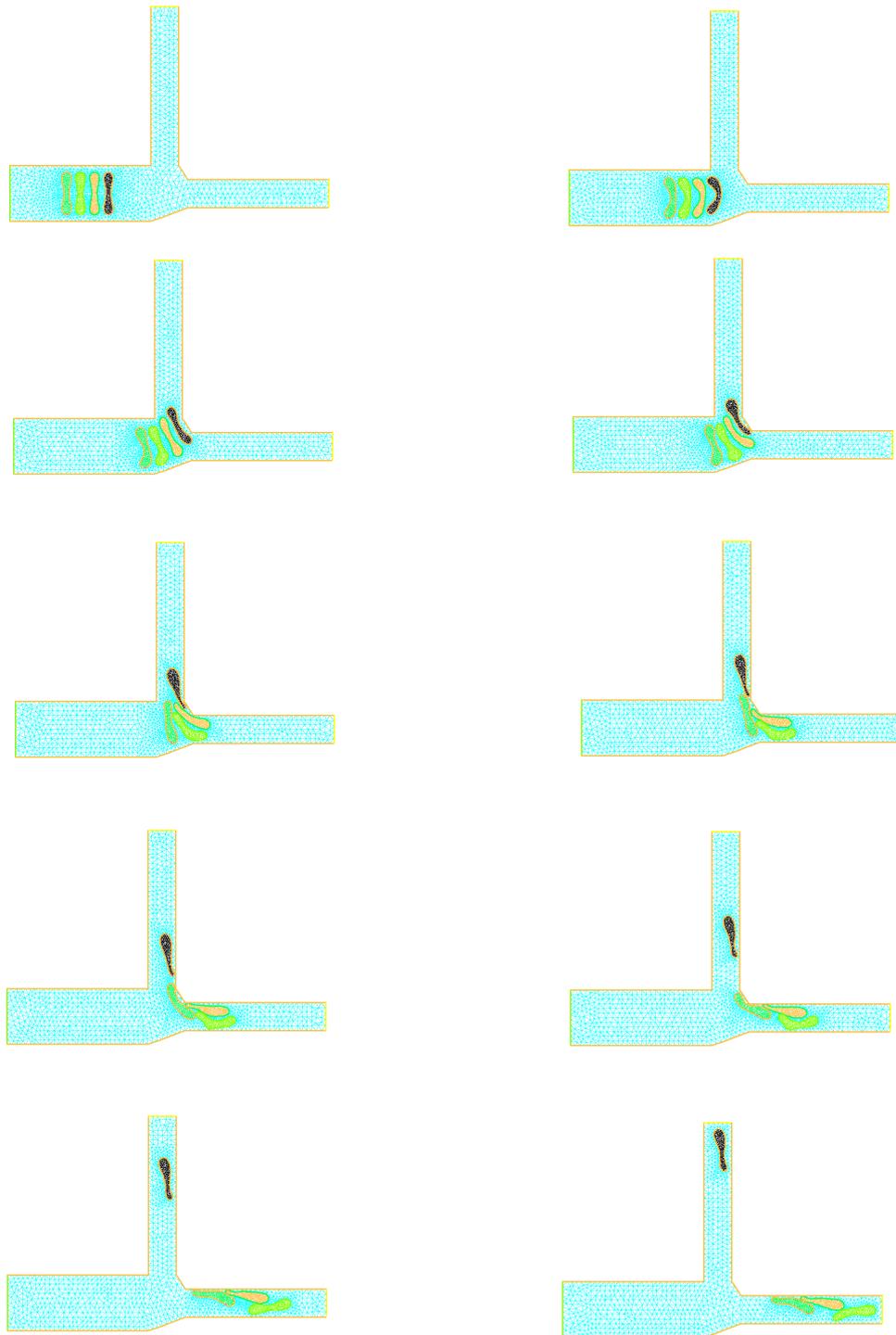


FIG. 1.11 – Simulation de quatre globules à une intersection. De gauche à droite, de haut en bas : $t = 0\text{s}, 0.32\text{s}, 0.43\text{s}, 0.48\text{s}, 0.58\text{s}, 0.68\text{s}, 0.76\text{s}, 0.84\text{s}, 1.04\text{s}, 1.14\text{s}$.

1.6 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre une méthode pour simuler le mouvement des globules dans le plasma en dimension 2. Notre algorithme permet de traiter les contacts entre les globules et entre les globules et la paroi des vaisseaux. De plus, il préserve à la fois le volume et le périmètre des globules. On a adapté l'algorithme d'Olivier Pantz au cas dynamique de vésicules déformables plongées dans un fluide. Ainsi les intersections entre les membranes des globules et entre les globules et la paroi sont interdites par l'introduction d'une contrainte supplémentaire préservant une distance minimale entre eux. Plusieurs dynamiques complexes ont été reproduites avec notre algorithme – mouvement de "tank-treading", mouvement de "tumbling" et forme de parachute. Nos résultats numériques sont en accord avec les observations expérimentales.

On prévoit d'améliorer cet algorithme afin de traiter un nombre important de globules dans une même simulation. Pour l'instant, l'algorithme de contact est très couteux en temps pour des nombres importants de vésicules (le nombre de contraintes augmente avec le carré du nombre de vésicules). De plus, le cas de la dimension 3 reste un problème ouvert et son intérêt majeur est d'améliorer les comparaisons qualitatives des résultats numériques avec les données expérimentales.

Conclusion générale

L'objectif de la thèse était de modéliser, analyser et simuler des problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides.

On a étudié le comportement asymptotique d'inégalités variationnelles quasi-statiques par rapport à ces paramètres physiques tel que le coefficient de frottement ou le coefficient de compliance. On peut essayer de prolonger les résultats obtenus pour le frottement avec compliance normale au cas où le terme de frottement c_T s'annule et le terme du contact normal c_N reste inchangé (ou inversement). On peut également voir ce qui se passe lorsqu'on prend le modèle de frottement de Coulomb quasi-statique.

Le seconde partie a mis en évidence des estimations d'erreur a priori et a posteriori. Le développement des estimations d'erreur a posteriori et de stratégies adaptées est un sujet d'actualité. On a notamment choisi d'utiliser la méthode des éléments finis étendus (XFEM) car il s'agit d'un outil élégant, récent pour les solutions de problèmes comprenant des discontinuités et des singularités et proche de la méthode classique des éléments finis. De plus peu de travaux ont été effectués au niveau de la détermination de l'erreur de discrétisation à l'aide de la méthode XFEM. L'objectif était d'étudier la formulation du contact avec la méthode XFEM. On a étudié au préalable un estimateur d'erreur par résidu pour la méthode XFEM sans contact ni frottement que l'on a implémenté sous Getfem++. Ensuite on a étudié deux estimateurs a posteriori pour le problème avec contact et frottement de Coulomb mais sans la méthode XFEM. Ceux-ci ont été implémentés sous CAST3M. Enfin, pour faciliter la formulation et l'étude du contact sous XFEM, on a étudié un problème stabilisé par la méthode de Barbosa-Hughes et on en a donné un estimateur d'erreur. On a terminé par la formulation du contact sous XFEM et l'étude de la convergence de cette méthode.

Une des perspectives est notamment de proposer un estimateur a posteriori pour le problème de contact avec la méthode XFEM et de l'implémenter sous Getfem++. Ensuite on pourra éventuellement s'occuper de la formulation du frottement et étudier la convergence. Une autre perspective possible est d'obtenir un résultat d'unicité pour le problème quasi-statique de contact unilatéral avec frottement de Coulomb en adaptant les techniques de [203] et de traiter l'analyse a posteriori.

La partie mécanique des fluides a détaillé une méthode pour simuler le mouvement des globules dans le plasma en dimension 2. La méthode numérique présentée a permis de traiter les contacts entre les globules et entre les globules et la paroi des vaisseaux. Elle permet également de préserver à la fois le volume et le périmètre des globules. Elle a alors abouti à la reproduction, sous Freefem++, de plusieurs dynamiques complexes en accord avec les observations expérimentales : mouvement de "tank-treading", mouvement de "tumbling" et forme de parachute. L'algorithme doit être amélioré afin de traiter un nombre important de globules dans une même simulation et élargi au cas de la dimension 3.

Annexe **A**

Quelques outils de la première partie

Propriétés A.0.1

On suppose que $1 \leq m_N, m_T$ si $n = 2$, $1 \leq m_N, m_T < 3$ si $n = 3$. Alors il existe une constante C dépendante de Ω , pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in (H^1(\Omega))^n$:

$$|j_N(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_N} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega},$$

$$|j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)| \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_T} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{1,\Omega},$$

$$|j_N(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_N(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{1,\Omega} \{ \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}^{m_N-1} \} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

et

$$|j_T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{1,\Omega} \{ \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}^{m_T-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}^{m_T-1} \} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

Démonstration : 1. Si $n=2$, on a :

$$|j_N(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|c_N\|_{L^\infty(\Gamma_C)} \|\mathbf{u}\|_{L^{2m_N}(\Gamma_C)}^{m_N} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_N} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega},$$

et

$$\begin{aligned} |j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)| &\leq \int_{\Gamma_C} c_T (u_n)_+^{m_T} |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_T| d\Gamma \\ &\leq \|c_T\|_{L^\infty(\Gamma_C)} \|\mathbf{u}\|_{L^{2m_T}(\Gamma_C)}^{m_T} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ &\leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_T} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Si $m_N, m_T = 1$:

$$\begin{aligned} &\max \{ |j_N(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_N(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})|, |j_T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \} \\ &\leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Gamma_C)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ &\leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Quand $m_N, m_T > 1$, en utilisant le fait que pour $m \geq 1$ ([42]) :

$$\begin{aligned} |(a)_+^m - (b)_+^m| &\leq m |(a)_+ - (b)_+| ((a)_+^{m-1} + (b)_+^{m-1}) \\ &\leq m |a - b| (|a|^{m-1} + |b|^{m-1}) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 & |j_N(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_N(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \\
 & \leq C \int_{\Gamma_C} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| \left(|\mathbf{u}_1|^{m_N-1} + |\mathbf{u}_2|^{m_N-1} \right) |\mathbf{v}| d\Gamma \\
 & \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Gamma_C)} \left\{ \|\mathbf{u}_1\|_{L^4(\Gamma_C)}^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Gamma_C)}^{m_N-1} \right\} \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Gamma_C)} \\
 & \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{1,\Omega} \left\{ \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}^{m_N-1} \right\} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}
 \end{aligned}$$

La même inégalité existe pour j_T .

