

THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE
FRANCHE-COMTÉ**
en Sciences Pour l'Ingénieur

Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires

par

Emmanuel FOLTÊTE

Soutenue le 27 novembre 1998 devant la Commission d'Examen :

Président	G. LALLEMENT	Professeur, Université de Franche-Comté
Rapporteurs	L. JEZEQUEL R. OHAYON	Professeur, École Centrale de Lyon Professeur, CNAM, Paris
Examineurs	R. FILLOD J. PIRANDA P. FARGETTE C. STAWICKI	Professeur, Université de Franche-Comté Professeur, Université de Franche-Comté Ingénieur de Recherche, ONERA, Châtillon Ingénieur de Recherche, PSA Peugeot Citroën, Vélizy

Remerciements

J'exprime d'abord toute ma reconnaissance à Monsieur Louis J ezequel, professeur à l'École Centrale de Lyon et Monsieur Roger Ohayon, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers pour avoir accepté d'examiner ces travaux en détail, et à Monsieur Christophe Stawicki, Ingénieur de Recherche de la société PSA Peugeot-Citroën pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de cette thèse.

Je tiens également à remercier vivement toutes les personnes du Laboratoire de Mécanique Appliquée qui ont accompagné ces trois années d'étude :

Monsieur Gérard Lallement, qui m'a accueilli avec une confiance spontanée au sein de l'équipe Dynamique des Structures,

Messieurs René Fillod, Jean Piranda et Jean-Louis Raynaud pour leur encadrement scientifique de qualité et leur grande disponibilité,

Messieurs Bernard Prêtre, Jean-Louis Masson, Robert Cosme et Roger Myotte pour leur indispensable soutien technique.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers tous ceux qui ont guidé mon parcours dans le monde des vibrations :

Monsieur André Preumont qui m'a accueilli au Service des Constructions Mécaniques et Robotique de l'Université Libre de Bruxelles,

Monsieur René-J ean Gibert, responsable du DEA Dynamique des Structures à Saclay,

Monsieur Marek Bedinsky qui m'a initié aux mesures vibratoires au Laboratoire Acoustique et Fatigue de la société Renault-Agriculture,

Monsieur Guy Mollet, professeur à l'École Normale Supérieure de Cachan.

Enfin, un grand merci à mon entourage proche qui a fortement contribué à maintenir durant ce travail un équilibre indispensable, en particulier Maryline, mes parents Jean et Marie-Claude, mes frères et sœur, mes amis mécaniciens, musiciens et tous les autres...

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	3
-----------------------	---

Chapitre 1	9
------------	---

Mise en œuvre expérimentale d'une méthode d'appropriation
--

1.1. Introduction	11
1.2. Méthode d'appropriation	13
1.2.1. Critère de résonance de phase	13
1.2.2. Détermination des paramètres modaux	14
1.3. Appropriation par le calcul	15
1.3.1. Mise en œuvre de la méthode	15
1.3.1.1. Localisation des modes	15
1.3.1.2. Calcul des modes	16
1.3.1.3. Vérifications et corrections	17
1.3.1.4. Sauvegarde des résultats	20
1.3.2. Validation de la méthode sur un cas-test simulé	20
1.3.3. Application de la méthode à une structure industrielle	22
1.3.4. Conclusion	23
1.4. Appropriation expérimentale	24
1.4.1. Problèmes inhérents à l'appropriation expérimentale de structures légères	24
1.4.2. Description de la méthode proposée	26
1.4.2.1. Phase d'appropriation	26
1.4.2.2. Phase de contrôle des forces	28
1.4.3. Mise en œuvre avec le système LMS	30
1.4.3.1. Génération de signal	30
1.4.3.2. Mesure des réponses	31
1.4.3.3. Déroulement d'une appropriation expérimentale	33
1.4.4. Application à un système simulé	37
1.4.5. Application à une structure industrielle	38
1.4.6. Correction des modes appropriés	38
1.4.6.1. Décomposition modale de la réponse aux forces appropriées	38
1.4.6.2. Estimation des vecteurs propres réels	39
1.4.6.3. Application à un système simulé	39
1.4.6.4. Application à une structure industrielle	40
1.5. Conclusion	42

Estimation des modes réels du système conservatif associé à une structure à partir des modes complexes du système dissipatif basée sur l'appropriation

2.1. Introduction	45
2.2. Description de la méthode	46
2.2.1. Démarche	46
2.2.2. Recherche de configurations optimales d'excitation	48
2.2.2.1. Méthode a)	48
2.2.2.2. Méthode b)	48
2.2.3. Calcul itératif des fréquences propres	48
2.2.4. Correction des configurations optimales d'excitation	52
2.2.5. Détermination des bandes fréquentielles	52
2.2.6. Calcul des modes réels	52
2.2.7. Estimation de l'amortissement généralisé	53
2.2.8. Reconstruction des modes complexes	55
2.2.9. Mise en oeuvre	56
2.3. Validation de la méthode sur un cas-test simulé	56
2.3.1. Configurations optimales d'excitation	56
2.3.2. Calcul itératif des fréquences propres	61
2.3.3. Détermination des bandes fréquentielles	63
2.3.4. Calcul des modes réels	67
2.3.5. Résultats numériques	67
2.3.5.1. Modes propres réels	68
2.3.5.2. Matrice d'amortissement généralisé	69
2.3.5.3. Modes propres complexes reconstruits	69
2.4. Validation de la méthode sur un cas-test expérimental	70
2.4.1. Description de l'expérience	70
2.4.2. Configurations d'amortissement étudiées	72
2.4.3. Résultats	73
2.4.3.1. Modes complexes identifiés	73
2.4.3.2. Modes réels calculés	74
2.4.3.3. Matrices d'amortissement généralisé	76
2.4.3.4. Modes complexes reconstruits	76
2.4.3.5. Conclusion	77
2.5. Application à une structure industrielle	77
2.6. Conclusion	80

Méthode globale d'identification modale d'une structure faiblement non-linéaire présentant des modes couplés

3.1. Introduction	83
3.2. Les non-linéarités et leurs effets	87
3.2.1. Raideur cubique	87
3.2.2. Amortissement cubique	88
3.2.3. Frottement sec	89
3.3. Description de la méthode	90
3.3.1. Diminution de la contribution des modes hors-bande	91
3.3.2. Condensation des réponses sur une sous-base réelle	95
3.3.2.1. Décomposition en Valeurs Singulières	95
3.3.2.2. Détection du nombre de modes présents	96
3.3.2.3. Définition de la sous-base réelle	97
3.3.2.4. Condensation de la réponse mesurée	97
3.3.3. Problème non-linéaire condensé	98
3.3.3.1. Écriture générale du problème non-linéaire condensé	98
3.3.3.2. Modèle de force non-linéaire	99
3.3.3.3. Force non-linéaire condensée	101
3.3.3.4. Problème linéaire équivalent	104
3.3.4. Décalage – Normalisation – Pondération	107
3.3.4.1. Décalage fréquentiel des colonnes relatives à la masse	107
3.3.4.2. Normalisation	110
3.3.4.3. Pondération	111
3.3.5. Estimation des paramètres linéaires et non-linéaires	114
3.3.5.1. Modes propres réels du SCA	115
3.3.5.2. Modes propres complexes du SDA	115
3.3.5.3. Matrice d'amortissement généralisé	116
3.3.6. Synthèse de la réponse non-linéaire	116
3.3.7. Comparaison des modes avec un système linéaire de référence	117
3.4. Validation de la méthode sur un cas-test simulé	118
3.4.1. Description du modèle	118
3.4.2. Non-linéarités appliquées	119
3.4.3. Résultats	120
3.4.3.1. Résultats numériques	120
3.4.3.2. Résultats graphiques	122
3.4.4. Conclusion	124
3.5. Validation de la méthode sur un cas-test expérimental	124
3.5.1. Description du montage	125
3.5.1.1. Instrumentation	125
3.5.1.2. Câblage	126
3.5.1.3. Mesure	127
3.5.2. Non-linéarités appliquées	128
3.5.2.1. Non-linéarités cubiques	128

3.5.2.2. Non-linéarités carrées	131
3.5.2.3. Frottement sec	132
3.5.3. Structure linéaire	134
3.5.4. Structure non-linéaire	135
3.5.4.1. Non-linéarités cubiques	136
3.5.4.2. Non-linéarités carrées	139
3.5.4.3. Frottement sec	142
3.5.5. Conclusion	143
3.6. Conclusion	143
Conclusion générale	145
Bibliographie	155
Annexe	163

Comportement dynamique des systèmes linéaires
--

A.1. Modèle dynamique linéaire	165
A.2. Modélisation des systèmes conservatifs	166
A.2.1. Définition	166
A.2.2. Solution du système homogène : régime libre	166
A.2.3. Solution particulière : réponse forcée harmonique	166
A.3. Modélisation des systèmes dissipatifs	167
A.3.1. Solution du système homogène : régime libre	167
A.3.2. Solution particulière : réponse forcée harmonique	168
A.4. Influence de l'amortissement	169
A.4.1. Amortissement généralisé	169
A.4.2. Amortissement proportionnel	169
A.4.3. Relations entre les pulsations propres	169
A.4.4. Relations entre les vecteurs propres	170
A.4.5. Réponse forcée harmonique	170
A.4.6. Amortissement non-proportionnel	171

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Chapitre 1

<i>Figure 1-1 : oscillateur à 2 degrés de liberté</i>	12
<i>Figure 1-2 : évolution du paramètre k, système simulé à 8 ddl</i>	16
<i>Figure 1-3 : FRF au point 1, système simulé à 8 ddl</i>	16
<i>Figure 1-4 : paramètres généralisés du mode 3, système simulé à 8 ddl</i>	17
<i>Figure 1-5 : évolution de δ, mode 3</i>	17
<i>Figure 1-6 : évolution de δ, mode 6</i>	17
<i>Figure 1-7 : interpolation linéaire du paramètre k sur 5 points</i>	18
<i>Figure 1-8 : interpolation linéaire du paramètre k sur 3 points</i>	18
<i>Figure 1-9 : définition du critère numérique de cohérence</i>	19
<i>Figure 1-10 : amortissement non-diagonal</i>	20
<i>Figure 1-11 : amortissement diagonal</i>	20
<i>Figure 1-12 : plancher de véhicule automobile</i>	22
<i>Figure 1-13 : évolution du paramètre k pour le plancher de véhicule automobile</i>	22
<i>Figure 1-14 : évolution du paramètre δ, mode 6 du plancher de véhicule automobile</i>	23
<i>Figure 1-15 : paramètres généralisés, mode 6 du plancher de véhicule automobile</i>	23
<i>Figure 1-16 : structure soumise à deux excitations</i>	25
<i>Figure 1-17 : nombre de points par période en fonction de la fréquence nominale</i>	31
<i>Figure 1-18 : résolution fréquentielle en fonction de la fréquence nominale</i>	31
<i>Figure 1-19 : nombre de points par période en fonction du nombre de voies et de la fréquence nominale</i>	32
<i>Figure 1-20 : organigramme du logiciel d'appropriation expérimentale</i>	33
<i>Figure 1-21 : estimation du temps de stabilisation</i>	33
<i>Figure 1-22 : paramétrage de la mesure</i>	35
<i>Figure 1-23 : séquence 3 de la phase d'appropriation</i>	35
<i>Figure 1-24 : séquence 4 de la phase d'appropriation</i>	36
<i>Figure 1-25 : résultat de l'appropriation</i>	36
<i>Figure 1-26 : bouquet de phase de la réponse appropriée du mode 4, système simulé à 8 ddl</i>	37
<i>Figure 1-27 : bouquet de phase de la réponse appropriée du mode 5, système simulé à 8 ddl</i>	37
<i>Figure 1-28 : bouquet de phase de la réponse appropriée du mode 3, plancher de véhicule automobile</i>	38
<i>Figure 1-29 : bouquet de phase de la réponse appropriée du mode 8, plancher de véhicule automobile</i>	38
<i>Figure 1-30 : bouquet de phase du mode 5 initial et corrigé, système simulé à 8 ddl</i>	40
<i>Figure 1-31 : bouquet de phase du mode 8 initial et corrigé, plancher de véhicule automobile</i>	41
<i>Tableau 1-1 : fréquences exactes et calculées, erreurs relatives</i>	21
<i>Tableau 1-2 : amortissements généralisés exacts et calculés, erreurs relatives</i>	21
<i>Tableau 1-3 : MAC et MSF entre vecteurs propres réels et calculés</i>	21
<i>Tableau 1-4 : fréquences modales du plancher de véhicule automobile</i>	37
<i>Tableau 1-5 : angles de phase obtenus lors de l'appropriation expérimentale du plancher</i>	38
<i>Tableau 1-6 : coefficients de participation modale pour la réponse appropriée du mode 5</i>	39
<i>Tableau 1-7 : MAC entre modes calculés et modes exacts, système simulé à 8 ddl</i>	40
<i>Tableau 1-8 : coefficients de participation modale pour la réponse appropriée du mode 8</i>	40
<i>Tableau 1-9 : MAC entre modes calculés, modes appropriés et modes corrigés, plancher</i>	41

Chapitre 2

Figure 2-1 : architecture générale	47
Figure 2-2 : sélection d'une configuration optimale d'excitation pour tous les modes	49
Figure 2-3 : sélection d'une configuration optimale d'excitation par mode	50
Figure 2-4 : calcul itératif de la pulsation propre réelle d'un mode	51
Figure 2-5 : évolution du critère de qualité, fréquences initiales	57
Figure 2-6 : évolution du critère de qualité, fréquences initiales et recalculées	57
Figure 2-7 : calcul itératif de la fréquence propre réelle du mode 3	61
Figure 2-8 : erreurs maximale et moyenne en %	62
Figure 2-9 : sélection des bandes fréquentielles : modes non-couplés	63
Figure 2-10 : sélection des bandes fréquentielles : modes faiblement couplés	64
Figure 2-11 : sélection des bandes fréquentielles : modes fortement couplés	64
Figure 2-12 : bandes fréquentielles initiales	65
Figure 2-13 : évolution du paramètre k sur les bandes initiales	65
Figure 2-14 : bandes fréquentielles finales	66
Figure 2-15 : évolution du paramètre k sur les bandes finales	66
Figure 2-16 : interpolation linéaire du paramètre k , mode 6 du système simulé à 8 ddl	67
Figure 2-17 : parties réelle et imaginaire de la puissance complexe, mode 6 du système simulé à 8 ddl	67
Figure 2-18 : vue d'ensemble du montage expérimental	71
Figure 2-19 : schéma des trois poutres couplées	71
Figure 2-20 : FRF au point 5 pour les 4 configurations d'amortissement	72
Figure 2-21 : FRF mesurée et calculée par Modan au point 5, configuration 3	72
Figure 2-22 : FRF mesurée et synthétisée par Modan, plancher de véhicule automobile	78
Figure 2-23 : FRF mesurée et synthétisée par Modan au point d'excitation, mode 3	79
Tableau 2-1 : sélection du premier ddl excitateur	58
Tableau 2-2 : sélection du deuxième ddl excitateur	58
Tableau 2-3 : sélection du troisième ddl excitateur	58
Tableau 2-4 : sélection du quatrième ddl excitateur	58
Tableau 2-5 : sélection du cinquième ddl excitateur	59
Tableau 2-6 : sélection du sixième ddl excitateur	59
Tableau 2-7 : sélection du septième ddl excitateur	59
Tableau 2-8 : sélection du huitième ddl excitateur	59
Tableau 2-9 : configuration optimale d'excitation, fréquences recalculées	60
Tableau 2-10 : configurations optimales d'excitation pour un critère de 10 %, fréquences initiales	60
Tableau 2-11 : configurations optimales d'excitation pour un critère de 20 %, fréquences initiales	60
Tableau 2-12 : configurations optimales d'excitation pour un critère de 10 %, fréquences recalculées	61
Tableau 2-13 : fréquences propres réelles exactes et calculées, erreurs relatives	68
Tableau 2-14 : comparaison des vecteurs propres réels calculés aux vecteurs exacts	68
Tableau 2-15 : matrices d'amortissement généralisé exacte et calculées	69
Tableau 2-16 : comparaison des modes propres complexes reconstruits aux vecteurs initiaux	70
Tableau 2-17 : configurations d'amortissement	71
Tableau 2-18 : valeurs et vecteurs propres complexes du mode 1 pour les 4 configurations	73
Tableau 2-19 : valeurs et vecteurs propres complexes du mode 2 pour les 4 configurations	73
Tableau 2-20 : valeurs et vecteurs propres complexes du mode 3 pour les 4 configurations	74
Tableau 2-21 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 1 pour les 4 configurations	74
Tableau 2-22 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 2 pour les 4 configurations	74
Tableau 2-23 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 3 pour les 4 configurations	75
Tableau 2-24 : distances relatives des fréquences propres (%)	75
Tableau 2-25 : MAC des vecteurs propres réels	75
Tableau 2-26 : MSF des vecteurs propres réels	75
Tableau 2-27 : matrices d'amortissement généralisé	76
Tableau 2-28 : distances relatives des pulsations complexes (%)	76
Tableau 2-29 : MAC des vecteurs propres complexes	77
Tableau 2-30 : MSF des vecteurs propres complexes	77
Tableau 2-31 : comparaison des modes propres complexes reconstruits et initiaux	78
Tableau 2-32 : comparaison des modes réels extraits et calculés par appropriation	79

Chapitre 3

Figure 3-1 : répartition des références citées	86
Figure 3-2 : amplitude de la réponse d'un système 1 ddl à raideur cubique	88
Figure 3-3 : diagramme de Nyquist de la réponse d'un système 1 ddl à raideur cubique	88
Figure 3-4 : amplitude de la réponse d'un système 1 ddl à amortissement cubique	89
Figure 3-5 : diagramme de Nyquist de la réponse d'un système 1 ddl à amortissement cubique	89
Figure 3-6 : réponse d'une poutre soumise à du frottement sec	90
Figure 3-7 : les différentes étapes de la méthode globale non-linéaire	91
Figure 3-8 : réponse et participation de chacun des modes hors-bande	92
Figure 3-9 : réponse, participation des 3 modes et des modes hors-bande	93
Figure 3-10 : saisie du pas fréquentiel de la différence sur le diagramme de Nyquist	93
Figure 3-11 : différence fréquentielle avec et sans les modes hors-bande	94
Figure 3-12 : DVS des différences fréquentielles	96
Figure 3-13 : DVS de la réponse Z	97
Figure 3-14 : approximation du premier harmonique	100
Figure 3-15 : valeurs singulières avec et sans décalage fréquentiel	110
Figure 3-16 : valeurs singulières avec et sans normalisation	111
Figure 3-17 : valeurs singulières avec et sans pondération, $\gamma = 3$	113
Figure 3-18 : valeurs singulières avec et sans pondération, $\gamma = 4$	113
Figure 3-19 : valeurs singulières avec et sans pondération, $\gamma = 5$	114
Figure 3-20 : valeurs singulières après décalage fréquentiel, normalisation et pondération	115
Figure 3-21 : synthèse de la réponse non-linéaire condensée	117
Figure 3-22 : FRF 1/1 linéaire, système simulé à 8 ddl	119
Figure 3-23 : valeurs singulières avec et sans pondération	120
Figure 3-24 : FRF 1/1 linéaire et non-linéaire, cas n°1	121
Figure 3-25 : FRF 1/1 linéaire et non-linéaire, cas n°2	121
Figure 3-26 : FRF 1/1 linéaire et non-linéaire, cas n°3	121
Figure 3-27 : réponse initiale et synthétisée, cas n°1	123
Figure 3-28 : réponse initiale et synthétisée, cas n°2	123
Figure 3-29 : réponse initiale et synthétisée, cas n°3	123
Figure 3-30 : vue d'ensemble du montage expérimental	124
Figure 3-31 : schéma des trois poutres avec les 6 points mesurés	125
Figure 3-32 : vue de dessus	126
Figure 3-33 : schéma du câblage pour des contre-réactions cubiques	127
Figure 3-34 : câblage électrique des contre-réactions	127
Figure 3-35 : amplitude de la réponse 1/1, structure linéaire et 3 niveaux de contre-réactions cubiques	130
Figure 3-36 : Nyquist de la réponse 1/1, structure linéaire et 3 niveaux de contre-réactions cubiques	130
Figure 3-37 : amplitude de la réponse 1/1, structure linéaire et 3 niveaux de contre-réactions carrées	131
Figure 3-38 : Nyquist de la réponse 1/1, structure linéaire et 3 niveaux de contre-réactions cubiques	131
Figure 3-39 : schéma du frotteur avec le réglage de l'effort presseur	132
Figure 3-40 : détail de l'extrémité des trois poutres	132
Figure 3-41 : amplitude de la réponse 1/1, structure linéaire et 2 niveaux de frottement	133
Figure 3-42 : Nyquist de la réponse 1/1, structure linéaire et 2 niveaux de frottement	133
Figure 3-43 : représentation schématique des déformées modales des trois poutres	135
Figure 3-44 : réponse 1/1, mesure et synthèse, non-linéarités cubiques faibles	136
Figure 3-45 : réponse 1/1, mesure et synthèse, non-linéarités cubiques moyennes	137
Figure 3-46 : réponse 1/1, mesure et synthèse, non-linéarités cubiques fortes	137
Figure 3-47 : réponse 1/1, mesure et synthèse linéaire, non-linéarités cubiques faibles	138
Figure 3-48 : réponse 1/1, mesure et synthèse linéaire, non-linéarités cubiques moyennes	139
Figure 3-49 : réponse 1/1, mesure et synthèse linéaire, non-linéarités cubiques fortes	139
Figure 3-50 : réponse 1/1, mesure et synthèse, non-linéarités carrées faibles	140
Figure 3-51 : réponse 1/1, mesure et synthèse, non-linéarités carrées moyennes	141
Figure 3-52 : réponse 1/1, mesure et synthèse, non-linéarités carrées fortes	141
Figure 3-53 : réponse 1/1, mesure et synthèse, frottement faible	142
Figure 3-54 : réponse 1/1, mesure et synthèse, frottement moyen	143

Tableau 3-1 : comparaison des vecteurs de base issus de ΔZ et de Z	98
Tableau 3-2 : nombre de coefficients non-linéaires à identifier en fonction du nombre de modes	104
Tableau 3-3 : nombre minimum de points de mesure en fonction du nombre de modes	106
Tableau 3-4 : exemple de nombre de conditionnement après les différentes opérations	114
Tableau 3-5 : matrice Δ pour les 3 configurations de force non-linéaire	120
Tableau 3-6 : comparaison des modes réels exacts et estimés, cas n°1	122
Tableau 3-7 : comparaison des modes réels exacts et estimés, cas n°2	122
Tableau 3-8 : comparaison des modes réels exacts et estimés, cas n°3	122
Tableau 3-9 : matrice d'amortissement généralisé pour les 3 configurations de force non-linéaire	122
Tableau 3-10 : caractéristiques de mesure aux différents points	125
Tableau 3-11 : les trois types de non-linéarités appliquées	129
Tableau 3-12 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 1 pour les 3 méthodes	134
Tableau 3-13 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 2 pour les 3 méthodes	134
Tableau 3-14 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 3 pour les 3 méthodes	135
Tableau 3-15 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités cubiques faibles	136
Tableau 3-16 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités cubiques moyennes	136
Tableau 3-17 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités cubiques fortes	137
Tableau 3-18 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités carrées faibles	140
Tableau 3-19 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités carrées moyennes	140
Tableau 3-20 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités carrées fortes	141
Tableau 3-21 : comparaison des paramètres modaux, frottement faible	142
Tableau 3-22 : comparaison des paramètres modaux, frottement moyen	142

Annexe

Figure A-1 : schéma élémentaire d'un système dynamique linéaire	165
Figure A-2 : exemple de mode propre complexe	171

Introduction générale

L'étude des vibrations fait aujourd'hui partie intégrante de la démarche de conception d'un système mécanique. Ces vibrations ont d'abord une influence directe sur le comportement acoustique des structures, fortement lié à la notion de confort. Elles conditionnent par ailleurs leur fiabilité, leur résistance, leur usure...

La démarche générale de l'étude vibratoire d'une structure se décompose en quatre étapes principales :

- un modèle analytique initial est construit à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure, le plus souvent à l'aide de la méthode des éléments-finis,
- des mesures en vibrations sont effectuées sur un prototype, elles donnent lieu à l'identification des caractéristiques modales qui décrivent son comportement dynamique,
- on procède alors au recalage du modèle initial qui consiste à modifier certains de ses paramètres afin que son comportement s'approche au mieux de celui du prototype,
- le modèle recalé peut enfin être utilisé pour étudier l'effet de modifications sur son comportement dynamique et optimiser la conception de la structure considérée.

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la deuxième phase de ce processus : la mesure vibratoire et l'identification des caractéristiques modales de la structure réelle.

Les motivations de cette étude

De nombreuses techniques de mesure vibratoire et de traitement de ces mesures existent et sont utilisées par le milieu industriel. Des produits éprouvés comme le logiciel Cada-X de la société Leuven Measurement System (LMS) permettent d'une part de piloter les périphériques d'entrée-sortie nécessaires aux mesures, d'autre part d'effectuer l'extraction des paramètres modaux et leur visualisation. La gamme de méthodes proposées tant pour la mesure que pour l'analyse permet de traiter la plupart des structures classiques dans de bonnes conditions. On peut alors s'interroger sur le bien-fondé de nouvelles recherches dans ce domaine. Nous allons montrer après une brève description des méthodes existantes que ce travail se justifie pleinement et correspond à un réel besoin d'amélioration des procédures d'identification modale. Il est également intrinsèquement lié à l'évolution des matériels disponibles et à l'apparition de nouvelles technologies de mesure.

Les méthodes actuelles

Le choix de la technique de mesure est intimement lié à celui de la méthode d'analyse modale envisagée. On distingue deux grandes familles de méthodes : celle qui exploite l'évolution des réponses de la structure au cours du temps (*méthodes temporelles*) et celles qui utilisent les fonctions de réponse fréquentielle (*méthodes fréquentielles*), le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel se faisant par le biais de la transformée de Fourier. Notre étude concerne essentiellement l'approche **fréquentielle** qui a toujours été privilégiée au Laboratoire de Mécanique Appliquée (LMA), notamment parce qu'elle permet de prendre en compte la contribution des modes situés en dehors de la bande fréquentielle analysée.

Dans ce contexte, la façon la plus simple de mesurer les réponses fréquentielles d'une structure est de la soumettre à des excitations harmoniques et de caractériser pour chaque fréquence l'amplitude et le déphasage des réponses relativement aux excitations. La technique

du **sinus pas-à-pas** utilise ce principe, elle est d'une grande fiabilité mais aussi extrêmement coûteuse d'un point de vue temps de mesure.

Une variante plus rapide est la technique du **sinus balayé** qui consiste à modifier la fréquence d'excitation au cours de la mesure. Son inconvénient majeur provient du fait qu'elle met en jeu des phénomènes transitoires, alors que le sinus pas-à-pas effectue chaque mesure en régime établi.

Une troisième méthode utilisant des excitations harmoniques est celle de l'**appropriation**. Apparue dans les années 1960, elle correspond à une approche radicalement différente des précédentes. Elle consiste en effet à appliquer des configurations de force particulières ("appropriées") permettant d'exciter un mode du système conservatif associé à la structure. La déformée modale peut alors être directement mesurée (on "voit" le mode) et les paramètres modaux sont identifiés par une technique de micro-balayage. Cette méthode est particulièrement adaptée aux structures présentant des modes couplés.

Une technique particulière est apparue dans les années 1970 et connaît depuis un succès important principalement dû à sa rapidité de mise en œuvre : l'excitation **aléatoire**. Le signal de référence appelé *bruit blanc* peut être décrit comme une superposition de sinusoïdes à toutes les fréquences de la bande choisie (en nombre théoriquement infini, mais pratiquement lié à la discrétisation du signal). Les réponses sont alors mesurées en une seule fois sur toute la bande fréquentielle. Les erreurs dues à la transformée de Fourier de signaux de durée finie et aux bruits de mesure sont compensées par des techniques de fenêtrage et en moyennant un certain nombre d'acquisitions successives.

Concernant l'analyse modale, on distingue principalement deux types de méthodes fréquentielles : celles basées sur le **lissage de fonction de transfert** et celle basée sur le **principe d'appropriation**.

Le lissage de fonctions de transfert consiste à rechercher un modèle mathématique dissipatif à partir duquel on peut reconstituer les réponses fréquentielles de la structure avec le minimum d'erreur.

Les techniques basées sur le principe d'appropriation exploitent la propriété de la résonance de phase caractéristique d'un comportement modal et permettent d'estimer les paramètres du système conservatif associé à la structure. Elles nécessitent en revanche l'utilisation d'un nombre d'excitateurs au moins égal au plus grand nombre de modes couplés présents dans la bande traitée.

Le besoin de nouvelles techniques

L'apparition des techniques d'excitation aléatoire a limité l'application de l'appropriation à des secteurs particulièrement exigeants comme celui de l'aéronautique où elle est toujours employée. Bien que de nombreuses recherches l'aient progressivement améliorée, sa mise en œuvre est quasiment manuelle et nécessite une grande expérience de la part des opérateurs. Plusieurs théories permettant son automatisation sont apparues à la fin des années 1970 dont une développée au LMA, mais le matériel de l'époque n'a pas permis leur application.

Or on s'aperçoit aujourd'hui que les mesures sous excitation aléatoire présentent de nombreux inconvénients et s'avèrent insuffisantes pour mener à bien la caractérisation de structures complexes ou de grandes dimensions. C'est pourquoi nous avons envisagé un "retour" aux techniques d'appropriation, les moyens techniques actuels permettant d'envisager leur application de façon semi-automatisée, les rendant ainsi accessibles à des utilisateurs non-spécialistes.

L'un des nombreux arguments en faveur de l'appropriation concerne sa relation privilégiée avec le **système conservatif** associé à la structure (SCA). On a vu en effet que la phase de caractérisation dynamique d'une structure réelle avait pour principal objectif la correction du modèle initial. Or ce modèle est dans la plupart des cas conservatif, c'est-à-dire qu'il ne prend pas en compte l'amortissement. La confrontation modèle-structure passe alors nécessairement par la détermination des paramètres modaux du système conservatif associé à la structure réelle. Ces paramètres présentent l'avantage de correspondre à des phénomènes physiques directement **observables**. La fréquence propre réelle d'un mode est la fréquence pour laquelle la résonance de phase est réalisée. On entend par là que les réponses mesurées sont toutes en phase entre elles et en quadrature de phase relativement à l'excitation. Sous réserve que le nombre, le placement et le dosage des excitations permettent d'obtenir cette résonance, la réponse est alors proportionnelle au mode propre réel considéré.

En revanche, l'estimation des paramètres modaux du système dissipatif à l'aide d'une technique de lissage nécessite d'en extraire ensuite les paramètres du SCA. Les pulsations et modes propres complexes constituent un modèle mathématique a priori plus complet car tenant compte de l'amortissement, mais qui n'est pas observable physiquement sur la structure. L'émergence de nouveaux moyens de mesure rend cette propriété d'observabilité des paramètres modaux du SCA particulièrement intéressante. En effet, l'utilisation de **procédés optiques** tels que l'interférométrie holographique ou speckle permet de mesurer les déplacements d'une structure en un nombre de degrés de liberté sans commune mesure avec celui de la technique accélérométrique classique : de quelques dizaines, on passe à plusieurs centaines de milliers. On accède ainsi à une très forte densité spatiale d'information.

On peut tout naturellement tenter d'appliquer les méthodes de traitement classiques en interférométrie holographique : mesure par méthode optique des FRF sur tout le spectre d'excitation étudié puis extraction des paramètres modaux. Les mesures s'effectuant à fréquence fixe et en régime établi, on se trouve alors confronté à deux difficultés : d'une part le temps d'acquisition élevé puisque l'on doit utiliser une excitation sinus pas-à-pas avec un rythme de l'ordre de deux points fréquentiels par minute, d'autre part la masse importante d'information à traiter puisque l'on cumule forte densité spatiale et forte densité fréquentielle.

L'approche de l'appropriation nous semble mieux adaptée à ces nouvelles technologies. Les mesures sont limitées à leur strict minimum, c'est-à-dire la description spatiale des modes propres du SCA. L'information est alors caractérisée par une **forte densité spatiale** et une **densité fréquentielle minimum**.

C'est dans cette perspective que nous avons développé une **méthode d'appropriation expérimentale semi-automatique**. Le nombre et le placement des excitateurs et des capteurs accélérométriques doit être limité au strict nécessaire pour mener à bien cette appropriation. Une mesure classique rapide - par exemple sous excitation aléatoire - permet de localiser les fréquences des modes, leur appropriation permettant ensuite la mesure optique des déformées modales. On peut envisager de limiter l'information spatiale obtenue en sélectionnant dans l'image numérisée les points correspondant aux noeuds du maillage éléments-finis du modèle. Le recalage peut alors être mené dans d'excellentes conditions.

L'utilisation de moyens optiques n'est pas la seule raison qui justifie le nouvel intérêt porté aux méthodes d'appropriation.

D'abord, le fait d'**observer directement** les modes réels sans passer par l'artifice de calcul des modes complexes constitue un avantage certain, même si l'on emploie la technique accélérométrique classique.

De plus, d'autres avantages sont liés au fait que l'appropriation met en jeu des excitations sinusoïdales plutôt qu'aléatoires. Cela conduit notamment à une **concentration de l'énergie** sur le mode étudié, ce qui permet d'obtenir des niveaux d'amplitude comparables au niveau de la structure en fonctionnement avec des excitateurs délivrant une puissance faible. On réduit ainsi l'influence de non-linéarités telles que les phénomènes d'adhérence locale particulièrement importants si l'amplitude est faible. On peut également exciter chaque mode avec la **même amplitude globale de vibration**. Ainsi, dans le cas où la structure présente un comportement non-linéaire, on caractérise ses paramètres modaux pour un niveau d'amplitude donné.

Les méthodes proposées

Trois nouvelles méthodes sont proposées dans ce mémoire, dont deux reposent sur l'appropriation.

Tout d'abord, une technique d'**appropriation expérimentale** semi-automatique basée sur la méthode développée au LMA a été mise en œuvre. Elle utilise comme données initiales les résultats d'une appropriation par le calcul menée à partir de mesures préliminaires, par exemple en multi-excitations aléatoires décorrélées. Elle permet de déterminer pour chaque mode considéré sa fréquence propre et ses forces appropriées et de gérer l'application de ces forces en estimant les tensions de commande des amplificateurs contrôlant les excitateurs. On peut alors mesurer directement le mode approprié.

Par ailleurs, les techniques d'excitation aléatoire et d'estimation des paramètres modaux du système dissipatif par lissage de fonctions de transfert étant encore largement utilisées, une nouvelle technique d'**extraction des paramètres modaux du système conservatif à partir de ceux du système dissipatif** a été mise au point. Son principe est le suivant : on peut à partir des modes propres complexes simuler des FRF relativement à des excitateurs fictifs judicieusement choisis, et traiter ces mesures simulées en appropriation par le calcul. On accède ainsi aux modes propres réels nécessaires au recalage du modèle. Deux méthodes de sélection des excitateurs fictifs ont été étudiées.

Enfin, l'**identification modale de structures faiblement non-linéaires présentant des modes couplés** fait l'objet de la troisième partie de ce mémoire. Une thèse y a déjà été consacrée au LMA, mais la méthode développée n'a pas donné entière satisfaction. Le problème a donc été repris et formulé différemment. L'idée commune aux deux approches consiste à condenser les réponses mesurées sur un nombre de degrés de liberté fictifs égal au nombre de modes considérés. En choisissant une forme particulière de non-linéarité, on aboutit à la résolution d'un système linéaire surdéterminé. Cette opération pouvant engendrer des phénomènes de singularité, des procédures de régularisation ont été appliquées. Un dispositif expérimental a été mis au point afin de tester différents types de non-linéarités.

Les trois chapitres de ce mémoire sont organisés suivant le même schéma : après une étude bibliographique recensant les diverses méthodes existantes, on présente l'aspect théorique des méthodes, puis leur validation sur un cas-test simulé et enfin leur application à des essais sur des structures de laboratoire et industrielles.

Notations et abréviations

ddl	degré de liberté
FRF	fonction de réponse fréquentielle
m	nombre de modes
e	nombre d'excitateurs
c	nombre de capteurs
p	nombre de points fréquents ou temporels
f	fréquence d'excitation
ω	pulsation d'excitation
s	variable de Laplace
SCA	système conservatif associé à la structure
SDA	système dissipatif associé à la structure
f_v	$v^{\text{ème}}$ fréquence propre du SCA
ω_v	$v^{\text{ème}}$ pulsation propre réelle du SCA
Λ	matrice spectrale diagonale du SCA
s_v	$v^{\text{ème}}$ pulsation propre complexe du SDA
S	matrice spectrale diagonale du SDA
Y	matrice modale normalisée du SCA
Y_v	$v^{\text{ème}}$ mode propre réel du SCA
${}_dY$	matrice modale normalisée du SDA
${}_dY_v$	$v^{\text{ème}}$ mode propre complexe du SDA
β	matrice d'amortissement généralisé
β_{vv}	$v^{\text{ème}}$ coefficient de la diagonale de la matrice d'amortissement généralisé
ε_v	$v^{\text{ème}}$ coefficient d'amortissement réduit
a_v	vecteur force appropriée au mode v
U	matrice des tensions appliquées
U_k	vecteur des tensions appliquées
F	matrice des forces appliquées
F_k	vecteur des forces appliquées
Z	matrice des réponses mesurées
Z_k	vecteur des réponses mesurées
M	matrice masse
B	matrice amortissement
K	matrice raideur
X_r	partie réelle du vecteur ou de la matrice X
X_i	partie imaginaire du vecteur ou de la matrice X
tX	vecteur ou matrice transposé de X
\bar{X}	vecteur ou matrice conjugué de X

Chapitre 1

Mise en œ uvre expérimentale d'une méthode d'appropriation

*L'expérience ne trompe jamais,
c'est votre jugement seul qui
s'est égaré en se promettant
des résultats qui ne découlent
pas directement de votre
expérimentation.*

Léonard de Vinci (1510)

1.1. Introduction

Les premières méthodes d'analyse modale développées dans les années 50-60 ont été les méthodes d'appropriation. C'est en 1948 que Fraeys de Veubeke [9] donne le principe de la résonance de phase. L'avènement des mesures en excitation aléatoire a par la suite réduit la pratique de ces techniques à certains secteurs particulièrement exigeants, dont l'aéronautique où la caractérisation précise des modes propres conservatifs et surtout des masses et amortissements généralisés joue un rôle déterminant dans le calcul des instabilités de flottement. Ainsi de nombreuses études issues d'organismes tels que l'Onéra (Office National d'Étude et de Recherche Aérospatiale) ont progressivement amélioré les procédures d'appropriation [17] avec des efforts particuliers pour la détermination des paramètres généralisés [2][10]. La principale difficulté résidant dans la détermination des forces optimales, certaines idées originales furent proposées par Clerc [3] et Deck [6] vers 1970 mais ne furent pas appliquées faute de moyens techniques. Au LMA, c'est en 1978 que le principe d'une méthode améliorant l'idée de Clerc fut établi [7].

On assiste récemment à un nouvel engouement pour les méthodes d'appropriation, et ce principalement pour deux raisons.

D'abord, l'apparition dans les années 1980 de la technique dite de multi-excitations aléatoires décorréelées a permis de généraliser les mesures sous plusieurs excitations. Elle permet d'obtenir en une seule mesure les fonctions de réponse fréquentielle (FRF) relatives à chacune des forces simultanées. On assiste alors à la généralisation de la théorie de Asher [1] (MIF : *Mode Indicator Function*) à ce nouveau type de données, qui donne naissance à la technique dite *Multivariate Mode Indicator Function* (MMIF) [18] permettant de détecter des modes couplés et de calculer les forces appropriées à ces modes. De nombreuses applications et quelques améliorations peuvent être citées [4][5][12][13][14]. C'est dans le même esprit que la méthode du LMA est adaptée au post-traitement des mesures décorréelées, donnant lieu à une nouvelle technique d'analyse modale appelée "appropriation par le calcul" [16].

Enfin, l'émergence de moyens de mesure optique tels l'interférométrie holographique rend l'appropriation expérimentale particulièrement intéressante. Il s'agit alors d'exciter une structure selon chacun des modes par l'application des forces appropriées, et de mesurer par méthode optique l'amplitude du mode propre réel, avec une densité spatiale sans commune mesure avec celle fournie par les moyens traditionnels. On envisage notamment de faire coïncider les mesures avec les noeuds du modèle éléments-finis, permettant la comparaison modèle-mesure et le recalage éventuel du modèle dans d'excellentes conditions. C'est dans cette nouvelle perspective que le travail décrit dans ce chapitre a été mené.

Mais avant d'entrer plus en détail dans la description de la méthode du LMA, illustrons à l'aide d'un exemple trivial la notion même d' *appropriation*.

Qu'est-ce que l'appropriation ?

L'appropriation consiste à appliquer à une structure **plusieurs forces harmoniques** de même fréquence dont le placement et les déphasages respectifs doivent avoir la capacité **d'isoler** chaque mode.

A titre d'exemple, considérons le système à deux degrés de liberté (ddl) suivant :

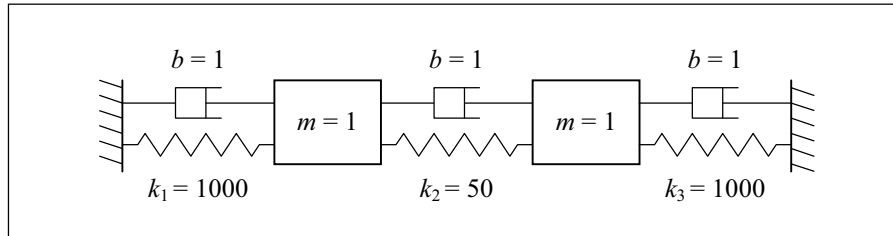
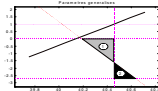


Figure 1-1 : oscillateur à 2 degrés de liberté

Les fréquences de résonance et les deux modes propres conservatifs de cet oscillateur sont donnés ci-dessous. Le premier mode est une vibration des deux masses en phase, le deuxième en opposition de phase.



$$Y = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix}$$

Appliquons à l'une ou l'autre des masses des forces harmoniques d'amplitude unité à la fréquence moyenne. Les amplitudes complexes normées des réponses Z_1 et Z_2 montrent que l'on obtient une combinaison des deux modes voisins de la fréquence d'excitation, les masses vibrant avec un déphasage d'environ 60° .

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.51 - 0.77i \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Z_2 = \begin{bmatrix} 0.51 - 0.77i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si l'on applique à présent des forces en phase ou en opposition de phase, on constate que les réponses Z_3 et Z_4 sont proportionnelles aux modes propres du système conservatif associé (SCA).

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Z_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cet exemple simple montre qu'il est possible pour une même fréquence d'excitation d'entretenir l'un ou l'autre de deux modes selon le déphasage des forces appliquées. C'est la définition même de l'appropriation.