2. Si $n = 3$, considérons $p \in [1, 4]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{m_N}{4} = 1$ et par l'inégalité de Hölder, on a :

$$|j_N(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Gamma_C)}^{m_N} \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Gamma_C)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_N} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega},$$

et

$$\begin{aligned}
 |j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)| & \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Gamma_C)}^{m_T} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^p(\Gamma_C)} \\
 & \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^{m_T} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Si $m_N, m_T = 1$, on a la même inégalité que pour $n = 2$.

Si $m_N, m_T > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 |j_N(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_N(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| & \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^4(\Gamma_C)} \left\{ \|\mathbf{u}_1\|_{L^4(\Gamma_C)}^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Gamma_C)}^{m_N-1} \right\} \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Gamma_C)} \\
 & \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{1,\Omega} \left\{ \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}^{m_N-1} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}^{m_N-1} \right\} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}
 \end{aligned}$$

On a le même résultat pour j_T . ■

Lemme A.0.1 (Bellman)

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, $a \in L^1([0, t])$ une fonction positive et soit $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\exists x_0 \geq 0, \frac{1}{2} |x(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |x_0|^2 + \int_0^t a(s) |x(s)| ds$$

Alors

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_0^t a(s) ds$$

Démonstration : Soit $y(t) = \frac{1}{2} |x_0|^2 + \int_0^t a(s) |x(s)| ds$. Alors $y'(t) = a(t) |x(t)|$.

Ainsi

$$\frac{1}{2} (y'(t))^2 \leq (a(t))^2 y(t)$$

d'où

$$\frac{1}{2} y'(t) \leq \sqrt{y(t)} \frac{a(t)}{\sqrt{2}}$$

Par intégration sur $[0, t]$, on obtient :

$$\sqrt{y(t)} \leq \sqrt{y(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t a(s) ds$$

La conclusion s'ensuit avec l'hypothèse de départ et la simplification par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ■

Annexe **B**

Formule de Green et validation en fond de fissure

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ de classe C^1 par morceaux.

Proposition B.0.1 (*Formule de Green pour le laplacien*)

Soient $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \cdot \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Proposition B.0.2 (*Formule de Green pour l'élasticité*)

Soient $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$ et $\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2}$ tel que $\mathbf{div} \, \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2$ et \mathbf{v} symétrique alors :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{v} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{div} \, \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Montrons que la formule de Green peut s'appliquer dans notre cas au triangle contenant la pointe de fissure.

Démonstration : Soit T le triangle en pointe de fissure.

On se restreint au cas du laplacien pour simplifier et $u_s = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$.

Calculons $I = \int_T \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h)$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{T \setminus D} \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h) + \int_D \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h) \\ &= \int_{\partial D} (\nabla u_s \cdot \mathbf{n})(u - v_h) + \int_{\partial(T \setminus D) \setminus \partial D} (\nabla u_s \cdot \mathbf{n})(u - v_h) + \int_D \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h) \end{aligned}$$

1ère étape : Nous avons : $\int_D \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h) \leq \|\nabla u_s\|_{L^2(D)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(D)}$

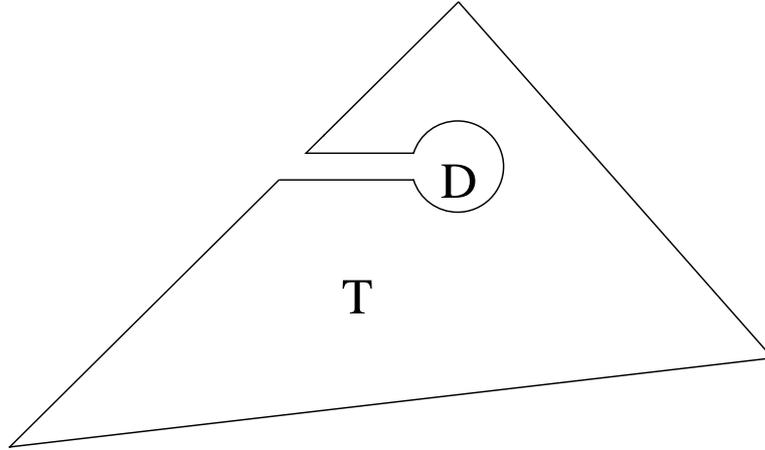


FIG. B.1 – Découpe du triangle en pointe de fissure

$$\text{Or } u_s = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos\theta} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{r}} = \frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{\frac{x}{r} - 1}{4u_s} = \frac{\cos\theta - 1}{4\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{1}{4\sqrt{r}} \sqrt{1 - \cos\theta}$$

$$\text{et } \frac{\partial u_s}{\partial y} = \frac{\frac{y}{r}}{4u_s} = \frac{\sin\theta}{4\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sqrt{r}}.$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\|_{L^p}^p &= C \int \frac{1}{r^{\frac{p}{2}}} (1 - \cos\theta)^{\frac{p}{2}} r dr d\theta \\ &= C \int (1 - \cos\theta)^{\frac{p}{2}} d\theta \int_0^\epsilon \frac{1}{r^{\frac{p}{2} - 1}} dr \end{aligned}$$

Ceci est intégrable si $\frac{p}{2} - 1 < 1$ c'est-à-dire $p < 4$.

$$\text{De même } \left\| \frac{\partial u_s}{\partial y} \right\|_{L^p}^p = C' \int \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^p d\theta \int_0^\epsilon \frac{1}{r^{\frac{p}{2} - 1}} dr.$$

Ainsi $\frac{\partial u_s}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_s}{\partial y}$ appartiennent à $L^{4-\epsilon}$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_D \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h) &= \int_D \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial(u - v_h)}{\partial x} + \frac{\partial u_s}{\partial y} \frac{\partial(u - v_h)}{\partial y} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\|_{L^2(D)} \left\| \frac{\partial(u - v_h)}{\partial x} \right\|_{L^2(D)} + \left\| \frac{\partial u_s}{\partial y} \right\|_{L^2(D)} \left\| \frac{\partial(u - v_h)}{\partial y} \right\|_{L^2(D)} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\|_{L^2(D)} &= \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} 1_D \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\|_{L^3(\Omega)} \|1_D\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \quad \text{par Hölder} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\|_{L^3(\Omega)} |D|^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Ceci est bien valable car $\nabla u = \nabla u_r + \nabla \gamma u_s$ et comme $u_r \in H^{2+\epsilon}$, $\nabla u_r \in H^1 \subset L^3$.
Donc

$$\begin{aligned} \int_D \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h) &\leq \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\|_{L^3(\Omega)} |D|^{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial(u - v_h)}{\partial x} \right\|_{L^3(\Omega)} |D|^{\frac{2}{3}} \\ &\quad + \left\| \frac{\partial u_s}{\partial y} \right\|_{L^3(\Omega)} |D|^{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial(u - v_h)}{\partial y} \right\|_{L^3(\Omega)} |D|^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{|D| \rightarrow 0} \int_D \nabla u_s \cdot \nabla(u - v_h) = 0$.

2ème étape : Nous avons : $\int_{\partial D} (\nabla u_s \cdot n)(u - v_h) \leq \|\nabla u_s \cdot n\|_{L^2(\partial D)} \|u - v_h\|_{L^2(\partial D)}$

Avec $n \left(-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r} \right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla u_s \cdot n &= \frac{\partial u_s}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_s}{\partial y} n_y \\ &= \frac{x-r}{4r^2 u_s} (-x) + \frac{y}{4r^2 u_s} (-y) = \frac{-x^2 - y^2 + rx}{4r^2 u_s} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-r^2 + rx)}{4r^2 \sqrt{r-x}} = \frac{-r(r-x)}{2\sqrt{2}r^2 \sqrt{r-x}} \\ &= -\frac{\sqrt{r-x}}{2\sqrt{2}r} \end{aligned}$$

Ainsi $(\nabla u_s \cdot n)^2 = \frac{r-x}{8r^2} = \frac{1}{8r}(1 - \cos \theta)$. D'où :

$$\begin{aligned} \|\nabla u_s \cdot n\|_{L^2(\partial D)} &= \left(\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{8r}(1 - \cos \theta) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{8r} \int_{\partial B(0,r)} (1 - \cos \theta) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{8r}(2\pi r - [\sin \theta]_0^{2\pi}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc il existe une constante C indépendante de D telle que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\nabla u_s \cdot n)(u - v_h) &\leq C \|u - v_h\|_{L^2(\partial D)} \\ &\leq C(\|u\|_{L^2(\partial D)} + \|v_h\|_{L^2(\partial D)}) \end{aligned}$$

Or $u = u_r + \gamma u_s$ où $u_r \in H^{2+\epsilon}(\Omega)$ donc a fortiori $u_r \in H^2$ alors $u_r \in W^{2,2}(\Omega)$ ce qui signifie que $\nabla u_r \in W^{1,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Comme u_r et ∇u_r appartiennent à $L^q(\Omega)$, $\forall q \geq 1$, $u_r \in W^{1,q}(\Omega)$ donc $u_r \in L^\infty(\Omega)$. De plus, $\|\gamma u_s\|_{L^\infty} \leq \|u_s\|_{L^\infty} \leq \sqrt{\text{diam}(\Omega)}$.
Donc $u \in L^\infty(\Omega)$.

$$\text{Ainsi } \|u\|_{L^2(\partial D)} = \left(\int_{\partial D} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |\partial D|^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit que :

$$\int_{\partial D} (\nabla u_s \cdot n)(u - v_h) \leq C(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} |\partial D|^{\frac{1}{2}} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} |\partial D|^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{Ainsi } \lim_{|D| \rightarrow 0} \int_{\partial D} (\nabla u_s \cdot n)(u - v_h) = 0.$$

3ème étape :

$$\text{Donc } I = f(D) + \int_{\partial(T \setminus D) \setminus \partial D} (\nabla u_s \cdot n)(u - v_h) \text{ avec } \lim_{|D| \rightarrow 0} f(D) = 0.$$

$$\text{Sur } \Gamma_C, \nabla u_s \cdot n = \pm \frac{\partial u_s}{\partial y} = \frac{y}{4ru_s} = 0 \text{ car } y = 0.$$

$$\text{Donc } \partial(T \setminus D) \setminus \partial D = \partial T.$$

$$\text{Ainsi } I - \int_{\partial T} (\nabla u_s \cdot n)(u - v_h) = f(D).$$

On en déduit que $f(D)$ ne dépend pas de D et d'autre part $\lim_{|D| \rightarrow 0} f(D) = 0$ donc $f(D) = 0$.

$$\text{On en conclut que : } I = \int_{\partial T} (\nabla u_s \cdot n)(u - v_h). \quad \blacksquare$$

Annexe C

Plusieurs théorèmes de trace

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^1 par morceaux.

Définition C.0.1

Pour une fonction $v \in C^0(\bar{\Omega})$, la trace de v sur Γ est définie par :

$$\begin{aligned}\gamma(v) : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto v(x)\end{aligned}$$

En d'autres termes, $\gamma(v) = v|_{\Gamma}$. On introduit alors l'application trace :

$$\begin{aligned}\gamma : C^0(\bar{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\Gamma) \\ v &\longmapsto \gamma(v)\end{aligned}$$

qui est une application linéaire. A une application définie sur un ouvert Ω , elle associe la restriction de cette application au bord de l'ouvert.

Une fonction qui est dans $H^1(\Omega)$ n'est pas forcément continue. On peut cependant définir la trace sur Γ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. On admet le résultat suivant :

Théorème C.0.1 (Théorème de trace)

Il existe une application linéaire et continue :

$$\begin{aligned}\gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ v &\longmapsto \gamma(v)\end{aligned}$$

vérifiant $\forall v \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \gamma(v) = v|_{\Gamma}$. Pour $v \in H^1(\Omega)$, la fonction $\gamma(v)$ est définie sur Γ et elle n'est pas forcément continue mais seulement $L^2(\Gamma)$.

Il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma(v)\|_{\Gamma} \leq C\|v\|_{1,\Omega}$$

La version suivante permet d'utiliser l'estimation de trace non seulement sur le bord mais aussi sur une ligne arbitraire appartenant à l'élément (voir par exemple [109, 113]) :

Proposition C.0.3

Soit E l'intersection entre une ligne droite et un élément T

$$\|v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v\|_T + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_T, \quad \forall v \in H^1(T), \forall T \in T_h$$

Annexe **D**

L'algorithme de contact d'Olivier Pantz

Soient M la famille des corps déformables, $A(M)$ l'ensemble des déformations sans auto-intersection. Le problème consiste à déterminer $\phi \in A(M)$ telle que l'énergie de la déformation ϕ vérifie :

$$J(\phi) = \inf_{\psi \in A(M)} J(\psi)$$

L'algorithme de minimisation proposé est défini par la procédure récursive suivante :

1. **Initialisation** de ϕ_0 par une déformation admissible ;
2. A chaque étape, l'énergie est **minimisée sur un voisinage convexe** de la solution précédente inclus dans l'ensemble des solutions admissibles :
pour tout $n \geq 0$, on note $\phi_{n+1} \in T(\phi_n)$, la solution du problème de minimisation

$$J(\phi_{n+1}) = \inf_{\psi \in T(\phi_n)} J(\psi)$$

où $T(\phi) \subset A(M)$

3. **Critère d'arrêt** : On s'arrête dès qu'un point fixe est atteint.

Remarque D.0.1

Le critère d'arrêt est toujours atteint car $J(\phi_n)$ est une suite décroissante bornée inférieurement.

Remarque D.0.2

Le terme voisinage convexe est un abus de langage. En effet, si ψ appartient à l'intérieur de l'ensemble admissible, $T(\psi)$ sera choisi comme voisinage fermé de ψ . Par contre, si ψ se situe sur le bord de l'ensemble admissible, rien ne garantit qu'un voisinage convexe existe. En particulier si $A(M)$ n'est pas localement convexe.

D.1 La version discrétisée

Soient T_h un maillage régulier de M , X_h l'espace des éléments finis P_1 de Lagrange. On pose ϵ la distance minimale entre tous les éléments disjoints du maillage. L'ensemble discretisé des déformations admissibles est défini par :

$$A_{h,\epsilon} = \{ \psi_h \in X_h : \text{dist}(\psi_h(T_1), \psi_h(T_2)) \geq \epsilon, \text{ pour tout } T_1 \text{ et tout } T_2 \in T_h \\ \text{tels que } T_1 \cap T_2 = \emptyset \}$$

Pour le cas bidimensionnel qui nous intéresse, Olivier Pantz définit l'application T par :

$$T(\psi_h) = \{ \phi_h \in X_h : \min_{x_a \in a} n_{a,x}(\psi_h) \cdot (\phi_h(x_a) - \phi_h(x)) \geq \epsilon, \\ \text{pour toute arête } a \text{ et tout nœud } x \text{ de } T_h \text{ tels que } x \notin a \}$$

où $n_{a,x}(\psi_h)$ est définie pour toute arête a et tout sommet x du maillage tels que $x \notin a$ comme l'élément unitaire de \mathbb{R}^n tel que :

$$\min_{x_a \in a} n_{a,x}(\psi_h) \cdot (\phi_h(x_a) - \phi_h(x)) = \text{dist}(\psi_h(a), \psi_h(x)) \geq \epsilon$$

Remarque D.1.1

Pour le cas tridimensionnel, c'est plus complexe puisqu'on doit associer une contrainte pour chaque couple triangle/nœud et chaque couple arête/arête.

Voici le programme qui calcule l'expression de $n_{a,x}$:

```
func int calculn() {
  real alpha, sg, sd, tx, ty, nt, t1;
  for(int i1=0; i1<NbVesTot+1; i1++) for(int j1=0; j1<Ndof(i1); j1++) // On parcourt les aretes
    for(int i2=0; i2<NbVesTot+1; i2++) for(int j2=0; j2<Ndof(i2); j2++) // On parcourt les sommets
      if (!(i1==i2) && ((j1==j2) || (j2==(j1+1)%Ndof(i1)))) {
        nt=(Cxprec(i1, j1)-Cxprec(i1, j1+1))^2+(Cyprec(i1, j1) -Cyprec(i1, j1+1))^2;
        nt=sqrt(nt); //norme de ala2
        tx=(Cxprec(i1, j1)-Cxprec(i1, j1+1)) / nt;
        ty=(Cyprec(i1, j1)-Cyprec(i1, j1+1)) / nt;
        sg=tx*(Cxprec(i2, j2)-Cxprec(i1, j1))+ty*(Cyprec(i2, j2)-Cyprec(i1, j1));
        sd=-(tx*(Cxprec(i2, j2)-Cxprec(i1, j1+1))+ty*(Cyprec(i2, j2)-Cyprec(i1, j1+1)));
        if ( (sg < 0) && (sd < 0) ) {
          alpha=1.-2*((Cxprec(i2, j2)-Cxprec(i1, j1+1))*ty-(Cyprec(i2, j2)-Cyprec(i1, j1+1))*tx)>0);
          nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)= alpha*ty ;
          ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=-alpha*tx;
        }
        else {
          if ( sg >= 0 ) {
            t1=(Cxprec(i2, j2)-Cxprec(i1, j1))^2+(Cyprec(i2, j2)-Cyprec(i1, j1))^2;
            t1=sqrt(t1); // norme de alx
            nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=-(Cxprec(i2, j2)-Cxprec(i1, j1))/t1;
            ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=-(Cyprec(i2, j2)-Cyprec(i1, j1))/t1;
          }
          else {
            t1=(Cxprec(i2, j2)-Cxprec(i1, j1+1))^2+(Cyprec(i2, j2)-Cyprec(i1, j1+1))^2;
            t1=sqrt(t1); //norme de a2x
            nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=-(Cxprec(i2, j2)-Cxprec(i1, j1+1))/t1;
            ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=-(Cyprec(i2, j2)-Cyprec(i1, j1+1))/t1;
          }
        }
      }
}
//si le sommet x appartient a l'arete
else {
  nx(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=0;
  ny(i1*ndof+j1, i2*ndof+j2)=0;
}
```