1.2. Méthode d'appropriation

On résume ici les éléments essentiels à la compréhension de la méthode d'appropriation issue du LMA. Pour une description plus détaillée, on se reportera à [15] ou [16].

1.2.1. Critère de résonance de phase

Comme toutes les méthodes d'appropriation, celle-ci repose sur l'exploitation d'un critère de résonance de phase caractérisé par le paramètre k . Ce paramètre quantifie pour toute fréquence de mesure la proportion de réponse en phase avec l'excitation si l'on applique une configuration de force optimale, c'est-à-dire appropriant au mieux le mode le plus proche.

Considérons une structure instrumentée de c capteurs et e excitateurs. Supposons que l'on applique successivement e configurations de force linéairement indépendantes $F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_e]$ à la pulsation ω . Notons $Z = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_e]$ les réponses correspondantes, que l'on peut séparer en partie réelle et partie imaginaire sous la forme (1.1).

$$Z = Z_r + j Z_i \quad (1.1)$$

F étant régulière et la structure supposée linéaire, les réponses en phase et en quadrature de phase à des forces unités appliquées successivement aux e points d'excitation sont alors données par (1.2).

$$V(\omega) = Z_r F^{-1} \quad W(\omega) = Z_i F^{-1} \quad (1.2)$$

On montre que pour $\omega = \omega_v$ les composantes de la force appropriée à un mode sont toutes en phase à π près, et que la réponse à cette force est proportionnelle au mode réel du SCA, et en quadrature de phase avec la force appropriée.

De plus, à une pulsation ω proche de ω_v , la réponse de la structure à la force appropriée est telle que sa partie réelle est au second ordre près proportionnelle à sa partie imaginaire, même si l'amortissement généralisé de la structure n'est pas proportionnel.

Connaissant pour une pulsation ω les matrices V et W , on va estimer les forces a et la valeur de k qui conduisent à la meilleure résonance de phase, c'est-à-dire minimisant le critère δ défini par :

$$\delta = \frac{\|V a - k W a\|^2}{\|V a\|^2 + \|W a\|^2} \quad (1.3)$$

En dérivant δ par rapport à a et k , on obtient les relations :

$$\left[{}^T V V - k ({}^T V W + {}^T W V) + k^2 {}^T W W - \delta ({}^T V V + {}^T W W) \right] a = 0 \quad (1.4)$$

$$k = \frac{{}^T a {}^T W V a}{{}^T a {}^T W W a} \quad (1.5)$$

L'équation (1.4) est un problème aux valeurs propres. Une procédure itérative basée sur (1.4) et (1.5) permet de calculer pour chaque pulsation ω la valeur de k rendant δ minimum.

Lorsque ω est proche d'une pulsation modale ω_v , $a = a_v$ est une force appropriée au mode considéré.

L'évolution du paramètre k en fonction de la fréquence est un **excellent détecteur de mode**. En effet, il satisfait les conditions suivantes :

- il s'annule à la pulsation d'un mode : $k(\omega_v) = 0$,
- son évolution au voisinage d'un mode est quasi-linéaire en fonction de la fréquence, et de pente positive.

Le critère δ constitue quant à lui un indicateur de la **qualité** de l'appropriation. En effet, la valeur minimale obtenue à la pulsation la plus proche de la pulsation propre quantifie la réalisation de la résonance de phase.

Des exemples de variations du paramètre k et du critère δ sont donnés dans le paragraphe 1.3 qui présente l'appropriation par le calcul.

1.2.2. Détermination des paramètres modaux

La détection des modes effectuée à l'aide de l'évolution du paramètre k en fonction de la fréquence conduit à la détermination des pulsations de résonance ω_v et des forces appropriées a_v . On estime ensuite successivement l'amortissement modal β_{vv} , la masse généralisée μ_{vv} et le mode propre réel Y_v à partir d'un microbalayage fréquentiel autour de ω_v .

On définit au voisinage de ω_v les paramètres généralisés suivants :

- la puissance complexe P développée par les forces appropriées

$$P(\omega) = {}^T a_v [V_{exc}(\omega) a_v + j W_{exc}(\omega) a_v] = P_r(\omega) + j P_i(\omega) \quad (1.6)$$

où V_{exc} et W_{exc} sont les restrictions de V et W aux ddl excitateurs,

- le travail des forces en quadrature à superposer aux forces appropriées pour maintenir la résonance de phase lorsqu'on s'éloigne de la pulsation modale W_{FQ} . On montre que ce travail peut s'écrire :

$$W_{FQ}(\omega) = \mu_{vv} \frac{\omega_v^2}{\omega^2} (\omega_v^2 - \omega^2) \quad (1.7)$$

Ces grandeurs et le paramètre k possèdent les caractéristiques suivantes :

$$k(\omega_v) = 0 \quad \frac{\partial k}{\partial \omega^2}(\omega_v) = \frac{1}{\omega_v \beta_{vv}} \quad (1.8)$$

$$P_r(\omega_v) = 0 \quad \frac{\partial P_r}{\partial \omega^2}(\omega_v) = -\mu_{vv} \quad (1.9)$$

$$P_i(\omega_v) = -\omega_v \mu_{vv} \beta_{vv} \quad \frac{\partial P_i}{\partial \omega^2}(\omega_v) = 0 \quad (1.10)$$

$$W_{FQ}(\omega_v) = 0 \quad \frac{\partial W_{FQ}}{\partial \omega^2}(\omega_v) = -\mu_{vv} \quad (1.11)$$

Les relations (1.8) et (1.10) sont utilisées pour estimer β_{vv} et μ_{vv} .
On peut enfin calculer le mode propre réel normé par rapport à la masse par :

$$Y_v = \frac{W(\omega_v) a_v}{\sqrt{\mu_{vv}}} \quad (1.12)$$

1.3. Appropriation par le calcul

La méthode d'appropriation du LMA a été adaptée de façon à traiter efficacement des mesures effectuées dans le domaine fréquentiel relativement à plusieurs excitations indépendantes connues. Ma contribution a consisté en sa mise au point sous forme d'une interface graphique sous Matlab. Il en résulte aujourd'hui un logiciel d'analyse modale convivial et simple d'utilisation. Outre le fait d'estimer directement les modes propres du système conservatif associé à la structure (SCA), cette technique présente l'avantage d'être systématique, les résultats de l'identification ne dépendent donc que très faiblement des choix de l'opérateur. Ce n'est généralement pas le cas avec d'autres types de méthode comme le lissage de fonctions de transfert où l'opérateur doit estimer la position fréquentielle et surtout le nombre de modes présents.

On donne ici un aperçu de l'utilisation du logiciel, puis une validation de ses compétences sur un cas-test simulé simple, et enfin un exemple d'application à une structure industrielle.

1.3.1. Mise en oeuvre de la méthode

L'appropriation par le calcul s'effectue en trois étapes principales :

- après chargement des mesures, le calcul du paramètre k est effectué, et on procède à la localisation des modes,
- le calcul des modes est effectué automatiquement par microbalayage autour de chaque fréquence sélectionnée,
- l'affichage des paramètres généralisés relatifs à chaque mode permet une vérification et le cas échéant une correction des résultats (faux mode, interpolation inadéquate, mode sélectionné deux fois ...).

Pour illustrer la description de ces différentes opérations, nous allons utiliser des mesures simulées sur un système à 8 ddl comportant des modes couplés, et quatre excitations placées arbitrairement sur les 4 premiers ddl.

1.3.1.1. Localisation des modes

A l'issue du calcul du paramètre k , on sélectionne sur la courbe de k en fonction de la fréquence les intersections avec l'axe des abscisses de pente positive. Un algorithme simple de recherche de changement de signe permet d'effectuer la sélection automatiquement. On constate Figure 1-2 que les 8 modes sont parfaitement détectés. La FRF au point 1 (Figure 1-3) montre que le couplage des modes est important, et qu'il serait difficile d'estimer a priori le nombre de modes présents si l'on devait effectuer l'analyse modale par lissage de fonction de transfert.

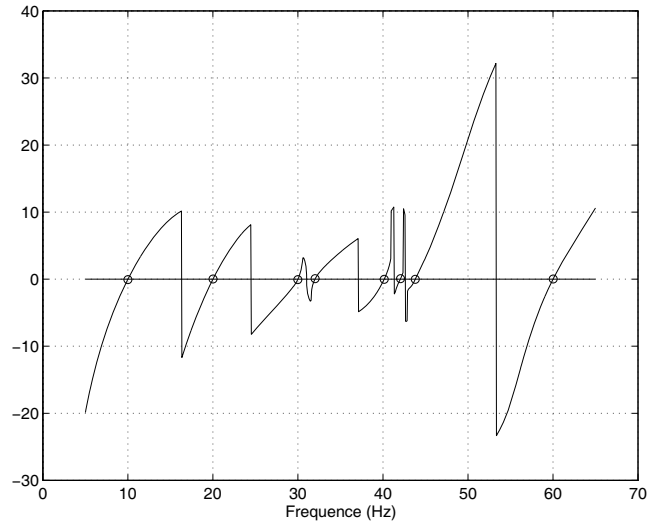


Figure 1-2 : évolution du paramètre k , système simulé à 8 ddl

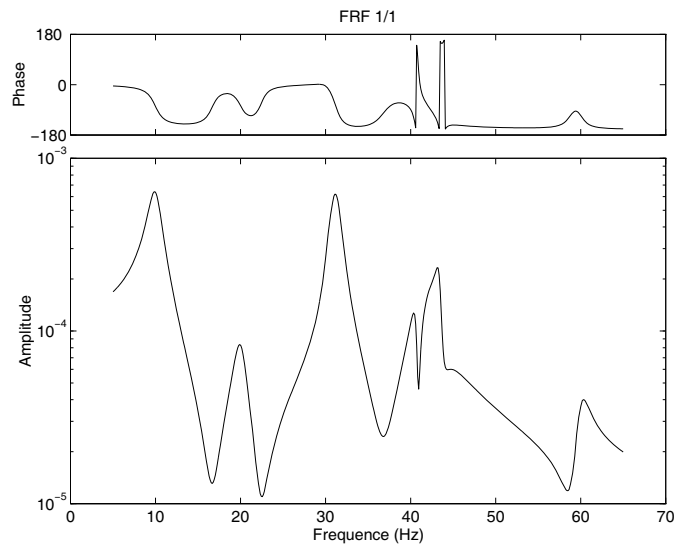


Figure 1-3 : FRF au point 1, système simulé à 8 ddl

1.3.1.2. Calcul des modes

On peut ensuite lancer le calcul des modes sélectionnés, dont les caractéristiques sont présentées dans une fenêtre interactive sous forme graphique et numérique. A titre d'exemple, on donne Figure 1-4 l'évolution des paramètres généralisés relatifs au mode 3.

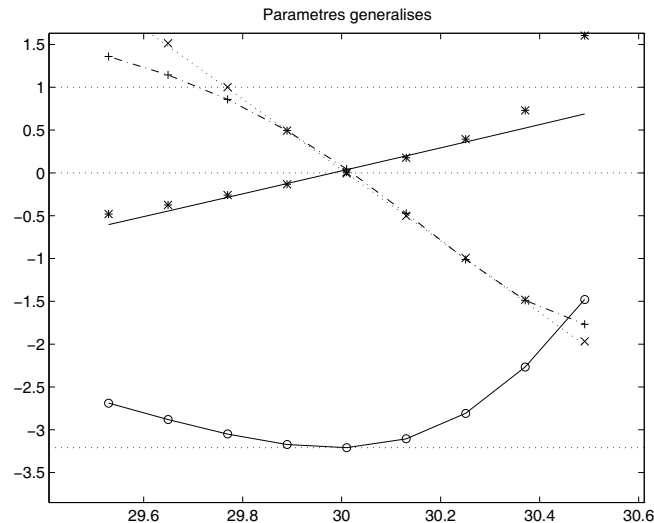


Figure 1-4 : paramètres généralisés du mode 3, système simulé à 8 ddl

Les propriétés énoncées dans les relations (1.8) à (1.11) sont parfaitement vérifiées :

- le paramètre k (*) coupe l'axe des abscisses avec une pente positive,
- la partie réelle de la puissance complexe (+) s'annule à la même fréquence avec une pente négative,
- la partie imaginaire de la puissance complexe (o) présente un minimum à cette fréquence,
- le travail des forces en quadrature (x) s'annule également à cette fréquence, et avec la même pente que la partie réelle de la puissance complexe.

1.3.1.3. Vérifications et corrections

Plusieurs critères permettent de vérifier et de corriger partiellement les modes calculés.

- ✓ Tout d'abord, les valeurs minimales du critère δ donnent pour chaque mode une indication sur la qualité de l'appropriation directement liée à la position des excitateurs. On montre par exemple ci-dessous l'évolution de δ pour les modes 3 et 6. Les valeurs numériques correspondantes sont respectivement de 0.094 % et 3.6 %.

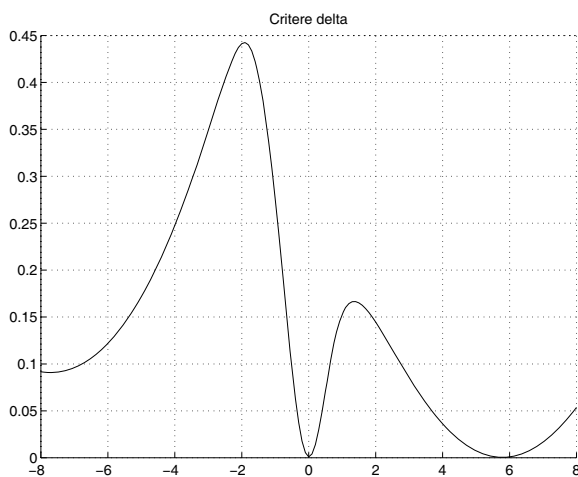


Figure 1-5 : évolution de δ , mode 3

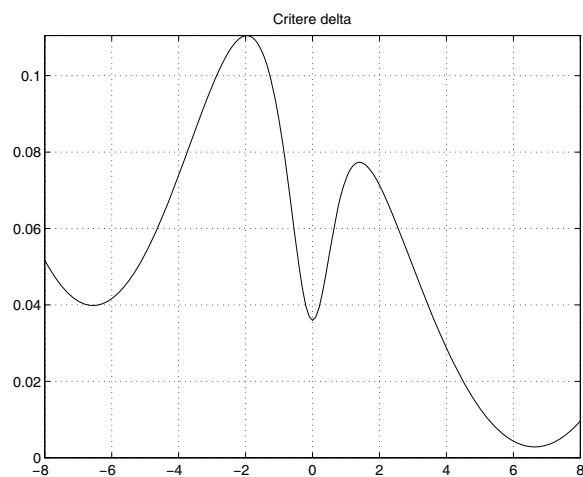


Figure 1-6 : évolution de δ , mode 6

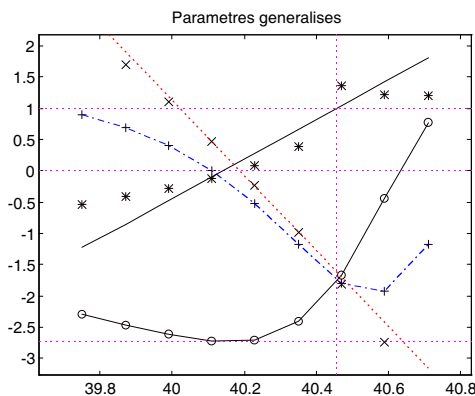
La valeur associée au mode 6 indique que le placement des excitateurs n'est pas favorable à son appropriation. Ce défaut ne peut malheureusement pas être corrigé a posteriori. Il faut pour améliorer les résultats effectuer de nouvelles mesures avec une configuration d'excitation mieux adaptée.

Il est néanmoins possible d'éliminer par calcul la contribution des autres modes s'ils sont bien appropriés. Lorsque ce problème se pose pour plusieurs modes, on verra au paragraphe 1.4.6 qu'on peut faire appel à une correction itérative de l'ensemble des modes.

- ✓ Par ailleurs, l'estimation des paramètres modaux peut être biaisée par l'automatisation des interpolations linéaires du paramètre k et du travail des forces en quadrature.

L'interpolation linéaire de l'évolution du paramètre k est calculée en prenant en compte par défaut les 5 points fréquentiels répartis de part et d'autre de la fréquence de mesure correspondant à la plus petite valeur de k (fréquence en principe la plus proche de la fréquence modale). Lorsque la courbe de k est accidentée, ce qui arrive dans le cas de mesures très bruitées ou si des modes sont très proches, il faut choisir une autre sélection de points pour mieux interpoler localement cette courbe.

L'amélioration apportée par cette technique est très visible sur les figures ci-dessous qui correspondent respectivement à une interpolation à 5 points et 3 points du mode 5. Dans le deuxième cas, les résultats sont beaucoup plus cohérents. C'est la raison pour laquelle on a la possibilité dans le logiciel d'effectuer le lissage avec une sélection automatique de 5 points ou une sélection manuelle.



Paramètres généralisés du mode 5, système simulé à 8 ddl
 Figure 1-7 : interpolation linéaire du paramètre k sur 5 points

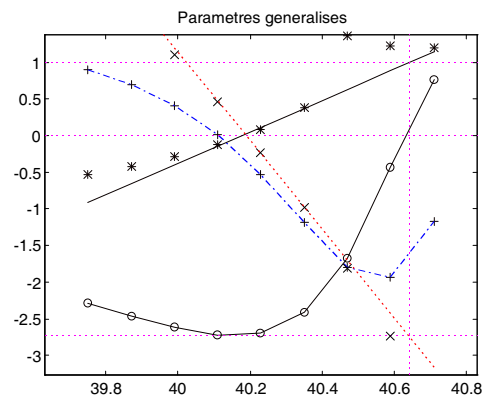


Figure 1-8 : interpolation linéaire du paramètre k sur 3 points

Une construction géométrique permet par ailleurs de contrôler la cohérence des résultats. La droite d'ordonnée 1 et la tangente horizontale à la partie imaginaire de la puissance complexe doivent couper respectivement la courbe de k et la tangente commune à la partie réelle de la puissance complexe et au travail des forces en quadrature sur la même verticale. La partie réelle de la puissance complexe présentant un point d'inflexion à la fréquence modale, on utilise plutôt le travail des forces en quadrature. Celui-ci est interpolé par une droite en prenant en compte par défaut les 3 points situés de part et d'autre du point central. Là encore, d'autres points peuvent être sélectionnés si la courbe est accidentée.

Cette propriété géométrique nous a conduit à proposer un critère numérique de cohérence des résultats graphiques par le rapport des aires des triangles 2 et 1 (Figure 1-9). Une valeur

proche de 0 indique une bonne cohérence des résultats. Les valeurs obtenues pour 5 points et 3 points d'interpolation sont respectivement 47.5 % et 0.1 % .

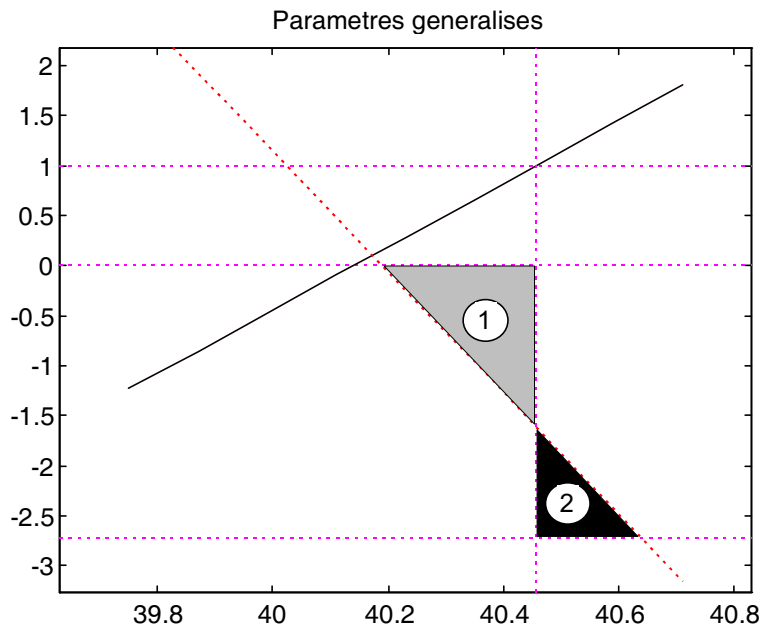


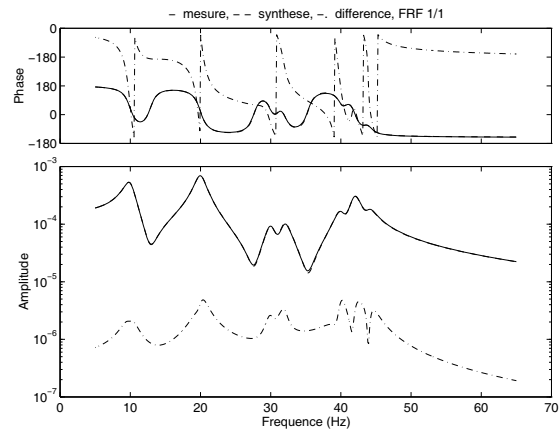
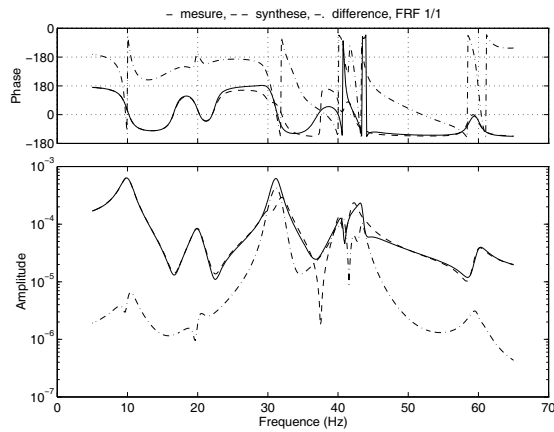
Figure 1-9 : définition du critère numérique de cohérence

Il est à noter que l'interpolation du paramètre k est directement liée à l'estimation de l'amortissement modal ε_v (relation (1.8)). Calculée sur 3 points, elle conduit à la valeur $\varepsilon_v = 1.17\%$ qui est la valeur exacte, alors que le calcul sur 5 points donne $\varepsilon_v = 0.79\%$, soit une erreur de plus de 30 %. Il est donc indispensable de contrôler tous les modes calculés, et de corriger les interpolations erronées.

- ✓ Enfin, la synthèse des réponses forcées peut être comparée aux FRF mesurées. Elle doit cependant être interprétée avec précaution. En effet, les réponses sont calculées par superposition modale à partir des m modes identifiés du SCA (1.13). Elles ne tiennent donc pas compte des éventuels couplages par l'amortissement.

$$Z(\omega) = \sum_{v=1}^m \frac{Y_v \cdot^T Y_v}{\omega_v^2 - \omega^2 + j \omega \beta_{vv}} F(\omega) \quad (1.13)$$

On montre Figure 1-10 et Figure 1-11 deux exemples de synthèse modale, le premier pour un système simulé à amortissement non-diagonal et le second pour un amortissement diagonal. Dans les deux cas les paramètres modaux du SCA sont parfaitement estimés, mais la présence de termes extra-diagonaux importants dans la matrice d'amortissement généralisé modifie fortement la réponse de la Figure 1-10. La qualité de la réponse calculée par superposition modale à partir des modes du SCA ne constitue donc pas un critère de qualité de l'estimation de ces modes.



Synthèse de la FRF 1/1 : - = FRF initiale, -- = synthèse, -· = différence

Figure 1-10 : amortissement non-diagonal

Figure 1-11 : amortissement diagonal

1.3.1.4. Sauvegarde des résultats

Plusieurs formats de sauvegarde ont été prévus permettant la comparaison des résultats avec ceux issus d'autres méthodes d'analyse modale ou leur utilisation dans des procédures de recalage : le format Matlab qui permet de recharger complètement les résultats d'une appropriation pour les contrôler ou les modifier, le format fichier universel qui permet l'animation des modes dans le post-processeur du logiciel d'acquisition LMS ou l'importation des modes dans une base de données du logiciel de recalage Proto Dynamique...

1.3.2. Validation de la méthode sur un cas-test simulé

Afin d'illustrer la précision de cette méthode d'appropriation par le calcul, on présente les résultats numériques de l'identification d'un système simulé à 8 ddl. Les fréquences modales et la matrice d'amortissement généralisé sont imposées de manière à avoir deux groupes de modes fortement couplés par l'amortissement :

$$f = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 32 \\ 40 \\ 42 \\ 44 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ Hz} \quad \beta = \begin{bmatrix} 5 & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & \\ & & 5 & 6 & & & & \\ & & 6 & 5 & & & & \\ & & & & 5 & 6 & 6 & \\ & & & & 6 & 5 & 6 & \\ & & & & 6 & 6 & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres réels sont générés aléatoirement. On a simulé la réponse du système à des excitations unité placées sur les trois premiers ddl par superposition modale à partir du système dissipatif (1.14).

$$Z(\omega) = \sum_{v=1}^m \frac{dY_v \cdot {}^T dY_v}{j\omega - s_v} F(\omega) + \sum_{v=1}^m \frac{d\bar{Y}_v \cdot {}^T d\bar{Y}_v}{j\omega - \bar{s}_v} F(\omega) \quad (1.14)$$

On présente dans les tableaux ci-dessous les résultats quantitatifs obtenus.

Les critères de comparaison utilisés sont les suivants :

- fréquences propres et amortissements : distance relative (%)

$$\Delta f = \frac{|f_1 - f_0|}{f_0} \quad (1.15)$$

- vecteurs propres : Modal Assurance Criterion (MAC) (critère de forme) et Modal Scale Factor (MSF) (critère de norme)

$$\text{MAC}(Y_1, Y_0) = \frac{({}^t Y_1 \cdot Y_0)^2}{(\|Y_1\| \|Y_0\|)^2} \quad (1.16)$$

$$\text{MSF}(Y_1, Y_0) = \frac{|{}^t Y_1 \cdot Y_0|}{\|Y_0\|^2} \quad (1.17)$$

Mode	Fréquence exacte (Hz)	Fréquence calculée (Hz)	Distance relative (%)
1	10	10.0035	0.0350
2	20	20.0064	0.0320
3	30	30.0022	0.0072
4	32	32.0048	0.0149
5	40	40.1426	0.3565
6	42	42.0337	0.0803
7	44	43.8035	0.4466
8	60	60.0095	0.0159

Tableau 1-1 : fréquences exactes et calculées, erreurs relatives

Mode	Amortissement exact	Amortissement calculé	Distance relative (%)
1	5	4.9825	0.3490
2	5	5.0111	0.2220
3	5	5.0608	1.2167
4	5	5.1524	3.0473
5	5	4.6508	6.9831
6	5	5.2310	4.6204
7	5	4.7836	4.3280
8	5	5.0034	0.0676

Tableau 1-2 : amortissements généralisés exacts et calculés, erreurs relatives

Mode	MAC	MSF
1	1.0000	0.9985
2	1.0000	1.0002
3	0.9999	0.9979
4	0.9998	1.0046
5	0.9969	1.0457
6	0.9982	0.9831
7	0.9878	1.0351
8	1.0000	0.9979

Tableau 1-3 : Modal Assurance Criterion et Modal Scale Factor entre vecteurs propres réels exacts et calculés

1.3.3. Application de la méthode à une structure industrielle

On présente maintenant un cas-test expérimental. Il s'agit d'un plancher de véhicule automobile bi-encasté soumis à 3 excitations et instrumenté avec 45 accéléromètres (Figure 1-12).

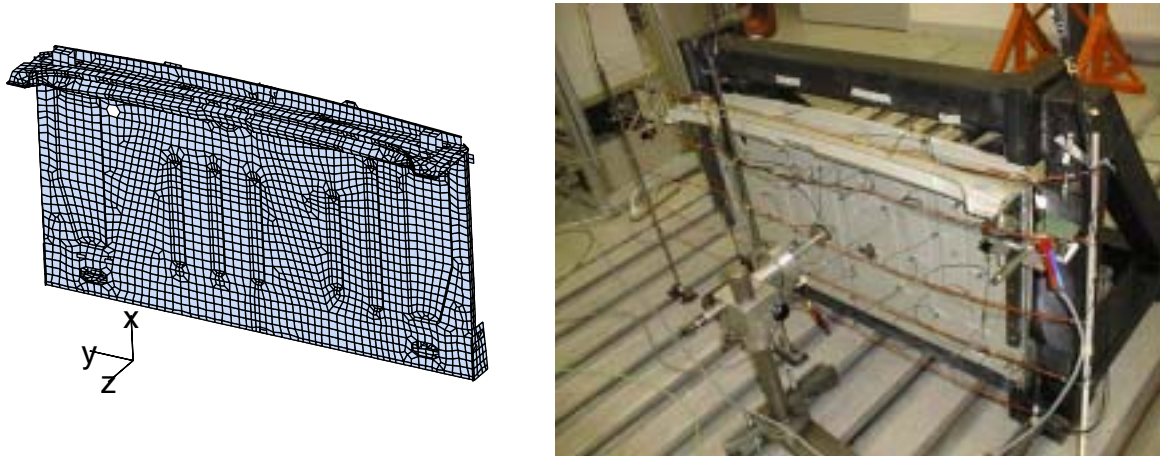


Figure 1-12 : plancher de véhicule automobile

Les mesures ont été effectuées en multi-excitation aléatoire décorrélée. La méthode d'appropriation par le calcul a été appliquée en prenant en compte les FRF relatives aux 3 excitations.

On montre Figure 1-13 la courbe du paramètre k entre 20 et 145 Hz, avec les dix modes détectés. La Figure 1-14 présente l'évolution du paramètre δ lors d'un microbalayage autour de la pulsation du mode 6. Les lobes adjacents au lobe central indiquent la présence de deux modes proches. L'évolution des paramètres généralisés relatifs au mode 6 est donnée Figure 1-15.

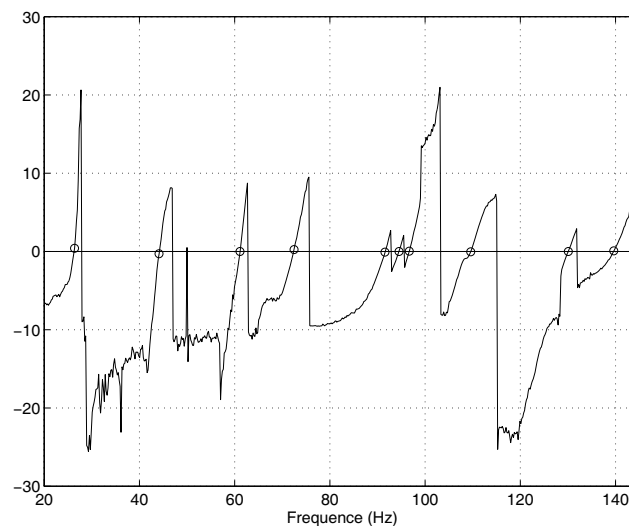


Figure 1-13 : évolution du paramètre k pour le plancher de véhicule automobile

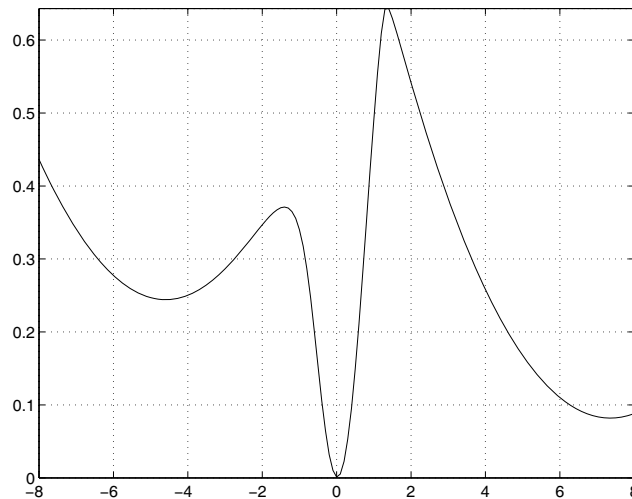


Figure 1-14 : évolution du paramètre δ , mode 6 du plancher de véhicule automobile

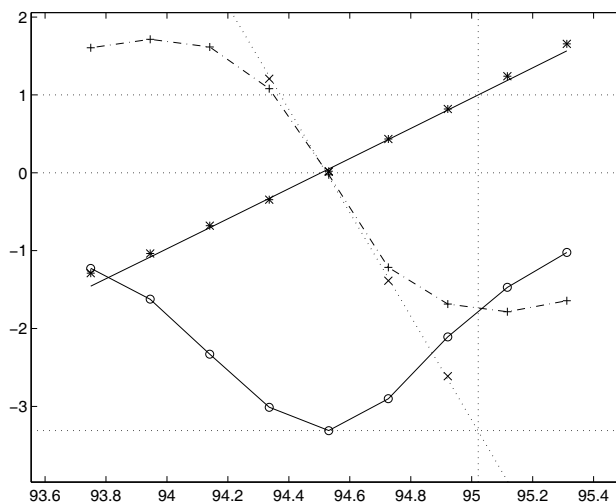


Figure 1-15 : paramètres généralisés, mode 6 du plancher de véhicule automobile

1.3.4. Conclusion

L'application de l'appropriation par le calcul à un système simulé parfaitement connu permet de mettre en évidence les qualités de cette méthode. On constate une très bonne précision des fréquences, toujours obtenues avec une erreur inférieure à 1 %. L'erreur maximale d'estimation des coefficients d'amortissement généralisé est de 7 % pour le mode 5 couplé aux modes 6 et 7, et entraîne une erreur de norme sur le vecteur propre réel de 5 %. Néanmoins, la colinéarité entre vecteurs calculés et initiaux est excellente.

L'identification des modes du plancher de véhicule automobile, tout comme la plupart des structures testées au LMA, n'a pas posé de difficulté particulière. Les modes sont aisément localisés et identifiés très rapidement.

De nombreuses illustrations des performances de cette technique d'analyse modale figurent dans [16].

1.4. Appropriation expérimentale

L'appropriation par le calcul est l'application de la technique d'appropriation du LMA au post-traitement de mesures effectuées dans la plupart des cas en multi-excitations aléatoires décorréliées. Bien que très souvent employé car fournissant rapidement une information sur toute la bande fréquentielle analysée, ce mode de mesure entache les données d'un certain nombre d'erreurs.

D'une part le calcul de la transformée de Fourier discrète (DFT) engendre des erreurs liées au caractère fini du signal temporel mesuré, réduites par l'utilisation de fenêtres de pondération (le plus souvent la fenêtre de Hanning). D'autre part le fait d'exciter un spectre étendu peut, du fait de la présence de faibles non-linéarités, induire des harmoniques pouvant perturber les mesures de façon non négligeable. Par ailleurs l'énergie fournie par les excitateurs étant répartie sur toute la bande fréquentielle, les modes de faible amplitude sont peu excités et par conséquent mesurés avec un mauvais rapport signal/bruit. Enfin le bruit de mesure est réduit en effectuant un grand nombre de moyennes (de l'ordre de 100) mais cela conduit à un lissage des fonctions de transfert et à une surestimation des coefficients d'amortissement, voire un décalage des fréquences de résonance.

Pour toutes ces raisons, les mesures en excitation sinus sont toujours considérées comme étant les plus précises. Elles sont par contre plus coûteuses en temps d'acquisition, et donc plutôt employées en complément des mesures en bruit blanc pour des zones à forte densité modale ou présentant des comportements non-linéaires. La mesure classique en excitation sinus, appelée sinus pas-à-pas, consiste à appliquer à chaque fréquence autant de configurations de force indépendantes que d'excitateurs utilisés. Elle fournit les mêmes informations qu'une mesure en bruit blanc, à savoir les fonctions de réponse fréquentielle (FRF) relatives à chacune des forces. On peut ensuite extraire les paramètres modaux par analyse modale.

L'appropriation expérimentale constitue une approche fondamentalement différente. Les mesures sont effectuées mode par mode donc dans un espace fréquentiel réduit, et fournissent directement les paramètres modaux du système conservatif associé à la structure (SCA) sans nécessiter d'analyse modale ultérieure. Cela suppose évidemment que le nombre et la position approximative des modes soient connus, ce qui nous a conduit à baser l'appropriation expérimentale sur les résultats venant de l'appropriation par le calcul.

Après avoir mentionné les problèmes particuliers posés par l'appropriation expérimentale des structures légères, on donne une description de la technique employée, puis de sa mise en œuvre avec les moyens d'acquisition du LMA ; enfin deux exemples d'application sur des structures réelles sont présentés.

1.4.1. Problèmes inhérents à l'appropriation expérimentale de structures légères

L'appropriation expérimentale est depuis de nombreuses années utilisée dans le secteur aéronautique. En effet, la détermination précise des caractéristiques modales conduit à la prédiction du phénomène de flottement. Ce couplage de type fluide-structure entre les vibrations de l'avion et l'écoulement de l'air qui l'entoure limite la vitesse maximale à un seuil de stabilité au-delà duquel des forces en quadrature de phase positive peuvent apparaître, correspondant à un terme d'amortissement négatif. Si ce terme est supérieur à l'amortissement de la structure, il conduit à une instabilité qui peut engendrer la destruction de l'appareil [10].

Dans ce domaine d'application, les structures étudiées sont de grande envergure et de masse importante devant les masses mobiles des excitateurs utilisés. On suppose en général que la force générée par un excitateur est directement proportionnelle au courant injecté dans la bobine mobile. Il n'en est pas de même lorsque l'on étudie des structures plus légères faiblement amorties. Dans ce cas, les masses mobiles des excitateurs liées à la structure créent en vibrant des forces d'inertie qui viennent s'ajouter aux forces électromagnétiques. Ces termes d'inertie perturbent au voisinage des résonances la loi force / courant, introduisant entre les différentes forces un couplage important par la structure.

Illustrons ce phénomène par un exemple simple : considérons une structure excitée à l'aide de deux actionneurs de type pot vibrant (Figure 1-16). On mesure aux points d'application des excitations les efforts F_1 , F_2 et les accélérations γ_1 , γ_2 au moyen de cellules de force et d'accéléromètres.

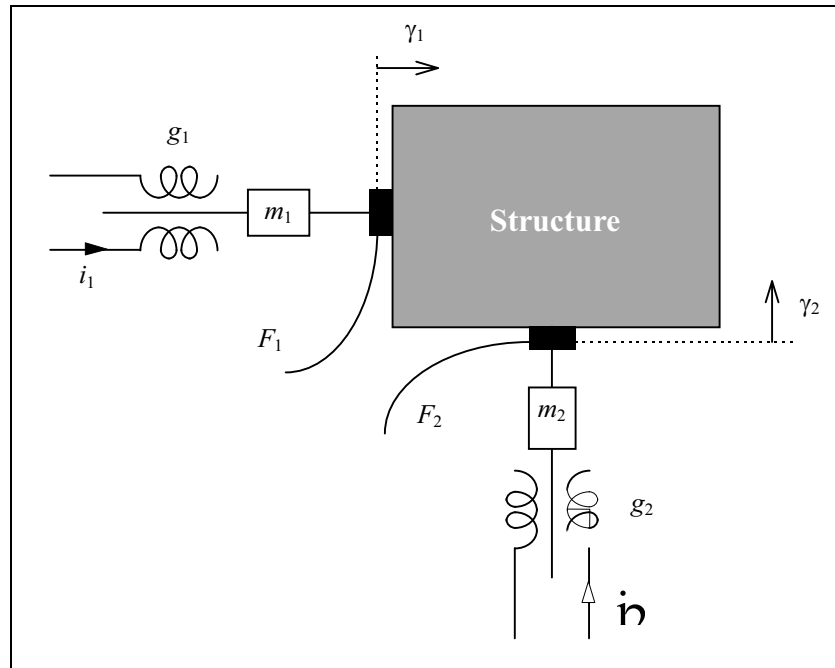


Figure 1-16 : structure soumise à deux excitations

Les courants de commande des excitateurs i_1 et i_2 génèrent sur les tiges de liaison des forces électromagnétiques proportionnelles aux gains g_1 et g_2 :

$$F_1^{él} = g_1 i_1 \quad F_2^{él} = g_2 i_2 \quad (1.18)$$

Les forces mesurées à l'interface entre la tige de liaison et la structure sont la somme de ces forces électromagnétiques et des forces d'inertie des masses mobiles m_1 et m_2 :

$$F_1 = g_1 i_1 - m_1 \gamma_1 \quad F_2 = g_2 i_2 - m_2 \gamma_2 \quad (1.19)$$

Or la mesure des accélérations fournit l'expression de la matrice de transfert locale H définie par (1.20).

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

L'expression de la relation liant les forces aux courants devient alors :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Cette relation montre d'abord que les termes d'inertie interviennent si la matrice des forces d'inertie n'est pas négligeable devant la matrice unité, mais elle montre aussi que dans ce cas il existe un **couplage par la structure** des deux excitations. Ainsi une modification du courant i_1 entraîne à la fois une variation de F_1 et de F_2 . De plus, la matrice de transfert force / courant devient **variable en fonction de la fréquence**, surtout au voisinage des résonances, justement là où aura lieu l'appropriation. Enfin, si les excitateurs sont commandés en tension, celle-ci n'est pas nécessairement proportionnelle au courant du fait de l'impédance de la bobine. C'est pour cette raison qu'une attention particulière a été portée sur l'estimation de cette matrice de transfert, l'expérience montrant que l'application précise de forces désirées pouvait s'avérer difficile.

1.4.2. Description de la méthode proposée

L'appropriation expérimentale d'un mode se déroule en deux phases successives :

- la phase dite d'*appropriation* consiste à rechercher la fréquence d'excitation la plus proche de la fréquence du mode étudié tout en recalculant à chaque itération les forces appropriées et les tensions supposées générer ces forces,
- la phase dite de *contrôle des forces* consiste à fixer la fréquence et la valeur des forces appropriées, et à rechercher de façon précise les tensions qui vont générer ces forces. Cette phase n'est pas toujours nécessaire, mais s'avère utile lorsque le contrôle des forces est rendu difficile par la présence de masses mobiles importantes dans les excitateurs ou de modes propres de fréquences très voisines.

1.4.2.1. Phase d'appropriation

Supposons que e excitations sont appliquées à la structure instrumentée à l'aide de c capteurs. On se trouve au début d'une étape de la phase d'appropriation dans la situation suivante :

- e configurations de tensions regroupées dans une matrice U ($e \times e$) ont été appliquées successivement aux excitateurs à la fréquence f ,
- il en a résulté e configurations de force, dont les amplitudes complexes sont regroupées dans la matrice F (e, e),
- on a mesuré les e réponses des c capteurs, dont les amplitudes complexes sont regroupées dans la matrice Z (c, e).

On va maintenant chercher à estimer à partir de ces informations la fréquence du mode concerné, ses forces appropriées et les tensions supposées générer ces forces. On en déduira ensuite les nouvelles configurations de tension à appliquer.