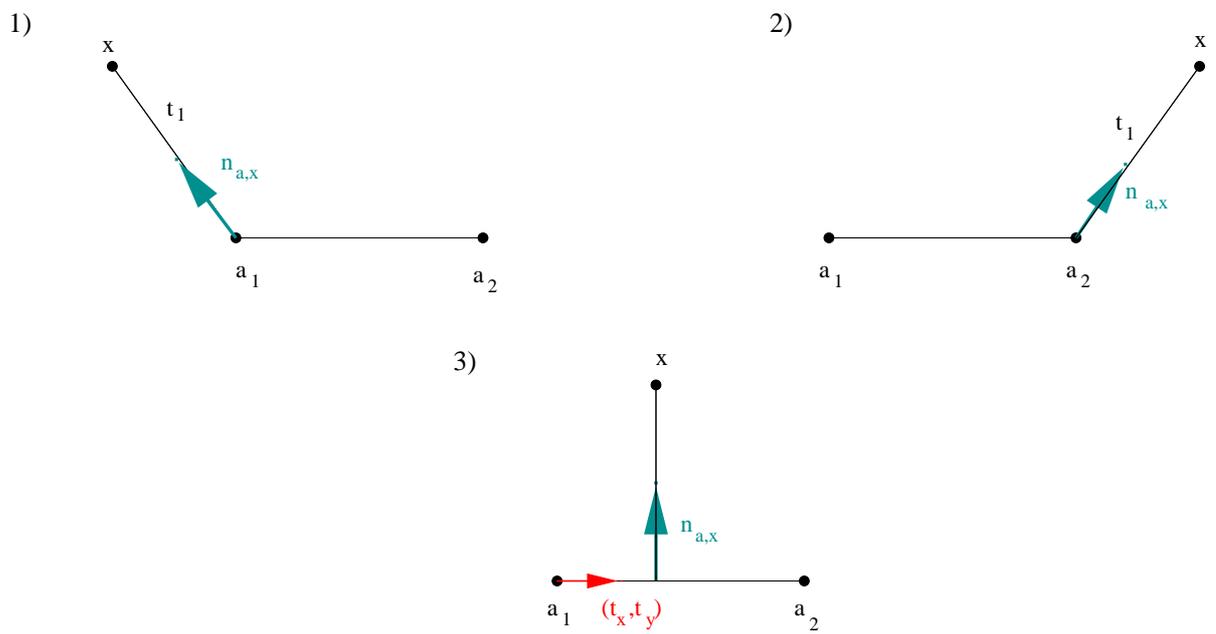


FIG. D.1 – Dessins représentant $n_{a,x}$: 1) cas où $sg \geq 0$, 2) cas où $sd \geq 0$ et 3) cas où $sg < 0$ et $sd < 0$

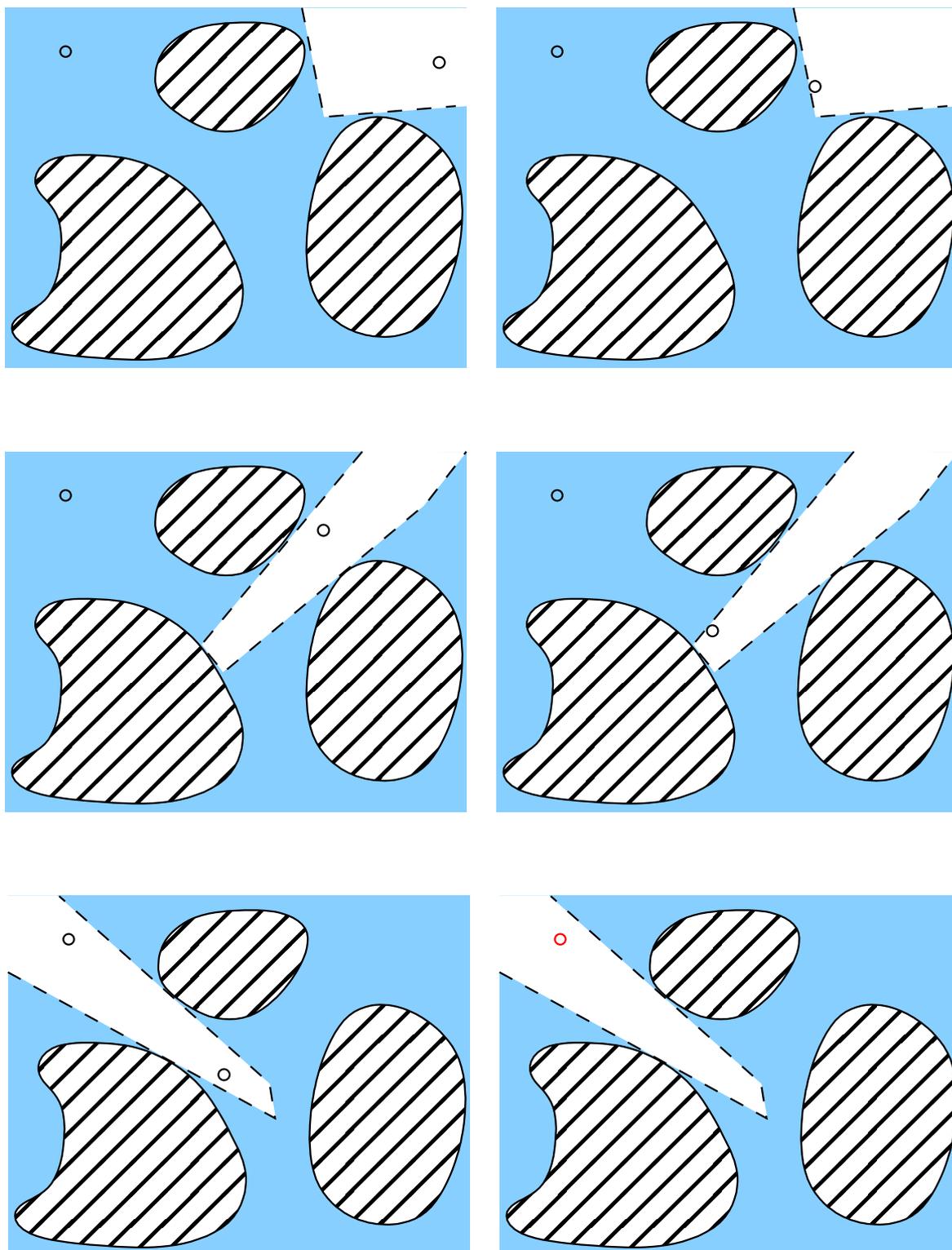


FIG. D.2 – Plusieurs étapes de minimisation sur un voisinage convexe

1 Notations pour la mécanique des solides

\mathbb{R}^n	ensemble des vecteurs réels à n dimensions
Ω	domaine occupé par le corps élastique
$\partial\Omega$	bord de Ω
Γ_C	partie de $\partial\Omega$ candidate au contact (et parfois au frottement)
Γ_D	partie de $\partial\Omega$ où on impose des conditions de Dirichlet
Γ_N	partie de $\partial\Omega$ où on impose des conditions de Neumann
Γ_F	partie de $\partial\Omega$ représentant la fissure
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$	tenseur des contraintes correspondant au déplacement \mathbf{u}
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	tenseur linéarisé des déformations correspondant au déplacement \mathbf{u}
\mathbf{A}	tenseur de Hooke d'ordre 4, symétrique et elliptique
\mathbf{f}	densité des forces volumiques
\mathbf{g}	densité des forces surfaciques imposées sur le bord de Neumann
\mathbf{n}	normale unitaire sortante sur $\partial\Omega$
\mathcal{S}_2	espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^2
\mathbf{u}	solution exacte de la formulation faible (ou forte)
\mathbf{u}_h	solution du problème discrétisé
u_n	déplacement normal
u_t	déplacement tangentiel
σ_n	composante normale des contraintes
σ_t	composante tangentielle des contraintes
μ	coefficient de frottement
λ et ζ	coefficients de Lamé
r et θ	coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure
ν	coefficient de Poisson
E	module de Young

$(\cdot)_+$	partie positive
h	paramètre de maillage
$T_h, h > 0$	triangulation de Ω
H	fonction Heaviside
F_j	fonctions singulières
χ	fonction cut-off
π_h	opérateur de quasi-interpolation
I_h	opérateur classique d'interpolation de Lagrange
$(L^2(\cdot))^d, (H^s(\cdot))^d$	espaces de Lebesgue et Sobolev en dimension un, deux ou trois
$\ \cdot\ _{s,D}$	norme usuelle de $(H^s(D))^d$ (norme duale si $s < 0$)
$\ \cdot\ _D$	norme de $(L^2(D))^d$
$ \cdot $	norme euclidienne de \mathbb{R}^2 ou longueur d'un segment ou aire d'un plan
$a \lesssim b$	$\exists C \geq 0$ constante indépendante de a, b et h telle que $a \leq C b$
$a \sim b$	$a \lesssim b$ et $b \lesssim a$ simultanément

2 Notations pour la première partie

$C(0, T; V)$	ensemble des fonctions continues de $[0, T]$ dans V
$W^{1,p}(0, T; V)$	espaces de Sobolev de $[0, T]$ dans V
$C_C^1(]0, +\infty[; \mathbb{R})$	ensemble des fonctions de classe C^1 à support compact de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R}
(\cdot, \cdot)	produit scalaire sur $(H^1(\Omega))^n$
$D(A)$	domaine de l'opérateur $A : D(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$
$R(A)$	image de l'opérateur $A : R(A) = \cup_{x \in H} Ax$

3 Notations pour la mécanique des fluides

Ω	domaine du fluide
k	module d'élasticité
$J(\phi)$	énergie élastique ou fonction d'Helfrich
ρ	densité du fluide
μ	viscosité du fluide
μ_{in}	viscosité à l'intérieur des globules
μ_{out}	viscosité à l'extérieur des globules
u	vitesse du fluide
p	pression du fluide
ϕ	déformations des globules
Σ_0	configuration de référence de la membrane des globules
p_{inext}	pression inextensible
$e(u)$	tenseur des déformations
p_τ	multiplicateur de Lagrange assurant l'appartenance à H^2
p_c	multiplicateur de Lagrange assurant l'égalité des fonctions aux nœuds

Bibliographie

- [1] M. Abkarian et A. Viallat, *Dynamics of vesicles in a wall-bounded shear flow*, Biophysical Journal, 89(2005), pp. 1055–1066.
- [2] Y. Achdou, F. Hecht et D. Pommier, *A posteriori error estimates for parabolic variational inequalities*, J. Sci. Comput., 37(2008), pp. 336–366.
- [3] R.-A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.
- [4] M. Ainsworth et J.-T. Oden, *A posteriori error estimation in finite element analysis*, Chichester, Wiley, 2000.
- [5] M. Ainsworth, J.-T. Oden et C.-Y. Lee, *Local a posteriori error estimators for variational inequalities*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 9(1993), pp. 23–33.
- [6] P. Alart et A. Curnier, *Generalisation of Newton type methods to contact problems with friction*, J. Mecan. Théor. Appl., 7(1988), pp. 67–82.
- [7] M. Amara, P. Destuynder et M. Djaoua, *On a finite element scheme for plane crack problems*, Numerical Methods in Fracture Mechanics, (1980), pp. 41–50.
- [8] L.-E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*, Nonlinear Anal., 16(1991), pp. 347–369.
- [9] L.-E. Andersson, *A global existence result for quasistatic problem with friction*, Adv. Math. Sci. Appl., 1(1995), pp. 249–286.
- [10] L.-E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with a normal compliance penalization term*, Nonlinear Anal., 37(1999), pp. 689–705.
- [11] L.-E. Andersson, *Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction*, Appl. Math. Optim., 42(2000), pp. 169–202.
- [12] M. Astorino, J.-F. Gerbeau, O. Pantz et K.-F. Traoré, *Fluid structure interaction and multi-body contact. Application to aortic valves*, Rapport de recherche INRIA, 6583(2008).
- [13] K. Atkinson et W. Han, *Theoretical numerical analysis : a functional analysis framework*, Springer, New-York, Texts in Applied Mathematics, 39(2001) ; second edition 2005.

- [14] I. Babuška, *The finite element method with Lagrange multipliers*, Numer. Math., 20(1973), pp. 179–192.
- [15] I. Babuška, L. Planck et R. Rodriguez, *Basic problems of a posteriori error estimations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 101(1992), pp. 97–112.
- [16] I. Babuška, L. Planck et R. Rodriguez, *Quality assessment of a posteriori error estimation in finite elements*, Finite Elements in Analysis and Design, 11(1992), pp. 285–306.
- [17] I. Babuška et W. Rheinboldt, *Error estimates for adaptive finite element computations*, SIAM J. Numer. Anal., 15(1978), pp. 736–754.
- [18] I. Babuška et T. Strouboulis, *The finite element method and its reliability*, Oxford, Clarendon Press, 2001.
- [19] I. Babuška et M. Suri, *The p and h - p versions of the finite element method, an overview*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 80(1990), pp. 5–26.
- [20] I. Babuška, B.-A. Szabó et I. Katz, *The p version of the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., 18(1981), pp. 515–545.
- [21] H.-J.-C. Barbosa et T.-J.-R. Hughes, *The finite element method with Lagrange multipliers on the boundary : circumventing the Babuška-Brezzi condition*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 85(1991), pp. 109–128.
- [22] H.-J.-C. Barbosa et T.-J.-R. Hughes, *Boundary Lagrange multipliers in finite element methods : error analysis in natural norms*, Numer. Math., 62(1992), pp. 1–15.
- [23] H.-J.-C. Barbosa et T.-J.-R. Hughes, *Circumventing the Babuška-Brezzi condition in mixed finite element approximations of elliptic variational inequalities*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 97(1992), pp. 193–210.
- [24] J. Beaucourt, F. Rioual, T. Séon, T. Biben et C. Misbah, *Steady to unsteady dynamics of a vesicle in a flow*, Phys. Rev. E, 69(2004), pp. 011906–011923.
- [25] E. Bechet, H. Minnebo, N. Moës et B. Burgardt, *Improved implementation and robustness study of the XFEM for stress analysis around cracks*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 64(2005), pp. 1033–1056.
- [26] R. Becker, P. Hansbo et R. Stenberg, *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids*, Math. Model. Numer. Anal., 37(2003), pp. 209–225.
- [27] R. Becker et R. Rannacher, *A feed-back approach to error control in finite element methods : basic analysis and examples*, East-West J. Numer. Math., 4(1996), pp. 237–264.
- [28] Z. Belhachmi et F. Ben Belgacem, *Quadratic finite element approximation of the Signorini problem*, Math. Comp., 72(2003), pp. 83–104.

-
- [29] Z. Belhachmi, J.-M. Sac-Epée et J. Sokolowski, *Mixed finite element methods for smooth domain formulation of crack problems*, SIAM J. Numer. Anal., 43(2005), pp. 1295–1320.
- [30] Z. Belhachmi, F. Hecht et S. Tahir, *Adaptive finite element for a fictitious domain formulation of some variational inequalities*, Preprint LMAM, 2008.
- [31] T. Belytschko et T. Black, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 45(1999), pp. 601–620.
- [32] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ et M. Fleming, *Meshless methods : an overview and recent developments*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 139(1996), pp. 3–47.
- [33] F. Ben Belgacem et Y. Renard, *Hybrid finite element methods for the Signorini problem*, Math. Comp., 72(2003), pp. 1117–1145.
- [34] H. Ben Dhia et M. Zarroug, *Hybrid frictional contact particles in elements*, Revue Européenne des Elements Finis, 9(2002), pp. 417–430.
- [35] C. Bernardi et V. Girault, *A local regularisation operator for triangular and quadrilateral finite elements*, SIAM J. Numer. Anal., 35(1998), pp. 1893–1916.
- [36] C. Bernardi, B. Métivet et R. Verfürth, *Analyse numérique d’indicateurs d’erreur*, Report 93025, Laboratoire d’analyse numérique, Université Paris VI, 1993.
- [37] T. Biben et C. Misbah, *Tumbling of vesicles under shear flow within an advected-field approach*, Phys. Rev. E, 67(2003), pp. 031908–031913.
- [38] H. Blum et F. Suttmeier, *An adaptive finite element discretization for a simplified Signorini problem*, Calcolo, 37(2000), pp. 65–77.
- [39] S. Bordas et M. Duflot, *Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 196(2007), pp. 3381–3399.
- [40] S. Bordas et M. Duflot, *A posteriori error estimation for extended finite elements by an extended global recovery*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 76(2008), pp. 1123–1138.
- [41] S. Bordas, M. Duflot et P. Le, *A simple error estimator for extended finite elements*, Commun. Numer. Meth. Engrg., 24(2008), pp. 961–971.
- [42] M. Bostan, E. Canon et P. Hild, *On asymptotic properties for some parameter dependent variational inequalities*, Nonlinear Anal., 70 (2009), pp. 1663–1678.
- [43] V. Bostan et W. Han, *A posteriori error analysis for finite element solutions of a frictional contact problem*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195(2006), pp. 1252–1274.
- [44] V. Bostan, W. Han et B.-D. Reddy, *A posteriori error estimation and adaptive solution of elliptic variational inequalities of the second kind*, Appl. Numer. Math., 52(2005), pp. 13–38.

- [45] M. Bostan et V. Lleras, *Some remarks on time-dependent variational problems and their asymptotic behaviour*, soumis.
- [46] F.-P. Bowden et D. Tabor, *The area of contact between stationary and between moving surfaces*, Proc. Roy. Soc. London, A169(1966), pp. 1521–1544.
- [47] D. Braess, *A posteriori error estimators for obstacle problems - another look*, Numer. Math., 101(2005), pp. 415–421.
- [48] D. Braess, C. Carstensen et R. Hoppe, *Convergence analysis of a conforming adaptive finite element method for an obstacle problem*, Numer. Math., 107(2007), pp. 455–471.
- [49] H. Brenner, *The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface*, Chem. Engng. Sci., 16(1961), pp. 242–251.
- [50] S.-C. Brenner et L.-R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer-Verlag, 2002.
- [51] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland/American Elsevier, 1973.
- [52] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.
- [53] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*, Rev. Franç. Automatique Inform. Rech. Opér., Sér. Rouge Anal. Numér., 8(1974), pp. 129–151.
- [54] F. Brezzi et M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer, 1991.
- [55] C. Bui, V. Lleras et O. Pantz, *Dynamics of red blood cells in 2D*, ESAIM proceedings, accepté.
- [56] N. Callens, C. Minetti, G. Coupier, M.-A. Mader, F. Dubois, C. Misbah et T. Podgorski, *Hydrodynamic lift of vesicles under shear flow in microgravity*, EPL (Europhysics Letters), 83(2008), pp. 24002–24008.
- [57] C. Carstensen, *Numerical analysis of the primal problem of elastoplasticity with hardening*, Numer. Math., 82(1999), pp. 577–597.
- [58] C. Carstensen, O. Scherf et P. Wriggers, *Adaptive finite elements for elastic bodies in contact*, SIAM J. Sci. Comput., 20(1999), pp. 1605–1626.
- [59] C. Carstensen et R. Verfürth, *Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods*, Bericht Nr., 216(1997).
- [60] E. Chahine, *Etude mathématique et numérique de méthodes d'éléments finis étendues pour le calcul en domaines fissurés*, Thèse, INSA de Toulouse, 2008.
- [61] E. Chahine, P. Laborde et Y. Renard, *A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM*, C. R. Acad. Sci. Paris, 342(2006), pp. 527–532.