Estimation de la fréquence modale

En appliquant la théorie décrite dans le paragraphe 1.2.1, on estime à partir de Z et F la valeur du paramètre k , la variation du critère δ et les forces appropriées a_v .

La valeur du paramètre k nous renseigne sur la position de la fréquence d'excitation relativement à la fréquence f_v du mode le plus proche. On estime cette dernière de trois façons différentes selon l'itération en cours :

- 1^{ère} itération : on utilise la valeur du coefficient d'amortissement β_{vv} issue de l'appropriation par le calcul et la relation (1.22) vérifiée si l'amortissement est diagonal :

$$k(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_v^2}{\omega \beta_{vv}} \quad (1.22)$$

- 2^{ème} itération : on utilise les 2 estimations successives du paramètre k et une interpolation parabolique issue de la propriété (1.8),
- 3^{ème} itération et suivantes : on utilise la même interpolation parabolique qu'après la 2^{ème} itération, mais sans prendre en compte la première estimation du paramètre k , en général peu satisfaisante car issue d'excitations arbitraires.

Nouvelles configurations de forces

Pour obtenir une estimation stable du paramètre k et des forces appropriées, il est nécessaire d'appliquer e combinaisons de forces linéairement indépendantes sollicitant les non-linéarités de façons les plus proches possibles. C'est pourquoi on cherche à **modifier suffisamment les forces en changeant la déformée au minimum**.

On se base pour cela sur les valeurs et vecteurs propres (λ_k, A_k) de la matrice de transfert réponse / force aux points d'excitation H_{exc} .

A la plus grande valeur propre λ_l correspondent les forces appropriées A_l , que l'on remplace par les forces a_v calculées précédemment plus précises car parfaitement réelles.

On forme ensuite e nouvelles configurations de forces \tilde{F}_k , la dernière étant les forces à atteindre a_v , et les précédentes des combinaisons linéaires des vecteurs propres : $\sum_{k=1}^e \alpha_k A_k$ où

les coefficients α_k sont estimés de telle sorte que la norme de la déformée qu'ils engendrent $\alpha_k H A_k$ ne dépasse pas 10 % de la norme de la réponse appropriée $H a_v$.

Par exemple, pour une mesure à 3 excitateurs, on aura :

$$\alpha_2 = 0.1 \frac{\|H a_v\|}{\|H A_2\|} \quad \alpha_3 = 0.1 \frac{\|H a_v\|}{\|H A_3\|} \quad (1.23)$$

$$\hat{F}_1 = A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \quad \hat{F}_2 = A_1 - \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \quad \hat{F}_3 = A_1 \quad (1.24)$$

Enfin on norme les forces de façon à avoir une amplitude des déformées constante :

$$\tilde{F}_k = \frac{\|H a_v\|}{\|H \hat{A}_k\|} \hat{F}_k \quad (1.25)$$

Loi force / tension

L'estimation de la loi force / tension est basée sur une hypothèse de linéarité qui conduit simplement à l'inversion de la matrice force :

$$T = U F^{-1} \quad (1.26)$$

Nouvelles configurations de tensions

On peut maintenant calculer les nouvelles tensions \tilde{U} en multipliant les nouvelles forces par la matrice de transfert force / tension estimée précédemment :

$$\tilde{U} = T \tilde{F} \quad (1.27)$$

Configurations de tensions de la mesure initiale

La première série de mesures s'effectue sans connaissances préalables sur le comportement de la structure, et constitue une estimation initiale des fonctions de transfert réponse / force et force / tension à la fréquence d'excitation.

Les tensions appliquées sont sinusoïdales, leur amplitude u_0 a été définie dans le paramétrage et on applique des déphasages de 180° aux tensions U_2 à U_e . Par exemple, si l'on dispose de 3 excitateurs, la matrice des tensions appliquées est :

$$U = u_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Convergence de la phase d'appropriation

Le critère de convergence de la phase d'appropriation fixé par l'utilisateur dans le paramétrage de la mesure est la **valeur maximale admissible du paramètre k** , qui garantit la localisation de la fréquence modale. On considère par exemple que la fréquence est convenable lorsque k est inférieur à 3 %. On peut toutefois renouveler la phase d'appropriation sans modifier la fréquence afin de s'assurer de la stabilité de l'estimation des forces appropriées.

Dans la plupart des cas, l'appropriation est satisfaisante à l'issue de cette étape. Il arrive cependant que l'estimation linéaire de la matrice de transfert force / tension ne soit pas fiable, et ne permette pas d'appliquer de façon satisfaisante les forces désirées. Il convient alors de procéder à la phase de contrôle des forces qui s'appuie sur une estimation locale de la matrice de transfert force / tension au voisinage des forces appropriées.

1.4.2.2. Phase de contrôle des forces

Lors de la première étape de la phase de contrôle des forces, on se trouve dans la situation suivante :

- on connaît les forces appropriées a_v ,
- on vient d'appliquer e configurations de tensions, dont la dernière U_{app} a généré les forces F_{app} proches des forces ciblées :

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_{app} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_{app} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

- on estime à nouveau à l'aide de ces dernières mesures la matrice de transfert force / tension, et les tensions à appliquer \tilde{U}_{app} pour obtenir les forces appropriées :

$$\tilde{U}_{app} = (U F^{-1}) \cdot F_{app} \quad (1.30)$$

On va alors construire e nouvelles configurations de tensions pour passer **progressivement** de U_{app} à \tilde{U}_{app} sans dépasser des **variations maximales** en amplitude ΔA_{max} et en phase $\Delta \varphi_{max}$ imposées par l'utilisateur (par exemple 10 % en amplitude et 5° en phase). Définissons la variation complexe maximale $\Delta \varphi$ par :

$$\Delta\varphi = \Delta A_{\max} e^{j\Delta\varphi_{\max}} \quad (1.31)$$

Nouvelles configurations de tensions

Reprenons pour simplifier les notations l'exemple de trois excitateurs. Après avoir normé les deux vecteurs U_{app} et \tilde{U}_{app} , par exemple avec la plus grande composante à 1, on définit le vecteur variation ΔU :

$$\Delta U = \begin{array}{c} \boxed{\tilde{U}_{app}} \\ \cdot / \\ \boxed{U_{app}} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\Delta U_1} \\ \boxed{\Delta U_2} \\ \boxed{\Delta U_3} \end{array} \quad (1.32)$$

Division terme
à terme : $\Delta U_k = \tilde{U}_{app_k} / U_{app_k}$

La limitation de ΔU aux variations maximales imposées s'écrit :

$$\begin{cases} |\Delta U_k| = \min(|\Delta U_k|, |\Delta_{\max}|) \\ \arg(\Delta U_k) = \frac{\arg(\Delta U_k)}{|\arg(\Delta U_k)|} \min(|\arg(\Delta U_k)|, |\arg(\Delta_{\max})|) \end{cases} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, e\} \quad (1.33)$$

On construit alors la matrice des variations ΔV :

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \Delta U_1 & \Delta U_1 & \Delta U_1 \\ 1 & \Delta U_2 & \Delta U_2 \\ 1 & 1 & \Delta U_3 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

et la nouvelle matrice des tensions :

$$\tilde{U} = \Delta V \text{diag}(U_{app}) \quad (1.35)$$

Ainsi, si les variations ΔU_k sont inférieures aux limites imposées, la dernière configuration de tension est égale à \tilde{U}_{app} ; sinon, on s'est théoriquement "approché" de \tilde{U}_{app} et on va à nouveau estimer la matrice de transfert force / tension.

Estimation de la matrice de transfert force / tension

Après avoir appliqué les tensions précédentes et mesuré les forces qui en résultent, on en déduit la loi locale qui lie les forces aux tensions. Comme la matrice des forces est quasiment singulière puisque de faibles variations ont été imposées, la matrice des variations ΔF définie par (1.37) est inversée pour aboutir à la matrice de transfert force / tension locale (1.38).

$$\Delta U = \tilde{U} - U_{app} \quad (1.36)$$

$$\Delta F = \tilde{F} - F_{app} \quad (1.37)$$

$$T = \Delta U \Delta F^{-1} \quad (1.38)$$

$$\tilde{U}_{app} = T a_v \quad (1.39)$$

On peut dès lors avoir une nouvelle estimation des tensions générant les forces appropriées (1.39) dont on va déduire les nouvelles configurations.

Convergence du contrôle des forces

Les critères de convergence de la phase de contrôle des forces sont définis dans le paramétrage de la mesure. Il s'agit des erreurs maximales en amplitude et en phase des forces appliquées relativement aux forces désirées. Lorsque ces critères sont atteints, l'appropriation du mode choisi est terminée.

1.4.3. Mise en œuvre avec le système LMS

La mise en œuvre de l'appropriation expérimentale a été menée en utilisant le matériel d'acquisition utilisé par le laboratoire. Il s'agit du logiciel Cada-X de la société Leuven Measurement Systems (LMS) associé à un frontal d'acquisition Scadas II fabriqué par la société Difa Measuring Systems. Le langage de programmation propre au logiciel Cada-X appelé UPA (User Programming Acquisition) permet de gérer la génération et la mesure de signaux, mais n'est pas adapté aux calculs intermédiaires qui sont nécessaires en appropriation. Ce problème a été contourné en faisant automatiquement appel au logiciel Matlab entre chaque séquence de mesure. Avant de donner un aperçu de l'architecture du programme d'appropriation expérimentale, on donne les caractéristiques du matériel utilisé tant pour la génération que pour la mesure. Ces données techniques peuvent paraître superflues, mais elles sont importantes car ce sont elles qui vont limiter la précision de l'appropriation.

1.4.3.1. Génération de signal

A chaque séquence de mesure d'une appropriation, on doit appliquer aux excitateurs des tensions sinusoïdales de même fréquence mais d'amplitudes et déphasages différents. Ces signaux sont calculés par transformée de Fourier inverse, puis envoyés au convertisseur numérique-analogique (QDAC) du module Difa-Scadas.

Deux limitations technologiques sont imposées par le convertisseur :

- la période d'échantillonnage doit être comprise entre 4 μ s et 0.1 s , ce qui limite le nombre d'échantillons par période. On voit sur la Figure 1-17 que dans la plupart des applications (jusqu'à une fréquence de 1024 Hz), le signal sera échantillonné avec au moins 16 points par période, ce qui est suffisant pour avoir une bonne représentation du sinus,
- la précision en fréquence des signaux générés est limitée par l'horloge interne du convertisseur. La base de temps étant codée sur 4 chiffres seulement, il en résulte une précision sur la fréquence variant entre 10^{-3} et 10^{-4} . Cette précision est souvent suffisante, mais peut s'avérer critique en présence de modes très proche à fréquence élevée. La résolution fréquentielle entre 64 et 500 Hz est donnée Figure 1-18.

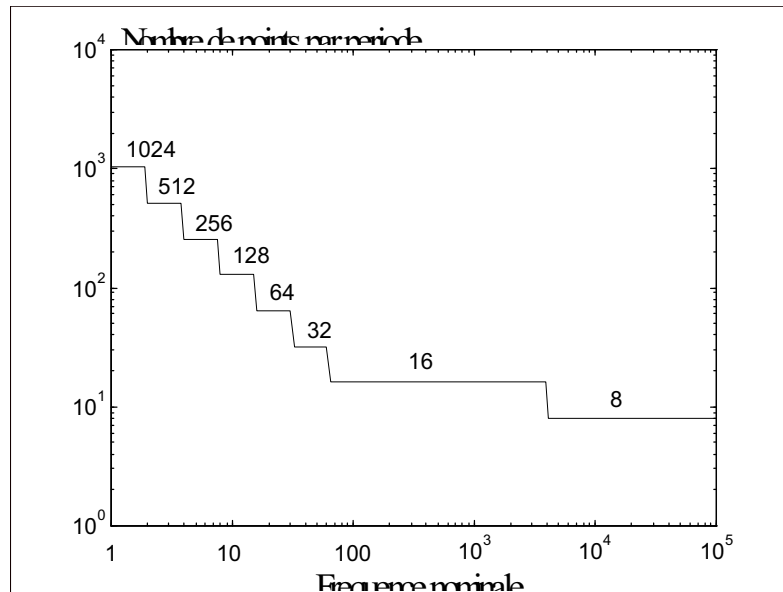


Figure 1-17 : nombre de points par période en fonction de la fréquence nominale

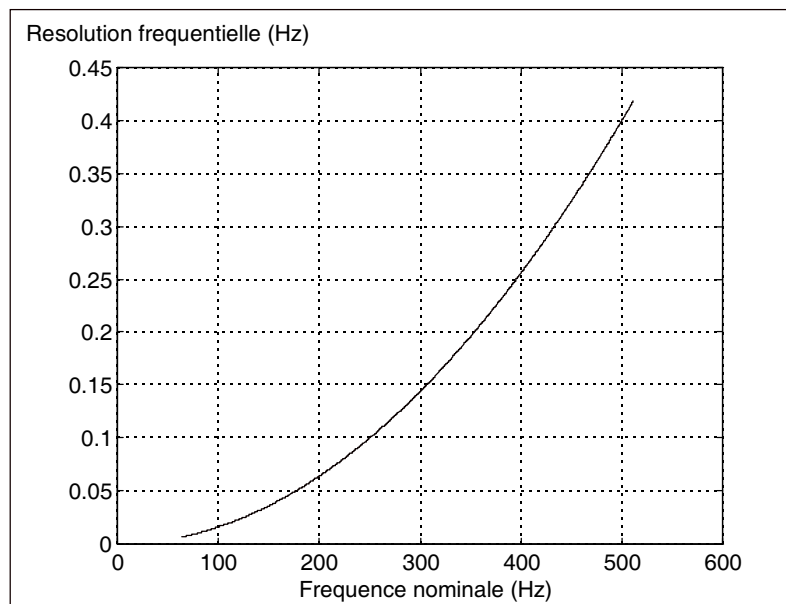


Figure 1-18 : résolution fréquentielle en fonction de la fréquence nominale

1.4.3.2. Mesure des réponses

La structure étant soumise aux excitations sinusoïdales, on mesure les signaux délivrés par les cellules de force et les accéléromètres après disparition du régime transitoire. Ces mesures sont effectuées sous forme de FRF relativement à la tension de référence. On prélève ensuite dans chaque FRF la valeur à la fréquence d'excitation.

Deux caractéristiques doivent être imposées au convertisseur analogique-numérique du Scadas :

- la fréquence d'échantillonnage des mesures doit être fixée au produit de la fréquence d'excitation par une puissance de 2. Elle est limitée à une valeur dépendant du nombre de voies. La Figure 1-19 donne le nombre de points par période du signal mesuré en

fonction de la fréquence de ce signal et du nombre de voies de mesure. Là encore ce nombre est suffisant dans le domaine de fréquence qui nous intéresse.

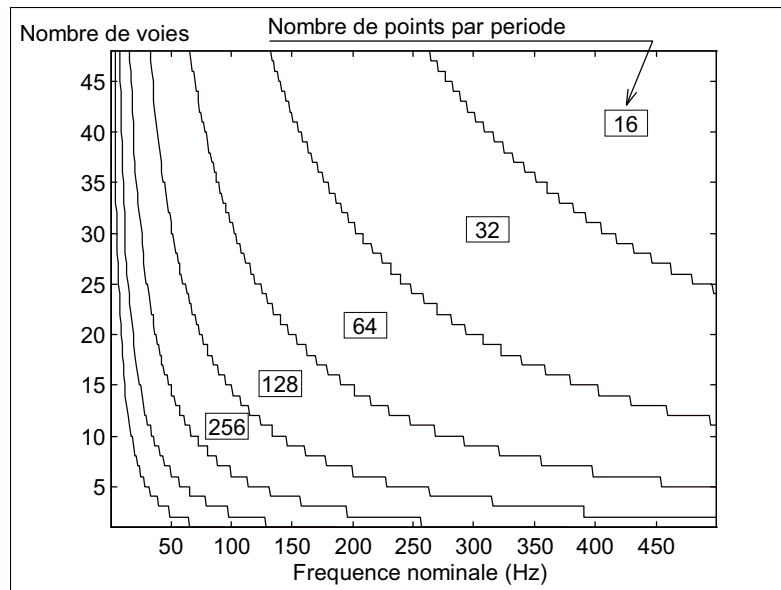


Figure 1-19 : nombre de points par période en fonction du nombre de voies et de la fréquence nominale

- les signaux mesurés sont filtrés afin de réduire le bruit de haute fréquence et les éventuelles harmoniques dues aux non-linéarités. La fréquence de coupure du filtre passe-bas est ici fixée au double de la fréquence d'excitation.

1.4.3.3. Déroulement d'une appropriation expérimentale

La Figure 1-20 montre l'organigramme décrivant le fonctionnement du logiciel d'appropriation expérimentale. On a distingué les opérations effectuées directement sous Cada-X et programmées en langage UPA de celles effectuées sous Matlab.

Sélection d'un mode

Après lancement du programme principal, on charge les résultats de l'appropriation par le calcul, on sélectionne un mode à approprier et on paramètre la mesure (Figure 1-22).

La fréquence initiale proposée par le logiciel est la fréquence modale estimée lors de l'appropriation par le calcul. Il faut par ailleurs fixer les valeurs des paramètres suivants :

- le nombre de moyennes effectuées à chaque mesure,
- l'amplitude des tensions initiales et la valeur maximale à ne pas dépasser (protection des excitateurs),
- le temps de stabilisation nécessaire à la disparition du régime transitoire,
- l'amplitude de vibration désirée,
- les tolérances relatives à la convergence des phases d'appropriation et de contrôle des forces.

Une valeur de temps de stabilisation est proposée par le logiciel basée sur le coefficient d'amortissement β_{vv} identifié lors de l'appropriation par le calcul ; elle correspond au temps τ_{stab} au bout duquel la réponse impulsionnelle de la structure a diminué de 95 % (Figure 1-21). Son expression est donnée par :

$$\tau_{stab} = \frac{-2 \ln(\alpha)}{\beta_{vv}} \quad (1.40)$$

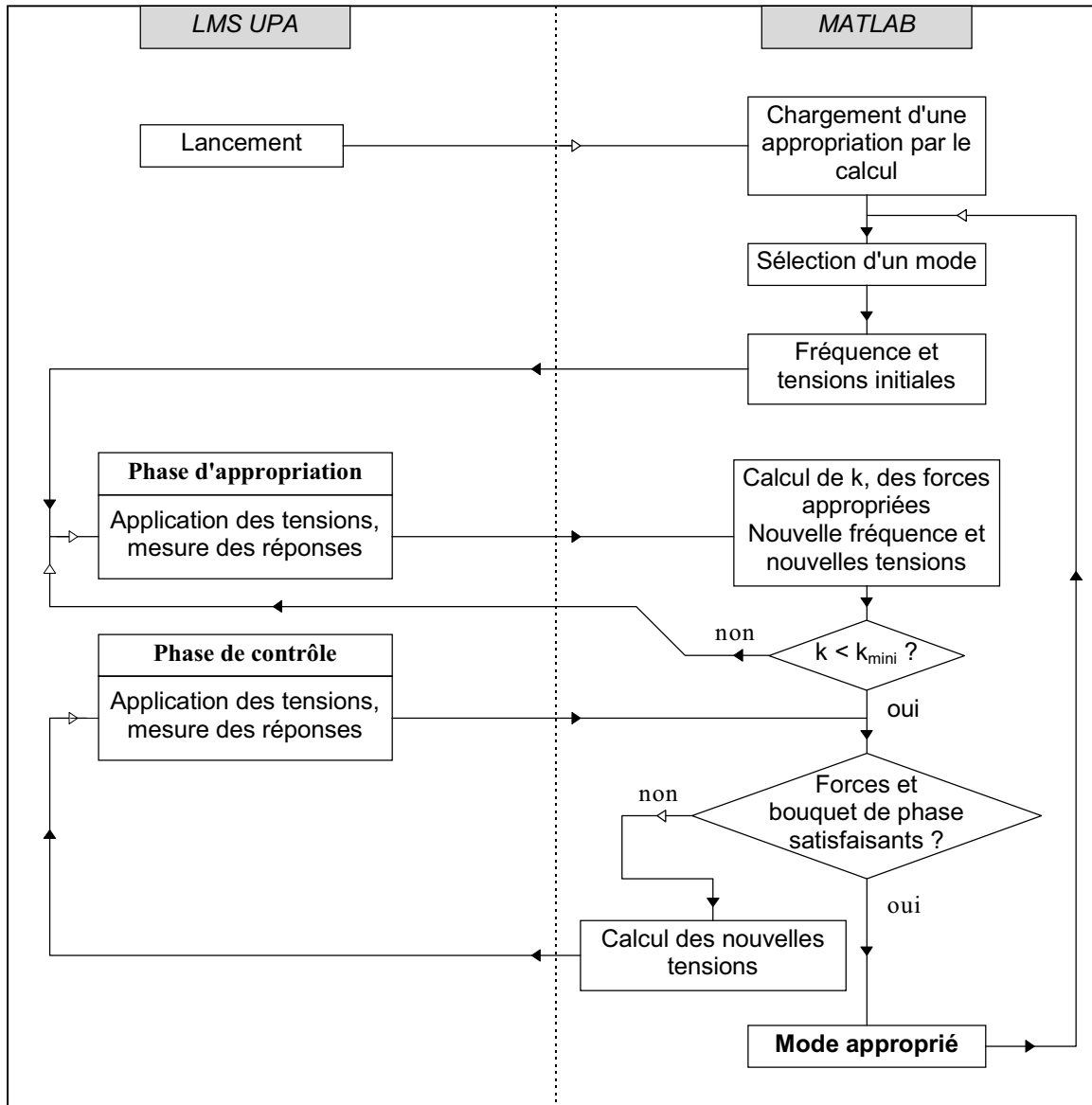


Figure 1-20 : organigramme du logiciel d'appropriation expérimentale

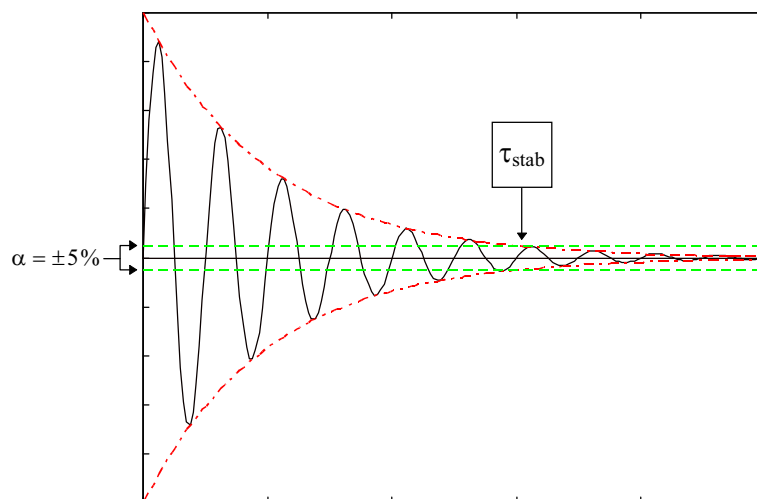


Figure 1-21 : estimation du temps de stabilisation

Phase d'appropriation

On montre Figure 1-23 la fenêtre présentée à l'utilisateur à l'issue de la troisième séquence d'une phase d'appropriation. Les informations contenues dans cette fenêtre sont les suivantes :

- la courbe du paramètre k montre les trois valeurs successives. La nouvelle fréquence proposée correspond à l'intersection de l'interpolation parabolique avec l'axe des abscisses. Comme précisé en 1.4.2.1, le premier point n'est pas pris en compte dans cette interpolation car il correspond aux configurations initiales de tension et fournit souvent une valeur très différente des points suivants. La valeur numérique du paramètre k correspondant à la dernière mesure (-5.486 %) indique que la fréquence modale n'est pas encore atteinte.
- La courbe du critère δ permet de s'assurer que le placement des excitateurs est convenable pour approprier le mode concerné.
- Sur le bouquet de phase des forces figurent les forces désirées (\times) et les forces réellement appliquées (\circ), on voit que dans ce cas l'estimation de la matrice de transfert force / tension est satisfaisante. Néanmoins, les valeurs numériques indiquent que la tolérance sur l'erreur en amplitude n'est pas atteinte.
- Enfin le bouquet de phase des accélérations montre les amplitudes complexes des signaux délivrés par les capteurs relativement au ddl d'amplitude maximale. Les valeurs numériques nous renseignent sur la qualité de l'appropriation. Elles correspondent aux critères employés par l'Onéra pour qualifier les bouquets de phase, à savoir le maximum et la moyenne des angles que font les amplitudes complexes avec l'axe des abscisses, sans prendre en compte les accélérations inférieures à 10 % de l'accélération maximale (à l'intérieur du cercle central). Les valeurs numériques indiquées montrent que l'appropriation n'est pas parfaitement réalisée.

On présente les résultats obtenus à l'issue de la séquence suivante Figure 1-24. La fréquence modale a été localisée et atteinte, les forces appliquées correspondent bien aux forces désirées mais le bouquet de phase présente toujours une ouverture de près de 15° . Cela vient du fait que la structure étudiée - une portière de voiture équipée - était peu instrumentée et comportait des modes internes non observables.

La phase de contrôle des forces n'est pas utile dans cet exemple où la structure était de masse et amortissement importants.

L'acceptation du mode conduit à la fenêtre représentée Figure 1-25. Outre les bouquets de phase des forces et accélérations issus de la mesure, on y a également tracé la superposition du vecteur propre réel issu de l'appropriation par le calcul et de la partie réelle du vecteur complexe mesuré. On observe une bonne concordance des résultats. On peut également remarquer que la position des forces (étoiles rouges) n'est pas adaptée à l'appropriation de ce mode, puisqu'elle correspond à des ddl d'amplitude faible.

Les résultats de mesure peuvent tout comme ceux de l'appropriation par le calcul être sauvegardés dans plusieurs formats, dont les formats Matlab et fichier universel.

Notons enfin que tout au long de l'appropriation expérimentale, le logiciel propose des valeurs (fréquence, temps de stabilisation, tolérances...) et des choix (passage au contrôle des forces, acceptation de l'appropriation...), mais l'utilisateur reste entièrement libre d'imposer des valeurs ou choix différents.

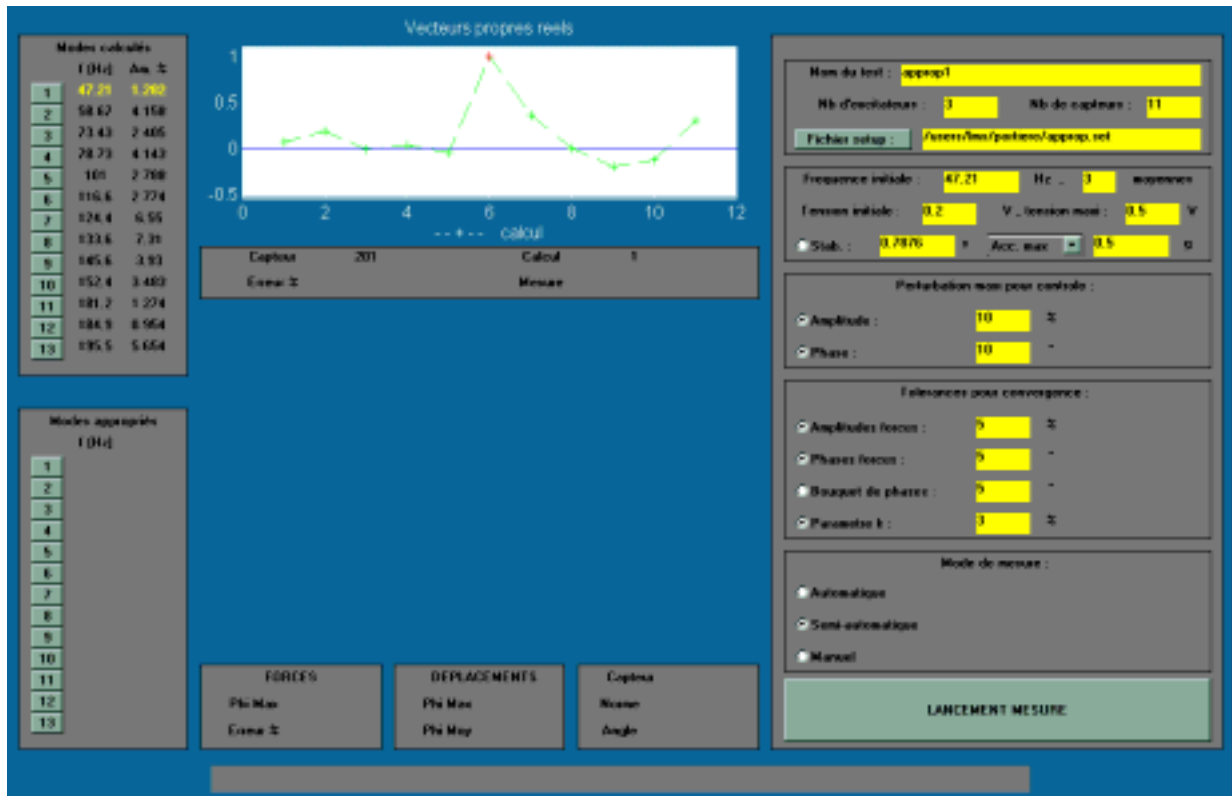


Figure 1-22 : paramétrage de la mesure

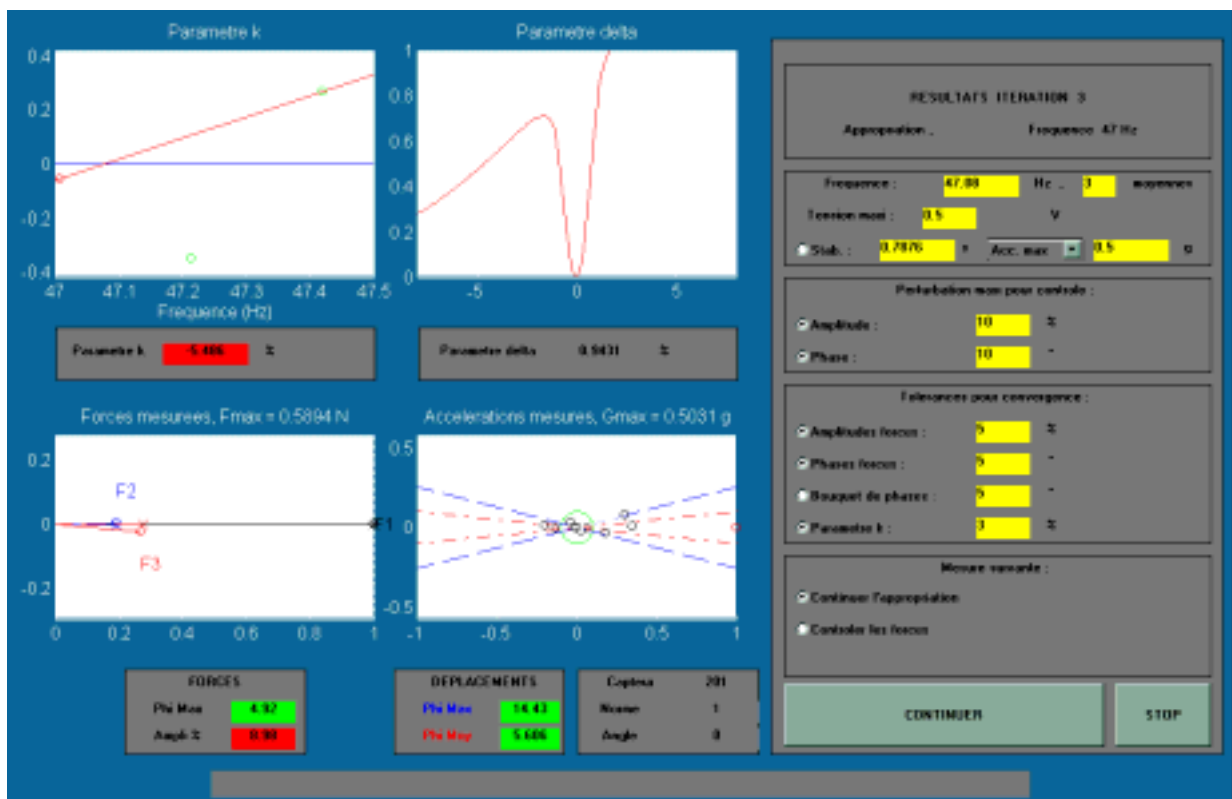


Figure 1-23 : séquence 3 de la phase d'adaptation

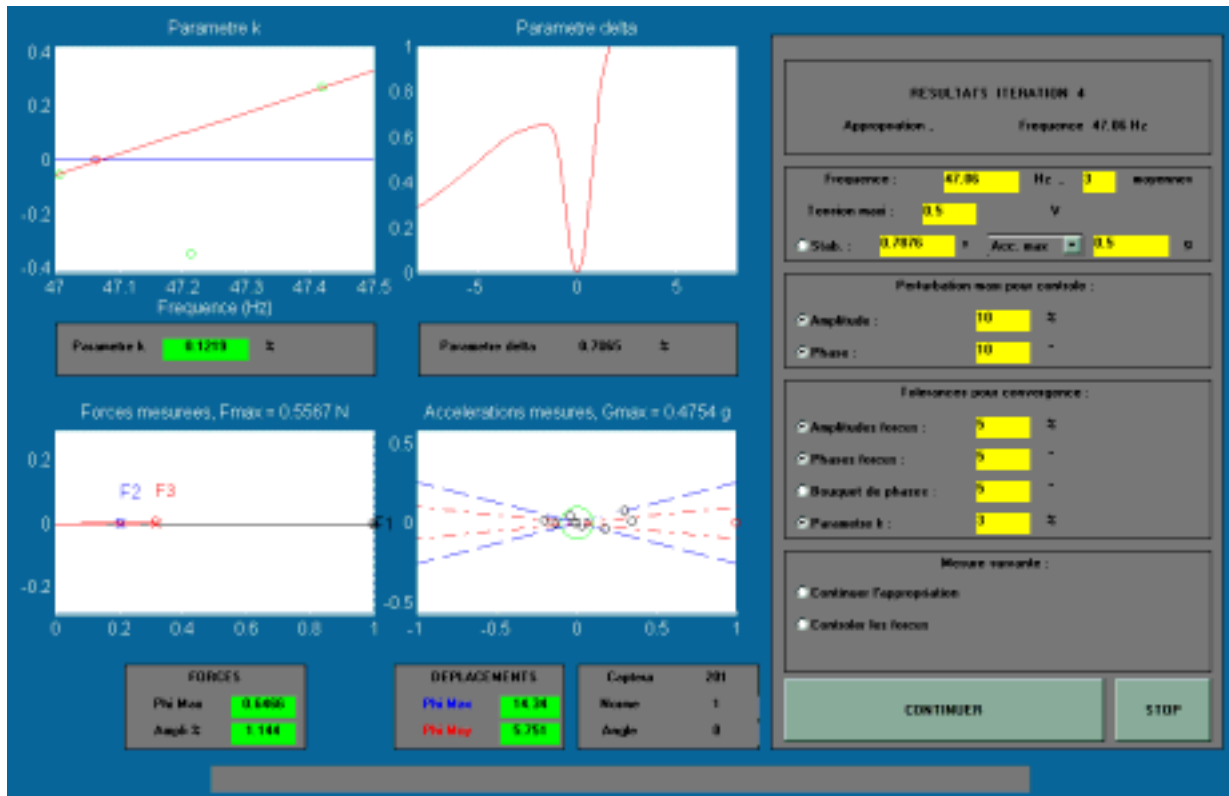


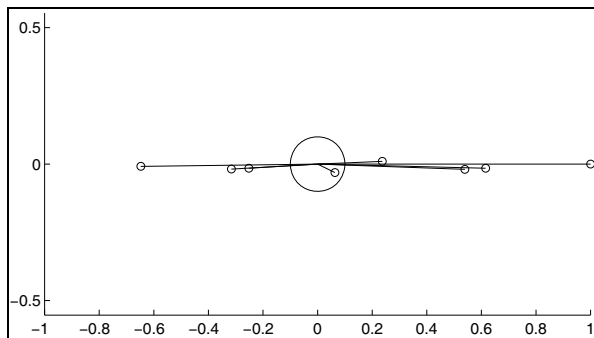
Figure 1-24 : séquence 4 de la phase d'appropriation



Figure 1-25 : résultat de l'appropriation

1.4.4. Application à un système simulé

On présente ici une illustration de l'appropriation expérimentale à partir du cas-test simulé à 8 ddl soumis à trois excitations arbitrairement placées sur les trois premiers ddl. Ayant estimé les forces appropriées en appropriation par le calcul, on peut simuler la réponse du système à ces forces par superposition modale en utilisant la relation (1.14). Les figures ci-dessous montrent le bouquet de phase obtenu pour les modes 4 et 5. Leur comparaison illustre un caractère essentiel de l'appropriation : une réponse en phase proportionnelle à un mode propre réel ne peut être obtenue que si le nombre et le placement des excitateurs le permettent. Dans notre cas, on ne peut isoler le mode 5 et la réponse comporte des composantes en quadrature de phase dues aux modes voisins non négligeables. On verra dans le paragraphe suivant que la mesure est tout de même exploitable.



Bouquets de phase des réponses appropriées du système simulé à 8 ddl
Figure 1-26 : mode 4

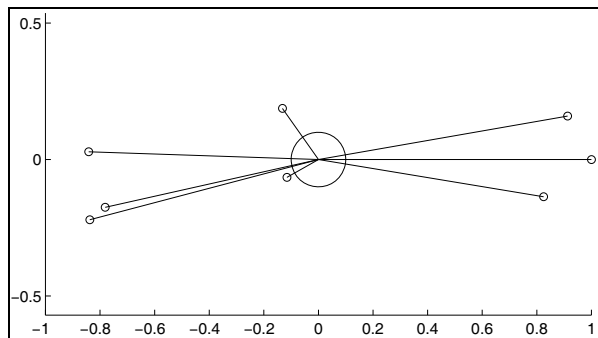


Figure 1-27 : mode 5

1.4.5. Application à une structure industrielle

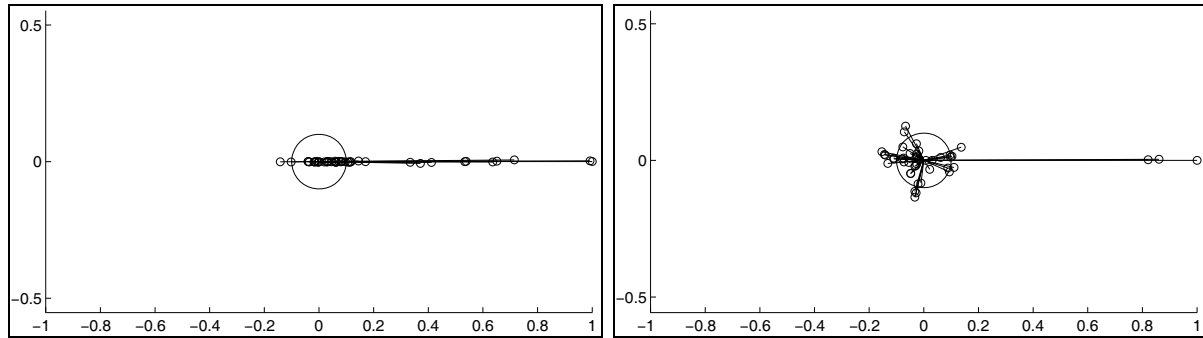
L'appropriation expérimentale a enfin été appliquée au plancher de véhicule automobile présenté précédemment (Figure 1-12). Dix modes ont été appropriés entre 0 et 150 Hz. Le tableau ci-dessous permet de comparer les fréquences finales d'appropriation f_{app} aux fréquences modales obtenues avec l'appropriation par le calcul f_{cal} .

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_{app} (Hz)	26.28	44.18	61.20	72.41	91.67	94.30	96.75	109.7	130.3	139.8
f_{cal} (Hz)	26.29	44.17	61.12	72.37	91.48	94.35	96.63	109.6	130.0	139.6

Tableau 1-4 : fréquences modales issues de l'appropriation expérimentale et de l'appropriation par le calcul pour le plancher de véhicule automobile

Les fréquences obtenues par appropriation expérimentale en excitation sinus concordent bien avec celles issues de l'appropriation par le calcul après mesure en excitations aléatoires. On présente Figure 1-28 et Figure 1-29 les bouquets de phase des réponses appropriées obtenues pour les modes 3 et 8, et dans le Tableau 1-5 les angles maximum et moyen correspondant aux dix modes étudiés (voir 1.4.3.3 pour la définition de ces critères).

On constate que la position des excitateurs permet d'isoler parfaitement le mode 3, mais que l'application des forces appropriées au mode 8 n'annule pas complètement les composantes en quadrature de phase. Nous verrons dans le paragraphe 1.4.6 que ce type de mesure est tout de même exploitable.



Bouquets de phase des réponses appropriées, plancher de véhicule automobile

Figure 1-28 : mode 3

Figure 1-29 : mode 8

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ_{\max} (°)	1.54	6.57	1.13	2.09	8.76	5.92	69.08	76.67	88.01	7.92
Φ_{moy} (°)	1.10	2.35	0.40	0.97	2.41	1.99	9.00	25.00	20.43	3.45

Tableau 1-5 : angles de phase obtenus lors de l'appropriation expérimentale du plancher de véhicule automobile

1.4.6. Correction des modes appropriés

L'étude de l'appropriation expérimentale a permis de montrer que l'application des forces appropriées ne permettait pas toujours d'obtenir une réponse parfaitement en phase proportionnelle au mode propre réel approprié. Si le nombre d'excitateurs est insuffisant ou si ceux-ci sont mal positionnés, et en particulier en présence de modes couplés, il subsiste dans la réponse des composantes en quadrature de phase dues à la participation des autres modes de la structure. Le but de cette étude est de quantifier cette participation et de conclure quant au calcul du mode propre réel à partir de ces mesures imparfaitement appropriées.

L'idée générale de ce post-traitement des mesures est la suivante : la réponse appropriée est constituée du mode concerné auquel vient s'ajouter la contribution théoriquement faible des autres modes de la structure. On va chercher à décomposer chaque réponse sur la base des modes propres réels de façon itérative.

1.4.6.1. Décomposition modale de la réponse aux forces appropriées

Considérant les m modes présents dans la bande fréquentielle étudiée, on adopte la décomposition modale simplifiée d'une réponse à la pulsation ω :

$$Z(\omega) = \sum_{v=1}^m \frac{Y_v t_v}{j\omega - s_v} \quad (1.41)$$

La réponse aux forces appropriées du mode n peut alors s'écrire :

$${}_{app}Z_n(\omega_n) = \sum_{v=1}^m \frac{Y_v t_v}{j\omega_n - s_v} \quad (1.42)$$

où ω_n est la pulsation propre réelle du mode n .

La première étape consiste à calculer par une méthode des moindres carrés les coefficients t_v du numérateur qui caractérisent la participation de chaque mode dans les réponses appropriées. Il s'agit de la résolution d'un système linéaire surdéterminé à m inconnues et $m \times c$ équations où c est le nombre de capteurs.