-
- [62] E. Chahine, P. Laborde et Y. Renard, *Crack tip enrichment in XFEM using a cut-off function*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 75(2008), pp. 629–646.
- [63] E. Chahine, S. Nicaise et Y. Renard, *Optimal convergence analysis for the eXtended Finite Element Method*, submitted.
- [64] Z. Chen, *On the augmented Lagrangian approach to Signorini elastic contact problem*, Numer. Math., 88(2001), pp. 641–659.
- [65] Z. Chen et R.-H. Nochetto, *Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems*, Numer. Math., 84(2000), pp. 527–548.
- [66] P.-G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, in Handbook of Numerical Analysis, eds. P.-G. Ciarlet and J.-L. Lions, North Holland, 2(1991), pp. 17–352.
- [67] P. Clément, *Approximation by finite elements functions using local regularization*, RAIRO Anal. Numer., 9(1975), pp. 77–84.
- [68] M. Cocu, E. Pratt et M. Raous, *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact*, Int. J. Engng. Sci., 34(1996), pp. 783–798.
- [69] P. Coorevits, P. Hild et M. Hjjaj, *A posteriori error control of finite element approximations for Coulomb’s frictional contact*, SIAM J. Sci. Comput., 23(2001), pp. 976–999.
- [70] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani et T. Sassi, *Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies*, Math. Comp., 71(2002), pp. 1–25.
- [71] P. Coorevits, P. Hild et J.-P. Pelle, *Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral*, Revue européenne des éléments finis, 8(1999), pp. 7–29.
- [72] P. Coorevits, P. Hild et J.-P. Pelle, *A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and nonmatching meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 186(2000), pp. 65–83.
- [73] P. Coorevits, P. Ladevèze et J.-P. Pelle, *An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 121(1995), pp. 91–120.
- [74] P. Coorevits, P. Ladevèze et J.-P. Pelle, *Mesh optimization for problems with steep gradients*, Engrg. Comput., 11(1994), pp. 129–144.
- [75] R.-G. Cox, *The motion of suspended particles almost in contact*, Int. J. Multiphase Flow, 1(1974), pp. 343–371.
- [76] V. Cristini et G. Kassab, *Computer modeling of red blood cell rheology in the microcirculation : a brief overview*, Annals of Biomedical Engineering, 33(2005), pp. 1724–1727.

- [77] L. Demkowicz et J.-T. Oden, *On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction*, *Nonlinear Anal.*, 6(1982), pp. 1075–1093.
- [78] H.-J. Deuling et W. Helfrich, *Red blood cell shapes as explained on the basis of curvature elasticity*, *Biophys. J.*, 16(1976), pp. 861–868.
- [79] P. Diez et A. Huerta, *A unified approach to remeshing strategies for finite element h -adaptivity*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 176(1999), pp. 215–229.
- [80] M. Djaoua, *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes en mécanique de la rupture*, Thèse, Université Paris VI, 1983.
- [81] J. Dolbow, *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*, Thèse, Université du Northwestern, USA, 1999.
- [82] Q. Du, C. Liu et X. Wang, *A phase field approach in the numerical study of the elastic bending energy for vesicle membranes*, *Journal of Computational Physics*, 198(2004), pp. 450–468.
- [83] J.-P. Dumeau, *Contrôle et adaptation des maillages 3D : application à l'automatisation des calculs*, Thèse, ENS Cachan, 1995.
- [84] G. Duvaut, *Problèmes unilatéraux en mécanique des milieux continus*, in *Actes du congrès international des mathématiciens (Nice 1970)*, Gauthier-Villars, 3(1971), pp. 71–77.
- [85] G. Duvaut, *Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb*, *C. R. Acad. Sci.*, 290(1980), pp. 263–265.
- [86] G. Duvaut et J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972.
- [87] C. Eck et J. Jarušek, *Existence results for the static contact problem with Coulomb friction*, *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 8(1998), pp. 445–468.
- [88] C. Eck, J. Jarušek et M. Krbec, *Unilateral contact problems : variational methods and existence theorems*, *Pure and Applied Mathematics*, CRC Press, 270(2005).
- [89] C. Eck et W. Wendland, *A residual-based error estimator for BEM-discretizations of contact problems*, *Numer. Math.*, 95(2003), pp. 253–282.
- [90] B. Erdmann, M. Frei, R. Hoppe, R. Kornhuber et U. Wiest, *Adaptive finite element methods for variational inequalities*, *East-West J. Numer. Math.*, 1(1993), pp. 165–197.
- [91] E.-A. Evans, *Bending elastic modulus of red blood cell membrane derived from buckling instability in micropipet aspiration tests*, *Biophys. J.*, 43(1983), pp. 27–30.
- [92] L. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode island, 1999.

-
- [93] X. Fan, N. Phan-Thien et R. Zheng, *A direct simulation of fibre suspensions*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 74(1998), pp. 113–135.
- [94] G. Fichera, *Existence theorems in elasticity-Boundary value problem of elasticity with unilateral constraints*, Encyclopedia of Physics, 2(1972), pp. 347–427.
- [95] H. Fujita et T. Suzuki, *Evolution problems*, in Handbook of Numerical Analysis, Eds. P.-G. Ciarlet and J.-L. Lions, North Holland, 2(1991), pp. 791–927.
- [96] F.-J. Gallego et J.-J. Anza, *A mixed finite element for the elastic contact problem*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 28(1989), pp. 1249–1264.
- [97] S. Geniaut, *Approche XFEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles*, Thèse, Ecole Centrale Nantes, 2006.
- [98] S. Geniaut, P. Massin et N. Moës, *A stable 3D contact formulation for cracks using XFEM*, Revue Européenne de Mécanique Numérique, Calculs avec méthodes sans maillage, 16(2007), pp. 259–275.
- [99] GETFEM++, www.gmm.insa-toulouse.fr/getfem/.
- [100] R. Glowinski, *Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems*, Notes by M.-G. Vijayasundaram and M. Adimurthi. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Springer-Verlag, Berlin-New York, 65(1980).
- [101] R. Glowinski, J.-L. Lions et R. Trémoières, *Numerical analysis of variational inequalities*, Studies in Mathematics and its Applications, 8. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, (1981).
- [102] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.-I. Hesla et D.-D. Joseph, *A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows*, International Journal of Multiphase Flow, 25(1999), pp. 755–794.
- [103] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.
- [104] P. Grisvard, *Problèmes aux limites dans les polygones - mode d'emploi*, EDF Bull. Direction Etudes Rech. Sér. C. Math. Inform. 1. MR 87g :35073, (1986), pp. 21–59.
- [105] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, RMA 22, Masson, 1992.
- [106] W. Han, *A posteriori error analysis via duality theory. With applications in modeling and numerical approximations*, Advances in Mechanics and Mathematics, Springer-Verlag, New York, 8(2005).
- [107] W. Han et M. Sofonea, *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society and International Press, 30(2002).

- [108] P. Hansbo et C. Johnson, *Adaptive finite element methods for elastostatic contact problems*, Grid generation and adaptive algorithms (Minneapolis, MN, 1997), IMA Vol. Math. Appl., Springer, New York, 113(1999), pp. 135–149.
- [109] A. Hansbo, P. Hansbo et M.-G. Larson, *A finite element method on composite grids based on Nitsche's method*, Math. Mod. Numer. Anal., 37(2003), pp. 495–514.
- [110] P. Hansbo, C. Lovadina, I. Perugia et G. Sangalli, *A Lagrange multiplier method for the finite element solution of elliptic interface problems using nonmatching meshes*, Numer. Math., 100(2005), pp. 91–115.
- [111] J. Haslinger, *Approximation of the Signorini problem with friction, obeying the Coulomb law*, Math. Methods Appl. Sci., 5(1983), pp. 422–437.
- [112] J. Haslinger, I. Hlaváček et J. Nečas, *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics*, in Handbook of Numerical Analysis, Eds. P.-G. Ciarlet and J.-L. Lions, North Holland, 4(1996), pp. 313–485.
- [113] J. Haslinger et Y. Renard, *A new fictitious domain approach inspired by the extended finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., 47(2009), pp. 1474–1499.
- [114] R. Hassani, P. Hild, I. Ionescu et N.-D. Sakki, *A mixed finite element method and solution multiplicity for Coulomb frictional contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 192(2003), pp. 4517–4531.
- [115] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric et K. Ohtsuka, *FreeFem++*, <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [116] P. Heintz et P. Hansbo, *Stabilized Lagrange multiplier methods for bilateral elastic contact with friction*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195(2006), pp. 4323–4333.
- [117] W. Helfrich, *Elastic properties of lipid bilayers : theory and possible experiments*, Z. Naturforsch., 28c(1973), pp. 693–703.
- [118] T.-I. Hesla, *Collisions of smooth bodies in viscous fluids : a mathematical investigation*, Thèse, Université du Minnesota, USA, 2005.
- [119] S. Hilbert, *A mollifier useful for approximations in Sobolev spaces and some applications to approximating solutions of differential equations*, Math. Comp., 27(1973), pp. 81–89.
- [120] P. Hild, *Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity*, Q. Jl. Mech. Appl. Math., 57(2004), pp. 225–235.
- [121] P. Hild, *Multiple solutions of stick and separation type in the Signorini model with Coulomb friction*, Z. Angew. Math. Mech., 85(2005), pp. 673–680.
- [122] P. Hild, *Two results on solution uniqueness and multiplicity for the linear elastic friction problem with normal compliance*, Nonlinear Anal., 71(2009), pp. 5560–5571.

-
- [123] P. Hild et P. Laborde, *Quadratic finite element methods for unilateral contact problems*, Appl. Numer. Math., 41(2002), pp. 401–421.
- [124] P. Hild et V. Lleras, *Residual error estimates for Coulomb friction*, SIAM J. Numer. Anal., accepté.
- [125] P. Hild, V. Lleras et Y. Renard, *A posteriori error analysis for Poisson's equation approximated by XFEM*, ESAIM proceedings, 27(2009), pp. 107–121.
- [126] P. Hild, V. Lleras et Y. Renard, *A residual error estimator for the XFEM approximation of the elasticity problem*, soumis.
- [127] P. Hild et S. Nicaise, *A posteriori error estimations of residual type for Signorini's problem*, Numer. Math., 101(2005), pp. 523–549.
- [128] P. Hild et S. Nicaise, *Residual a posteriori error estimators for contact problems in elasticity*, Math. Model. Numer. Anal., 41(2007), pp. 897–923.
- [129] P. Hild et Y. Renard, *An error estimate for the Signorini problem with Coulomb friction approximated by the finite elements*, SIAM J. Numer. Anal., 45(2007), pp. 2012–2031.
- [130] P. Hild et Y. Renard, *A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of contact problems in elastostatics*, Numer. Math., accepté.
- [131] M. Hillairet, *Asymptotic collision between solid particles in a Burgers-Hopf fluid*, Asymptotic Analysis, 43(2005), pp. 323–338.
- [132] M. Hillairet, *Lack of collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous flow*, Comm. Partial Differential Equations, 32(2007), pp. 1345–1371.
- [133] R. Hoppe et R. Kornhuber, *Adaptive multilevel methods for obstacle problems*, SIAM J. Numer. Anal., 31(1994), pp. 301–323.
- [134] H.-H. Hu, *Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures*, Int. J. Multiphase Flow, 22(1996), pp. 335–352.
- [135] S. Hübner et B. Wohlmuth, *An optimal error estimate for nonlinear contact problems*, SIAM J. Numer. Anal., 43(2005), pp. 156–173.
- [136] T.-J.-R. Hughes, L.-P. Franca et M. Balestra, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics. V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition : a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 59(1986), pp. 85-99.
- [137] J. Jarušek, *Contact problems with bounded friction. Coercive case*, Czechoslovak. Math. J., 33(1983), pp. 237–261.
- [138] M. Jean, *The non-smooth contact dynamics method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 177(1999), pp. 235–257.

- [139] A.-A. Johnson et T.-E. Tezduyar, *Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 134(1996), pp. 351–373.
- [140] C. Johnson, *Adaptive finite element methods for the obstacle problem*, Math. Models Methods Appl. Sci., 2(1992), pp. 483–487.
- [141] V. Kantsler et V. Steinberg, *Orientation and dynamics of a vesicle in tank-treading motion in shear flow*, Phys. Rev. Lett., 95(2005), pp. 258101–258105.
- [142] V. Kantsler et V. Steinberg, *Transition to tumbling and two regimes of tumbling motion of a vesicle in shear flow*, Phys. Rev. Lett., 96(2006), pp. 036001–036005.
- [143] Y. Kato, *Signorini's problem with friction in linear elasticity*, Japan J. Appl. Math., 4(1987), pp. 237–268.
- [144] D. Kelly, J. Gago et O.-C. Zienkiewicz, *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method. Part 1 : error analysis*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 19(1983), pp. 1593–1619.
- [145] A.-R. Khoei et M. Nikbakht, *Contact friction modeling with the extended finite element method (XFEM)*, Journal of Materials Processing Technology, 177(2006), pp. 58–62.
- [146] A.-R. Khoei et M. Nikbakht, *An enriched finite element algorithm for numerical computation of contact friction problems*, Int. J. Mech. Sci., 49(2007), pp. 183–199.
- [147] N. Kikuchi et J.-T. Oden, *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM, 1988.
- [148] D. Kinderlehrer, *Estimates for the solution and its stability in Signorini's problem*, Appl. Math. Optim., 8(1982), pp. 159–188.
- [149] D. Kinderlehrer et G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure and Applied mathematics, Academic Press, New York-London, 1980.
- [150] A. Klarbring, A. Mikelić et M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Internat. J. Engrg. Sci., 26(1988), pp. 811–832.
- [151] A. Klarbring, A. Mikelić et M. Shillor, *On friction problems with normal compliance*, Nonlinear Anal., 13(1989), pp. 935–955.
- [152] R. Kornhuber, *A posteriori error estimates for elliptic variational inequalities*, Comput. Math. Applic., 31(1996), pp. 49–60.
- [153] M. Kraus, W. Wintz, U. Seifert et R. Lipowsky, *Fluid vesicles in shear flow*, Phys. Rev. Lett., 77(1996), pp. 3685–3688.
- [154] P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard et M. Salaün, *High-order extended finite element method for cracked domains*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 64(2005), pp. 354–381.

-
- [155] P. Ladevèze, G. Coffignal et J.-P. Pelle, *Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis*, Accuracy estimates and adaptative refinements in finite element computations, J. Wiley, 1986, pp. 181–203.
- [156] P. Ladevèze et D. Leguillon, *Error estimate procedure in the finite element method and applications*, SIAM J. Numer. Anal., 20(1983), pp. 485–509.
- [157] P. Ladevèze, J.-P. Pelle et P. Rougeot, *Error estimates and mesh optimization for FE computation*, Engrg. Comput., 8(1991), pp. 69–80.
- [158] P. Ladevèze et P. Rougeot, *New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 150(1997), pp. 239–249.
- [159] T.-A. Laursen, *Formulation and treatment of frictional contact problems using finite elements*, SUDAM report, 1992.
- [160] T. Laursen, *Computational contact and impact mechanics*, Springer, 2002.
- [161] C.-Y. Lee et J.-T. Oden, *A posteriori error estimation of h-p finite element approximations of frictional contact problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 113(1994), pp. 11–45.
- [162] A. Lefebvre, *Modélisation numérique d'écoulements fluide/particules – prise en compte des forces de lubrification*, Thèse, Université Paris-Sud, 2007.
- [163] J. Lemaitre et J.-L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1994.
- [164] J.-L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, 1968.
- [165] J.-L. Lions et G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure. Appl. Math., XX (1967), pp. 493–519.
- [166] Y. Liu et W.-K. Liu, *Rheology of red blood cell aggregation by computer simulation*, Journal of Computational Physics, 220(2006), pp. 139–154.
- [167] W. Liu et N. Yan, *A posteriori error estimators for a class of variational inequalities*, J. Sci. Comput., 15(2000), pp. 361–393.
- [168] V. Lleras, *A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of frictional contact problems in elastostatics*, Math. Model. Nat. Phenom, 4(2009), pp. 163–182.
- [169] F. Louf, J.-P. Combe et J.-P. Pelle, *Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction*, Comput. and Structures, 81(2003), pp. 1759–1772.
- [170] M. Mader, V. Vitkova, M. Abkarian, A. Viallat et T. Podgorski, *Dynamics of viscous vesicles in shear flow*, The European Physical Journal E : Soft Matter and Biological Physics, 19(2006), pp. 389–397.

- [171] M. Maischak et E. Stephan, *Adaptive hp-versions of BEM for Signorini problems*, Appl. Numer. Math., 54(2005), pp. 425–449.
- [172] M. Maischak et E. Stephan, *Adaptive hp-versions of boundary element methods for elastic contact problems*, Comput. Mech., 39(2007), pp. 597–607.
- [173] J.-A.-C. Martins et J.-T. Oden, *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 52(1985), pp. 527–634.
- [174] J.-A.-C. Martins et J.-T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*, Nonlinear Anal., 11(1987), pp. 407–428.
- [175] J.-A.-C. Martins et E.-B. Pires, *Free boundary problems : theory and applications*, Longman Scientific et Technical J.-M. Chadam et H. Rasmussen Editors, 1(1990), pp. 323–328.
- [176] A.-D. Maude, *End effects in a falling-sphere viscosimeter*, Br. J. Appl. Phys., 12(1961), pp. 293–295.
- [177] B. Maury, *Direct simulation of 2D fluid-particle flows in biperiodic domains*, Journal of Computational Physics, 156(1999), pp. 325–351.
- [178] B. Maury, *A time-stepping scheme for inelastic collisions*, Numer. Math., 102(2006), pp. 649–679.
- [179] B. Maury, *A gluey particle model*, ESAIM Proc, 18(2007), pp. 133–142.
- [180] V.-G. Maz'ya et T.-O. Shaposhnikova, *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*, Pitman, 1985.
- [181] C. Misbah, *Vacillating breathing and tumbling of vesicles under shear flow*, Phys. Rev. Lett., 96(2006).
- [182] N. Moës et T. Belytschko, *XFEM : nouvelles frontières pour les éléments finis*, Revue européenne des éléments finis (Calcul des structures GIENS'01), 11(2002), pp. 305–318.
- [183] N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko, *A finite element method for cracked growth without remeshing*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 46(1999), pp. 131–150.
- [184] N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko, *An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 46(1999), pp. 131–150.
- [185] M. Moussaoui et K. Khodja, *Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet-Signorini dans un domaine polygonal plan*, Commun. Partial Differential Equations, 17(1992), pp. 805–826.
- [186] L. Munn et M. Dupin, *Blood cell interactions and segregation in flow*, Annals of Biomedical Engineering, 36(2008), pp. 534–544.

-
- [187] J. Nečas, J. Haslinger et J. Jarušek, *On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction*, Bolletino U. M. I., 17(1980), pp. 796–811.
- [188] J. Nitsche, *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind*, Abh. Math. Univ. Hamburg, 36(1971), pp. 9–15.
- [189] R. Nochetto, K. Siebert et A. Veerer, *Pointwise a posteriori error control for elliptic obstacle problems*, Numer. Math., 95(2003), pp. 163–195.
- [190] R. Nochetto, K. Siebert et A. Veerer, *Fully localized a posteriori error estimators and barrier sets for contact problems*, SIAM J. Numer. Anal., 42(2005), pp. 2118–2135.
- [191] H. Noguchi et G. Gompper, *Fluid vesicles with viscous membranes in shear flow*, Phys. Rev. Lett., 93(2004), pp. 258102–258106.
- [192] H. Noguchi et G. Gompper, *Shape transitions of fluid vesicles and red blood cells in capillary flows*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(2005), pp. 14159–14164.
- [193] J.-T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz et T.-A. Westermann, *Toward an universal h - p adaptive finite element strategy, part 2 : a posteriori error estimation*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 77(1989), pp. 113–180.
- [194] M. Ortiz, Y. Leroy et A. Needleman, *A finite element method for localized failure analysis*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 61(1987), pp. 189–214.
- [195] D.-R.-J. Owen et D. Peric, *Computational model for 3D contact problems with friction based on the penalty method*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 35(1992), pp. 1289–1309.
- [196] O. Pantz, *A frictionless contact algorithm for deformable bodies*, preprint CMAP, Ecole Polytechnique, R.I. 647(2008).
- [197] N.-A. Patankar, P. Singh, D.-D. Joseph, R. Glowinski et T.-W. Pan, *A new formulation for the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows*, International Journal of Multiphase Flow, 26(2000), pp. 1509–1524.
- [198] O. Pironneau, J. Liou et T. Tezduyar, *Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equations with time-dependent domains*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 100(1992), pp. 117–141.
- [199] C. Pozrikidis, *Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries*, Physics of Fluids, 17(2005), pp. 031503–031517.
- [200] C. Pozrikidis, *Numerical simulation of the flow-induced deformation of red blood cells*, Annals of Biomedical Engineering, 31(2003), pp. 1194–1205.
- [201] R. Rannacher et F.-T. Suttmeier, *A posteriori error control in finite element methods via duality techniques : application to perfect plasticity*, Comput. Mech., 21(1998), pp. 123–133.