La valeur initiale donnée aux modes propres réels est la partie réelle des mesures appropriées :

$$Y_v^0 = \text{Re}\left({}_{app}Z_v\right) \quad (1.43)$$

1.4.6.2. Estimation des vecteurs propres réels

Disposant à présent des coefficients t_v , une nouvelle estimation du vecteur propre du mode n est donné par la relation (1.44).

$$Y_n = \frac{j\omega_n - s_n}{t_n} \left[{}_{app}Z_n - \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \frac{Y_v^0 t_v}{j\omega_n - s_v} \right] \quad (1.44)$$

Effectuant ce calcul pour chaque mode, on obtient rapidement une nouvelle estimation de tous les vecteurs propres réels. On peut alors les comparer aux vecteurs initiaux et renouveler les opérations (1.42) et (1.44) jusqu'à convergence des vecteurs calculés.

1.4.6.3. Application à un système simulé

La correction itérative des modes appropriés a été appliquée au système simulé à 8 ddl. La procédure de calcul des modes propres réels a convergé en 2 itérations.

Décomposition modale de la réponse appropriée

On a montré en 1.4.4 que le mode 5 du système simulé ne pouvait être correctement approprié avec la configuration d'excitation adoptée. Afin de quantifier l'influence des autres modes sur la réponse appropriée d'un mode v , on définit les coefficients de participation modale par la relation suivante :

$$p_{vk} = \left\| \frac{Y_k t_k}{j\omega_v - s_k} \right\| / \left\| {}_{app}Z_v \right\| \quad (1.45)$$

On donne dans le tableau ci-dessous les coefficients de participation modale des 8 modes dans la réponse appropriée du mode 5 :

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Participation modale (%)	0.48	1.71	2.99	2.73	98.54	9.97	19.28	0.15

Tableau 1-6 : coefficients de participation modale pour la réponse appropriée du mode 5

On constate que les modes 6 et 7 fortement couplés au mode 5 par l'amortissement perturbent considérablement la réponse. Le bouquet de phase du mode 5 corrigé montre qu'on a bien éliminé les composantes en quadrature de phase.

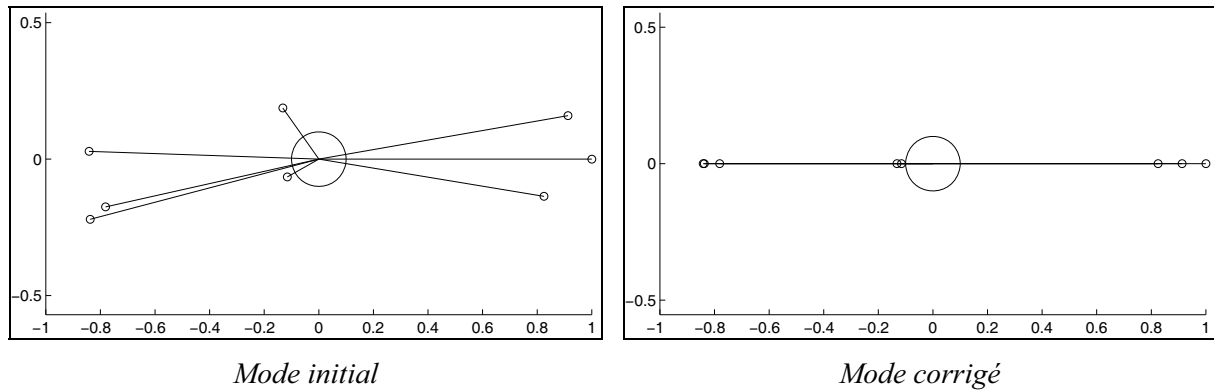


Figure 1-30 : bouquet de phase du mode 5, système simulé à 8 ddl

Comparaison des résultats

On peut maintenant comparer les résultats suivants :

- modes propres réels exacts, Y_0
- modes propres réels issus de l'appropriation par le calcul, Y_{cal}
- partie réelle des réponses aux forces appropriées, Y_{app}
- modes propres réels issus de la correction itérative, Y_{cor}

On présente dans le tableau ci-dessous les MAC entre ces différents vecteurs.

Mode	MAC (Y_{cal}, Y_0)	MAC (Y_{app}, Y_0)	MAC (Y_{cor}, Y_0)	MAC (Y_{app}, Y_{cor})
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
4	0.9998	0.9998	0.9998	1.0000
5	0.9969	0.9975	0.9975	1.0000
6	0.9982	0.9809	0.9809	1.0000
7	0.9878	0.9759	0.9759	1.0000
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tableau 1-7 : Modal Assurance Criterion entre modes calculés et modes exacts, système simulé à 8 ddl

Les résultats concordent relativement bien, les coefficients de MAC sont tous supérieurs à 97 %. On remarque également que les modes issus de la réponse appropriée et les modes corrigés sont quasiment identiques. En réalité, le calcul de la décomposition modale d'une réponse appropriée montre que les perturbations induites par les modes couplés n'interviennent que sur la partie imaginaire de la réponse. On peut donc en conclure que même si un mode n'est pas approprié de façon satisfaisante, la partie réelle de la réponse reste proportionnelle au vecteur propre réel.

1.4.6.4. Application à une structure industrielle

La correction itérative des modes appropriés donne également de bons résultats avec les mesures effectuées sur le plancher de véhicule automobile. Les vecteurs ainsi estimés ont convergé en 4 itérations.

On a vu que le mode 8 était mal approprié. Le Tableau 1-8 donne les coefficients de participation modale relatifs à ce mode.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Participation modale	0.51	0.31	7.29	5.41	3.12	15.55	0.10	98.07	1.40	5.05

Tableau 1-8 : coefficients de participation modale pour la réponse appropriée du mode 8

On remarque que le mode 6 est fortement présent dans la réponse appropriée du mode 8, ainsi que les modes 3, 4 et 10, ce qui explique la mauvaise appropriation.

On montre Figure 1-31 le bouquet de phase du mode 8 corrigé. On a fortement réduit les composantes en quadrature de phase, les résidus provenant sans doute des modes d'ordre supérieur non pris en compte.

Afin de vérifier la cohérence des résultats, on présente ci-dessous les MAC entre les vecteurs issus de l'appropriation par le calcul Y_{cal} , la partie réelle des modes mesurés par appropriation expérimentale Y_{app} et les modes corrigés Y_{cor} .

Mode	MAC (Y_{cal} , Y_{app})	MAC (Y_{cal} , Y_{cor})	MAC (Y_{app} , Y_{cor})
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9992	0.9992	1.0000
3	1.0000	1.0000	1.0000
4	0.9995	0.9995	1.0000
5	0.9975	0.9975	1.0000
6	0.9909	0.9909	1.0000
7	0.9972	0.9972	1.0000
8	0.9725	0.9725	1.0000
9	0.9780	0.9778	0.9998
10	0.9996	0.9995	1.0000
11	0.9617	0.9624	0.9994
12	0.9513	0.9462	0.9974
13	0.9489	0.9486	1.0000

Tableau 1-9 : Modal Assurance Criterion entre modes calculés, modes appropriés et modes corrigés, plancher de véhicule automobile

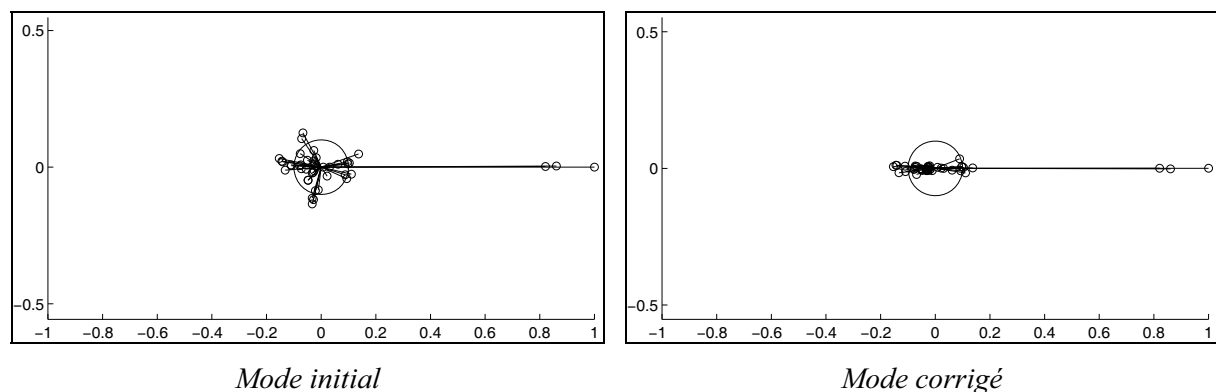


Figure 1-31 : bouquet de phase du mode 8, plancher de véhicule automobile

On constate une très grande homogénéité des résultats, ce qui montre comme pour le système simulé que la partie réelle de la réponse aux forces appropriées est bien proportionnelle au mode propre réel, même lorsque l'appropriation n'est pas satisfaisante.

1.5. Conclusion

La méthode d'appropriation du LMA a été mise en œuvre de deux façons différentes.

L'appropriation par le calcul s'effectue a posteriori sur des mesures relatives à plusieurs excitations indépendantes, et constitue une technique supplémentaire d'analyse modale.

Simple d'utilisation, elle est également **très rapide** même lorsque le nombre de capteurs et la bande fréquentielle sont importants.

Elle présente en outre l'avantage d'être **systématique**, les résultats dépendent donc très peu de l'utilisateur. Les seuls choix à son initiative sont la sélection des modes et la modification éventuelle des points d'interpolation.

Le paramètre k est un **excellent détecteur de modes** lorsque le nombre et le placement des excitateurs ont été bien choisis. Le fait qu'il soit calculé à partir des informations apportées par tous les capteurs peut néanmoins devenir un inconvénient lorsque la structure étudiée est peu instrumentée et présente des modes locaux. Dans ce cas, le recours à une technique de lissage de fonctions de transfert semble plus judicieux. Ces deux techniques d'analyse modale peuvent par ailleurs être couplées pour traiter des cas comme la présence de faibles non-linéarités [60].

Un dernier avantage de l'appropriation par le calcul est qu'elle fournit les modes propres du **système conservatif** associé à la structure. Ces modes peuvent ensuite directement être exploités dans une procédure de recalage de modèle. Les techniques de lissage donnant accès aux modes propres complexes du système dissipatif, on doit ensuite en extraire les modes propres réels. On présente dans le chapitre suivant de ce mémoire une nouvelle méthode permettant d'effectuer cette opération.

L'appropriation expérimentale permet de mesurer directement les modes propres réels en excitation sinus, s'affranchissant ainsi de toutes les erreurs induites par l'utilisation d'excitations aléatoires. En outre, le fait d'exciter la structure à amplitude constante est d'un grand intérêt vis-à-vis de ses éventuelles non-linéarités. Ces dernières ne sont certes pas prises en compte dans le modèle linéaire associé, mais celui-ci représente de façon simple le comportement dynamique de la structure pour un niveau d'amplitude donné et connu.

Les limitations technologiques du nombre et placement des excitateurs ne permettent pas toujours d'obtenir des réponses parfaitement en phase, notamment en présence de modes fortement couplés. Néanmoins, un post-traitement des mesures a montré que la partie réelle de la réponse était dans tous les cas **colinéaire** au mode approprié.

L'objectif principal de ce nouvel outil est son application aux techniques de mesure holographique. Le logiciel souple et convivial que nous avons développé a été installé au sein de l'entreprise PSA et des essais de mesure ont déjà eu lieu. D'autres études devraient bientôt se développer au LMA grâce à l'investissement très prochain dans une chaîne de mesure par interférométrie Speckle (ESPI).

Chapitre 2

Estimation des modes réels du système conservatif
associé à une structure à partir des modes
complexes du système dissipatif basée sur
l'appropriation

*Comprendre, c'est compliquer.
C'est enrichir en profondeur.
Lucien Febvre*

2.1. Introduction

L'étude du comportement dynamique d'une structure mécanique fait de nos jours largement appel aux modèles numériques de type éléments-finis. Plusieurs objectifs justifient cette démarche. D'abord la construction du modèle fiable d'une structure existante permet d'étudier les effets de modifications envisagées (matériaux, géométrie...) sans avoir recours à de nouveaux prototypes, donc avec des délais et des coûts moindres. Le modèle d'une pièce mécanique peut d'autre part être assemblé aux modèles des autres pièces d'une structure complexe afin d'en décrire le comportement global et de prévoir les modifications susceptibles de l'améliorer. Dans tous les cas, la validation du modèle initial est effectuée en confrontant ses caractéristiques modales à celles d'une structure réelle. On procède alors éventuellement à son recalage, qui consiste en l'optimisation de paramètres bien choisis en vue d'approcher au mieux les caractéristiques de la structure réelle.

La comparaison entre le modèle de calcul et la structure réelle n'est pas immédiate. En effet, le modèle construit est le plus souvent conservatif, c'est-à-dire qu'on n'y introduit pas de termes d'amortissement. Les caractéristiques modales qui en résultent sont donc des valeurs et vecteurs propres réels. Par contre, la plupart des techniques d'analyse modale employées pour extraire des mesures les paramètres modaux de la structure réelle fournissent les valeurs et vecteurs propres complexes du système dissipatif associé (SDA).

Deux alternatives se présentent alors : soit on cherche à relier directement les modes réels du modèle aux mesures sans avoir recours à l'analyse modale [29], soit on cherche à extraire à partir des modes complexes identifiés les modes réels du système conservatif associé à la structure réelle (SCA). La deuxième solution est la plus courante, et de nombreuses techniques ont vu le jour pour permettre ce "*passage des complexes aux réels*", dont aucune ne s'est réellement imposée.

Le cas des structures à amortissement proportionnel est traité par une méthode dite standard notamment décrite par Fillod dans [21].

Ibrahim [23] donne la première méthode basée sur la construction de matrices de masse et de raideur condensées. Niedbal [31] pose l'hypothèse que les modes complexes peuvent être représentés sur la base des modes réels, et en déduit une technique d'estimation de la matrice de projection. Zhang et Lallement [33] exploitent et comparent trois méthodes différentes, la première est extraite du principe d'Ibrahim, les deux autres reposent sur l'hypothèse de projection. Ces dernières présentent l'avantage de fournir non seulement les modes propres réels mais également la matrice d'amortissement généralisé. Signalons enfin la méthode de Wei et al. [32] qui consiste en l'identification des modes réels sur des réponses temporelles simulées à partir des modes complexes.

Récemment, Imregun et Ewins [26] ont montré que l'application d'une transformation globale commune à tous les modes complexes identifiés n'était pas satisfaisante en présence d'amortissement non-proportionnel, remettant en cause le principe de projection. Ils proposent une nouvelle technique basée sur la maximisation de la corrélation entre les modes réels et les modes complexes. Ahmadian et al. [19] ont démontré analytiquement que les modes réels satisfaisant ce critère étaient obtenus en prenant la partie réelle des modes complexes après

que ces derniers aient subi une rotation la maximisant. Cette idée a déjà été mise en œuvre par Kozànek [27] dans une technique estimant l'angle de rotation optimal et une mesure de la "complexité" des vecteurs propres complexes. Enfin, Balmès [20] propose une méthode originale basée sur une condensation des vecteurs propres complexes sur un nombre de degrés de liberté égal au nombre de modes considérés. Des pseudo-matrices de masse, raideur et amortissement en sont déduites, permettant d'estimer les vecteurs propres réels du SCA.

Une nouvelle méthode est ici proposée. Elle présente l'avantage de ne faire aucune hypothèse quant à la projection des modes complexes sur la base des modes réels. Elle permet par ailleurs d'estimer non seulement les modes propres réels mais également les valeurs propres correspondantes, c'est-à-dire les fréquences naturelles du système non-amorti qui peuvent être très différentes des fréquences extraites de façon standard des valeurs propres complexes [28]. Elle fournit enfin une estimation de la matrice complète des amortissements généralisés.

On présente successivement une description détaillée de la méthode, une illustration et validation des différentes étapes sur un cas-test simulé, une validation sur un cas-test expérimental et un exemple d'application à une structure industrielle.

2.2. Description de la méthode

2.2.1. Démarche

L'idée générale de cette méthode est similaire à celle de Wei et al. [32], à savoir identifier les valeurs et vecteurs propres réels du système conservatif sur des réponses simulées à partir des modes complexes du système dissipatif. Mais plutôt que de mener l'identification dans le domaine temporel, on met ici en œuvre une des techniques les plus fiables d'analyse modale dans le domaine fréquentiel : l'appropriation.

On peut d'ores-et-déjà remarquer que le nombre de modes identifiés étant limité, la simulation des FRF par synthèse modale ne prend pas en compte les résidus relatifs aux modes d'ordre supérieur, ce qui aura certainement une influence sur les modes situés à l'extrémité de la bande fréquentielle étudiée.

La démarche adoptée est représentée Figure 2-1 et suit les étapes suivantes :

- ❶ les valeurs propres réelles sont initialisées aux parties imaginaires des valeurs propres complexes,
- ❷ selon la stratégie choisie, on sélectionne une configuration optimale d'excitation pour tous les modes ou une par mode,
- ❸ les valeurs propres réelles sont estimées au voisinage de leur valeur initiale par une méthode itérative basée sur l'appropriation,
- ❹ si ces nouvelles valeurs sont éloignées des valeurs initiales, on recherche à nouveau la ou les configuration(s) d'excitation optimale(s), et on renouvelle l'estimation itérative des valeurs propres réelles,
- ❺ les bandes fréquentielles sont définies autour de chaque valeur propre réelle,

- ⑥ les FRF relativement aux configurations optimales sont calculées par superposition modale sur les bandes fréquentielles déterminées,
- ⑦ les vecteurs propres réels sont calculés par appropriation,
- ⑧ la matrice d'amortissement généralisé est estimée par une méthode des moindres carrés,
- ⑨ les vecteurs propres complexes sont reconstruits à partir des modes réels et de la matrice d'amortissement généralisé, puis comparés aux vecteurs propres complexes initiaux.

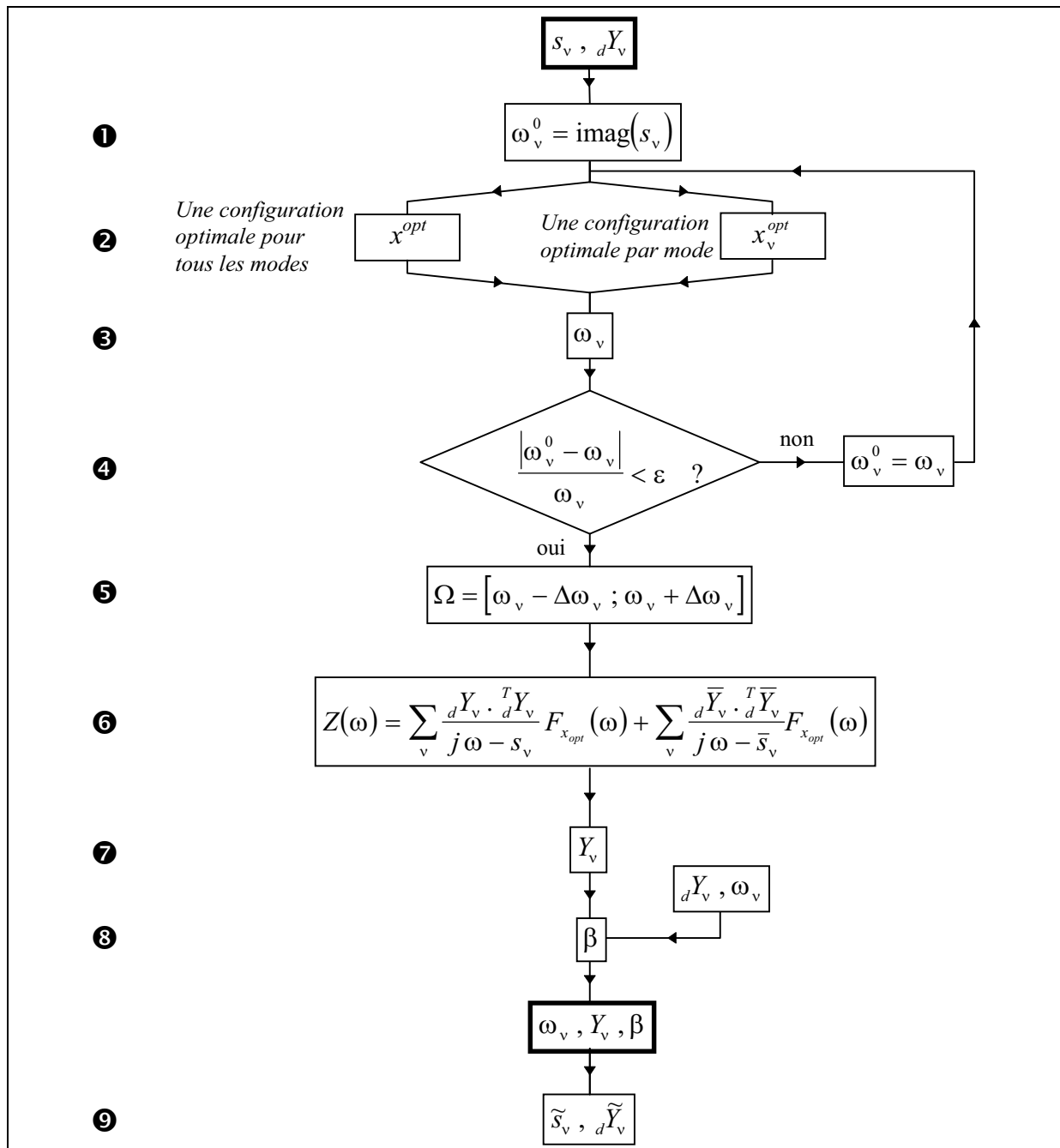


Figure 2-1 : architecture générale

Nous allons maintenant détailler le contenu de ces différentes étapes.

2.2.2. Recherche de configurations optimales d'excitation

On a vu dans le chapitre précédent que la qualité des résultats de l'appropriation dépendait fortement du nombre et du placement des excitateurs. S'agissant ici de calculer des réponses simulées, tous les ddl mesurés sont des excitateurs potentiels. Nous avons donc mis au point un algorithme de sélection de ddl excitateurs optimaux basé sur le critère de qualité d'appropriation δ .

Deux stratégies distinctes peuvent être adoptées.

2.2.2.1. Méthode a)

On cherche une configuration d'excitation unique $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ permettant d'approprier au mieux les m modes de la bande fréquentielle étudiée. L'algorithme représenté Figure 2-2 décrit les différentes étapes de la sélection.

2.2.2.2. Méthode b)

On cherche pour chaque mode v la configuration d'excitation $\text{Exc}_{\text{opt}}^v$ permettant de l'approprier au mieux. Cette sélection s'effectue donc mode par mode selon l'algorithme présenté Figure 2-3. Seules les étapes différant de la méthode précédente ont été explicitées. On note que le nombre d'excitateurs nécessaires pour satisfaire la condition sur la valeur maximale de δ n'est pas forcément le même pour tous les modes.

Remarque : ces deux techniques de sélection de ddl excitateurs reposent sur la même idée, à savoir qu'on augmente progressivement le nombre d'excitateurs en choisissant à chaque étape celui qui fournit la meilleure appropriation. Cela ne signifie pas que l'on a trouvé à l'issue de la sélection la **meilleure configuration possible**. Il faudrait en réalité pour un nombre d'excitateurs e donné rechercher parmi les C_c^e combinaisons possibles la configuration conduisant à la meilleure appropriation. Cela conduirait à un nombre de calculs d'appropriation **beaucoup trop important** (par exemple 4845 calculs pour sélectionner 4 excitateurs parmi 20 ddl). On pourrait alors opter pour une recherche basée sur des algorithmes plus sophistiqués, mais notre technique simple et rapide semble fournir des résultats suffisants.

Ces deux méthodes de sélection sont illustrées au paragraphe 2.3.1 par un exemple simulé.

2.2.3. Calcul itératif des fréquences propres

On constate fréquemment une certaine confusion entre les notions de fréquence naturelle et fréquence de résonance, respectivement relatives au système dissipatif et conservatif associés à une structure. Lallement et Inman [28] montrent clairement que dès que l'on s'éloigne d'un comportement à amortissement proportionnel, une différence significative apparaît entre ces deux grandeurs.

Le calcul des fréquences propres du SCA est ici mené mode par mode de manière itérative au voisinage des fréquences propres complexes du SDA en utilisant le paramètre k de résonance de phase. On cherche pour chaque mode la pulsation ω_v qui vérifie $k(\omega_v) < k_{\text{mini}}$ où k_{mini} est la tolérance pour la convergence de l'algorithme, par exemple 10^{-6} . Le déroulement général de cette recherche est présenté Figure 2-4, on détaille ensuite l'étape ❶ d'estimation de la pulsation propre réelle qui diffère selon l'itération.

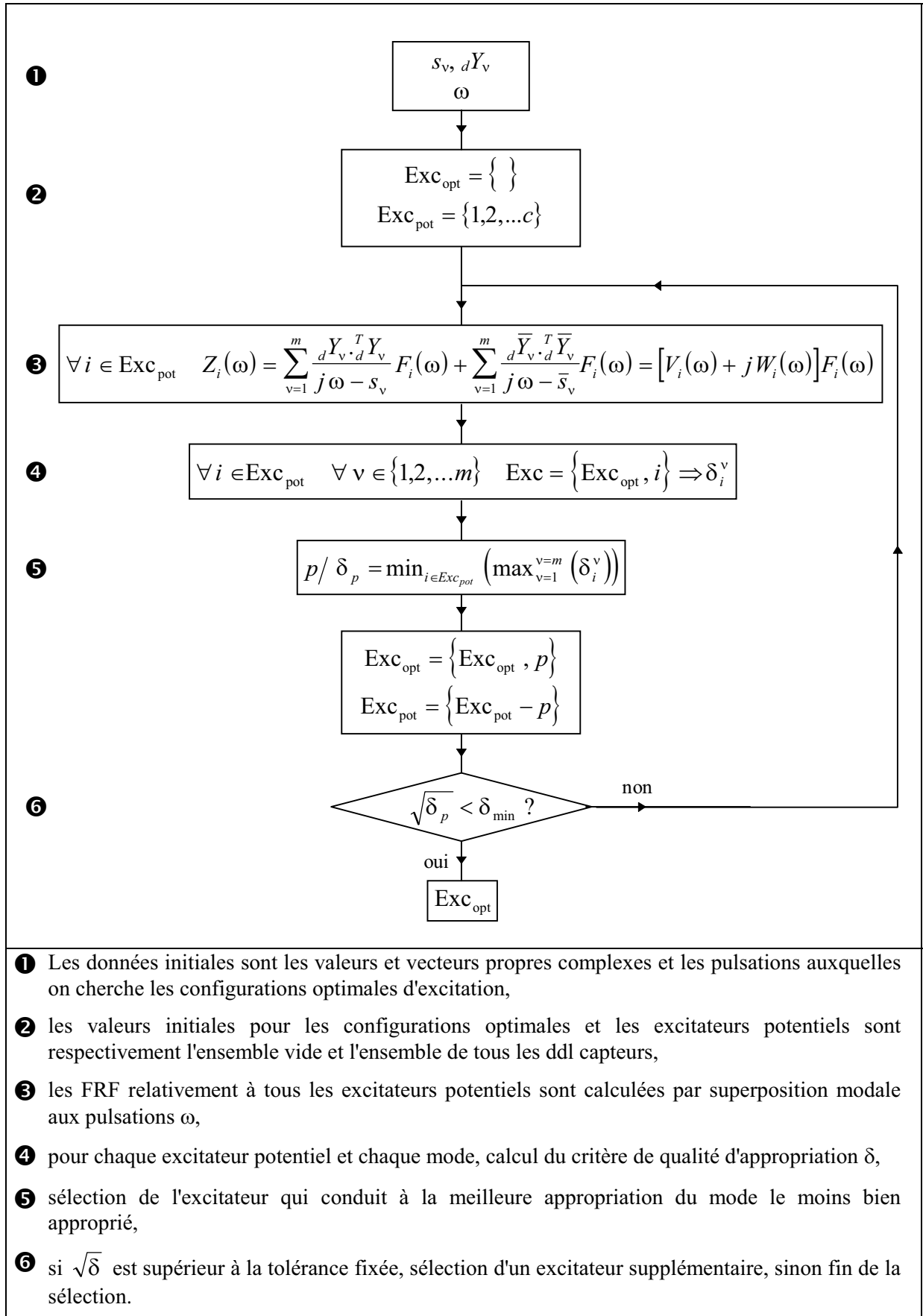


Figure 2-2 : sélection d'une configuration optimale d'excitation pour tous les modes

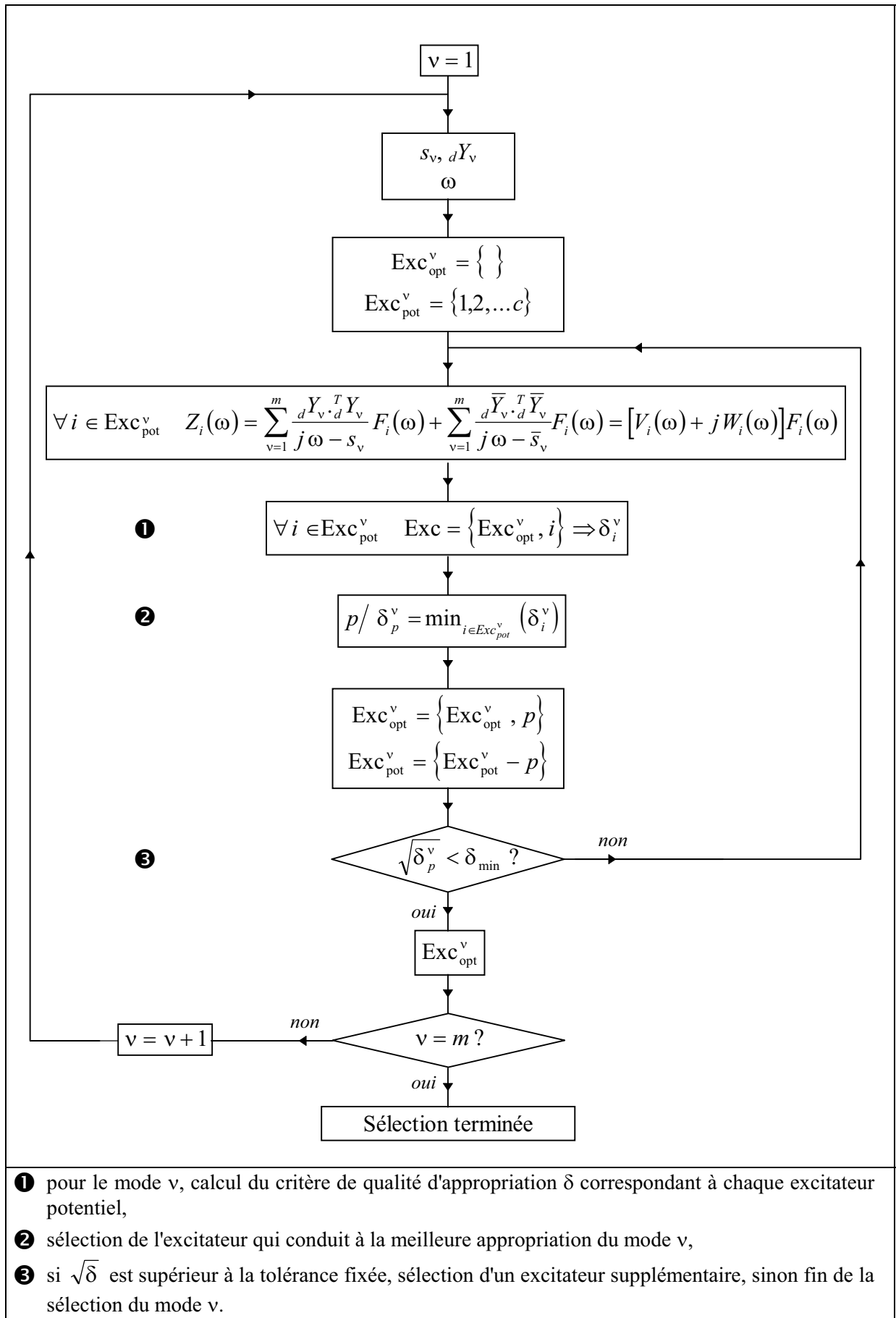


Figure 2-3 : sélection d'une configuration optimale d'excitation par mode

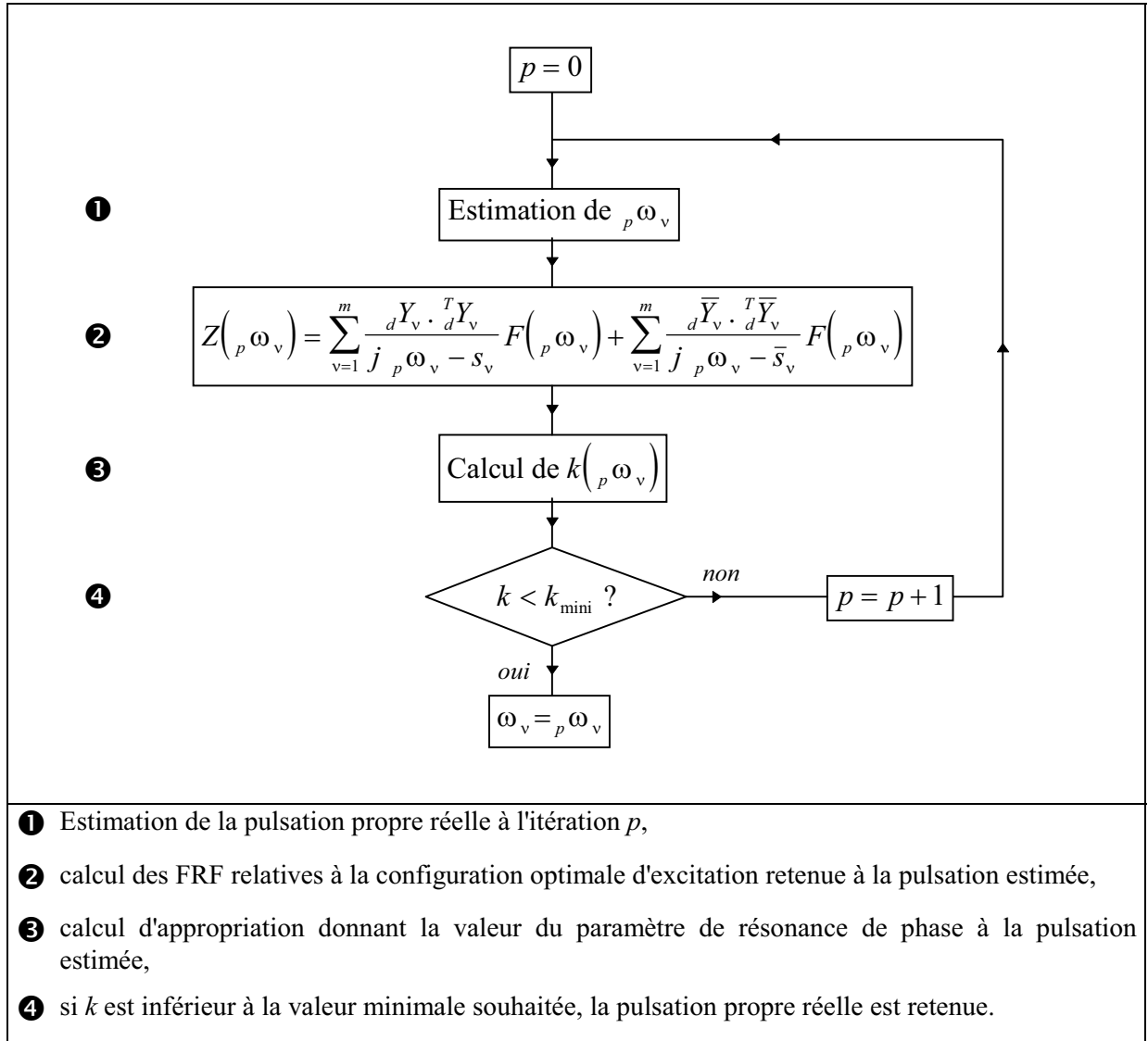


Figure 2-4 : calcul itératif de la pulsation propre réelle d'un mode

Détail de l'étape ❶ :

- $1^{\text{ère}}$ itération : la valeur initiale donnée à la pulsation propre réelle du mode v est la partie imaginaire de sa pulsation propre complexe :

$${}_0\omega_v = \text{imag}(s_v) \quad (2.1)$$

- $2^{\text{ème}}$ itération : après le calcul d'appropriation à la pulsation ${}_0\omega_v$, la seconde évaluation ${}_1\omega_v$ est extraite de la propriété (2.2) vérifiée si la matrice d'amortissement généralisé est diagonale :

$$k_0 = k({}_0\omega_v) = \frac{{}_0\omega_v^2 - {}_1\omega_v^2}{{}_0\omega_v \beta_{vv}} = \frac{{}_0\omega_v^2 - {}_1\omega_v^2}{{}_0\omega_v \cdot 2\varepsilon_{v1}\omega_v} \quad (2.2)$$

L'amortissement réduit ${}_0\varepsilon_v$ est estimé à partir de la pulsation propre complexe s_v par :

$${}_0\varepsilon_v = -\frac{\text{real}(s_v)}{\text{imag}(s_v)} \quad (2.3)$$

La résolution de l'équation du second degré (2.2) conduit alors à l'expression :

$${}_1\omega_v = \left[\left(1 + {}_0\varepsilon_v^2 \right)^{0.5} k_0^2 - {}_0\varepsilon_v k_0 \right] {}_0\omega_v \quad (2.4)$$

- *Itérations suivantes* : la valeur ${}_p\omega_v$ est estimée par interpolation linéaire de la variation de k en fonction de ω^2 décrite par les valeurs précédentes. Elle est donnée par l'intersection de la droite interpolée avec l'axe des abscisses.

Un exemple de calcul itératif est donné au paragraphe 2.3.2.

2.2.4. Correction des configurations optimales d'excitation

On a souligné le fait qu'en présence de termes extra-diagonaux importants dans la matrice d'amortissement généralisé, les pulsations propres réelles du SCA ω_v pouvaient différer notablement de la partie imaginaire des pulsations propres complexes du SDA ${}_0\omega_v = \text{imag}(s_v)$. Or la recherche des configurations optimales d'excitation a été effectuée aux pulsations ${}_0\omega_v$. Il convient donc de la renouveler si on constate effectivement un décalage important entre ω_v et ${}_0\omega_v$.

On renouvelle également dans ce cas la recherche itérative des pulsations propres réelles du SCA en utilisant les nouvelles configurations d'excitation. Les valeurs obtenues sont généralement très proches des valeurs précédentes.

2.2.5. Détermination des bandes fréquentielles

Pour déterminer la masse généralisée qui permet de normer un vecteur propre réel calculé, il est nécessaire d'effectuer le calcul d'appropriation sur une bande fréquentielle répartie de part et d'autre de sa fréquence propre.

Chaque bande fréquentielle est initialisée à une largeur de bande à -3dB. Dans le cas où des modes voisins sont très proches du mode considéré, la courbe du paramètre k peut être perturbée et engendrer une erreur sur l'estimation du coefficient d'amortissement. On effectue donc un test de proximité des bandes fréquentielles, et on réduit leur largeur en conséquence. Cette procédure est détaillée au paragraphe 2.3.3 sur un exemple simulé.

2.2.6. Calcul des modes réels

Après avoir synthétisé les FRF relatives aux configurations d'excitation retenues sur les bandes fréquentielles précédemment déterminées, on peut effectuer le calcul d'appropriation pour chaque mode v qui conduit à l'estimation des forces appropriées a_v . Les masses généralisées sont alors données par l'équation (2.5), et on en déduit le vecteur propre normé (2.6). On calcule enfin le terme d'amortissement diagonal β_{vv} par (2.7).

Pour plus de détails sur la provenance de ces relations et la signification des notations, on se reportera au paragraphe 1.2 du premier chapitre.

$$\mu_{vv} = -P_i(\omega_v) \frac{\partial k}{\partial \omega^2}(\omega_v) \quad (2.5)$$

$$Y_v = \frac{W(\omega_v) \cdot a_v}{\sqrt{\mu_{vv}}} \quad (2.6)$$

$$\beta_{vv} = \left[\omega_v \frac{\partial k}{\partial \omega^2}(\omega_v) \right]^{-1} \quad (2.7)$$

2.2.7. Estimation de l'amortissement généralisé

Disposant à présent des modes complexes initiaux et des modes réels calculés, on peut en déduire une estimation de la matrice d'amortissement généralisé.

Le calcul des termes extra-diagonaux de la matrice β n'a de sens que si des modes ont des fréquences modales proches. On considère généralement que deux modes sont couplés d'un point de vue fréquentiel lorsque la distance qui sépare leurs fréquences modales est inférieure au triple de la largeur de bande à -3dB du mode le plus amorti. On constate en réalité qu'au-delà du double de la largeur de bande à -3dB, les termes extra-diagonaux de la matrice d'amortissement généralisé n'ont quasiment aucune influence sur les réponses.

On distingue donc deux cas :

- on définit pour chaque mode la bande centrée sur sa fréquence propre réelle de largeur le double de la largeur de bande à -3dB,
- si les bandes de deux modes adjacents ne se recouvrent pas, on conserve uniquement le terme diagonal β_{vv} précédemment calculé,
- si les bandes de plusieurs modes se recouvrent, on calcule la sous-matrice d'amortissement généralisé par la méthode décrite ci-dessous.

Considérons un sous-groupe de m_1 modes de fréquences proches, ${}_dY_1$ les modes complexes et Y_1 les modes réels correspondants. L'estimation de la sous-matrice d'amortissement généralisé associée à ces modes est basée sur la projection de ${}_dY_1$ sur Y_1 . On a déjà cité Imregun et Ewins [26] qui remettent en cause ce principe de projection. On l'utilisera néanmoins ici, sachant que le calcul de β n'est utilisé que pour reconstruire les modes complexes et vérifier ainsi la cohérence des résultats, mais qu'il n'a aucune influence sur les modes réels calculés.

Notons Q la matrice de projection associée aux m_1 modes concernés, de taille (m_1, m_1) , déterminée par moindres carrés :

$${}_dY_1 = Y_1 \cdot Q \quad (2.8)$$

L'équation d'équilibre (2.9) donne par transformation modale la relation (2.10) où les grandeurs affectées de l'indice 1 sont réduites à leurs composantes relatives aux modes sélectionnés.

$$M_1 {}_dY_1 S_1^2 + B_1 {}_dY_1 S_1 + K_1 {}_dY_1 = 0 \quad (2.9)$$

$$Q S_1^2 + \beta_1 Q S_1 + \Lambda_1 Q = 0 \quad (2.10)$$

On cherche donc la sous-matrice d'amortissement β_1 qui vérifie :

$$\beta_1 Q S_1 = -Q S_1^2 - \Lambda_1 Q \quad (2.11)$$

Afin d'obtenir des résultats réels, séparons partie réelle et partie imaginaire :

$$S_1 = S_r + j S_i \quad Q = Q_r + j Q_i \quad (2.12)$$

on obtient alors :

$$\begin{cases} \beta_1 A = \gamma \\ \beta_1 A' = \gamma' \end{cases} \quad (2.13)$$

avec :

$$\begin{cases} A = Q_r S_r - Q_i S_i \\ A' = Q_r S_i + Q_i S_r \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \gamma = -Q_r (\Lambda_1 + S_r^2 - S_i^2) + 2 Q_i S_r S_i \\ \gamma' = -Q_i (\Lambda_1 + S_r^2 - S_i^2) - 2 Q_r S_r S_i \end{cases} \quad (2.15)$$

Les deux relations (2.13) peuvent être regroupées dans un seul système linéaire :

$$\begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} [\beta_1] = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Une dernière transformation doit être appliquée à ce système pour conduire à une estimation symétrique de l'amortissement généralisé. Notons $\hat{\beta}_1$ le vecteur des termes de la matrice β_1 pleine, $\tilde{\beta}_1$ le vecteur des termes de la matrice triangulaire supérieure et Φ la matrice de passage de $\tilde{\beta}_1$ vers $\hat{\beta}_1$ (2.18). En définissant \tilde{A} et $\tilde{\gamma}$ de la forme (2.19), on est ramené à la résolution du système linéaire (2.20). Ce système surdéterminé comporte $2m_1^2$ équations pour $m_1(m_1 + 1)/2$ inconnues, sa résolution par une méthode aux moindres carrés fournit la valeur de β_1 , matrice réelle symétrique.

On procède finalement à l'assemblage des sous-matrices pour aboutir à la matrice d'amortissement généralisé complète β .

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m_1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m_1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta_{1m_1} & \cdots & \cdots & \beta_{m_1 m_1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\hat{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1m_1} \\ \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{2m_1} \\ \vdots \\ \beta_{1m_1} \\ \beta_{2m_1} \\ \vdots \\ \beta_{m_1m_1} \end{bmatrix} \quad \tilde{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1m_1} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{2m_1} \\ \vdots \\ \beta_{m_1m_1} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^T A \\ {}^T A' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} {}^T A \\ {}^T A' \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} {}^T A \\ {}^T A' \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} {}^T \gamma \\ {}^T \gamma' \\ {}^T \gamma \\ {}^T \gamma' \\ \vdots \\ {}^T \gamma \\ {}^T \gamma' \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\tilde{A} \Phi \tilde{\beta}_1 = \tilde{\gamma} \quad (2.20)$$

2.2.8. Reconstruction des modes complexes

Afin de valider l'estimation des modes réels et de la matrice d'amortissement généralisé, on reconstruit les valeurs et vecteurs propres complexes. L'équation d'équilibre (2.10) relative au mode v peut s'écrire sous la forme matricielle (2.21).

$$\left\{ \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & E_m \end{bmatrix} - s_v \begin{bmatrix} -\beta & -E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} Q_v \\ s_v Q_v \end{bmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

La résolution de ce problème aux valeurs propres classique conduit à une nouvelle estimation de la matrice spectrale complexe \tilde{S} et de la matrice de projection \tilde{Q} . Cette dernière est normée respectivement à la relation (2.22).

$${}^T \tilde{Q} \beta \tilde{Q} + \tilde{S} {}^T \tilde{Q} \tilde{Q} + {}^T \tilde{Q} \tilde{Q} \tilde{S} = E_m \quad (2.22)$$

On obtient enfin les modes complexes reconstruits :

$${}_d \tilde{Y} = Y \tilde{Q} \quad (2.23)$$

2.2.9. Mise en oeuvre

Cette nouvelle technique d'extraction des valeurs et vecteurs propres réels du SCA à partir des valeurs et vecteurs propres complexes du SDA a été mise en oeuvre en utilisant le logiciel Matlab.

Les seules données requises sont les pulsations et modes complexes. On peut choisir l'une ou l'autre des deux méthodes de sélection d'excitateurs fictifs. Le calcul est ensuite entièrement automatique, il fournit les pulsations et modes réels, la matrice d'amortissement généralisé ainsi que les vecteurs complexes reconstruits. Il propose également de les comparer aux vecteurs complexes initiaux afin de vérifier la cohérence des calculs.

2.3. Validation de la méthode sur un cas-test simulé

Afin de quantifier les performances de cette méthode, nous l'avons d'abord appliquée à un système simulé à 8 ddl correspondant à une situation relativement sévère, plusieurs modes étant couplés par l'amortissement. Il s'agit d'un cas-test similaire à celui du paragraphe 1.3.2 , on donne ci-dessous les fréquences propres et la matrice d'amortissement imposées.

$$f = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 32 \\ 40 \\ 42 \\ 44 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ Hz} \quad \beta = \begin{bmatrix} 10 & & & & & & & \\ & 10 & & & & & & \\ & & 10 & 12 & & & & \\ & & & 12 & 10 & & & \\ & & & & & 10 & 12 & 12 \\ & & & & & & 12 & 10 & 12 \\ & & & & & & & 12 & 12 & 10 \\ & & & & & & & & & 10 \end{bmatrix}$$

Nous allons dans un premier temps utiliser ce modèle pour illustrer les différentes étapes de notre technique, puis nous donnerons les résultats numériques obtenus.

2.3.1. Configurations optimales d'excitation

- *Méthode a)*

La sélection d'une configuration optimale d'excitation pour approprier au mieux tous les modes de la bande fréquentielle étudiée s'effectue sur le principe suivant : on cherche le ddl qui conduit à la meilleure appropriation du mode le moins bien approprié (voir étape ⑤ Figure 2-2). On montre Figure 2-5 l'évolution en fonction du nombre d'excitateurs retenus du critère :

$$\sqrt{\delta_{\min}} = \sqrt{\min_{i \in Exc_{por}} \left(\max_{v=1}^{v=m} (\delta_i^v) \right)} \quad (2.24)$$

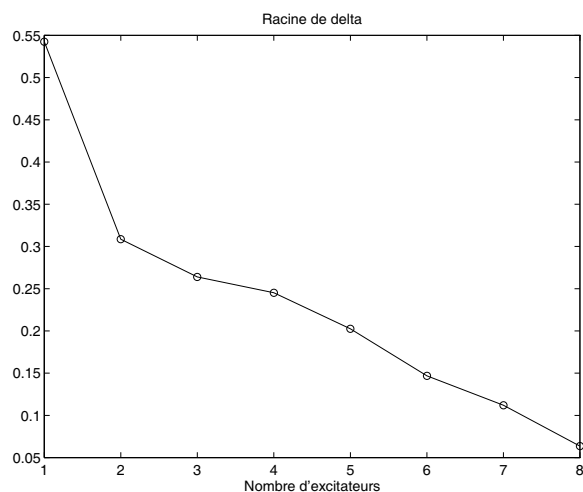


Figure 2-5 : évolution de $\sqrt{\delta_{\min}}$ en fonction du nombre d'excitateurs, fréquences initiales

Ce critère donne la proportion de réponse résiduelle **en phase avec l'excitation** (voir sa définition (1.3)). Sa décroissance est relativement lente, et on doit sélectionner les 8 degrés de liberté pour parvenir à une valeur inférieure à 10 %. Cela est principalement dû au fait que cette première sélection est effectuée aux **pulsations approchées** $\omega_v = \text{imag}(s_v)$.

L'étape suivante est le calcul itératif des pulsations propres réelles du SCA. Lorsqu'on constate un écart important entre ces pulsations et les valeurs approchées précédentes (par exemple de plus de 1 %), on effectue une **nouvelle sélection** de la configuration optimale d'excitation aux pulsations propres calculées. Le détail en est donné dans les tableaux suivants.

Chaque tableau représente la sélection d'un exciteur supplémentaire. On a fait figurer pour chaque exciteur potentiel le critère de qualité d'appropriation maximum correspondant au **mode le moins bien approprié**. On détecte l'exciteur donnant la valeur **la plus petite**, et on renouvelle le calcul du critère en ajoutant ce ddl exciteur.

La figure ci-dessous montre l'évolution du critère $\sqrt{\delta_{\min}}$ pour cette nouvelle sélection. La décroissance est nettement plus rapide, et 5 exciters suffisent à obtenir un critère inférieur à 10 %.

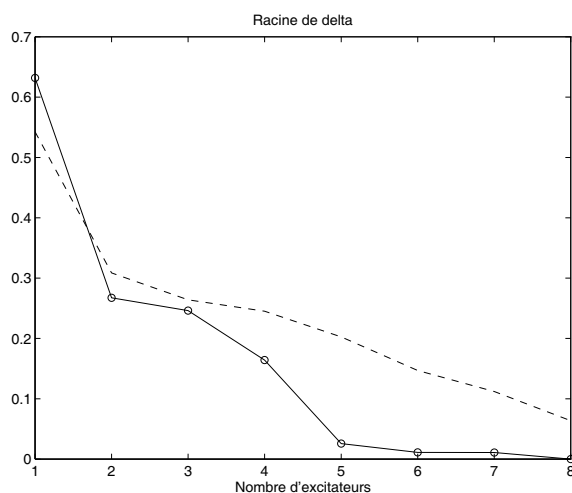


Figure 2-6 : évolution de $\sqrt{\delta_{\min}}$ en fonction du nombre d'excitateurs, (- -) fréquences initiales, (o) fréquences recalculées

		Excitateurs potentiels							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Modes	1								
	2				0.7581				
	3	0.7786							
	4					0.8748			0.8180
	5								
	6						0.9824		
	7		0.9752	0.9940				0.6318	
	8								

Tableau 2-1 : sélection du premier ddl exciteur

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6				0.3936				
7		0.5247	0.5263			0.5666		0.5222
8	0.2559				0.6599			

Tableau 2-2 : sélection du deuxième ddl exciteur

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6				0.2642		0.2600		
7		0.2669			0.4740			0.3922
8			0.2462					

Tableau 2-3 : sélection du troisième ddl exciteur

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3						0.1641		
4								
5								
6				0.2191				
7					0.3546			0.3909
8		0.2433						

Tableau 2-4 : sélection du quatrième ddl exciteur

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4		0.0995			0.0460			0.0384
5								
6								
7								
8				0.0229				

Tableau 2-5 : sélection du cinquième ddl exciteur

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3					0.0207			0.0203
4								
5								
6								
7		0.0111						
8								

Tableau 2-6 : sélection du sixième ddl exciteur

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7					0.0110			0.0111
8								

Tableau 2-7 : sélection du septième ddl exciteur

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								0.0000
6								
7								
8								

Tableau 2-8 : sélection du huitième ddl exciteur

Dans ce cas, la configuration optimale retenue pour une valeur du critère de qualité d'appropriation inférieure à 10 % est la suivante :

7	1	3	6	4
---	---	---	---	---

Tableau 2-9 : configuration optimale d'excitation, fréquences recalculées

• Méthode b)

La sélection d'une configuration optimale par mode est analogue à celle de la méthode a), mais elle s'effectue successivement pour chaque mode. On donne dans les tableaux suivants les configurations retenues aux pulsations approchées pour une valeur du critère inférieure à 10 %, puis inférieure à 20 %.

Mode	Configuration	$\sqrt{\delta^v}$
1	8 5	0.0093
2	3 2	0.034
3	4 8 7 6 1 3 5	0.0865
4	2 1 7 3 8 6 4 5	0.1224
5	1 6 5 3 4 8 7	0.038
6	5 4 3 6 1	0.0176
7	4 3 5 8 7 1 6	0.0401
8	6 1	0.0456

Tableau 2-10 : configurations optimales d'excitation pour $\sqrt{\delta^v} < 10\%$, fréquences initiales

Mode	Configuration	$\sqrt{\delta^v}$
1	8 5	0.0093
2	3 2	0.034
3	4 8	0.0865
4	2 1 7 3 8	0.1889
5	1 6 5 3	0.1731
6	5 4	0.1919
7	4 3 5 8 7	0.1881
8	6 1	0.0456

Tableau 2-11 : configurations optimales d'excitation pour $\sqrt{\delta^v} < 20\%$, fréquences initiales

Là encore, on constate que le fait d'effectuer la sélection à des pulsations approchées rend l'appropriation difficile, et demande un grand nombre d'excitateurs pour obtenir de faibles valeurs du critère de qualité.

Par contre, si l'on renouvelle la sélection après avoir calculé les pulsations propres réelles à l'aide des configurations du Tableau 2-11, on obtient les résultats donnés dans le Tableau 2-12.

Quatre excitateurs suffisent maintenant pour obtenir pour tous les modes un critère inférieur à 10 %.

Mode	Configuration	$\sqrt{\delta^v}$
1	8 5	0.0095
2	3 2	0.0357
3	2 5	0.0675
4	2 5	0.0693
5	1 3 6	0.0147
6	1 5 6 3	0.0226
7	4 1 5 6	0.0907
8	6 1	0.0464

Tableau 2-12 : configurations optimales d'excitation pour $\sqrt{\delta^v} < 10\%$, fréquences recalculées

- Conclusion

Cet exemple de sélection de configurations optimales d'excitation montre que la fréquence à laquelle cette sélection est effectuée a une grande influence sur le résultat. Lorsque la matrice d'amortissement généralisé est diagonale, les pulsations approchées extraites des pulsations propres complexes sont très proches des pulsations propres réelles et la sélection peut être opérée directement. En revanche, lorsque l'on soupçonne la présence d'amortissement extra-diagonal important, il est nécessaire d'effectuer la sélection en deux passages. La première sélection ayant pour objectif de mieux estimer les pulsations propres réelles, elle peut être effectuée avec un critère de qualité minimum de l'ordre de 20 %. La sélection finale calculée à des pulsations très proches des pulsations propres réelles peut ensuite être effectuée avec un critère plus exigeant, par exemple de 10 %.

2.3.2. Calcul itératif des fréquences propres

On donne ci-dessous à titre d'exemple le détail du calcul itératif de la fréquence propre réelle du mode 3 du système simulé à 8 ddl dans le cas où on a choisi une seule configuration optimale d'excitation pour tous les modes. Ce calcul a convergé en 10 itérations vers une valeur conduisant à un paramètre k inférieur à 10^{-6} .

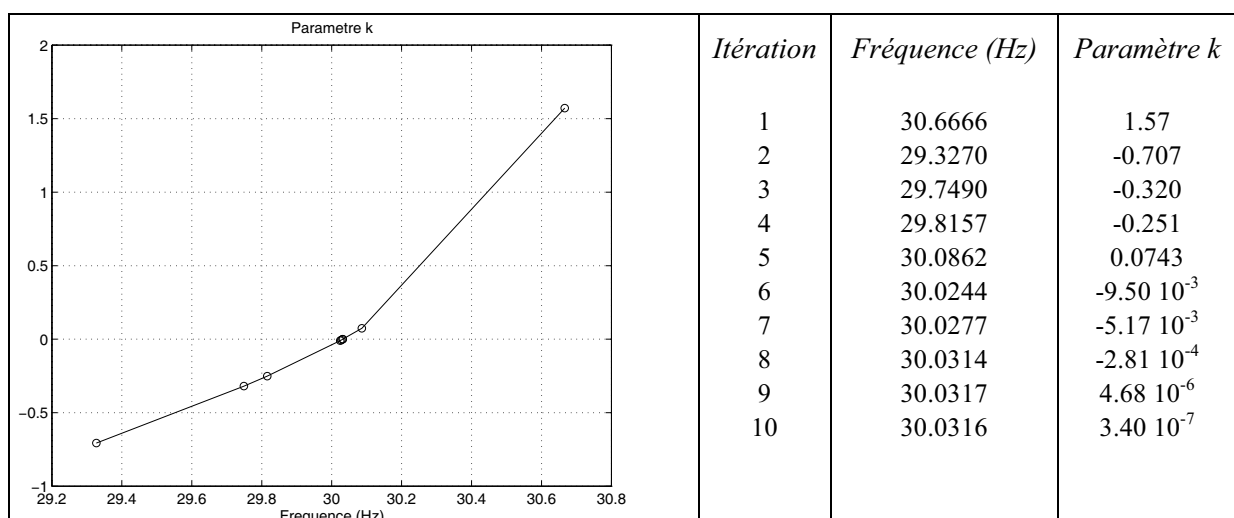


Figure 2-7 : calcul itératif de la fréquence propre réelle du mode 3

Il nous a paru également intéressant d'observer l'influence du nombre d'excitateurs retenus sur la précision de la fréquence calculée. On a donc effectué le calcul itératif des 8 fréquences propres en incrémentant le nombre d'excitateurs de 1 à 8 dans l'ordre donné par la sélection optimale décrite en 2.3.1.

Pour chaque mode v , on définit l'erreur sur la fréquence calculée f_v^{cal} par (2.25).

$$\Delta f_v = \frac{|f_v^{cal} - f_v|}{f_v} \quad (2.25)$$

On caractérise ensuite pour un nombre d'excitateurs donné l'erreur globale sur toutes les fréquences calculées par la moyenne Δf_{moy} et la valeur maximale Δf_{max} des erreurs relatives à chaque mode. Les valeurs obtenues sont présentées Figure 2-8.

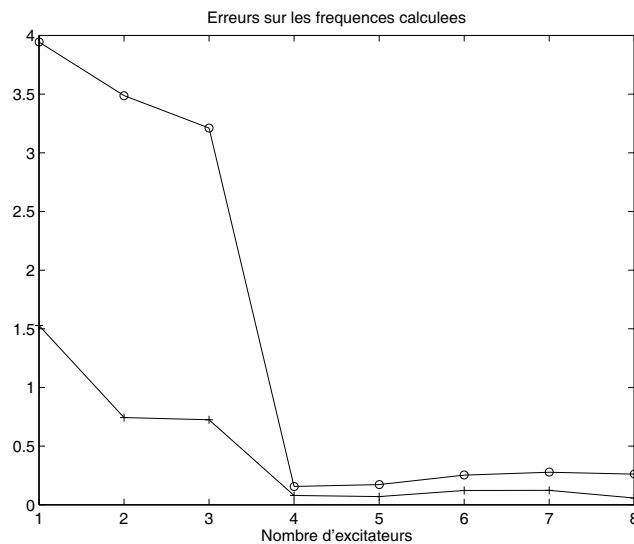


Figure 2-8 : erreurs maximale Δf_{max} (o) et moyenne Δf_{moy} (+) en % en fonction du nombre d'excitateurs

On constate que l'augmentation du nombre d'excitateurs conduit dans un premier temps à une nette diminution de l'erreur d'estimation des fréquences propres, mais qu'au-delà d'un nombre critique (ici 4), la précision des fréquences calculées ne s'améliore plus avec le nombre d'excitateurs.

2.3.3. Détermination des bandes fréquentielles

Le calcul d'appropriation permettant de déterminer les modes propres réels doit être effectué pour chaque mode sur une bande fréquentielle répartie de part et d'autre de la fréquence propre calculée. En effet, la pente du paramètre k en fonction de ω^2 donne une estimation du terme diagonal d'amortissement généralisé, et le minimum de la partie imaginaire de la puissance complexe conduit à la masse généralisée qui norme le vecteur propre (voir (1.12)).

On doit par conséquent choisir des bandes fréquentielles **suffisamment étroites** pour éviter les interférences avec les modes voisins, et **suffisamment larges** pour bien représenter le comportement local. On a donc apporté un soin particulier au cas de modes couplés d'un point de vue fréquentiel.

Comme nous l'avons déjà signalé, deux modes sont considérés couplés d'un point de vue fréquentiel lorsque la distance qui sépare leurs fréquences modales est inférieure au triple de la largeur de bande à -3dB du mode le plus amorti.

Les largeurs initiales des bandes fréquentielles sélectionnées sont égales aux largeurs de bande à -3dB. On cherche ensuite à respecter le critère suivant : quels que soient les modes adjacents considérés, les bandes centrées sur les fréquences modales, de largeur égale au **triple** des bandes sélectionnées **ne doivent pas se recouvrir**.

Pour mieux comprendre la signification de ce critère, observons trois cas de figure sur le cas simple de deux modes proches.

La Figure 2-9 représente le cas où deux modes adjacents ne sont pas couplés. On a représenté à gauche les largeurs de bande à -3dB par des rectangles, et les bandes triples par des traits continus. A droite, les largeurs des bandes sélectionnées (rectangles) ne sont pas modifiées de leur valeur initiale.

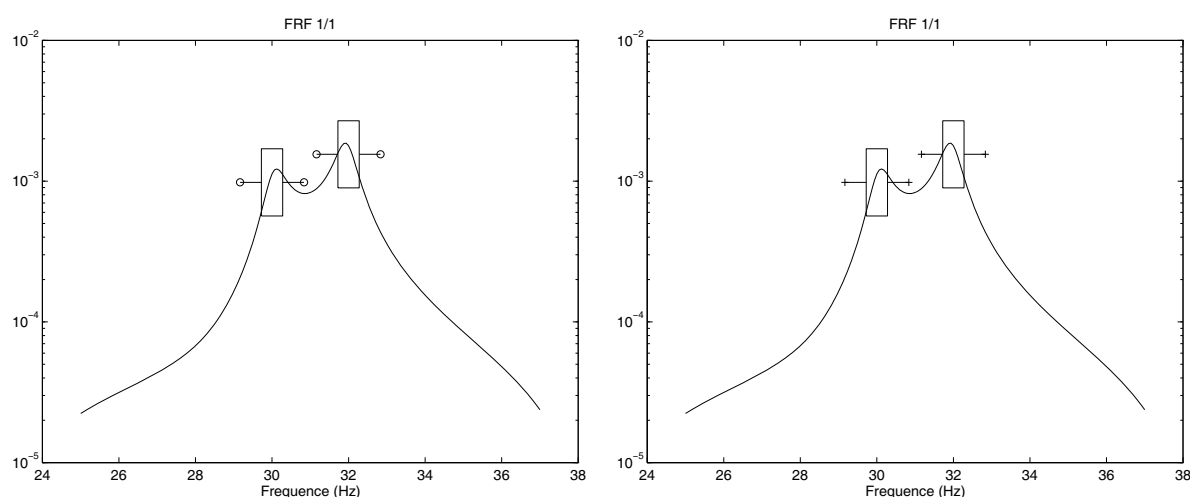


Figure 2-9 : sélection des bandes fréquentielles : modes non-couplés

Sur la Figure 2-10, les deux modes sont faiblement couplés. Les bandes triples se recouvrent, mais les bandes à -3dB sont séparées. On a néanmoins réduit les bandes sélectionnées en respectant le critère précédemment énoncé.

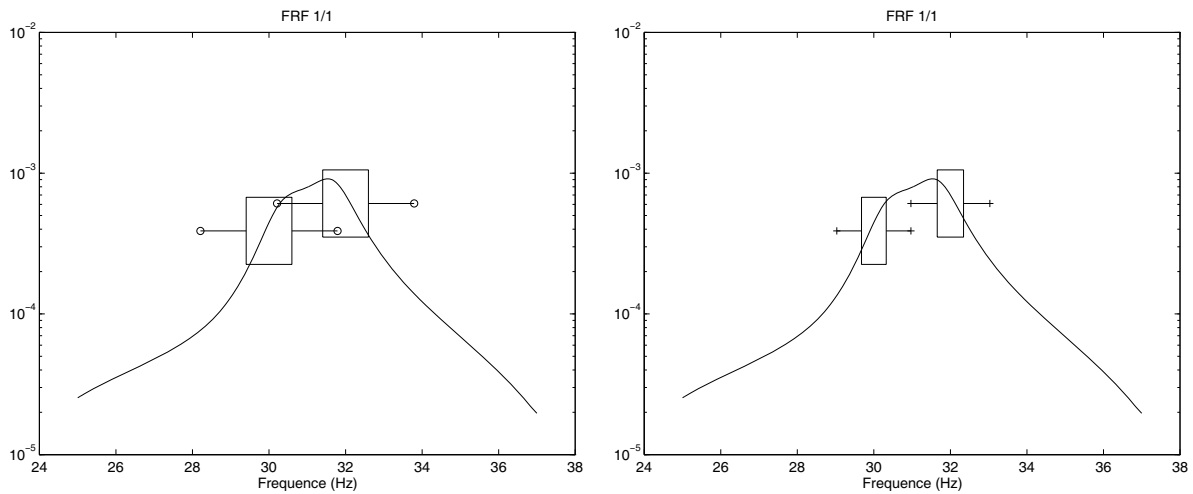


Figure 2-10 : sélection des bandes fréquentielles : modes faiblement couplés

Enfin, la Figure 2-11 montre le cas de deux modes fortement couplés, les bandes à -3dB se recouvrant. On a fortement réduit la largeur des bandes sélectionnées, de façon à éviter toute interférence dans le calcul du paramètre k et de la puissance complexe.

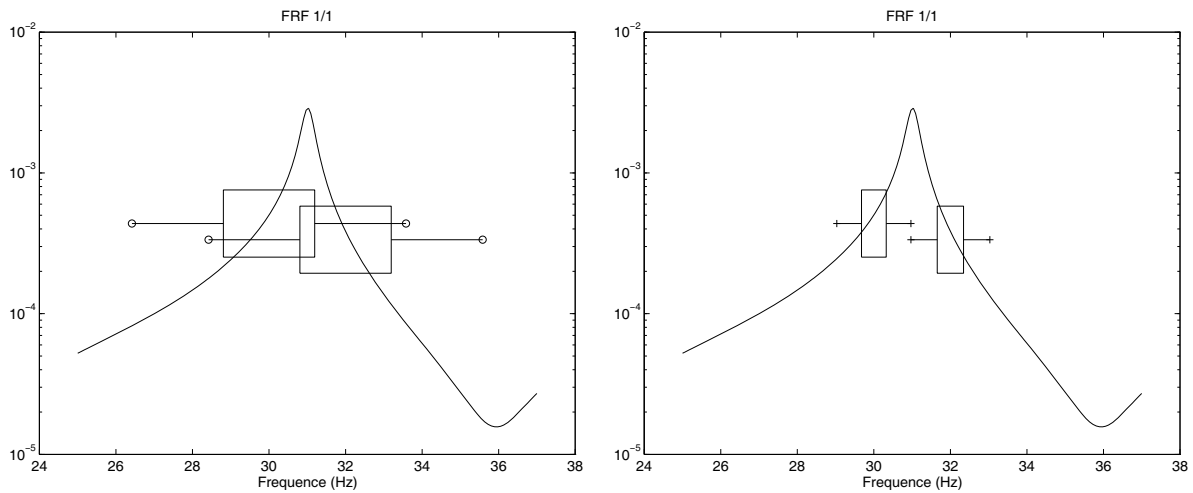


Figure 2-11 : sélection des bandes fréquentielles : modes fortement couplés

Illustrons l'effet de ce critère de sélection en observant les courbes du paramètre k obtenues pour le système simulé à 8 ddl.

Les bandes initiales sont représentées ci-dessous, elles correspondent aux bandes à -3dB estimées à partir du coefficient d'amortissement extrait des pulsations propres complexes par la relation (2.3). On montre Figure 2-13 les évolutions du paramètre k sur ces bandes. On constate que la courbe du mode 6 est fortement altérée par la présence des deux modes adjacents car le coefficient d'amortissement correspondant est largement surestimé.

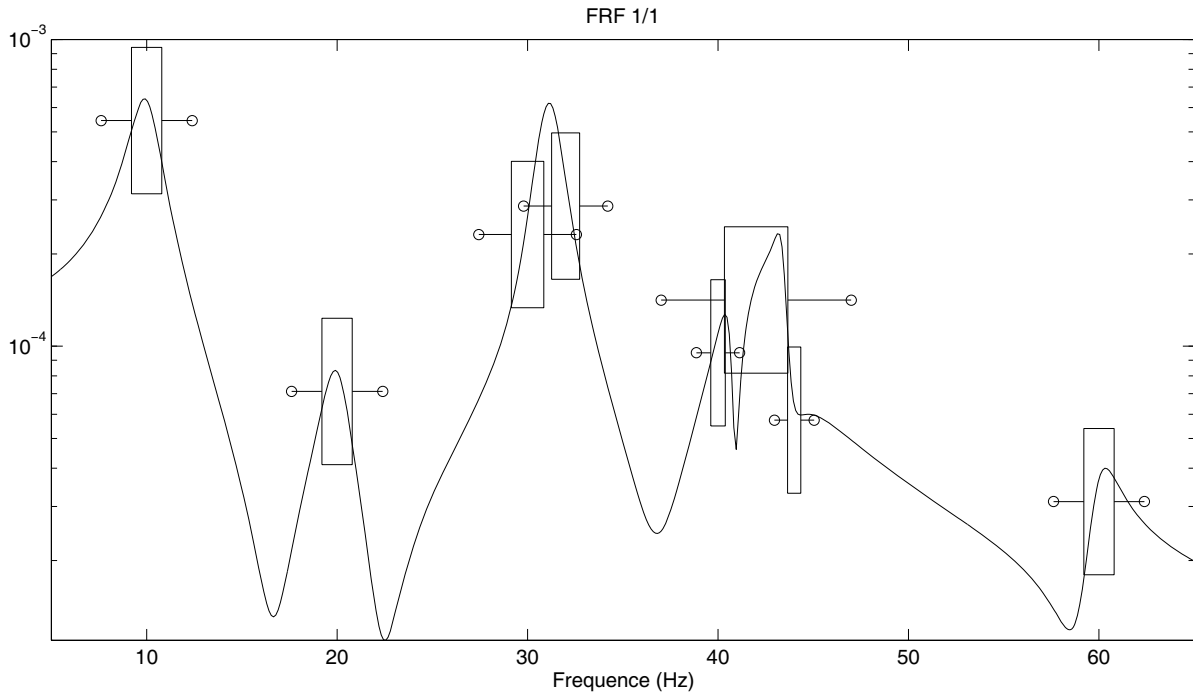


Figure 2-12 : bandes fréquentielles initiales

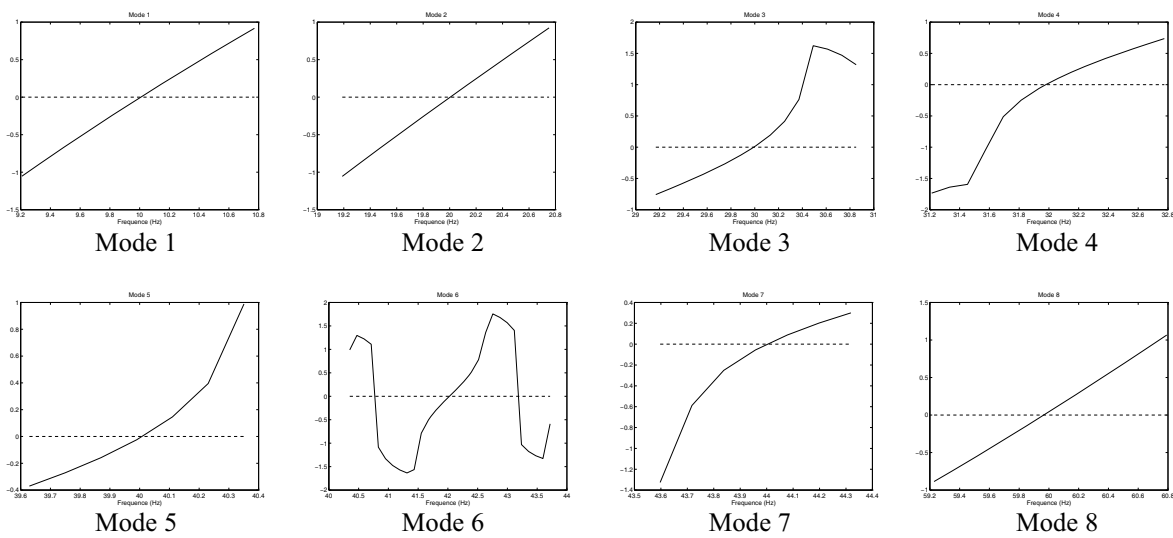


Figure 2-13 : évolution du paramètre k sur les bandes initiales

On présente Figure 2-14 les nouvelles bandes fréquentielles, et Figure 2-15 les évolutions du paramètre k qui en résultent. On a maintenant pour tous les modes une évolution stable du paramètre k .

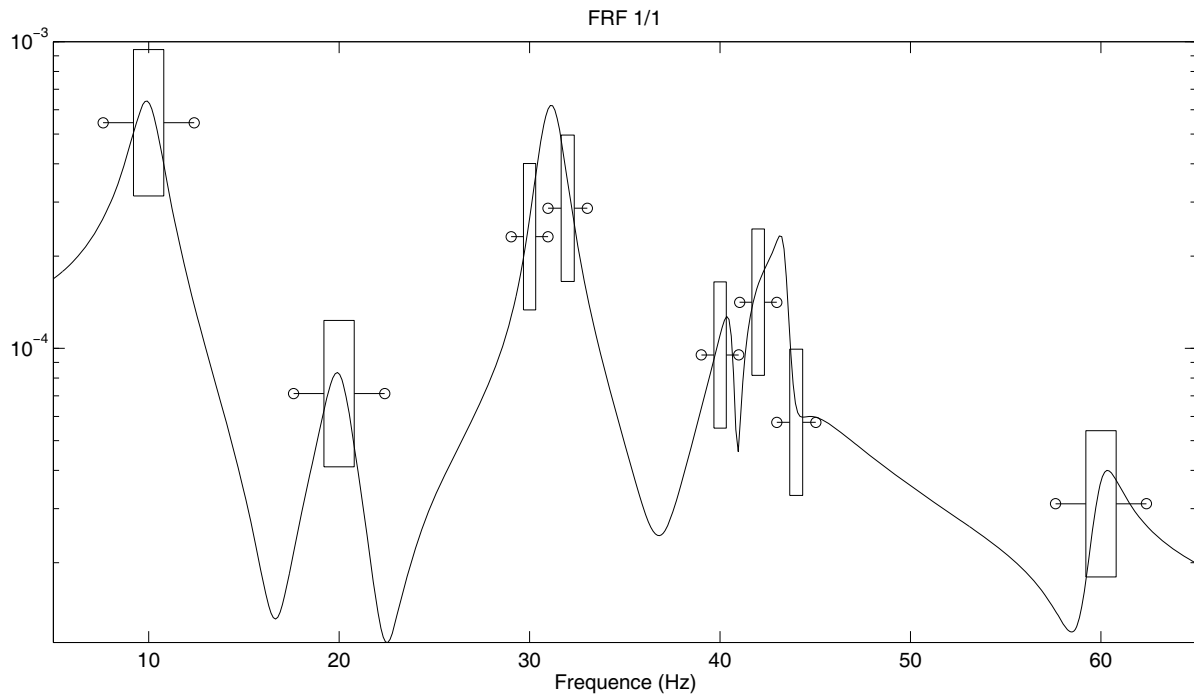


Figure 2-14 : bandes fréquentielles finales

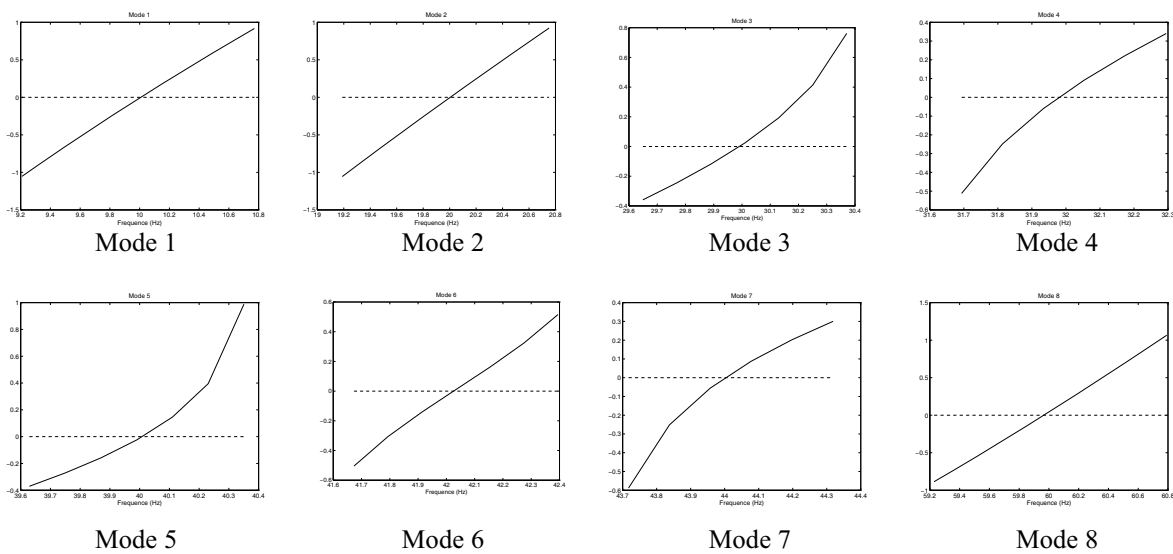


Figure 2-15 : évolution du paramètre k sur les bandes finales

Précisons enfin que l'interpolation linéaire de l'évolution du paramètre k en fonction de ω^2 est calculée en ne prenant en compte que la partie centrale de ces fenêtres fréquentielles.

2.3.4. Calcul des modes réels

On montre à titre d'exemple l'interpolation linéaire du paramètre k et la puissance complexe relatives au mode 6 du système simulé. La bande fréquentielle retenue permet bien de détecter le minimum local de la partie imaginaire de la puissance complexe et d'estimer la pente du paramètre k .

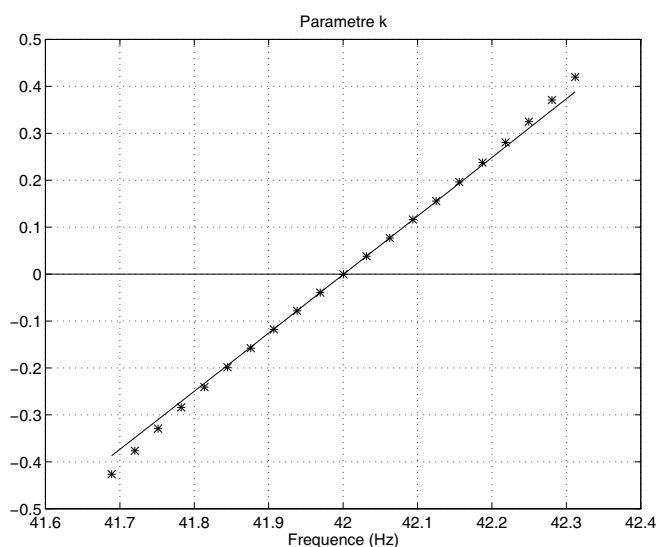


Figure 2-16 : interpolation linéaire du paramètre k , mode 6 du système simulé à 8 ddl

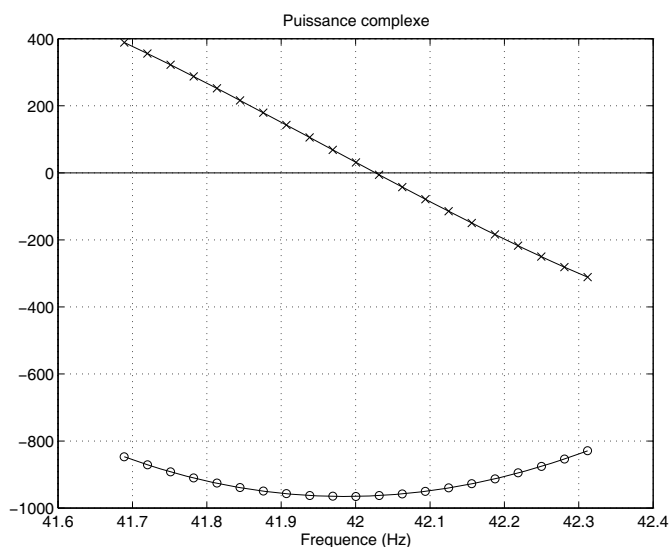


Figure 2-17 : parties réelle (\times) et imaginaire (\circ) de la puissance complexe, mode 6 du système simulé à 8 ddl

2.3.5. Résultats numériques

La méthode exposée a été appliquée au système simulé à 8 ddl en utilisant les deux stratégies de sélection de configurations optimales d'excitation notées méthode a) et b). Les résultats correspondants sont respectivement indicés par a et b . On présente également à titre de comparaison les résultats issus de la méthode dite "standard", extraits des modes complexes par les relations (2.26) et (2.27). Ces résultats sont indicés par 0.

$$\omega_{v_0} = \text{imag}(s_v) \quad (2.26)$$

$$Y_{v_0} = \text{real}(\sqrt{2} j \omega_{v_0} \cdot {}_d Y_v) \quad (2.27)$$

2.3.5.1. Modes propres réels

Le tableau ci-dessous donne les fréquences propres réelles exactes f_{exc} , celles estimées par les méthodes proposées $a)$ et $b)$, ainsi que celles fournies par la méthode standard f_0 . On y trouve également les erreurs relativement aux valeurs exactes (voir (2.25)).

Mode	Fréquences propres réelles (Hz)				Erreurs relatives (%)		
	f_{exc}	f_a	f_b	f_0	Δf_a	Δf_b	Δf_0
1	10	10.0068	10.0125	9.9683	0.0678	0.1251	0.3171
2	20	20.0039	20.0011	19.9842	0.0196	0.0054	0.0792
3	30	29.9907	30.0278	30.6666	0.0311	0.0927	2.2220
4	32	31.9777	32.0520	31.2835	0.0697	0.1625	2.2391
5	40	40.0101	40.0087	40.6636	0.0252	0.0218	1.6590
6	42	42.0252	42.0004	41.8844	0.0601	0.0010	0.2752
7	44	44.0004	43.9117	43.3641	0.0009	0.2007	1.4452
8	60	59.9657	59.9244	59.9947	0.0572	0.1260	0.0088

Tableau 2-13 : fréquences propres réelles exactes et calculées, erreurs relatives

Les fréquences sont bien estimées par les deux techniques basées sur l'appropriation, les erreurs relatives aux fréquences exactes sont inférieures à 0.2 %, alors que la méthode standard conduit à des erreurs supérieures à 2 % pour les modes 3 et 4.

Les vecteurs propres réels calculés sont comparés aux vecteurs exacts dans le Tableau 2-14 en utilisant le critère d'assurance modale (MAC) et le facteur modal d'échelle (MSF) définis en (1.16) et (1.17).

Mode	Modal Assurance Criterion			Modal Scale Factor		
	MAC_a	MAC_b	MAC_0	MSF_a	MSF_b	MSF_0
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0022	1.0031	1.0016
2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9974	1.0025	1.0004
3	0.9994	0.9982	0.9827	0.9662	0.9673	1.4169
4	1.0000	0.9982	0.9852	1.0279	1.0370	1.4438
5	0.9999	0.9999	0.8352	0.9831	0.9828	0.9723
6	0.9991	0.9998	0.8626	1.0050	1.0013	1.1944
7	0.9998	0.9879	0.6795	1.0137	1.0125	1.0893
8	0.9999	0.9999	1.0000	1.0041	1.0066	1.0000

Tableau 2-14 : comparaison des vecteurs propres réels calculés aux vecteurs exacts

Là encore, on constate que les résultats sont satisfaisants, les MAC sont tous supérieurs à 0.98 et les erreurs de norme ne dépassent pas 5 %, alors que la méthode standard donne un MAC de 0.68 pour le mode 7 et une erreur de norme de plus de 40 % pour les modes 3 et 4.