- [202] R. Rannacher et F.-T. Suttmeier, *A posteriori error estimation and mesh adaptation for finite element models in elasto-plasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 176(1999), pp. 333–361.
- [203] Y. Renard, *A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction*, SIAM J. Math. Anal., 38(2006), pp. 452–467.
- [204] W.-C. Rheinboldt, *On a theory of mesh-refinement processes*, SIAM J. Numer. Anal., 17(1980), pp. 766–778.
- [205] R. Rocca et M. Cocou, *Numerical analysis of quasi-static unilateral contact problems with local friction*, SIAM J. Numer. Anal., 39(2001), pp. 1324–1342.
- [206] R. Rocca et M. Cocou, *Existence and approximation of a solution to quasistatic Signorini problem with local friction*, Internat. J. Engrg. Sci., 39(2001), pp. 1233–1255.
- [207] J.-J. Rodenas, O.-A. Gonzales-Estrada et J.-E. Tarancon, *A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular plus smooth stress field splitting*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 76(2008), pp. 545–571.
- [208] L.-R. Scott et S. Zhang, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp., 54(1990), pp. 483–493.
- [209] U. Seifert, *Configurations of fluid membranes and vesicles*, Advances in Physics, 46(1997), pp. 13 - 137.
- [210] M. Shillor, M. Sofonea et J.-J. Telega, *Models and analysis of quasistatic contact. Variational methods*, Springer, 2004.
- [211] A. Signorini, *Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata*, Rend. de Matematica, 18(1959), pp. 95–139.
- [212] J.-C. Simo, P. Wriggers et R.-L. Taylor, *A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 51(1985), pp. 163–180.
- [213] P. Singh, T.-I. Hesla et D.-D. Joseph, *Distributed Lagrange multiplier method for particulate flows with collisions*, International Journal of Multiphase Flow, 29(2003), pp. 495–509.
- [214] V.-N. Starovoitov, *Behavior of a rigid body in an incompressible viscous fluid near a boundary*, Internat. Ser. Numer. Math., 147(2002), pp. 313–327.
- [215] R. Stenberg, *On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method*, J. Comput. Appl. Math., 63(1995), pp. 139–148.
- [216] M. Stolarska, D.-L. Chopp, N. Moës et T. Belytschko, *Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 51(2001), pp. 943–960.

-
- [217] G. Strang, *Approximation in the finite element method*, Numer. Math., 19(1972), pp. 81–98.
- [218] G. Strang et G. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [219] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran et T. Belytschko, *Extended finite element method for three dimensional crack modeling*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 48(2000), pp. 1549–1570.
- [220] F.-T. Suttmeier, *General approach for a posteriori error estimates for finite element solutions of variational inequalities*, Comput. Mech., 27(2001), pp. 317–323.
- [221] F.-T. Suttmeier, *Error bounds for finite element solutions of elliptic variational inequalities of second kind*, East-West J. Numer. Math., 9(2001), pp. 307–313.
- [222] F.-T. Suttmeier, *On a direct approach to adaptive FE-discretizations for elliptic variational inequalities.*, J. Numer. Math., 13 (2005), pp. 73–80.
- [223] B.-A.Szabó, *Estimation and control of error based on p convergence*, Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations, Wiley, 1986, pp. 61–78.
- [224] B.-A.Szabó, *The p and h - p versions of the finite element method in solid mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 80(1990), pp. 185–195.
- [225] B.-A. Szabó, *The use of a priori estimates in engineering computations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 82(1990), pp. 139–154.
- [226] D. Tabor, *Friction : the present state of our understanding*, J. of Lubrification Technology, 103(1981), pp. 169–179.
- [227] D.-M. Tolstoi, *Significance of the normal degree of freedom and natural vibrations in contact with friction*, Wear, 10(1967), pp. 199–213.
- [228] J.-L. Vasquez et E. Zuazua, *Lack of collision in a simplified 1d model for fluid-solid interaction*, Math. Models Methods Appl. Sci., 16(2006), pp. 623–678.
- [229] A. Veerer, *Efficient and reliable a posteriori error estimators for elliptic obstacle problems*, SIAM J. Numer. Anal., 39(2001), pp. 146–167.
- [230] J. Venel, *Modélisation mathématique et numérique des mouvements de foule*, Thèse, Université Paris-Sud, 2008.
- [231] R. Verfürth, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, Wiley and Teubner, 1996.
- [232] R. Verfürth, *A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 176(1999), pp. 419–440.
- [233] V. Vitkova, M. Mader et T. Podgorski, *Deformation of vesicles flowing through capillaries*, EPL (Europhysics Letters), 68(2004), pp. 398–404.

- [234] A. Weiss et B. Wohlmuth, *A posteriori error estimator and error control for contact problems*, Math. Comp., 78(2009), pp. 1237–1267.
- [235] B. Wohlmuth, *An a posteriori error estimator for two body contact problems on non-matching meshes*, J. Sci. Comput, 33(2007), pp. 25–45.
- [236] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Wiley, 2002.
- [237] P. Wriggers et O. Scherf, *Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems*, Mathl. Comput. Modelling, 28(1998), pp. 437–447.
- [238] J. Zhang, P.-C. Johnson et A.-S. Popel, *Red blood cell aggregation and dissociation in shear flows simulated by lattice Boltzmann method*, Journal of Biomechanics, 41(2008), pp. 47–55.
- [239] J.-Z. Zhu et Z. Zhang, *The relationship of some a posteriori estimators*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 176(1999), pp. 463–475.
- [240] O.-C. Zienkiewicz et B. Boroomand, *Recovery by equilibrium in patches*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 36(1997), pp. 137–164.
- [241] O.-C. Zienkiewicz, J.-P. Gago et D.-W. Kelly, *The hierarchical concept in finite element analysis*, Comput. Struct., 16(1983), pp. 53–65.
- [242] O.-C. Zienkiewicz et J.-Z. Zhu, *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 24(1987), pp. 337–357.
- [243] O.-C. Zienkiewicz et J.-Z. Zhu, *The Superconvergent Patch Recovery and adaptive finite element*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 101(1992), pp. 207–224.

Résumé

La modélisation des problèmes de contact pose de sérieuses difficultés qu'elles soient conceptuelles, mathématiques ou informatiques. Motivés par le rôle fondamental que jouent les phénomènes de contact, nous nous intéressons à la modélisation, l'analyse et la simulation de problèmes de contact intervenant en mécanique des solides et des fluides. Dans une première partie théorique, on étudie le comportement asymptotique de solutions de problèmes variationnels dépendant du temps issus de la mécanique du contact frottant. La deuxième partie est consacrée au contrôle de la qualité des calculs en mécanique des solides. Guidés par la recherche de la formulation et l'étude du contact dans la méthode des éléments finis étendus (XFEM), nous étudions notamment les estimateurs d'erreur par résidu pour la méthode XFEM dans le cas linéaire, ceux pour le problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb approchés par une méthode d'éléments finis standard et l'extension au cas de méthodes mixtes stabilisées (i.e., ne nécessitant pas de condition inf-sup). Cette partie s'achève par la définition du problème de contact avec XFEM suivie d'une estimation a priori de l'erreur. La troisième partie concerne la simulation numérique en mécanique des fluides, plus précisément du problème de contact de la dynamique des globules rouges évoluant dans un fluide régi par les équations de Navier-Stokes en dimension deux.

Mots-clés: problèmes d'évolution, comportement asymptotique, contact unilatéral, frottement de Coulomb, compliance normale, élasticité, estimations d'erreur a priori et a posteriori, résidu, opérateur de quasi-interpolation, méthode des éléments finis étendus, adaptation de maillages, stabilisation par multiplicateurs de Lagrange, domaine fictif, dynamique des globules rouges, équations de Navier-Stokes.

Classification AMS : 49J40, 65N15, 65N30, 74C05, 74F10, 74M10, 74M15, 76M10, 92C17.

Abstract

The modelling of contact problems leads to significant difficulties either conceptual, mathematical or computational. Motivated by the prominent position held by contact phenomena, we are interested in the modelling, the analysis and the numerical experiments of contact problems in solid and fluid mechanics. In a first theoretical part, we study the asymptotic behavior of solutions of time-dependent variational problems arising in frictional contact mechanics. The second part is devoted to the control of computations quality in structural mechanics. In order to find a convenient formulation and to carry out a study of contact problems with the eXtended Finite Element Method (XFEM) we first obtain a residual a posteriori error estimator for the XFEM method in the linear case, another one for the unilateral contact problem with Coulomb friction approximated with a standard finite element method, and a third one for the latter problem approximated by a stabilized Lagrange multiplier method (i.e., which do not require any inf-sup condition). This part ends with a definition of unilateral contact with the XFEM followed by an a priori error analysis. The third part is concerned with numerical simulations in fluid mechanics, more precisely the contact treatment in the red blood cells dynamics in a twodimensional setting.

Keywords: evolution problems, asymptotic behavior, unilateral contact, Coulomb friction, normal compliance, elasticity, a priori and a posteriori error estimates, residuals, quasi-interpolation operator, eXtended Finite Element Method, mesh adaptivity, Lagrange multiplier stabilization, fictitious domain, dynamics of red blood cells, Navier-Stokes equations.

AMS Classification : 49J40, 65N15, 65N30, 74C05, 74F10, 74M10, 74M15, 76M10, 92C17.