On remarque que les résultats issus de la méthode $b)$ sont légèrement moins bons que ceux de la méthode $a)$, par exemple pour le mode 7. Cela peut s'expliquer par le fait qu'on cherche dans la méthode $a)$ à respecter le critère de qualité d'appropriation pour le mode le moins bien

Mode	Modal Assurance Criterion		Modal Scale Factor	
	MAC _a	MAC _b	MSF _a	MSF _b
1	1.0000	1.0000	1.0007	1.0015
2	1.0000	1.0000	0.9970	1.0022
3	0.9988	0.9946	0.9864	1.0044
4	0.9985	0.9944	0.9853	1.0029
5	0.9996	0.9990	0.9940	0.9994
6	0.9998	0.9988	1.0007	0.9793
7	0.9994	0.9920	1.0090	1.0005
8	0.9999	0.9999	1.0040	1.0066

Tableau 2-16 : comparaison des modes propres complexes reconstruits aux vecteurs initiaux

La colinéarité des vecteurs reconstruits et initiaux est excellente, tous les MAC sont supérieurs à 99 %. Les différences de norme restent faibles, toutes inférieures à 3 %. On constate donc que pour ce cas-test numérique, la bonne estimation des modes propres réels a conduit à une bonne reconstruction des modes propres complexes.

2.4. Validation de la méthode sur un cas-test expérimental

Pour tester notre méthode d'extraction des modes propres réels, nous avons utilisé une expérience initialement destinée à l'étude présentée dans le troisième chapitre de ce mémoire. Il s'agit de trois poutres couplées présentant des groupes de trois modes de fréquences proches sur lesquelles on a cherché à appliquer des contre-réactions non-linéaires locales. Cette structure étant instrumentée de cinq excitateurs, il nous a paru judicieux de l'utiliser pour observer l'effet de modifications de l'amortissement - et donc par conséquent des modes propres complexes - sur les modes propres réels extraits. En effet, les excitateurs électromagnétiques peuvent être transformés en amortisseurs passifs de façon très simple : en mettant en court-circuit leur bobine mobile, on génère sur la structure une force due aux courants induits proportionnelle à la vitesse de la bobine et de signe opposé, c'est-à-dire une force d'amortissement.

Après avoir décrit le montage expérimental et les différents cas étudiés, on présente les résultats numériques obtenus.

2.4.1. Description de l'expérience

On montre ci-contre une vue d'ensemble du montage expérimental ainsi qu'un schéma des trois poutres couplées.



Figure 2-18 : vue d'ensemble du montage expérimental

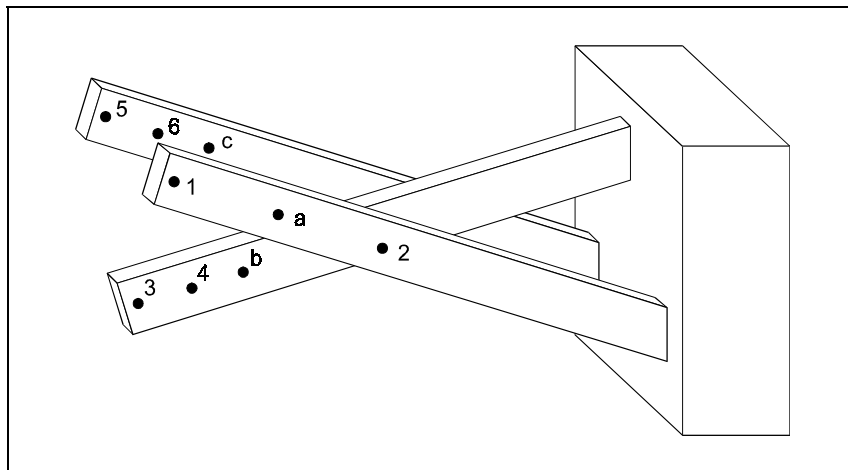


Figure 2-19 : schéma des trois poutres couplées

Configuration	Points d'application de l'amortissement			
	3	4	5	6
0				
1				
2				
3				

Tableau 2-17 : configurations d'amortissement

Les points numérotés de 1 à 6 sont instrumentés d'accéléromètres mesurant la réponse de la structure. L'excitation de référence se situe au point 1. Les excitateurs placés aux points 3, 4, 5 et 6 sont utilisés pour faire varier l'amortissement. Enfin, aux points a, b et c, des couronnes de cuivre fixées sur les poutres associées à des aimants solidaires du bâti ont été disposées afin d'augmenter l'amortissement initial.

Les mesures ont été effectuées au moyen d'une chaîne d'acquisition Siglab 8 voies en utilisant un sinus pas à pas. On ne s'est intéressé qu'au premier groupe de trois modes situé aux alentours de 38 Hz.

2.4.2. Configurations d'amortissement étudiées

Quatre mesures successives ont été réalisées. La première concerne la structure initiale, sans amortissement local ajouté. Pour les deux suivantes, on a mis en court-circuit deux des quatre excitateurs disponibles. Enfin, la dernière a été effectuée avec les quatre amortisseurs. Ces configurations sont résumées dans le Tableau 2-17.

A l'issue de chaque mesure, les modes propres complexes ont été identifiés par lissage de fonction de transfert à l'aide du logiciel Modan. On montre Figure 2-20 le diagramme de Nyquist des réponses au point 5 pour les 4 configurations, l'effet des amortissements locaux ajoutés est parfaitement visible.

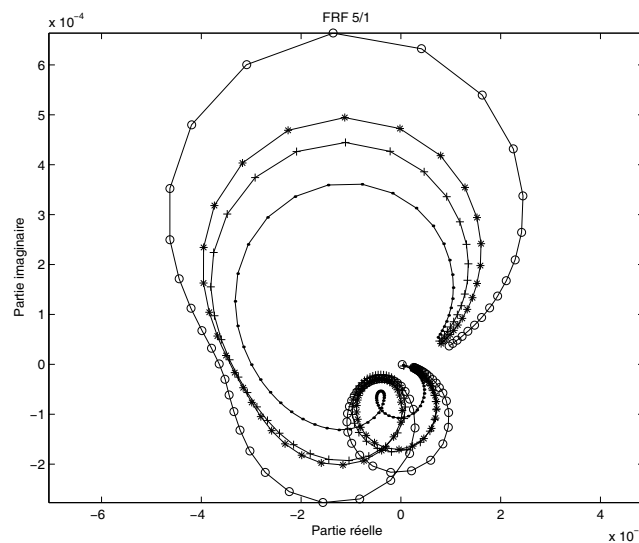


Figure 2-20 : FRF au point 5 pour les 4 configurations d'amortissement :
 ○ = config. 0 , * = config. 1 , + = config. 2 , ● = config. 3

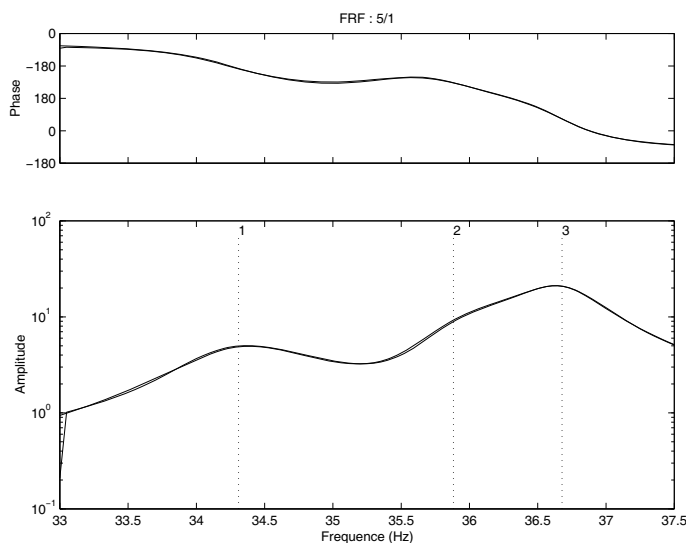


Figure 2-21 : FRF mesurée et calculée par Modan au point 5, configuration 3

La Figure 2-21 montre la FRF au point 5 mesurée et synthétisée par Modan pour la configuration 3. La bonne superposition des deux courbes témoigne d'une estimation satisfaisante des paramètres modaux.

2.4.3. Résultats

2.4.3.1. Modes complexes identifiés

Les valeurs et vecteurs propres dissipatifs identifiés sont présentés mode par mode dans les tableaux ci-après. Les vecteurs propres complexes sont normés "à $2j\omega$ ", c'est-à-dire qu'ils ont subi la transformation exprimée en (2.28). On peut ainsi détecter la présence d'amortissement non-diagonal en observant leur partie imaginaire (qui est nulle lorsque l'amortissement généralisé est diagonal).

$${}_dY_v^{2j\omega} = \sqrt{2j\omega} \cdot {}_dY_v \quad (2.28)$$

On constate que les amortissements locaux introduits modifient relativement peu les parties imaginaires des valeurs propres complexes. Par contre, les parties réelles des vecteurs propres complexes subissent des modifications allant jusqu'à 15 %, et on observe pour le cas 3 la présence de parties imaginaires non-négligeables, essentiellement pour les modes 2 et 3, ce qui laisse supposer l'existence de termes extra-diagonaux dans la matrice d'amortissement généralisé.

Mode 1					
Configuration		0	1	2	3
Valeur propre complexe s_1		- 1.5161 + 214.8255 j	- 1.8610 + 215.0052 j	- 1.7384 + 214.9854 j	- 2.7820 + 215.5686 j
Vecteur propre complexe dY_1	1	0.3608 + 0.0289 j	0.3546 + 0.0274 j	0.3500 + 0.0217 j	0.3411 + 0.0574 j
	2	0.1595 + 0.0120 j	0.1568 + 0.0112 j	0.1547 + 0.0087 j	0.1508 + 0.0242 j
	3	0.6388 + 0.0408 j	0.6373 + 0.0400 j	0.6356 + 0.0515 j	0.6179 + 0.0254 j
	4	0.6304 + 0.0419 j	0.6291 + 0.0412 j	0.6274 + 0.0524 j	0.6097 + 0.0269 j
	5	0.3885 + 0.0117 j	0.3865 - 0.0081 j	0.3778 - 0.0282 j	0.3607 + 0.0049 j
	6	0.3830 + 0.0095 j	0.3808 - 0.0101 j	0.3722 - 0.0300 j	0.3555 + 0.0029 j

Tableau 2-18 : valeurs et vecteurs propres complexes du mode 1 pour les 4 configurations

Mode 2					
Configuration		0	1	2	3
Valeur propre complexe s_2		- 1.2324 + 225.1695 j	- 1.7757 + 225.1390 j	- 1.9073 + 225.1046 j	- 2.9080 + 225.4607 j
Vecteur propre complexe dY_2	1	0.2987 + 0.0155 j	0.2972 + 0.0789 j	0.2941 + 0.1212 j	0.2882 + 0.1129 j
	2	0.1284 + 0.0060 j	0.1276 + 0.0331 j	0.1263 + 0.0514 j	0.1237 + 0.0474 j
	3	- 0.5416 - 0.0623 j	- 0.5377 - 0.0538 j	- 0.5525 - 0.0176 j	- 0.5805 - 0.1178 j
	4	- 0.5319 - 0.0627 j	- 0.5280 - 0.0543 j	- 0.5429 - 0.0186 j	- 0.5699 - 0.1174 j
	5	0.5719 + 0.0403 j	0.5937 + 0.0169 j	0.5999 + 0.0023 j	0.6236 - 0.0007 j
	6	0.5665 + 0.0370 j	0.5882 + 0.0137 j	0.5943 - 0.0009 j	0.6177 - 0.0038 j

Tableau 2-19 : valeurs et vecteurs propres complexes du mode 2 pour les 4 configurations

Mode 3					
Configuration		0	1	2	3
Valeur propre complexe s_3		- 1.1336 + 230.5659 j	- 1.4249 + 230.4482 j	- 1.5647 + 230.3877 j	- 1.8716 + 230.4566 j
Vecteur propre complexe dY_3	1	0.7632 - 0.0080 j	0.7604 - 0.0406 j	0.7642 - 0.0536 j	0.7689 - 0.0738 j
	2	0.3226 - 0.0045 j	0.3216 - 0.0186 j	0.3232 - 0.0243 j	0.3248 - 0.0331 j
	3	- 0.0967 + 0.0151 j	- 0.0934 + 0.0421 j	- 0.0991 + 0.0599 j	-0.1141 + 0.0601 j
	4	- 0.0949 + 0.0146 j	- 0.0916 + 0.0410 j	- 0.0973 + 0.0585 j	-0.1121 + 0.0585 j
	5	- 0.4683 - 0.0658 j	- 0.4519 - 0.1059 j	- 0.4500 - 0.1375 j	-0.4502 - 0.1749 j
	6	- 0.4651 - 0.0629 j	- 0.4493 - 0.1026 j	- 0.4476 - 0.1339 j	-0.4479 - 0.1708 j

Tableau 2-20 : valeurs et vecteurs propres complexes du mode 3 pour les 4 configurations

2.4.3.2. Modes réels calculés

La méthode présentée a été appliquée aux quatre configurations d'amortissement pour extraire des modes complexes identifiés les modes réels du système conservatif associé à la structure en utilisant une seule configuration d'excitation pour les trois modes (méthode *a*). Les résultats obtenus sont présentés mode par mode dans les tableaux ci-dessous.

Mode 1					
Configuration		0	1	2	3
Fréquence propre f_1 (Hz)		34.2195	34.2446	34.2330	34.3539
Vecteur propre réel Y_1	1	0.3642	0.3571	0.3507	0.3532
	2	0.1609	0.1577	0.1549	0.1558
	3	0.6412	0.6395	0.6392	0.6068
	4	0.6328	0.6314	0.6311	0.5989
	5	0.3885	0.3844	0.3665	0.3617
	6	0.3829	0.3788	0.3719	0.3564

Tableau 2-21 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 1 pour les 4 configurations

Mode 2					
Configuration		0	1	2	3
Fréquence propre f_2 (Hz)		35.8741	35.8747	35.8496	35.9901
Vecteur propre réel Y_2	1	0.2953	0.3037	0.3044	0.3149
	2	0.1268	0.1301	0.1303	0.1344
	3	-0.5579	-0.5510	-0.5554	-0.6205
	4	-0.5481	-0.5415	-0.5459	-0.6098
	5	0.5568	0.5670	0.5612	0.5601
	6	0.5621	0.5722	0.5664	0.5653

Tableau 2-22 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 2 pour les 4 configurations

Mode 3					
Configuration		0	1	2	3
Fréquence propre f_3 (Hz)		36.7183	36.7167	36.7268	36.7699
Vecteur propre réel Y_3	1	0.7370	0.7157	0.7100	0.7005
	2	0.3114	0.3026	0.3001	0.2956
	3	-0.0904	-0.0725	-0.0724	-0.0538
	4	-0.0888	-0.0712	-0.0711	-0.0528
	5	-0.4855	-0.4830	-0.4881	-0.5202
	6	-0.4895	-0.4868	-0.4919	-0.5242

Tableau 2-23 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 3 pour les 4 configurations

Les modes réels de référence sont ceux correspondant à la configuration 0, sans amortissement ajouté. On y compare dans les tableaux suivants les fréquences et vecteurs propres réels des configurations 1, 2 et 3. Le Tableau 2-24 donne la distance relative en % (définie en (2.25)) des fréquences propres relativement aux fréquences de référence. On constate que ces distances sont toutes inférieures à 0.5 %, ce qui n'est pas surprenant étant donné le fait que les parties imaginaires des pulsations complexes varient peu.

Configuration d'amortissement		1	2	3
Mode	1	0.0732	0.0394	0.3928
	2	0.0018	0.0681	0.3235
	3	0.0044	0.0232	0.1406

Tableau 2-24 : distances relatives des fréquences propres (%)

Configuration d'amortissement		1	2	3
Mode	1	1.0000	0.9997	0.9999
	2	0.9997	0.9999	0.9977
	3	0.9994	0.9991	0.9942

Tableau 2-25 : MAC des vecteurs propres réels

Configuration d'amortissement		1	2	3
Mode	1	0.9935	0.9834	0.9456
	2	1.0050	1.0040	1.0590
	3	0.9787	0.9787	0.9961

Tableau 2-26 : MSF des vecteurs propres réels

Le Tableau 2-25 montre la colinéarité entre les vecteurs propres réels obtenus pour la structure avec amortissement ajouté et ceux de la structure initiale. Ces résultats sont tout à fait satisfaisants, les MAC étant tous supérieurs à 99 %.

Enfin, le Tableau 2-26 donne les différences de norme relativement à la structure de référence. On observe des écarts non-négligeables allant jusqu'à 6.5 % pour la configuration 3, mais il est difficile de dire si ces écarts sont dus à l'extraction des modes réels ou à l'estimation des modes complexes par lissage.

Néanmoins, ces résultats sont globalement très cohérents, et confirment les capacités de notre méthode.

2.4.3.3. Matrices d'amortissement généralisé

Le calcul des matrices d'amortissement généralisé complètes donne des informations intéressantes sur l'effet de l'ajout d'amortisseurs locaux. Les matrices estimées pour les quatre configurations sont données dans le Tableau 2-27. Il apparaît clairement que l'augmentation de l'amortissement local ajouté conduit à l'apparition de termes extra-diagonaux notables.

		Matrice d'amortissement généralisé β		
		0	1	2
Configurations d'amortissement	0	$\begin{bmatrix} 3.0752 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4737 & 0.3687 \\ 0 & 0.3687 & 2.2759 \end{bmatrix}$		
	1	$\begin{bmatrix} 3.7415 & 0.2513 & 1.1534 \\ 0.2513 & 3.5828 & 1.0948 \\ 1.1534 & 1.0948 & 2.9300 \end{bmatrix}$		
	2	$\begin{bmatrix} 3.4845 & 1.0102 & 1.4563 \\ 1.0102 & 3.8309 & 1.5974 \\ 1.4563 & 1.5974 & 3.2633 \end{bmatrix}$		
	3	$\begin{bmatrix} 5.6272 & 0.6719 & 2.3332 \\ 0.6719 & 5.8762 & 1.6860 \\ 2.3332 & 1.6860 & 3.9428 \end{bmatrix}$		

Tableau 2-27 : matrices d'amortissement généralisé

2.4.3.4. Modes complexes reconstruits

On peut enfin comparer les modes complexes reconstruits à partir des modes réels estimés et des matrices d'amortissement généralisé aux modes complexes initiaux. Les écarts sur les valeurs propres, colinéarités (MAC) et différences de norme (MSF) des vecteurs propres complexes sont présentés ci-dessous.

Les différences de norme restent faibles, inférieures à 2 % quelle que soit la configuration d'amortissement. Les colinéarités sont satisfaisantes, mais on constate tout de même une diminution de la qualité de reconstitution lorsque l'amortissement ajouté augmente, notamment pour le mode 2. Une des raisons de ce phénomène peut être l'hypothèse de projection des modes complexes sur les modes réels utilisée pour calculer la matrice d'amortissement généralisé. Il conviendra donc de considérer la qualité de la reconstitution des modes complexes avec précaution, car elle ne reflète pas nécessairement la qualité de l'estimation des modes réels.

Configuration d'amortissement		0	1	2	3
Mode	1	0.0828	0.0809	0.0730	0.1690
	2	0.1053	0.1409	0.1019	0.3505
	3	0.0575	0.0729	0.0953	0.1439

Tableau 2-28 : distances relatives des pulsations complexes (%)

Configuration d'amortissement		0	1	2	3
Mode	1	0.9930	0.9951	0.9958	0.9903
	2	0.9809	0.9812	0.9880	0.9556
	3	0.9933	0.9937	0.9917	0.9831

Tableau 2-29 : MAC des vecteurs propres complexes

Configuration d'amortissement		0	1	2	3
Mode	1	1.0015	1.0014	1.0023	0.9988
	2	1.0007	0.9997	0.9929	1.0086
	3	0.9918	0.9880	0.9877	0.9970

Tableau 2-30 : MSF des vecteurs propres complexes

2.4.3.5. Conclusion

L'application de notre méthode à ce cas-test expérimental n'a posé aucun problème particulier. Bien que certaines configurations d'amortissement mettent en jeu des termes extra-diagonaux importants, le couplage des modes qui en résulte n'a pas altéré les modes réels calculés. Les modes complexes reconstruits sont relativement proches des modes initiaux, les erreurs constatées étant sans doute dues à l'estimation des matrices d'amortissement généralisé. Une autre source d'erreur possible est le fait que la structure initiale n'est pas parfaitement linéaire, le couplage des trois poutres par l'équerre solidaire du massif n'étant pas suffisamment rigide.

2.5. Application à une structure industrielle

Nous avons enfin appliqué cette méthode à une structure industrielle. Il s'agit du plancher de véhicule automobile présenté dans le chapitre précédent (voir Figure 1-12). Les mesures ont été effectuées à l'aide de 45 accéléromètres et 3 excitateurs. Les seize premiers modes complexes ont été estimés par lissage de fonctions de transfert à l'aide du logiciel Modan à partir d'une seule des trois excitations. On montre Figure 2-22 un exemple de FRF mesurée et synthétisée par Modan.

L'extraction des modes propres réels a été effectuée en utilisant les deux stratégies de sélection de configurations optimales d'excitation. Les résultats sont quasiment identiques, mais la méthode b) qui recherche une configuration par mode demande un temps de calcul plus important. Les dix premiers modes complexes reconstruits sont comparés aux modes initiaux dans le Tableau 2-31. Ils sont satisfaisants, le mode le moins bien reconstruit est le mode 8 qui présente une erreur relative sur la valeur propre de 0.2 % et un MAC de 96.8 %.

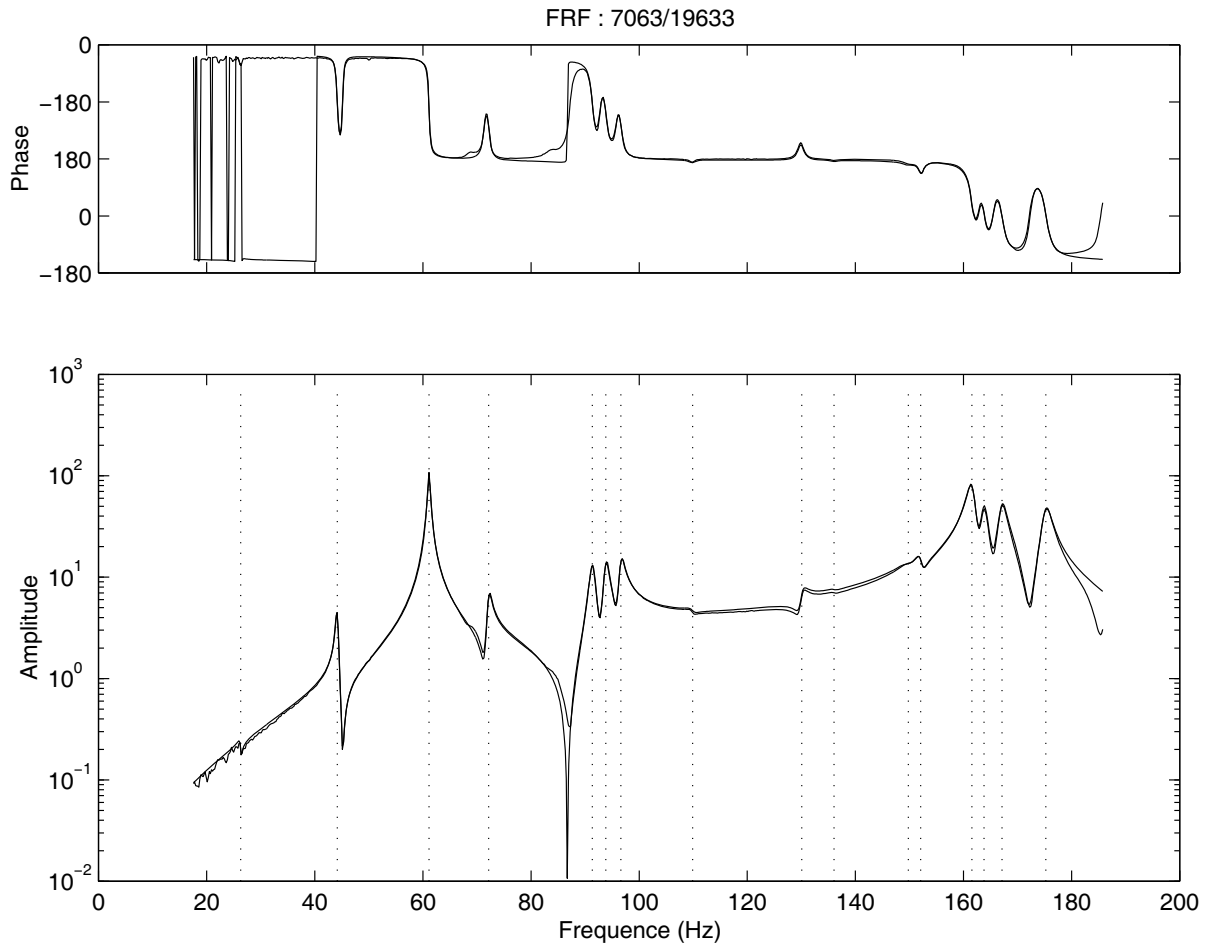


Figure 2-22 : FRF mesurée et synthétisée par Modan, plancher de véhicule automobile

Mode	Erreur relative sur les valeurs propres (%)		MAC		MSF	
	a)	b)	a)	b)	a)	b)
1	0.0653	0.0590	0.9956	0.9956	1.0036	1.0022
2	0.0104	0.0001	0.9999	0.9999	0.9993	0.9999
3	0.0052	0.0044	1.0000	1.0000	0.9982	0.9999
4	0.0530	0.0422	0.9973	0.9973	0.9963	1.0001
5	0.0370	0.0257	0.9984	0.9985	1.0011	1.0002
6	0.0544	0.0332	0.9857	0.9861	0.9937	0.9947
7	0.0663	0.0682	0.9881	0.9881	1.0005	1.0021
8	0.1601	0.1626	0.9676	0.9677	1.0031	1.0050
9	0.0193	0.0213	0.9974	0.9978	1.0026	1.0032
10	0.0151	0.0176	0.9963	0.9966	1.0387	1.0003

Tableau 2-31 : comparaison des modes propres complexes reconstruits et initiaux

Mode	Fréquences propres			Erreur relative sur les fréquences propres		MAC		MSF	
	Approp	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)
1	26.2894	26.3204	26.3188	0.1178	0.1118	0.9998	0.9998	0.9138	0.9125
2	44.1733	44.1547	44.1501	0.0420	0.0525	0.9998	0.9998	1.0622	1.0629
3	61.1234	61.1286	61.1291	0.0084	0.0092	1.0000	1.0000	1.1795	1.1815
4	72.3664	72.1428	72.1506	0.3090	0.2983	0.9992	0.9992	1.0070	1.0109
5	91.4768	91.3786	91.3683	0.1074	0.1187	0.9932	0.9937	0.9418	0.9413
6	94.3521	93.7956	93.8155	0.5898	0.5687	0.9939	0.9928	0.9250	0.9252
7	96.6342	96.5714	96.5696	0.0651	0.0669	0.9971	0.9973	1.2578	1.2599
8	109.6347	109.7154	109.7125	0.0736	0.0709	0.9999	1.0000	1.0108	1.0127
9	130.0744	130.0518	130.0492	0.0173	0.0193	0.9995	0.9998	1.0535	1.0542
10	139.6456	136.0271	136.0234	2.5912	2.5938	0.9860	0.9843	1.0315	0.9924

Tableau 2-32 : comparaison des modes réels extraits et calculés par appropriation

On compare enfin dans le tableau ci-dessus les modes réels obtenus aux modes réels issus de l'appropriation par le calcul en considérant les mesures relatives aux trois excitations. Les résultats sont cohérents.

On remarque que le mode 10 est assez différent de son homologue issu de l'appropriation, mais cela vient probablement de l'identification du mode complexe par lissage. On voit en effet sur la FRF de la Figure 2-22 que ce mode est très peu excité par l'actionneur que nous avons choisi.

Le mode 3 souffre par ailleurs d'une erreur de norme importante, mais là encore on peut imputer ce défaut à l'identification du mode complexe. Il s'avère en effet que ce mode de forte amplitude présente un comportement non-linéaire, comme le montre le diagramme de Nyquist ci-dessous.

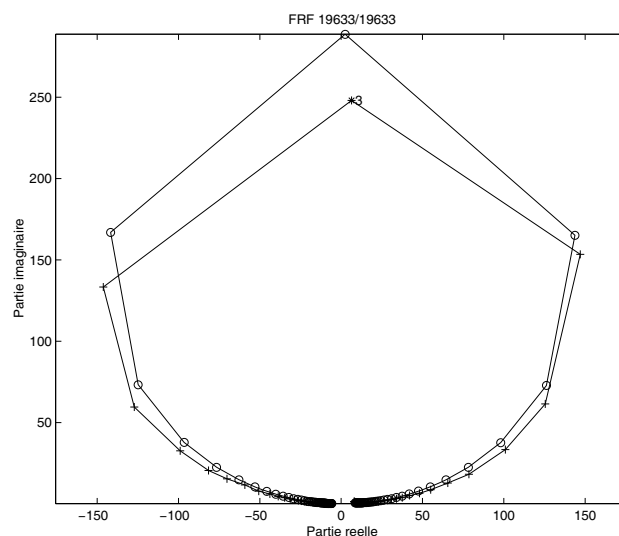


Figure 2-23 : FRF mesurée (+) et synthétisée (o) par Modan au point d'excitation, mode 3

2.6. Conclusion

L'extraction des modes réels du système conservatif associé à une structure à partir des modes complexes du système dissipatif est une étape incontournable pour mettre en œuvre la plupart des méthodes de recalage de modèle numérique. Ce problème peut paraître simple, mais il s'avère qu'aucune méthode réellement fiable ne se soit encore imposée en dépit des nombreux travaux de recherche en cours.

La méthode proposée constitue un nouvel outil de "*passage des complexes aux réels*". L'évaluation à laquelle nous l'avons soumise a mis en évidence de nombreuses qualités. L'étude portant sur un système simulé parfaitement connu et correspondant à des conditions sévères de couplage par l'amortissement donne des résultats très encourageants. Le cas-test expérimental des trois poutres couplées a montré que les modes propres réels estimés varient très peu lorsqu'on ajoute de l'amortissement local. Enfin, l'application à une structure industrielle n'a posé aucune difficulté, et montre que cette méthode est applicable dans un contexte expérimental classique, à savoir sur une structure présentant une vingtaine de modes mesurés sur une cinquantaine de degrés de liberté.

Les structures actuellement testées au LMA devraient conforter ses performances et conduire à la généralisation de son utilisation.

Chapitre 3

Méthode globale d'identification modale
d'une structure faiblement non-linéaire
présentant des modes couplés

*Ce qui est connu est fini ; ce qui est
inconnu, infini ; intellectuellement, nous
nous trouvons sur un îlot au milieu d'un
océan illimité de matière inexplicable.*

Thomas Henry Huxley (1887)

3.1. Introduction

Comme dans de nombreuses théories physiques, l'une des hypothèses de base de la mécanique vibratoire classique est la linéarité. Elle se traduit en pratique par l'observation du phénomène suivant : lorsqu'une structure est excitée par une force harmonique de fréquence donnée, sa réponse en tout point est harmonique de même fréquence et d'amplitude proportionnelle à celle de la force excitatrice. Cette hypothèse restrictive a permis le développement des calculs dits par éléments-finis où une structure continue est représentée par un grand nombre de petits éléments linéaires, surfaciques ou volumiques. Les capacités de calcul numérique étant en constante augmentation, on peut aujourd'hui prédire le comportement vibratoire de systèmes de taille très importante, comportant jusqu'à plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté.

Pourtant, l'expérience montre que dans bien des cas cette hypothèse se révèle abusive. Les sources possibles de non-linéarité sont multiples : jonctions entre sous-structures, matériau imparfaitement élastique, géométrie particulière, présence de frottements, de chocs, etc. Leur effet sur le comportement vibratoire peut être désastreux, et des non-linéarités même faibles peuvent remettre en cause les procédures classiques d'analyse modale, y compris pour des modes isolés dans le spectre. On est alors amené à tenter d'estimer un système linéaire équivalent permettant tout de même la confrontation des résultats de calculs et d'essais. La principale difficulté en identification modale est que le nombre, le type et la localisation des non-linéarités sont souvent inconnus. Elles peuvent être localisées ou réparties sur l'ensemble de la structure à tester.

On assiste depuis une dizaine d'années à l'apparition d'un grand nombre de méthodes ayant pour but le traitement des structures non-linéaires. On distingue deux grandes classes correspondant à des techniques de mesure différentes : les méthodes temporelles et les méthodes fréquentielles.

Un bon aperçu des différentes approches possibles est donné par Tomlinson dans [72]. Il résume également dans cet article les phases successives d'une identification non-linéaire :

- détection de la présence de non-linéarités : la structure a-t-elle un comportement linéaire ou non ?
- identification du type de non-linéarité : est-on en présence de non-linéarité cubique, quadratique, de frottement ?
- estimation des paramètres non-linéaires,
- validation du modèle,
- prédiction du comportement à partir du modèle identifié.

Les méthodes citées par la suite s'intéressent rarement à l'ensemble de ces étapes, l'accent étant surtout porté sur l'identification et l'estimation des non-linéarités.

Sans prétendre citer l'ensemble des approches existant dans la littérature, nous présentons un éventail de méthodes temporelles et fréquentielles.

Domaine temporel

Dans le domaine temporel, de nombreuses publications de Feldman [43][44][45] présentent l'application de méthodes basées sur la transformée de Hilbert à divers cas simulés, plutôt orientés vers les fortes non-linéarités. L'étude de la transformée de Hilbert du problème non-linéaire conduit à l'estimation de la fréquence instantanée et de l'amplitude de vibration instantanée.

Atkins et Worden [36] mettent en œuvre une méthode d'estimation directe des paramètres (*Direct Parameter Estimation*) qui se rapproche de la technique exposée dans ce chapitre, mais l'absence de condensation conduit à un grand nombre de paramètres à identifier. Aussi utilisent-ils un critère de détection des non-linéarités (*significance factor*) qui permet de supprimer les paramètres inutiles. Signalons enfin que leur étude s'appuie sur un cas-test expérimental à un degré de liberté dans lequel la non-linéarité est introduite en reliant la masse mobile à une poutre bi-encastée.

Une approche moderne et intéressante est amorcée par Staszewski et Chance [66] : l'application de la théorie des ondelettes au signal temporel issu de mesures expérimentales sur la structure décrite précédemment semble donner de bons résultats, mais là encore l'étude est pour l'instant limitée à un seul degré de liberté.

Huang et Iwan [53] adoptent une démarche d'approximations successives : la première étape consiste en la détermination des paramètres linéaires, puis les termes non-linéaires supposés s'exprimer comme des puissances impaires de la pulsation et paires de l'amplitude sont estimés progressivement.

Dippery et Weaver Smith [40] mettent en œuvre une méthode originale dénommée *Minimum Model Error* inspirée des techniques de contrôle optimal et validée sur un système simulé à quatre degrés de liberté.

Une approche différente est proposée par Thouverez et Jezequel [68] basée sur l'application des séries de Volterra à l'identification d'un système présentant une non-linéarité localisée. Ils montrent notamment que la détermination des trois premiers kernels de la série suffit à caractériser complètement le système dynamique non-linéaire.

Les mêmes auteurs ont étudié l'utilisation du modèle NARMAX en vue d'identifier les non-linéarités dans la base modale, réduisant ainsi le nombre de paramètres à identifier [69].

Enfin, Fey *et al.* [47] tout comme Avitabile et O'Callahan [37] se sont penchés sur le problème de calcul des réponses temporelles d'un modèle éléments-finis dans lequel des non-linéarités sont introduites.

∧ *Domaine fréquentiel*

D'une façon similaire, le calcul des réponses fréquentielles d'un modèle éléments-finis non-linéaire est abordé par Setio *et al.* [63] et Friswell *et al.* [51].

Concernant l'identification dans le domaine fréquentiel, Weiland et Link [74] utilisent la théorie dite "*Harmonic Balance*" afin de linéariser le système non-linéaire. Ils recensent également les moyens classiques pour détecter la présence de non-linéarités et pour identifier leur type.

Une technique intéressante mais relativement lourde à mettre en œuvre pour effectuer cette détection de façon automatique est présentée par Wardle *et al.* [73]. Elle est basée sur l'utilisation de réseaux neuronaux et nécessite des moyens logiciels appropriés.

Pour traiter les fortes non-linéarités, Ferreira et Ewins [46] proposent une méthode d'impédance non-linéaire reposant sur la technique dite *Multi-Harmonic Describing Function*. Il s'agit ici de prendre en compte les oscillations harmoniques de la structure à des fréquences multiples de la fréquence d'excitation.

Une idée originale est exploitée par Song et Wang [65] : soustraire des réponses d'une structure à différents niveaux d'excitation pour identifier les termes non-linéaires. Cette technique doit permettre de localiser précisément les non-linéarités et de les estimer.

Setio *et al.* [62] utilisent la notion de mode non-linéaire dépendant de l'amplitude de vibration. En projetant ces modes sur la base modale linéaire supposée connue, ils définissent des coefficients de participation des modes non-linéaires. Ces coefficients et les fréquences de résonance non-linéaires (dépendant également de l'amplitude) sont déterminés par une technique itérative. L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le fait qu'elle nécessite une estimation des modes linéaires. Elle peut cependant être obtenue en excitant la structure à un très faible niveau d'amplitude. L'un de ses avantages est la réduction du nombre de paramètres à identifier du fait de la projection sur la base modale. Cette étude s'appuie sur un cas-test expérimental intéressant : il s'agit d'une poutre encastrée à l'une de ses extrémités, l'autre étant reliée à un câble précontraint. La non-linéarité locale ainsi introduite engendre des phénomènes de saut importants.

Chong et Imregun [39] étudient l'application de cette méthode à un système simulé à quatre degrés de liberté avec des non-linéarités de frottement sec de différents types (*macro-slip* et *micro-slip*).

La même définition de modes non-linéaires est exploitée par Jezequel et Lamarque [55] pour le calcul des solutions périodiques d'un système mécanique à un ou deux degrés de liberté présentant des non-linéarités analytiques. Basée sur la théorie de la forme normale, leur méthode présente l'avantage d'étendre aux systèmes non-linéaires la technique de synthèse des réponses par superposition modale.

Au Laboratoire de Mécanique Appliquée, plusieurs méthodes d'identification de structures non-linéaires ont été développées dans les années 80 [15].

Le cas d'un mode isolé a été traité dans [49] en identifiant une valeur propre complexe fonction de l'amplitude globale du mode. Cette technique a été intégrée au logiciel d'analyse modale Modan sous l'appellation "*lissage non-linéaire*".

Le cas de modes couplés a été abordé par deux approches différentes.

- En présence de faibles non-linéarités, la simulation de la réponse d'un mode à ses forces appropriées (estimées grâce à l'appropriation par le calcul présentée dans le premier chapitre de ce mémoire) permet d'isoler ce mode et donc de se ramener à une identification par lissage sur un mode isolé [16]. Mais Atkins *et al.* [35] ont montré que lorsque les modes sont couplés par les non-linéarités, les forces appropriées à un mode ne permettent plus de l'isoler.
- Une seconde méthode a fait l'objet du travail de thèse de Mousrij [58][59]. Basée sur une condensation des réponses et une linéarisation équivalente, elle est très proche de celle que nous allons exposer dans ce chapitre, mais conduit à l'estimation d'un plus grand nombre de paramètres. De plus, les problèmes de singularité qui en découlent n'ont pas été pris en compte.

Avant d'aborder le vif du sujet, il nous a paru intéressant de situer cette étude parmi les références précédemment citées. On a représenté sur le diagramme ci-dessous le pourcentage de références correspondant à trois de leurs caractéristiques : leur domaine d'application, temporel ou fréquentiel, les systèmes sur lesquels elles sont validées, à un degré de liberté (SDOF) ou à plusieurs (MDOF), et enfin si les études ont porté sur un test simulé ou expérimental.

Alors que la moitié des études portent sur des systèmes à plusieurs degrés de liberté, un tiers seulement présentent un cas-test expérimental. Cette constatation nous permet de définir notre méthode comme étant basée sur une théorie simple mais pouvant être appliquée dans un contexte d'analyse modale expérimentale.

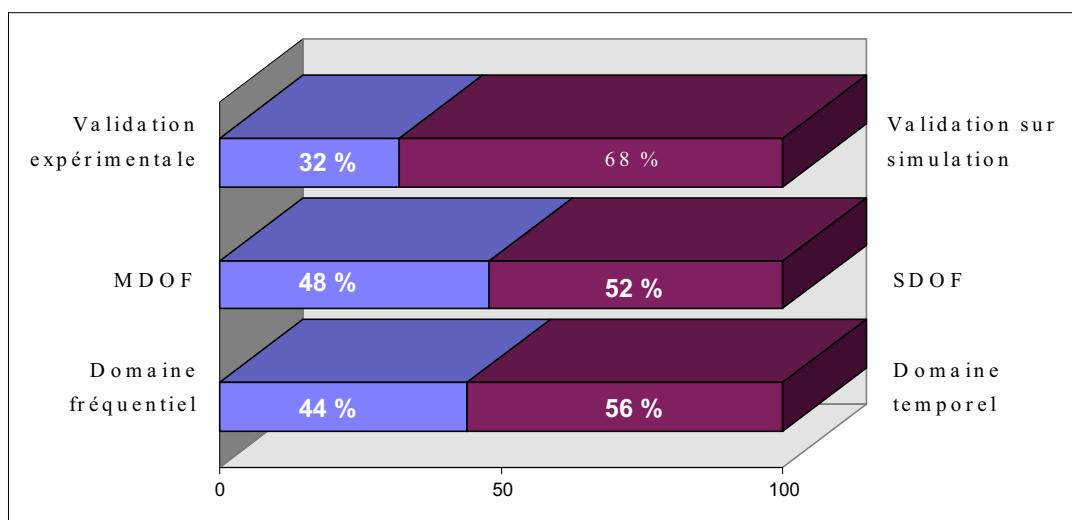


Figure 3-1 : répartition des références citées

Notre présentation de cette nouvelle technique est articulée de la manière suivante : nous décrivons d'abord les grandes classes de non-linéarités classiques et leurs effets. Puis nous exposons la théorie mise en œuvre, suivie de sa validation sur un système simulé et un système expérimental.

3.2. Les non-linéarités et leurs effets

"*Tout ce qui n'est pas linéaire est non-linéaire*". Cette lapalissade reflète l'immensité du domaine abordé, et on peut imaginer une multitude de formes de non-linéarités, de la plus simple à la plus saugrenue.

Fort heureusement, les structures mécaniques classiques n'ont pas l'âme imaginative. Ewins [41] donne un aperçu des différents types de non-linéarités couramment rencontrées :

- ✓ des effets de tension superficielle ou des pertes de rigidité dues à l'ouverture de joints peuvent rendre la raideur dépendante de l'amplitude,
- ✓ le cas de raideur bilinéaire se pose lorsque les raideurs en traction et en compression diffèrent,
- ✓ l'amortissement peut dépendre de la vitesse,
- ✓ la présence de frottement engendre souvent un comportement non-linéaire,
- ✓ les éventuels jeux dans les liaisons ("*backlash*") peuvent générer des chocs très difficiles à modéliser dans le comportement dynamique de la structure, etc.

Nous nous attacherons quant à nous à tester notre modèle sur trois types de non-linéarités : la raideur cubique (appelée *Duffing*), l'amortissement cubique, les raideur et amortissement carrés impairs et le frottement sec (dit de Coulomb).

Parmi les différentes façons de déceler la présence de faibles non-linéarités, la plus immédiate est l'observation des réponses sous forme de diagramme de Bode ou de Nyquist, à condition de connaître les effets des non-linéarités sur ces réponses. On présente donc successivement les trois classes précédemment citées et la distorsion des réponses qu'elles provoquent.

3.2.1. Raideur cubique

Considérons un système discret à un degré de liberté, et notons z son déplacement. Une non-linéarité de raideur cubique se traduit par la présence sur ce système d'une force proportionnelle au cube de son déplacement :

$$f_{nl} = k_{nl} z^3 \quad (3.1)$$

La réponse d'un tel système à une force unité est présentée ci-dessous pour différentes valeurs du paramètre non-linéaire k_{nl} . Sur le diagramme de Nyquist, la réponse linéaire est représentée

par les croix (+) et les réponses non-linéaires par des points (•). Il apparaît clairement que la raideur cubique se traduit par une distorsion asymétrique du Nyquist et de brutales variations de phase au voisinage de la résonance.

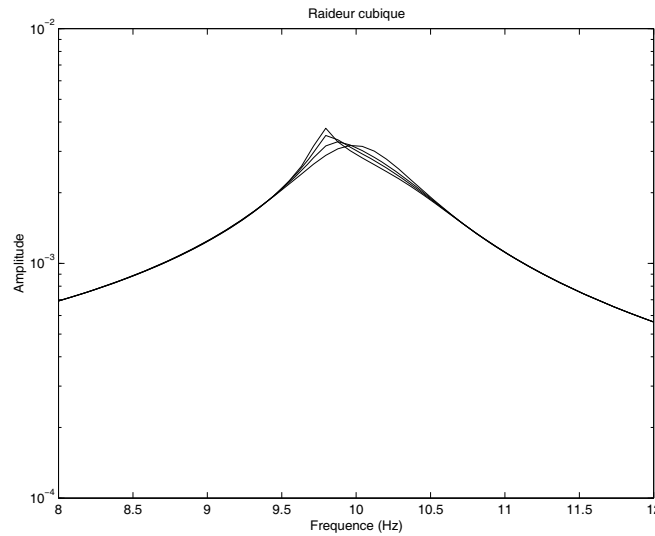


Figure 3-2 : amplitude de la réponse d'un système 1 ddl à raideur cubique

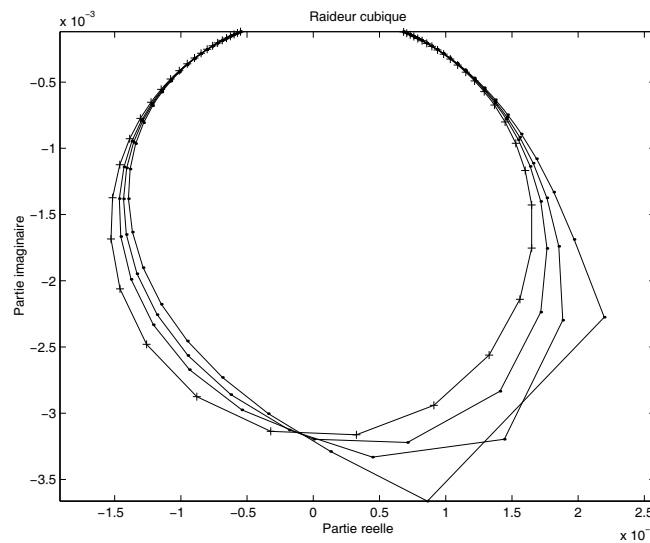


Figure 3-3 : diagramme de Nyquist de la réponse d'un système 1 ddl à raideur cubique

3.2.2. Amortissement cubique

Le même système à 1 ddl soumis à un amortissement visqueux cubique subit une force non-linéaire de la forme :

$$f_{nl} = b_{nl} \dot{z}^3 \quad (3.2)$$

Des exemples de réponses sont présentés Figure 3-4 et Figure 3-5. On constate ici une ovalisation horizontale du Nyquist, critère typique de détection d'une telle non-linéarité.

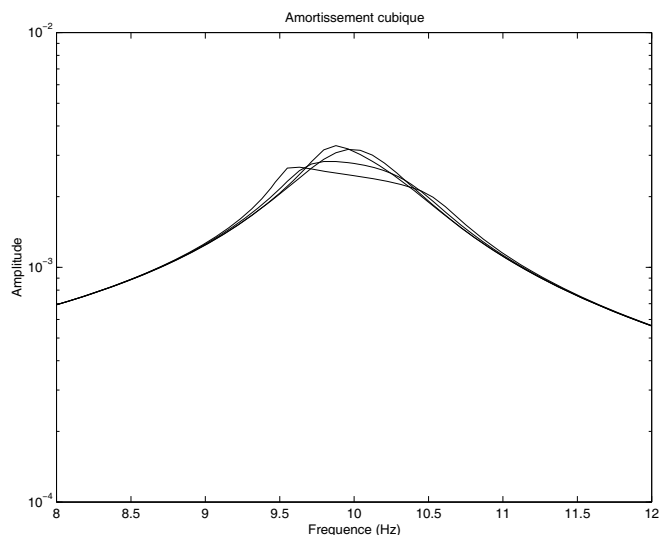


Figure 3-4 : amplitude de la réponse d'un système 1 ddl à amortissement cubique

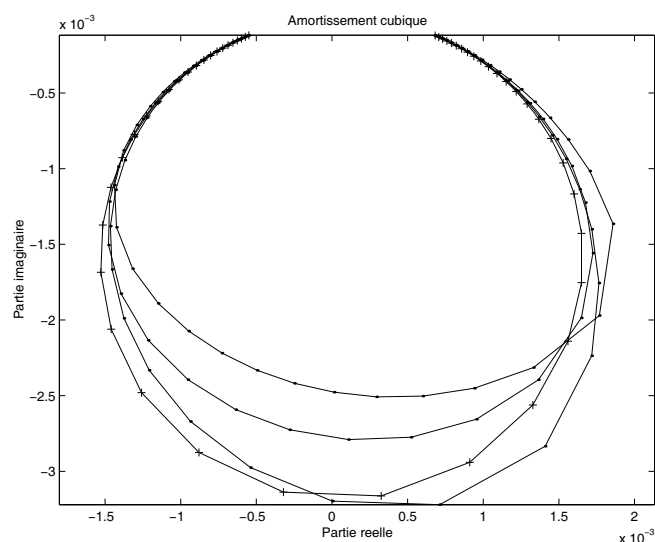


Figure 3-5 : diagramme de Nyquist de la réponse d'un système 1 ddl à amortissement cubique

3.2.3. Frottement sec

Le frottement sec se modélise de façon simple par la loi de Coulomb : lorsque la structure soumise au frottement est en mouvement, il s'exerce sur elle une force d'amplitude constante et de sens opposé au déplacement. On montre le diagramme de Nyquist d'un mode mesuré sans frottement (+) et avec deux niveaux de forces de frottement (•). Outre la forte atténuation de l'amplitude, on remarque une ovalisation verticale du Nyquist, là encore caractère typique de ce type de non-linéarité.

D'autres types de non-linéarités peuvent être étudiés (bilinéaires, de puissance 5, etc.) pour tenter de représenter au mieux des phénomènes particuliers. Notre objectif est ici de proposer une modélisation simple applicable à un maximum de cas de figures. On se limitera donc à l'estimation de paramètres de raideur et amortissement cubiques en espérant que cela suffira à améliorer l'analyse modale des autres types rencontrés. En effet, les mesures sont effectuées dans un domaine d'amplitude limité. Une approximation dans ce domaine des forces de

raideur et d'amortissement non-linéaires par une fonction simple doit être suffisante pour représenter les faibles non-linéarités rencontrées dans la majorité des structures testées en analyse modale.

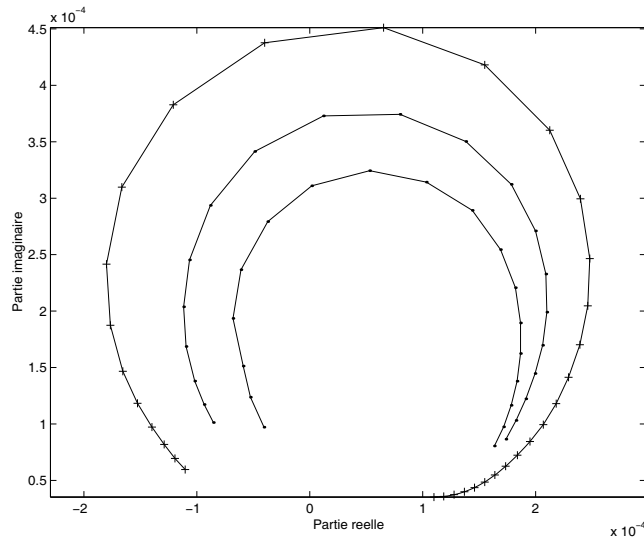


Figure 3-6 : réponse d'une poutre soumise à du frottement sec

3.3. Description de la méthode

La méthode que nous allons présenter ici s'intitule "*méthode globale d'identification modale non-linéaire*", et nous l'appellerons pour plus de commodité "*méthode globale non-linéaire*". Le terme "*global*" signifie que cette technique identifie les paramètres modaux relatifs à plusieurs modes en même temps.

Une méthode globale linéaire a été développée au LMA [48] et figure parmi les outils d'analyse modale du logiciel Modan. Elle repose sur la projection de la réponse mesurée sur une sous-base réelle représentative de la base modale, estimée par décomposition en valeurs singulières de la réponse. Elle présente l'avantage par rapport au lissage de fonctions de transfert d'apporter une information sur le nombre de modes présents dans la bande analysée.

Ce même principe de projection est utilisé dans la méthode globale non-linéaire et permet de réduire de façon très importante le nombre de paramètres à estimer, principal obstacle de l'identification non-linéaire en présence de modes couplés.

Les différentes étapes de la méthode globale non-linéaire sont décrites Figure 3-7. Elle peut être appliquée aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. La projection précédemment citée aboutit à la description du comportement de la structure par un problème non-linéaire condensé. Le choix d'un modèle particulier de non-linéarité conduit à un problème linéaire qui peut être singulier. Ces singularités sont traitées en utilisant une technique de pondération. La résolution du problème linéaire condensé pondéré fournit alors une estimation des paramètres modaux des systèmes conservatif et dissipatif associés à la structure. Afin de qualifier la qualité de cette estimation, une synthèse de la réponse non-linéaire est calculée par une méthode itérative, et peut être comparée à la réponse mesurée.

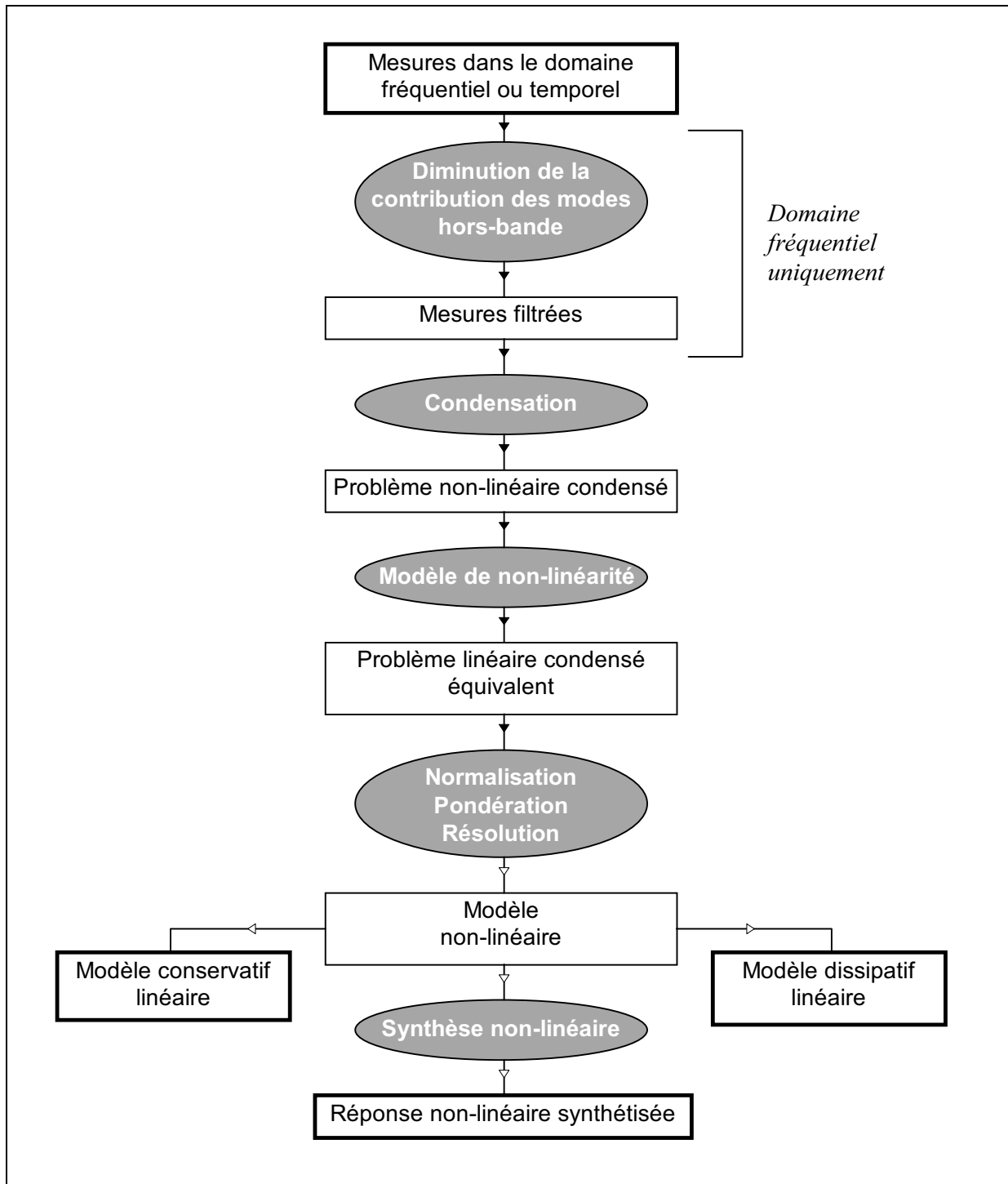


Figure 3-7 : les différentes étapes de la méthode globale non-linéaire

Nous allons maintenant décrire plus en détail le contenu de chacune de ces étapes.

3.3.1. Diminution de la contribution des modes hors-bande

Il est important de préciser que cette phase préliminaire ne peut être effectuée que dans le cas où les mesures traitées sont des fonctions de réponse fréquentielle (FRF) obtenues par des excitations en sinus pas à pas. Cela constitue indéniablement un avantage en faveur du domaine fréquentiel, mais nous verrons dans le paragraphe suivant que la technique de

$$Z_{hb}(\omega) = \sum_{k \in [1,5,6]} Z_k(\omega) \quad (3.6)$$

La Figure 3-9 montre un agrandissement de la réponse au voisinage des trois modes. La courbe en pointillé représente maintenant la contribution Z_{hb} de tous les modes hors-bande (3.6). On constate que cette contribution varie peu sur cette gamme de fréquences.

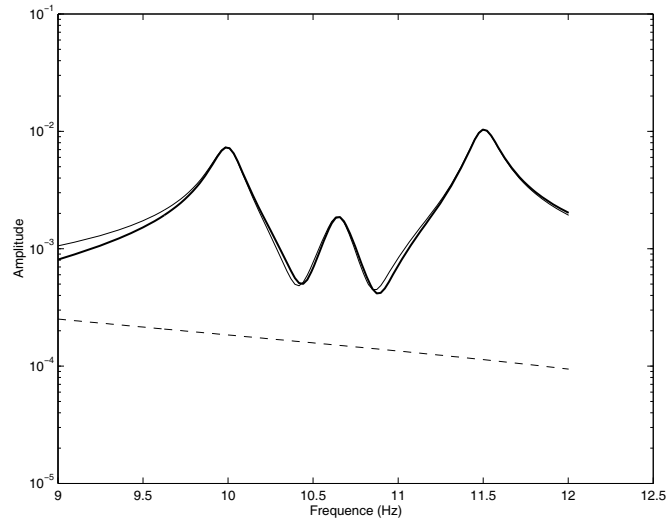


Figure 3-9 : réponse, participation des 3 modes et des modes hors-bande

Nous allons par conséquent tenter de réduire cette participation en effectuant des différences fréquentielles.

On forme la matrice ΔZ constituée des différences des réponses à deux pulsations voisines :

$$\Delta Z(\omega_i) = Z(\omega_i) - Z(\omega_j) \quad (3.7)$$

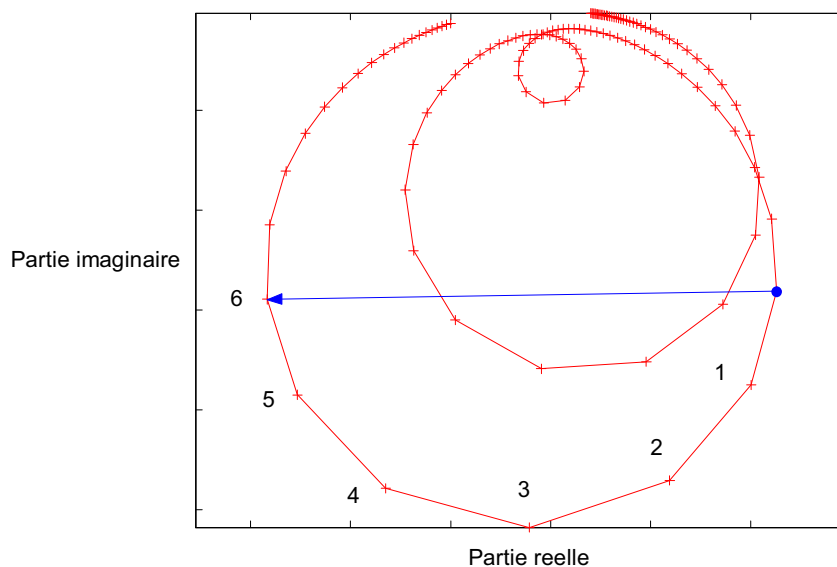


Figure 3-10 : saisie du pas fréquentiel de la différence sur le diagramme de Nyquist

Le pas fréquentiel $\delta = j - i$ est choisi de telle sorte que $\omega_j - \omega_i$ soit de l'ordre de grandeur de la largeur de bande à -3dB. Il est sélectionné manuellement par saisie sur le diagramme de Nyquist (Figure 3-10).

Nous verrons dans le paragraphe suivant l'influence d'une telle différence sur la condensation des réponses, mais on peut d'ores et déjà montrer son effet sur la contribution des modes hors-bande : on a représenté Figure 3-11 la différence fréquentielle ΔZ (trait continu), la différence sans prendre en compte les modes hors-bande ΔZ_{234} (trait pointillé), et la distance entre ces deux valeurs $|\Delta Z - \Delta Z_{234}|$ (trait mixte). Les deux courbes avec et sans prise en compte des modes hors-bande sont très proches. Leur différence est en pratique du même ordre de grandeur que les erreurs de mesure. Cette modification artificielle des mesures suppose naturellement que la contribution des modes extérieurs à la bande analysée est faible et n'a pratiquement pas d'influence sur les forces non-linéaires à identifier.

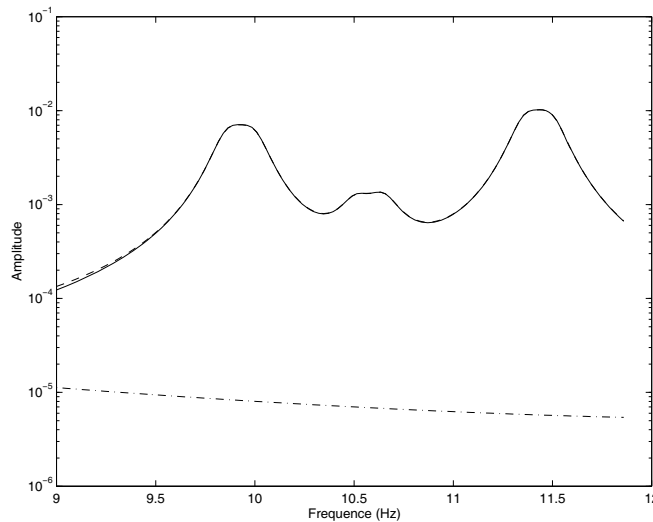


Figure 3-11 : différence fréquentielle avec et sans les modes hors-bande

Afin de quantifier l'effet de la différence fréquentielle à partir de cet exemple simple, on peut estimer les distances relatives définies ci-dessous :

$$dZ = \frac{\|Z - Z_{234}\|}{\|Z\|} \quad (3.8)$$

$$d\Delta Z = \frac{\|\Delta Z - \Delta Z_{234}\|}{\|\Delta Z\|} \quad (3.9)$$

Les valeurs obtenues pour les réponses présentées Figure 3-9 et Figure 3-11 sont les suivantes :

$$dZ = 4.67 \%$$

$$d\Delta Z = 0.22 \%$$

On a donc bien réduit par la technique de différence fréquentielle la contribution des modes hors-bande. Nous allons conforter cette affirmation dans le paragraphe suivant.

3.3.2. Condensation des réponses sur une sous-base réelle

Un des points forts de la méthode globale non-linéaire est la condensation des réponses sur une sous-base réelle représentative de l'espace modal. Elle conduit au calcul d'une réponse condensée sur un nombre de degrés de liberté fictifs égal au nombre de modes présents dans la bande analysée. On lève ainsi une des principales difficultés dans l'étude des systèmes faiblement non-linéaires à plusieurs modes, à savoir le nombre très important de paramètres à identifier.

Cette condensation est mise en œuvre dans la méthode globale linéaire étudiée en détail dans [48]. On se contentera ici d'en donner les grandes lignes en illustrant les différentes opérations effectuées sur l'exemple précédemment introduit.

L'hypothèse de base est la suivante : dans une bande fréquentielle contenant m modes couplés ou non entre eux mais non-couplés avec des modes hors-bande, les **réponses forcées** peuvent être représentées par une **base réelle de rang m** .

L'identification de cette base de représentation est effectuée à partir de la Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) de la réponse.

3.3.2.1. Décomposition en Valeurs Singulières

Nous avons présenté précédemment une technique de diminution de la contribution des modes hors-bande qui n'est applicable que dans le domaine fréquentiel. Dans ce cas, la base réelle de représentation va être identifiée à partir des différences fréquentielles ΔZ .

Si les réponses ont été mesurées dans le domaine temporel, l'identification se fera directement à partir des réponses Z . Afin d'uniformiser les notations relatives à ces deux cas de figure, on pose :

$$\begin{aligned}
 Z_0 = \underset{c}{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Re}(\Delta Z) & \text{Im}(\Delta Z) \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}} & \quad \begin{array}{l} q = 2(p - \delta) \\ \text{si } Z = Z(\omega) \in \mathbb{C} \end{array} \\
 \\
 Z_0 = \underset{c}{\begin{array}{|c|} \hline Z \\ \hline \end{array}} & \quad \begin{array}{l} q = p \\ \text{si } Z = Z(t) \in \mathbb{R} \end{array}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

La décomposition en valeurs singulières de Z_0 peut alors s'écrire :

$$\underset{c}{\begin{array}{|c|} \hline Z_0 \\ \hline \end{array}} \quad \begin{array}{l} q \\ \\ \end{array} = \underset{c}{\begin{array}{|c|} \hline U \\ \hline \end{array}} \quad \begin{array}{l} c \\ \\ q \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \Sigma \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} q \\ \\ q \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline {}^T V \\ \hline \end{array} \tag{3.11}$$

où U et V sont deux matrices réelles orthonormales :

$${}^T U . U = E_c \qquad {}^T V . V = E_q \qquad (3.12)$$

et Σ est la matrice réelle diagonale des valeurs singulières de la forme :

$$\Sigma = \begin{matrix} & \begin{matrix} c & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} c \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_c & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad (3.13)$$

Ces valeurs singulières sont ordonnées et positives :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_c \geq 0 \qquad (3.14)$$

3.3.2.2. Détection du nombre de modes présents

Lorsque la réponse qui a servi à construire la matrice Z_0 contient une faible contribution des modes extérieurs à la bande fréquentielle étudiée, le nombre de modes présents dans cette bande m est égal au rang de Σ . On peut alors le détecter en recherchant une forte diminution dans la succession des valeurs singulières. On trace pour cela le rapport des valeurs singulières deux à deux r_k défini par :

$$r_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} \qquad (3.15)$$

On donne en exemple le tracé obtenu à partir des différences fréquentielles ΔZ de l'exemple simulé à 6 ddl et les valeurs numériques correspondantes.

k	σ_k	r_k
1	$8.17 \cdot 10^{-2}$	3.22
2	$2.53 \cdot 10^{-2}$	1.13
3	$2.24 \cdot 10^{-2}$	336.1
4	$6.67 \cdot 10^{-5}$	14.7
5	$4.52 \cdot 10^{-6}$	101.2
6	$4.46 \cdot 10^{-8}$	

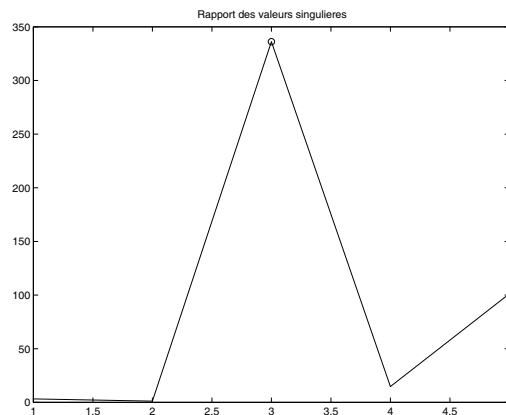


Figure 3-12 : DVS des différences fréquentielles

Afin d'observer l'influence de la diminution de la contribution des modes hors-bande par la technique de différence, on montre Figure 3-13 les résultats obtenus directement à partir de la réponse Z .

k	σ_k	r_k
1	$7.46 \cdot 10^{-2}$	2.85
2	$2.61 \cdot 10^{-2}$	1.40
3	$1.87 \cdot 10^{-2}$	16.53
4	$1.13 \cdot 10^{-3}$	8.59
5	$1.31 \cdot 10^{-4}$	118.5
6	$4.52 \cdot 10^{-6}$	

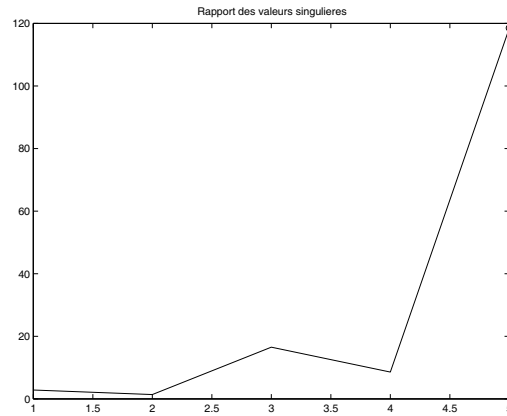


Figure 3-13 : DVS de la réponse Z

On constate que pour cet exemple, la diminution de la contribution des modes hors-bande a bien conduit à isoler les trois modes présents dans la bande, alors que la réponse Z conduit à un rang de la matrice Σ de 5, prenant en compte des modes extérieurs à la bande.

3.3.2.3. Définition de la sous-base réelle

Affirmer que le rang de la matrice Σ est égal au nombre de modes m revient à tronquer la DVS aux m premières valeurs singulières suivant le schéma suivant :

$$\begin{array}{c} q \\ \boxed{Z_0} \\ c \end{array} = \begin{array}{c} m \quad m \\ \boxed{U_1 \quad 0} \\ c \end{array} \begin{array}{c} m \\ \boxed{\Sigma_1 \quad 0} \\ \boxed{\quad 0} \end{array} \begin{array}{c} q \\ \boxed{{}^T V_1} \\ m \\ \boxed{0} \end{array} \quad (3.16)$$

La sous-base réelle de condensation est par conséquent la matrice U_1 constituée des m premières colonnes de U .

3.3.2.4. Condensation de la réponse mesurée

Nous avons émis l'hypothèse que la réponse mesurée pouvait être représentée sur la sous-base U_1 de rang m . Nous pouvons alors définir à chaque pulsation ω la réponse condensée $C(\omega)$ comme étant les coordonnées de $Z(\omega)$ dans la base U_1 , c'est-à-dire vérifiant :

$$Z(\omega) = U_1 \cdot C(\omega) \quad (3.17)$$

(cette propriété est identique dans le domaine temporel, Z et C dépendant du temps t).

La sous-base U_1 étant orthonormée, la réponse condensée C est obtenue en projetant la réponse Z sur la sous-base :

$$\begin{array}{c} p \\ \boxed{C} \\ m \end{array} = \begin{array}{c} c \\ \boxed{{}^T U_1} \\ m \end{array} \begin{array}{c} p \\ \boxed{Z} \\ c \end{array} \quad (3.18)$$

La matrice C peut être interprétée comme la réponse de la structure sur un nombre de ddl fictifs égal au nombre de modes présents. Le fait d'avoir tronqué la matrice U à ses m premières colonnes constitue également un filtrage de la contribution des modes hors-bande, à condition d'avoir correctement estimé le nombre de modes.

Ainsi, si l'on reprend l'exemple précédent, on peut comparer les deux bases réelles U respectivement issues des différences fréquentielles ΔZ et de la réponse Z . On donne dans le tableau ci-dessous les critères de colinéarités (MAC) et facteurs d'échelle (MSF) entre les vecteurs de ces deux bases.

Vecteur	MAC	MSF
1	1.0000	1.0000
2	0.9994	0.9997
3	0.9997	0.9998
4	0.4805	0.6832
5	0.4656	0.6824
6	0.9684	0.9841

Tableau 3-1 : comparaison des vecteurs de base issus de ΔZ et de Z

Les trois premiers vecteurs associés aux trois modes effectivement présents dans la bande fréquentielle sélectionnée sont quasiment identiques, alors que les trois vecteurs suivants sont très différents. Dans les deux cas, la sélection de la sous-base réduite aux trois premiers vecteurs conduit au même résultat, et constitue donc bien un filtrage de la contribution des modes hors-bande.

Nous allons maintenant utiliser la sous-base U_1 pour transformer le problème non-linéaire général en problème non-linéaire condensé.

3.3.3. Problème non-linéaire condensé

3.3.3.1. Écriture générale du problème non-linéaire condensé

Le comportement d'une structure faiblement non-linéaire peut être décrit par l'équation de réponse forcée suivante :

$$M \ddot{Z} + B \dot{Z} + K Z + F_{nl}(Z, \dot{Z}) = F \quad (3.19)$$

où M est la matrice masse, carrée, réelle, symétrique et définie positive,
 B est la matrice amortissement, carrée, réelle, symétrique et définie non-négative,
 K est la matrice raideur, carrée, réelle, symétrique et définie non-négative,
 F_{nl} est la matrice des forces non-linéaires inconnues, supposées être fonction du déplacement, de la vitesse et des contraintes.

En multipliant cette expression à gauche par ${}^T U_1$ et à droite par U_1 , on obtient l'écriture générale du problème non-linéaire condensé :

$$M_1 \ddot{C} + B_1 \dot{C} + K_1 C + \varphi_{nl}(C, \dot{C}) = \varphi \quad (3.20)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} M_1 = {}^T U_1 M U_1 \\ B_1 = {}^T U_1 B U_1 \\ K_1 = {}^T U_1 K U_1 \\ \Phi_{nl} = {}^T U_1 F_{nl} \\ \Phi = {}^T U_1 F \end{cases} \quad (3.21)$$

M_1 , B_1 et K_1 sont respectivement les matrices masse, amortissement et raideur condensées, de taille (m,m) .

3.3.3.2. Modèle de force non-linéaire

Il est nécessaire pour tenter de résoudre ce problème de choisir un modèle particulier de force non-linéaire. Dans la plupart des méthodes d'identification, on cherche à localiser les non-linéarités et à identifier leur type par observation des FRF, des transformées de Hilbert ou des diagrammes de phase, on en déduit ensuite le modèle approprié.

Notre démarche est différente : nous allons choisir un modèle simple de non-linéarité cubique, sachant qu'il ne sera pas toujours la représentation la plus judicieuse des phénomènes non-linéaires, mais espérant que dans tous les cas il conduira à une amélioration de l'identification des paramètres modaux associés à la structure.

Afin de simplifier les expressions qui vont suivre, nous allons restreindre la description des forces non-linéaires au domaine fréquentiel. Cependant, les relations sont rigoureusement identiques dans le domaine temporel, à ceci près que les fonctions sont à valeurs réelles et considérées à un instant t plutôt qu'à une pulsation ω .

Considérons d'abord la force non-linéaire élémentaire $f_{nl\ i\ j}$ agissant au ddl i et due à son interaction avec le ddl j . Nous la modélisons par une raideur et un amortissement cubiques :

$$f_{nl\ i\ j}(\omega) = k_{nl\ i\ j} \left(Z_i(\omega) - Z_j(\omega) \right)^3 + b_{nl\ i\ j} \left(\dot{Z}_i(\omega) - \dot{Z}_j(\omega) \right)^3 \quad (3.22)$$

Une force opposée agit simultanément au ddl j :

$$f_{nl\ j\ i}(\omega) = -f_{nl\ i\ j}(\omega) \quad (3.23)$$

Cette relation fréquentielle prend en compte l'approximation dite "du premier harmonique". En effet, si l'on considère une grandeur A harmonique d'amplitude A_0 et de pulsation ω , on a :

$$\begin{aligned} [A(t)]^3 &= A_0^3 [\sin(\omega t)]^3 \\ &= A_0^3 \left[\frac{1 - 2 \cos(\omega t)}{2} \sin(\omega t) \right] \\ &= \frac{3A_0^3}{4} \sin(\omega t) - \frac{A_0^3}{4} \sin(3\omega t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

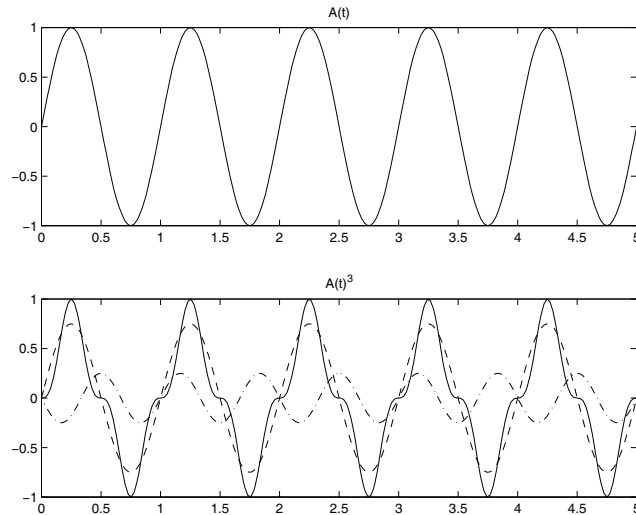


Figure 3-14 : approximation du premier harmonique

Le signal temporel comporte donc deux composantes fréquentielles, l'une à la fréquence initiale (premier harmonique en trait pointillé) et la seconde à la fréquence triple (troisième harmonique en trait mixte). Nous négligeons cette dernière composante, cette approximation étant d'autant plus valable que la structure ne présente pas de mode au voisinage du troisième harmonique.

Construisons enfin la matrice Q_{ij} suivant la relation (3.25) et représentée ci-dessous.

$$\begin{cases} Q_{ij}(i,i) = Q_{ij}(j,j) = 1 \\ Q_{ij}(i,j) = Q_{ij}(j,i) = -1 \\ Q_{ij}(\lambda,\mu) = 0 \quad \forall \lambda,\mu \in [1,c] \neq i,j \end{cases} \quad (3.25)$$

$$Q_{ij} = \begin{array}{cccc} & i & j & c \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ c \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & 1 & -1 & \\ \hline & -1 & 1 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & & & \end{array}$$

En multipliant cette matrice par le vecteur réponse $Z(\omega)$, on obtient :

$$Q_{ij} Z(\omega) = \begin{array}{cccc|c} & i & j & & \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & 1 & -1 & \\ \hline & -1 & 1 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Z_i(\omega) \\ \hline Z_j(\omega) \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|} \hline Z_i(\omega) - Z_j(\omega) \\ \hline Z_j(\omega) - Z_i(\omega) \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (3.26)$$

Il en résulte une nouvelle expression de la force non-linéaire au ddl i :

$$F_{nl_{ij}}(\omega) = k_{nl_{ij}} [Z_i(\omega) - Z_j(\omega)]^2 (Q_{ij} \cdot Z(\omega)) + b_{nl_{ij}} [\dot{Z}_i(\omega) - \dot{Z}_j(\omega)]^2 (Q_{ij} \cdot \dot{Z}(\omega)) \quad (3.27)$$

La force non-linéaire totale sur la structure est la somme des forces élémentaires relatives à tous les couples de degrés de liberté, soit :

$$F_{nl}(\omega) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^c F_{nl_{ij}}(\omega) \quad (3.28)$$

Les paramètres non-linéaires $k_{nl_{ij}}$ et $b_{nl_{ij}}$ peuvent se regrouper dans deux matrices K_{nl} et B_{nl} . Ces matrices sont symétriques et de diagonale nulle. On peut en déduire le nombre maximal de paramètres non-linéaires indépendants N_{nl} :

$$N_{nl} = c(c+1) \quad (3.29)$$

3.3.3.3. Force non-linéaire condensée

Ayant choisi une forme particulière de force non-linéaire, nous allons expliciter la forme de la force non-linéaire condensée qui en résulte.

Intéressons-nous d'abord uniquement à la non-linéarité de raideur afin de ne pas surcharger les expressions.

Par définition :

$$\varphi_{nl_{ij}}(\omega) = {}^T U_1 \cdot F_{nl_{ij}}(\omega) = k_{nl_{ij}} [Z_i(\omega) - Z_j(\omega)]^2 \cdot {}^T U_1 \cdot (Q_{ij} \cdot Z(\omega)) \quad (3.30)$$

D'après la relation (3.17), on a :

$$Z_i(\omega) = U_i \cdot C(\omega) \quad \dot{Z}_i(\omega) = U_i \cdot \dot{C}(\omega) \quad (3.31)$$

où U_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la base U_1 .

Définissons le vecteur ligne T_{ij} par :

$$T_{ij} = U_i - U_j \quad (3.32)$$

On obtient alors :

$$\varphi_{nl_{ij}}(\omega) = k_{nl_{ij}} [T_{ij} C(\omega)]^2 {}^T U_1 \cdot Q_{ij} \cdot U_1 \cdot C(\omega) \quad (3.33)$$

Or le produit matriciel ${}^T U_1 \cdot Q_{ij} \cdot U_1$ peut s'exprimer simplement en fonction de T_{ij} :

Il n'y a donc que deux paramètres indépendants à identifier d et e , le problème non-linéaire condensé sera par conséquent régulier dès lors qu'il existe au moins une non-linéarité de chaque type.

Cas de deux modes

En présence de deux modes ($m = 2$), la matrice C contient deux lignes et la matrice U_1 deux colonnes. On a donc pour une non-linéarité de raideur entre deux ddl i et j :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} U_{1i} - U_{2i} \\ U_{1j} - U_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ij1} \\ T_{ij2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

et

$$\Phi_{nl_{ij}} = \left\{ k_{nl_{ij}} [T_{ij1} \cdot C_1 + T_{ij2} \cdot C_2]^3 \right\} \begin{bmatrix} T_{ij1} \\ T_{ij2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{nl_{ij1}} \\ \Phi_{nl_{ij2}} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

En développant les sommes au cube, on obtient :

$$\begin{cases} \Phi_{nl_{ij1}} = k_{nl_{ij}} (T_{ij1}^4 C_1^3 + 3T_{ij1}^3 T_{ij2} C_1^2 C_2 + 3T_{ij1}^2 T_{ij2}^2 C_1 C_2^2 + T_{ij1} T_{ij2}^3 C_2^3) \\ \Phi_{nl_{ij2}} = k_{nl_{ij}} (T_{ij1}^3 T_{ij2} C_1^3 + 3T_{ij1}^2 T_{ij2}^2 C_1^2 C_2 + 3T_{ij1} T_{ij2}^3 C_1 C_2^2 + T_{ij2}^4 C_2^3) \end{cases} \quad (3.44)$$

La force non-linéaire condensée globale de raideur peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \Phi_{nl1} = d_0 C_1^3 + 3d_1 C_1^2 C_2 + 3d_2 C_1 C_2^2 + d_3 C_2^3 \\ \Phi_{nl2} = d_1 C_1^3 + 3d_2 C_1^2 C_2 + 3d_3 C_1 C_2^2 + d_4 C_2^3 \end{cases} \quad (3.45)$$

avec :

$$\forall k \in [0,1,2,3,4] \quad d_k = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^c k_{nl_{ij}} T_{ij1}^{4-k} \cdot T_{ij2}^k \quad (3.46)$$

De même, la force non-linéaire condensée globale d'amortissement s'écrit :

$$\begin{cases} \Phi_{nl1} = e_0 \dot{C}_1^3 + 3e_1 \dot{C}_1^2 \dot{C}_2 + 3e_2 \dot{C}_1 \dot{C}_2^2 + e_3 \dot{C}_2^3 \\ \Phi_{nl2} = e_1 \dot{C}_1^3 + 3e_2 \dot{C}_1^2 \dot{C}_2 + 3e_3 \dot{C}_1 \dot{C}_2^2 + e_4 \dot{C}_2^3 \end{cases} \quad (3.47)$$

avec :

$$\forall k \in [0,1,2,3,4] \quad e_k = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^c b_{nl_{ij}} T_{ij1}^{4-k} \cdot T_{ij2}^k \quad (3.48)$$

Nous nous trouvons donc dans le cas de deux modes avec 10 coefficients non-linéaires à identifier. Ces coefficients sont des combinaisons linéaires des paramètres structuraux $k_{nl_{ij}}$ et $b_{nl_{ij}}$. Si le nombre de non-linéarités effectivement présentes N_{nl} est inférieur à 10, le problème non-linéaire condensé présentera une singularité d'ordre $(10 - N_{nl})$.

Cas de trois modes

On montre par un développement analogue qu'en présence de trois modes, la force non-linéaire condensée s'exprime en fonction de 30 coefficients, soit 15 par type de non-linéarité. De la même façon, si le nombre de non-linéarités structurales est inférieur à 30, le problème non-linéaire condensé présentera une singularité d'ordre $(30 - N_{nl})$.

Il est donc indispensable de prévoir une procédure de régularisation du problème non-linéaire condensé, nous allons la détailler dans le paragraphe suivant.

Cas général

Il est difficile de trouver une écriture générale satisfaisante de la force condensée non-linéaire pour un nombre m quelconque de modes. On peut néanmoins affirmer qu'elle s'écrit comme une somme de combinaisons linéaires de produits de puissances des lignes de la réponse condensée C .

On peut aussi donner une expression simplifiée de la $k^{\text{ème}}$ composante de la force non-linéaire condensée de raideur :

$$\varphi_{nlk} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\dots+\sigma=3} \frac{3}{\alpha!\beta!\gamma!\dots\sigma!} d_q C_1^\alpha C_2^\beta C_3^\gamma \dots C_m^\sigma \quad (3.49)$$

En revanche, il est plus intéressant de déterminer le nombre N_C de coefficients non-linéaires à identifier.

On montre que pour m modes présents dans la bande analysée, ce nombre s'écrit :

$$N_C = 2 C_{4+m-1}^4 = 2 \frac{(4+m-1)!}{12(m-1)!} \quad (3.50)$$

Les valeurs obtenues sont données dans le tableau ci-dessous jusqu'à six modes, et nous verrons dans le paragraphe suivant le nombre total de paramètres (linéaires et non-linéaires) qui en résulte.

Nombre de modes m	1	2	3	4	5	6
Nombre de coefficients N_C	2	10	30	70	140	252

Tableau 3-2 : nombre de coefficients non-linéaires à identifier en fonction du nombre de modes

3.3.3.4. Problème linéaire équivalent

Ayant exprimé la force non-linéaire condensée en fonction de la réponse condensée C , on peut maintenant réécrire le problème non-linéaire condensé donné par (3.20).

Pour simplifier la présentation, nous allons nous limiter au cas de **deux modes**, sachant que les autres cas ne posent aucune difficulté particulière, si ce n'est de disposer de feuilles de taille suffisante.

L'expression générale (3.51) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire (3.52).

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \ddot{C}(\omega) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \dot{C}(\omega) + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} C(\omega) + \varphi_{nl}(\omega) = \varphi(\omega) \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{C}_1 & \ddot{C}_2 & 0 & \dot{C}_1 & \dot{C}_2 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{C}_1 & \ddot{C}_2 & 0 & \dot{C}_1 & \dot{C}_2 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{C}_1^3 \\ 3\dot{C}_1^2\dot{C}_2 \\ 3\dot{C}_1\dot{C}_2^2 \\ \dot{C}_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ k_{11} \\ k_{12} \\ k_{22} \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Remarque : les vecteurs \ddot{C}_k , \dot{C}_k et C_k sont en réalité les transposés des lignes de la réponse condensée C .

Notons A_0 la matrice principale, x le vecteur des paramètres inconnus et b_0 le vecteur du second membre :

$$A_0 x = b_0 \quad (3.53)$$

Les paramètres que nous souhaitons identifier contenus dans le vecteur x sont réels. Si la méthode est appliquée dans le domaine temporel, la matrice A_0 et le second membre b_0 sont également réels. En revanche, dans le domaine fréquentiel, A_0 et b_0 sont des grandeurs complexes résultant de la transformée de Fourier des signaux mesurés. Dans ce cas, on sépare partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(A_0) \\ \text{Im}(A_0) \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \text{Re}(b_0) \\ \text{Im}(b_0) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Dans le but d'uniformiser les notations, on pose :

$$\begin{array}{c}
 \boxed{A_1} = \boxed{A_0} \quad \boxed{h_1} = \boxed{h_0} \quad \text{Domaine temporel} \\
 \hline
 \boxed{} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Re}(A_0) \\ \hline \text{Im}(A_0) \\ \hline \end{array} \quad \boxed{} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Re}(b_0) \\ \hline \text{Im}(b_0) \\ \hline \end{array} \quad \text{Domaine fréquentiel}
 \end{array} \tag{3.55}$$

Le nombre d'équations de ce système linéaire est p (domaine temporel) ou $2p$ (domaine fréquentiel) où p est le nombre de points de mesure. Une condition nécessaire pour pouvoir résoudre ce système est qu'il y ait au moins autant d'équations que de paramètres à identifier.

Or le nombre de paramètres linéaires condensés étant :

$$N_L = 3C_{m+1}^2 \tag{3.56}$$

le nombre total de paramètres est :

$$N_p = N_L + N_C = 3C_{m+1}^2 + 2C_{4+m-1}^4 \tag{3.57}$$

On en déduit le nombre minimal de points de mesure p_{mini} :

$$p_{\text{mini}} = \begin{cases} 3C_{m+1}^2 + 2C_{4+m-1}^4 & \text{Domaine temporel} \\ \frac{3C_{m+1}^2 + 2C_{4+m-1}^4}{2} & \text{Domaine fréquentiel} \end{cases} \tag{3.58}$$

Les valeurs numériques pour 1 à 6 modes sont présentées ci-dessous.

Nombre de modes		1	2	3	4	5	6
Nombre minimal de points de mesure p_{mini}	<i>Domaine temporel</i>	5	19	48	100	185	315
	<i>Domaine fréquentiel</i>	3	10	24	50	93	158

Tableau 3-3 : nombre minimum de points de mesure en fonction du nombre de modes

En présence d'un ou deux modes, le nombre de paramètres reste faible. Pour trois modes, il faut estimer 48 paramètres dont 30 non-linéaires. Une grande prudence s'impose, surtout si l'on sait que les non-linéarités sont locales et en petit nombre. Au-delà de trois modes, le nombre de paramètres devient très important, et il ne nous a pas paru raisonnable de tenter une identification, d'autant plus qu'il est relativement rare de constater sur une structure ordinaire l'existence de 4 modes couplés ou plus. On procédera alors à l'identification sur plusieurs bandes fréquentielles indépendantes en prenant garde de considérer dans une même bande les éventuels modes couplés.

Après avoir choisi une bande fréquentielle qui comprenne suffisamment de points respectivement aux nombres de paramètres à identifier, on est amené à résoudre le système linéaire surdéterminé (3.53) ou (3.54). Cette résolution va être effectuée par une méthode des moindres carrés, non sans avoir pris certaines précautions particulières dues au risque de quasi-singularité signalé.

3.3.4. Décalage – Normalisation – Pondération

Désireux de résoudre le problème linéaire équivalent dans les meilleures conditions possibles, nous avons cherché à améliorer au maximum le conditionnement du système. Cette amélioration s'effectue en trois étapes : on traite d'abord la quasi-colinéarité des colonnes relatives à la masse et à la raideur, puis on effectue une normalisation du système, enfin une technique de pondération est appliquée.

3.3.4.1. Décalage fréquentiel des colonnes relatives à la masse

L'une des causes de déficience de rang de la matrice A_0 est le fait que ses colonnes relatives à la masse et à la raideur sont quasiment colinéaires deux à deux. Pour des commodités de présentation, nous allons séparer le cas du domaine fréquentiel de celui du domaine temporel.

Domaine fréquentiel

Le capteur le plus souvent employé dans les mesures vibratoires est l'accéléromètre. Il délivre un signal sous forme de charges électriques proportionnel à l'accélération \ddot{z} de la structure dans une direction donnée. Ce signal est ensuite amplifié en tenant compte du coefficient de calibration du capteur considéré afin d'obtenir une mesure en m.s^{-2} . On en déduit alors la vitesse \dot{z} et le déplacement z à partir des relations (3.59) issue des propriétés des fonctions harmoniques.

$$\begin{cases} \ddot{z} = -\omega^2 z \\ \dot{z} = j\omega z \end{cases} \quad (3.59)$$

Bien entendu, une mesure simultanée de ces trois grandeurs serait préférable, mais il est technologiquement difficile d'envisager l'implantation de trois capteurs différents au même point.

Signalons également que cette opération n'est possible qu'en présence de faibles non-linéarités. En effet, avec des structures fortement non-linéaires, la réponse à une excitation harmonique n'est plus nécessairement harmonique ni même périodique.

Nous avons pour habitude au LMARC de stocker les mesures sous forme de déplacements. Nous disposons donc après estimation du nombre de modes et condensation sur la sous-base réelle de la matrice de réponse condensée en déplacement C .

Le problème linéaire équivalent se présente alors sous la forme suivante :

$$\left[-\omega^2 M_1 + j\omega B_1 + K_1 \right] C(\omega) + \varphi_{nl}(\omega) = \varphi(\omega) \quad (3.60)$$

Par ailleurs, quel que soit le nombre de modes, la matrice A_0 est constituée de 4 sous-matrices A_M , A_B , A_K et A_{NL} respectivement relatives aux paramètres de masse, d'amortissement, de raideur et de force non-linéaire condensés (3.61).

$$\boxed{A_0} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_M & A_B & A_K & A_{NL} \\ \hline \end{array} \quad (3.61)$$

Enfin, la propriété (3.59) étant supposée vérifiée pour la réponse condensée C , les sous-matrices relatives à la masse, l'amortissement et la raideur vérifient :

$$\begin{cases} A_M = -\Omega^2 A_K \\ A_B = j\Omega A_K \end{cases} \quad (3.62)$$

où Ω est une matrice diagonale contenant les pulsations de mesure ω_k .

Or, l'identification étant menée sur une bande fréquentielle réduite contenant peu de modes, les pulsations de mesure varient peu autour de leur valeur moyenne. Il en résulte que la sous-matrice A_M est quasiment proportionnelle à A_K .

Ce problème ne se pose pas avec la sous-matrice A_B car elle subit un déphasage de $\pi/2$ qui conduit à une inversion des parties réelle et imaginaire lors de l'opération (3.54).

Pour réduire cette quasi-colinéarité, nous décalons la sous-matrice A_M en centrant la matrice Ω^2 autour de sa valeur moyenne. On résout ainsi un nouveau problème linéaire équivalent :

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) M_1 + j\omega B_1 + (K_1 - \omega_0^2 M_1) \right] C(\omega) + \varphi_{nl}(\omega) = \varphi(\omega) \quad (3.63)$$

où ω_0^2 est la valeur moyenne des carrés des pulsations de mesure :

$$\omega_0^2 = \text{mean}_{k=1..p}(\omega_k^2) \quad (3.64)$$

La nouvelle matrice A_2 se présente alors sous la forme :

$$\boxed{A_2} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_M - \omega_0^2 A_K & A_B & A_K & A_{NL} \\ \hline \end{array} \quad (3.65)$$

et les paramètres de raideur k_{ij} contenus dans le vecteur x sont remplacés par les nouveaux paramètres κ_{ij} :

$$\kappa_{ij} = k_{ij} - \omega_0^2 m_{ij} \quad (3.66)$$

Domaine temporel

Lorsque la méthode est appliquée dans le domaine temporel, la mesure de la réponse ne s'effectue plus à des pulsations données. On effectue un balayage en fréquence au voisinage des modes que l'on souhaite identifier, c'est-à-dire qu'on génère une excitation quasi-sinusoidale dont la fréquence varie au cours du temps par allers et retours entre deux valeurs limites.

La connaissance de la bande fréquentielle d'excitation nous autorise à procéder au même décalage que dans le domaine fréquentiel. Le nouveau problème linéaire à résoudre est :

$$M_1 [\ddot{C}(t) + \omega_0^2 C(t)] + j \omega B_1 \dot{C}(t) + (K_1 - \omega_0^2 M_1) C(t) + \varphi_m(t) = \varphi(t) \quad (3.67)$$

où ω_0^2 est la moyenne des carrés des pulsations **d'excitation**.

La nouvelle matrice A_2 se présente toujours sous la forme (3.65).

Le problème non-linéaire condensé avec décalage fréquentiel des colonnes relatives aux paramètres de masse est maintenant décrit par l'équation (3.68) avec la convention de notation (3.69).

$$A_3 x = b_3 \quad (3.68)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{A_3} = \boxed{A_2} \quad \boxed{b_3} = \boxed{b_0} \quad \text{Domaine temporel} \\ \hline \boxed{A_3} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Re}(A_2) \\ \hline \text{Im}(A_2) \\ \hline \end{array} \quad \boxed{b_3} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Re}(b_0) \\ \hline \text{Im}(b_0) \\ \hline \end{array} \quad \text{Domaine fréquentiel} \end{array} \quad (3.69)$$

Illustrons l'effet de cette transformation sur un exemple simple : considérons un système non-linéaire simulé à 8 degrés de liberté comportant 3 modes couplés. On montre Figure 3-15 le graphe des valeurs singulières des matrices ${}^T A_3 \cdot A_3$ (•) et ${}^T A_1 \cdot A_1$ (+).

La première "marche d'escalier" entre les 6 premières valeurs singulières et les suivantes a été réduite, améliorant sensiblement le conditionnement du système.

Il subsiste néanmoins de forts écarts entre certaines valeurs singulières. Elles proviennent essentiellement des grandes différences d'amplitude entre les colonnes relatives aux paramètres de raideur et d'amortissement non-linéaires. C'est pourquoi nous allons maintenant appliquer une procédure classique de normalisation.

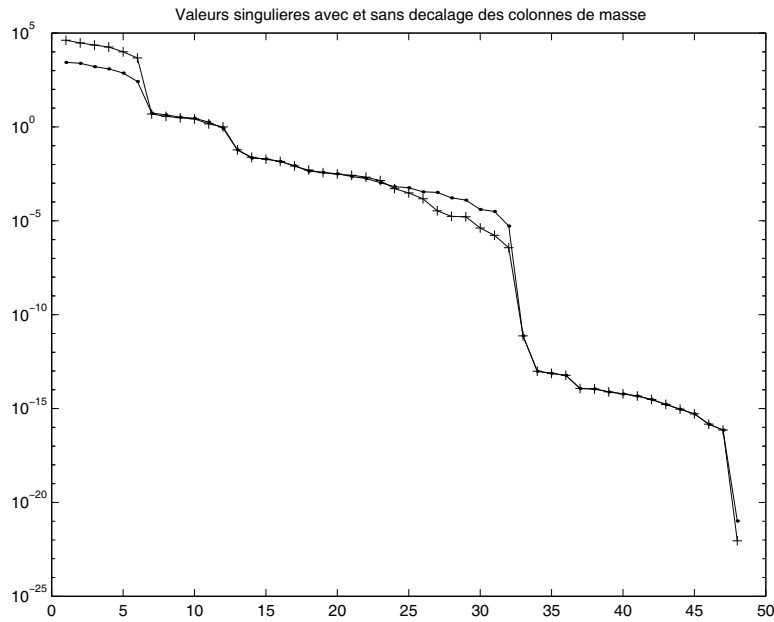


Figure 3-15 : valeurs singulières avec (+) et sans (•) décalage fréquentiel

3.3.4.2. Normalisation

Une technique classique d'amélioration de conditionnement consiste en la normalisation du système autour de ses valeurs moyennes.

On forme pour cela la matrice A_4 et le vecteur b_4 définis par :

$$\begin{cases} A_{4k} = \frac{A_{3k} - \bar{A}_{3k}}{\sigma_{A3k}} \\ b_4 = \frac{b_3 - \bar{b}_3}{\sigma_{b3}} \end{cases} \quad (3.70)$$

où A_{ik} désigne la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A_i ,
 \bar{A}_{ik} la valeur moyenne de cette colonne,
 σ_{Aik} son écart-type,
 \bar{b}_3 la valeur moyenne du vecteur b_3 ,
 et σ_{b3} son écart-type.

Le nouveau système à résoudre est donné par :

$$A_4 \tilde{x} = b_4 \quad (3.71)$$

et la $k^{\text{ème}}$ composante x_k du vecteur initial x est obtenue par la relation (3.72).

$$x_k = \frac{\sigma_{A3k}}{\sigma_{b3}} \tilde{x}_k \quad (3.72)$$

La Figure 3-16 montre l'effet de cette normalisation sur les valeurs singulières de la matrice principale. On a ajouté aux deux courbes précédentes le tracé des valeurs singulières de la matrice ${}^T A_4 \cdot A_4$ (Δ). On constate que le conditionnement est très nettement amélioré, bien qu'il subsiste une déficience de rang due à un nombre trop faible de non-linéarités dans l'exemple traité. La dernière opération effectuée avant la calcul des paramètres doit lever cette singularité, il s'agit d'une pondération dite de Tikhonov.

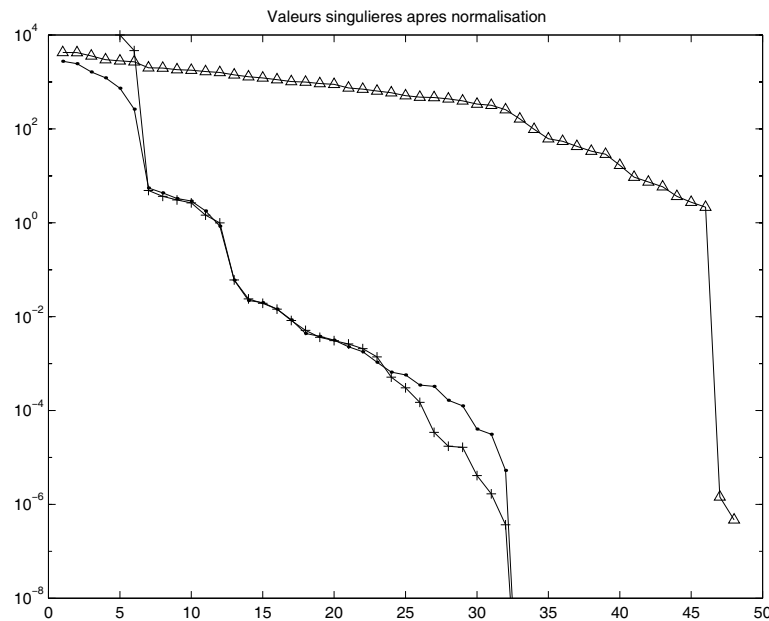


Figure 3-16 : valeurs singulières avec (Δ) et sans normalisation (\bullet ,+)

3.3.4.3. Pondération

Les techniques présentées précédemment ont pour but d'améliorer le conditionnement du système traité, mais ne suffisent pas à pallier la déficience de rang due au nombre faible de non-linéarités. En effet, on a vu que la condensation du problème non-linéaire conduisait à l'estimation d'un nombre donné de coefficients non-linéaires supposés indépendants, mais on ne dispose d'aucune information sur le nombre réel de paramètres indépendants. Il convient donc de prendre des précautions particulières pour aboutir à une estimation convenable des paramètres modaux associés à la structure.

Notre choix s'est porté sur une technique de régularisation par introduction d'une matrice de pondération inspirée de la méthode de Tikhonov [71].

Le système (3.71) peut aussi s'écrire :

$${}^T A_4 \cdot A_4 \tilde{x} = {}^T A_4 \cdot b_4 \quad (3.73)$$

La régularisation de Tikhonov classique consiste à introduire une matrice de pondération diagonale constante :

$$\left({}^T A_4 \cdot A_4 + \alpha E_{N_p} \right) \tilde{x} = {}^T A_4 \cdot b_4 \quad (3.74)$$

Cette opération conduit, lors de la résolution du système, à minimiser non seulement l'erreur de reconstitution mais aussi la norme des paramètres. Naturellement, le choix de la valeur du coefficient de pondération α est primordial et doit être guidé par des considérations physiques liées au problème traité.

Une variante de cette régularisation [77] consiste à calculer les solutions respectivement issues d'une pondération en $+\alpha$ et en $-\alpha$ et d'en calculer la moyenne :

$$\begin{cases} \left({}^T A_4 \cdot A_4 + \alpha E_{N_p} \right) \tilde{x}_1 = {}^T A_4 \cdot b_4 \\ \left({}^T A_4 \cdot A_4 - \alpha E_{N_p} \right) \tilde{x}_2 = {}^T A_4 \cdot b_4 \\ \tilde{x} = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) / 2 \end{cases} \quad (3.75)$$

Nous allons adapter cette dernière technique à notre problème particulier : la matrice ${}^T A_4 \cdot A_4$ est une matrice carrée d'ordre N_p dont les N_L premières colonnes sont associées aux paramètres linéaires, les N_C suivantes aux paramètres non-linéaires. Nous allons minimiser **uniquement la norme des paramètres non-linéaires**. Cela s'effectue en introduisant la matrice de pondération P dans laquelle les N_L premiers termes diagonaux sont nuls, et les N_C suivants égaux à une constante α :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} N_L \\ \hline N_p \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \hline \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \\ \alpha \end{array} \end{array} \end{array} \quad (3.76)$$

Il reste à choisir une valeur du coefficient de pondération α . L'introduction de ce coefficient revient à négliger les valeurs singulières de la matrice ${}^T A_4 \cdot A_4$ qui lui sont inférieures.

Or on sait que lors de mesures vibratoires, il se superpose toujours au signal fourni par les capteurs un bruit dont les origines peuvent être diverses : bruit électrique, défaut des conditions aux limites, bande passante des capteurs limitée, numérisation des données, etc.

Le rapport signal/bruit est en général de l'ordre de 10^{-3} . Cela signifie que les valeurs singulières de la matrice ${}^T A_4 \cdot A_4$ qui sont inférieures à $10^{-6} \cdot \sigma_1$ ne portent aucune information relative à la dynamique de la structure, mais représentent le bruit de mesure (σ_1 étant la plus grande valeur singulière).

Chercher à identifier des paramètres non-linéaires à partir de telles valeurs singulières reviendrait à essayer de modéliser ce bruit, ce qui est loin d'être notre préoccupation. Nous avons par conséquent fixé la valeur du coefficient de pondération à partir de la plus grande valeur singulière σ_1 et d'une estimation empirique du rapport signal/bruit :

$$\begin{cases} \alpha = 10^{-\gamma} \cdot \sigma_1 \\ \gamma \text{ entier compris entre 4 et 8} \end{cases} \quad (3.77)$$

Finalement, le problème condensé non-linéaire ayant subi un décalage fréquentiel, une normalisation et une pondération peut s'écrire :

$$\begin{cases} \left({}^T A_4 \cdot A_4 + P \right) \tilde{x}_1 = {}^T A_4 \cdot b_4 \\ \left({}^T A_4 \cdot A_4 - P \right) \tilde{x}_2 = {}^T A_4 \cdot b_4 \\ \tilde{x} = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) / 2 \end{cases} \quad (3.78)$$

Lors de la mise en œuvre de la méthode globale non-linéaire, le choix de la puissance de pondération γ est laissé à l'utilisateur. Le critère qui lui est fourni pour effectuer ce choix est le tracé des valeurs singulières de la matrice ${}^T A_4 \cdot A_4 + P$ (trait continu) et de la matrice initiale ${}^T A_4 \cdot A_4$ (trait pointillé). On montre à titre d'exemple sur les figures 3-17 à 3-19 les graphes obtenus pour $\gamma = 3$, $\gamma = 4$ et $\gamma = 5$.

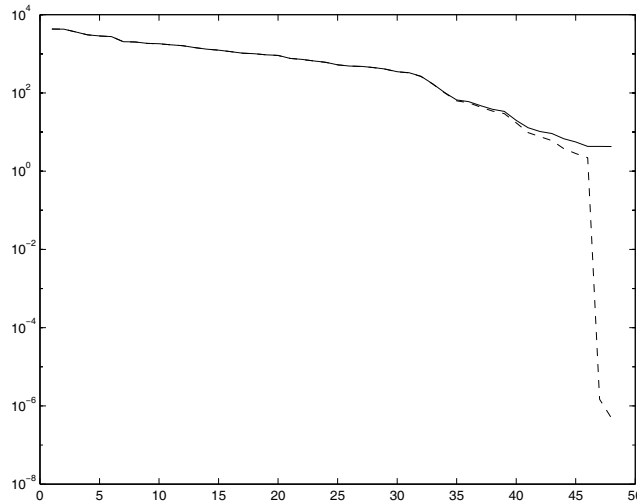


Figure 3-17 : valeurs singulières avec (-) et sans pondération (- -), $\gamma = 3$

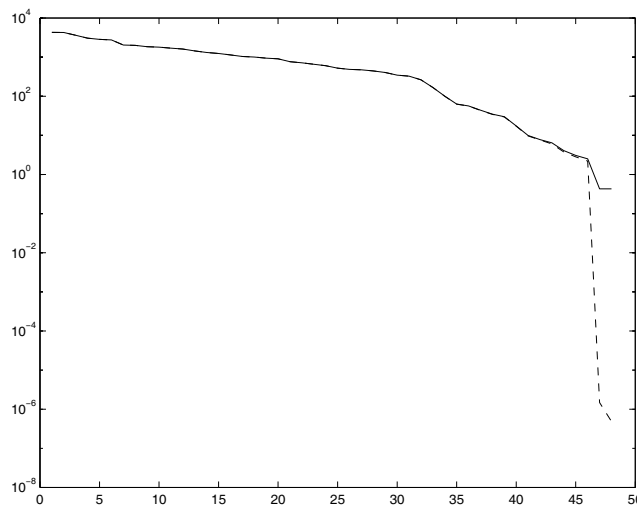


Figure 3-18 : valeurs singulières avec (-) et sans pondération (- -), $\gamma = 4$

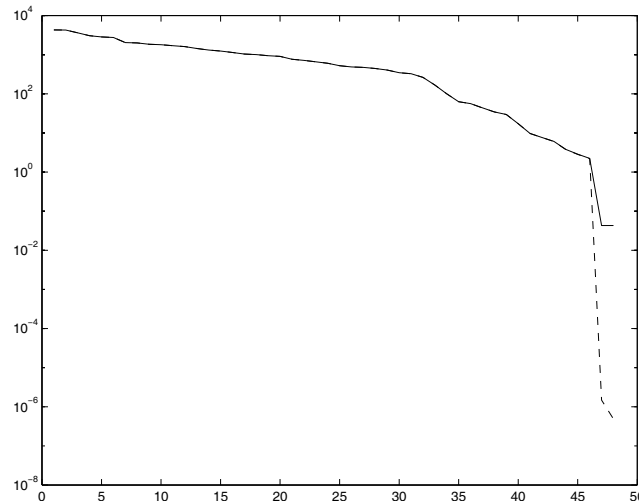


Figure 3-19 : valeurs singulières avec (-) et sans pondération (- -), $\gamma = 5$

On voit que le choix $\gamma = 3$ modifie les valeurs singulières situées en amont de la déficience de rang de façon trop importante. Le choix $\gamma = 4$ semble ici constituer le meilleur compromis, supprimant la singularité sans modifier les valeurs singulières significatives.

On présente enfin le bilan des diverses opérations effectuées afin de rendre le système régulier et avec le meilleur conditionnement possible. Un exemple de valeurs numériques de conditionnement est donné dans le Tableau 3-4 et le tracé des valeurs singulières relatives à chaque étape est représenté Figure 3-20.

		Symbole	Conditionnement
Matrice initiale	${}^T A_1 . A_1$	+	$1.3 \cdot 10^{14}$
Décalage fréquentiel	${}^T A_3 . A_3$	●	$3.2 \cdot 10^{13}$
Normalisation	${}^T A_4 . A_4$	Δ	$9.8 \cdot 10^4$
Pondération	${}^T A_4 . A_4 + P$	★	$1.0 \cdot 10^3$

Tableau 3-4 : exemple de nombre de conditionnement après les différentes opérations

Ayant pris toutes les précautions qui s'imposaient de par la nature particulière du système à résoudre, nous pouvons estimer le vecteur contenant les paramètres linéaires et non-linéaires par un calcul des moindres carrés. Nous allons maintenant en déduire les paramètres modaux linéaires associés à la structure.

3.3.5. Estimation des paramètres linéaires et non-linéaires

Le vecteur des paramètres identifiés x est déduit par la relation (3.72) de la solution \tilde{x} du problème (3.78). Après avoir reconstitué les matrices condensées M_1 , B_1 et K_1 , nous pouvons calculer les modes propres réels et complexes des systèmes conservatif et dissipatif associés à la structure.

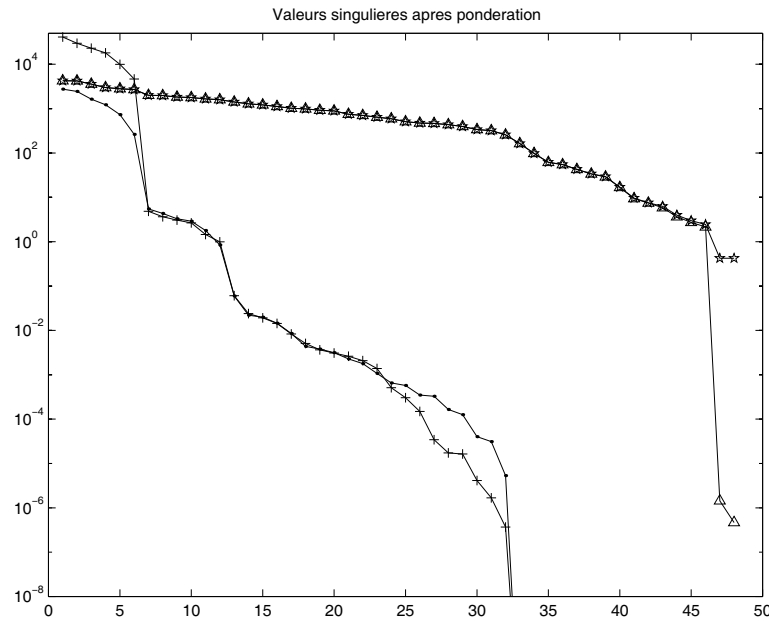


Figure 3-20 : valeurs singulières après décalage fréquentiel, normalisation et pondération

3.3.5.1. Modes propres réels du SCA

L'estimation des modes propres réels du système conservatif associé à la structure s'effectue en deux étapes.

Les valeurs propres réelles ω_v et les vecteurs propres réels condensés Q sont d'abord estimés par la résolution du problème aux valeurs propres (3.79) associé à la relation de norme relativement à la masse (3.80).

$$\begin{bmatrix} K_1 & -\omega_v^2 M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_v \end{bmatrix} = 0 \quad (3.79)$$

$$\begin{bmatrix} Q_v^T & M_1 & Q_v \end{bmatrix} = 1 \quad (3.80)$$

Les modes propres réels sont ensuite extraits des modes condensés en utilisant la base réelle de condensation U_1 :

$$\begin{matrix} m \\ Y \end{matrix} = \begin{matrix} m \\ U_1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ Q \end{matrix} \quad (3.81)$$

3.3.5.2. Modes propres complexes du SDA

Le calcul des modes propres complexes du système dissipatif est similaire. La résolution du problème aux valeurs propres classique (3.82) associé à la relation de norme (3.83) fournit les

valeurs propres complexes s_v et les vecteurs propres complexes condensés ${}_dQ$, les vecteurs propres complexes structuraux ${}_dY$ sont déduits par la transformation (3.84).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} K_1 & 0 & B_1 & M_1 \\ 0 & -M_1 & M_1 & 0 \end{array} \right] + s_v \begin{array}{c} \begin{array}{c} \boxed{dQ_v} \\ \boxed{s_v dQ_v} \end{array} \end{array} = 0 \quad (3.82)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boxed{{}^T dQ_v} & \boxed{{}^T (s_v dQ_v)} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \boxed{B_1} & \boxed{M_1} \\ \boxed{M_1} & \boxed{0} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{dQ_v} \\ \boxed{s_v dQ_v} \end{array} = 1 \quad (3.83)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \boxed{{}_dY} \\ \text{c} \end{array} \begin{array}{c} m \\ \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{U_1} \\ \text{c} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{{}_dQ} \\ m \end{array} \quad (3.84)$$

Notons que le fait de disposer des paramètres modaux des deux systèmes - conservatif et dissipatif - constitue un atout intéressant de cette méthode globale d'identification, tant en linéaire qu'en non-linéaire. En effet, il n'est nul besoin de recourir à une technique d'extraction des modes réels à partir des modes complexes telle que celle que nous avons présentée dans le chapitre précédent.

3.3.5.3. Matrice d'amortissement généralisé

Disposant à présent des paramètres modaux du système conservatif et du système dissipatif associés à la structure, on peut en déduire une estimation de la matrice d'amortissement généralisé par la technique présentée au chapitre précédent (voir 2.2.7).

3.3.6. Synthèse de la réponse non-linéaire

Comme dans la plupart des méthodes d'analyse modale, le contrôle de la qualité de l'estimation va s'effectuer par synthèse des réponses à partir du modèle identifié et comparaison avec les réponses mesurées.

La première étape de cette synthèse est présentée Figure 3-21. Il s'agit du calcul par une méthode itérative de la réponse non-linéaire condensée.

La réponse condensée C issue de la réponse mesurée Z constitue la valeur initiale C_0 . La force non-linéaire induite φ_{nl_0} est alors calculée à partir des paramètres non-linéaires d_k et e_k .

On en déduit une nouvelle estimation de la réponse condensée C_1 en utilisant les matrices de masse, amortissement et raideur condensées.

Si le modèle de force non-linéaire condensée représente bien les forces non-linéaires effectivement présentes au sein de la structure, C_1 est très proche de la valeur initiale C_0 . Dans le cas contraire, on renouvelle le calcul de φ_{nl_0} et C_1 jusqu'à convergence de l'algorithme. On obtient finalement la réponse non-linéaire condensée synthétisée C_S .

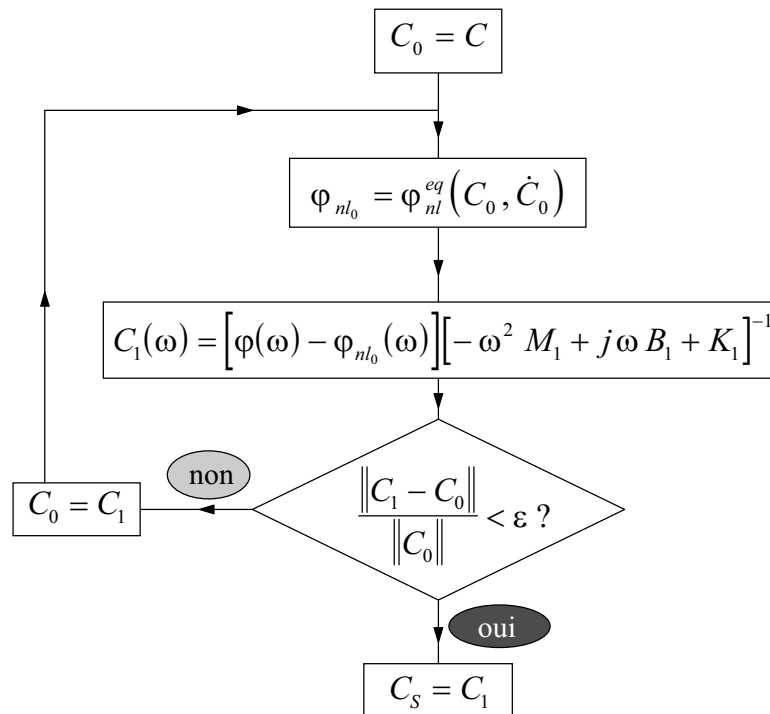


Figure 3-21 : synthèse de la réponse non-linéaire condensée

La réponse non-linéaire synthétisée Z_S est enfin obtenue par la transformation (3.85).

$$\begin{array}{c} c \\ \boxed{Z_S} \end{array} \begin{array}{c} P \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{U_1} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} P \\ \boxed{C_S} \\ m \end{array} \quad (3.85)$$

Remarque : en toute rigueur, la valeur initiale donnée à la réponse condensée synthétisée devrait être la réponse estimée à partir des paramètres linéaires avec $\varphi_{nl_0} = 0$ plutôt que la réponse condensée issue des mesures. Sur les cas traités, l'expérience a montré que les deux possibilités conduisaient au même résultat, ce qui sous-entend que la solution du problème non-linéaire était unique. En revanche, le fait d'avoir une valeur initiale proche de la solution diminue le nombre d'itérations nécessaires à la convergence, réduisant de façon importante le temps de calcul.

3.3.7. Comparaison des modes avec un système linéaire de référence

Nous allons présenter par la suite deux exemples de mise en œuvre de la méthode globale non-linéaire : un système simulé à 8 degrés de liberté et un cas-test expérimental. Dans les deux cas, la structure linéaire de référence est connue, et nous permet de comparer les modes identifiés sur la structure non-linéaire avec ceux de la structure de référence.

Cette comparaison ne peut être menée directement, car la présence de non-linéarités engendre une modification de la matrice de raideur, et par voie de conséquence des modes couplés de la structure.

Le seul moyen de comparer les deux systèmes est de vérifier que les bases constituées par les vecteurs propres représentent le même espace vectoriel et que ces vecteurs sont normés relativement à la même matrice de masse.

Ainsi, si l'on note Y_L les modes propres réels de la structure linéaire de référence et Y_{NL} ceux de la structure non-linéaire, on doit vérifier que la matrice de passage d'une base à l'autre est orthonormée, soit :

$$\begin{cases} Y_{NL} = Y_L \cdot D \\ \Delta = {}^T D \cdot D = E_m \end{cases} \quad (3.86)$$

On estimera donc la matrice D de taille (m,m) par moindres carrés, et on observera les termes de la matrice $\Delta = {}^T D D$.

Nous allons maintenant présenter une validation de cette nouvelle méthode sur des cas-tests simulés et expérimentaux.

3.4. Validation de la méthode sur un cas-test simulé

Nous présentons ici l'application de la méthode globale non-linéaire à un cas-test simulé qui nous a permis de vérifier le bon fonctionnement de la méthode et de quantifier la précision des résultats obtenus.

Après avoir décrit le modèle utilisé et les non-linéarités simulées, on donne les résultats numériques et les commentaires qu'ils appellent.

3.4.1. Description du modèle

Le cas-test numérique a été élaboré sur les mêmes bases que ceux rencontrés précédemment dans ce mémoire : il s'agit d'un système à 8 degrés de liberté, les fréquences modales, vecteurs propres réels et la matrice d'amortissement généralisé étant imposés.

Les trois premiers modes ont des fréquences proches et un amortissement important (3.87). Ils sont de plus couplés par les termes extra-diagonaux d'amortissement.

$$f = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 14 \\ 175 \\ 275 \\ 375 \\ 475 \\ 575 \end{bmatrix} \text{ Hz} \quad \beta = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & & & & & & \\ & 5 & 5 & 5 & & & & & \\ & & 5 & 5 & 5 & & & & \\ & & & & 5 & & & & \\ & & & & & 5 & & & \\ & & & & & & 5 & & \\ & & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & & 5 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Une seule excitation a été simulée, située sur le premier degré de liberté. On montre Figure 3-22 la fonction de réponse fréquentielle linéaire en ce point, les bandes fréquentielles à -3dB (×) et les bandes de largeur triple (○). Ces dernières se recouvrent, on a donc bien affaire à des modes couplés.

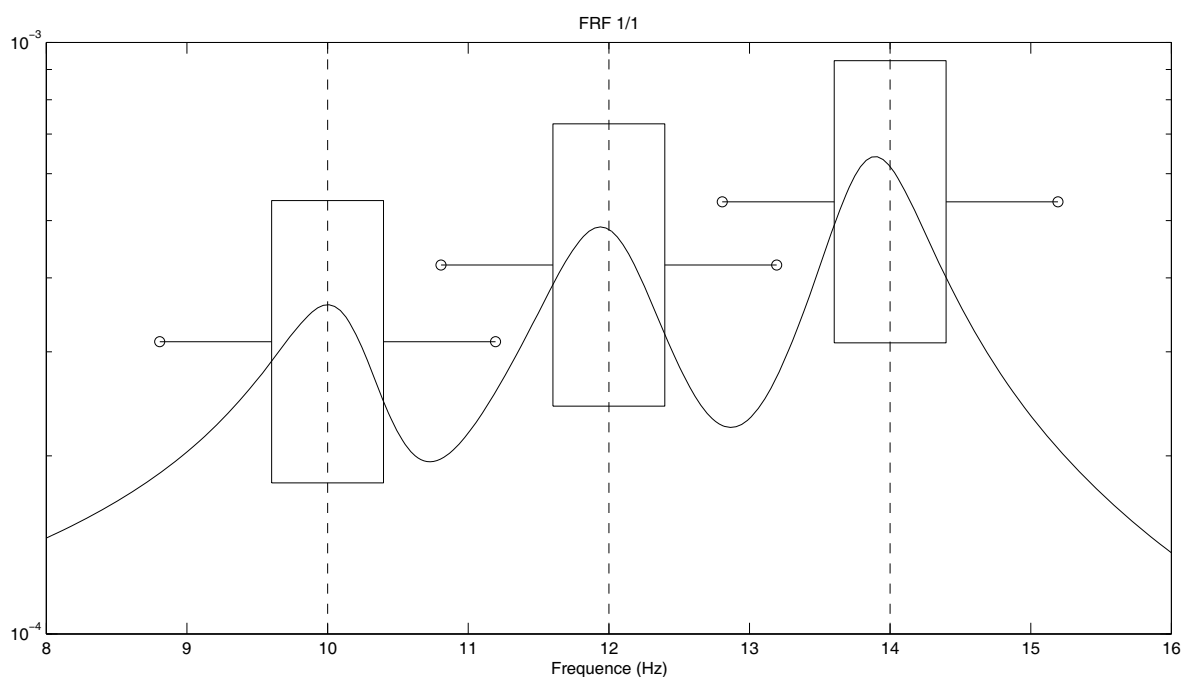


Figure 3-22 : FRF 1/1 linéaire, système simulé à 8 ddl

3.4.2. Non-linéarités appliquées

Le but de cette simulation étant de quantifier les erreurs d'estimation dans des conditions idéales, les non-linéarités simulées sont du même type que celles introduites dans la méthode globale, à savoir des raideurs et amortissements cubiques avec approximation du premier harmonique.

Afin d'observer l'influence du nombre de non-linéarités présentes dans le système, nous avons étudié trois configurations différentes :

- cas n°1 : une seule force non-linéaire a été simulée entre le ddl 1 et le bâti,
- cas n°2 : deux forces non-linéaires réciproques entre les ddl 1 et 2 ont été simulées,
- cas n°3 : toutes les combinaisons de forces non-linéaires entre 2 ddl quelconques ont été simulées.

Les figures 3-24 à 3-26 présentent les réponses du système linéaire (trait pointillé) et non-linéaire (trait continu) au ddl n°1 pour les 3 cas de forces non-linéaires.

3.4.3. Résultats

L'identification des trois systèmes non-linéaires simulés ne pose aucun problème particulier. La détection du nombre de modes à partir de la décomposition en valeurs singulières de la réponse indique bien la présence de trois modes. La Figure 3-23 montre l'effet de la pondération sur les valeurs singulières de la matrice ${}^T A_4 \cdot A_4$ pour un coefficient de pondération $\gamma = 4$ dans le cas 1. La déficience de rang est bien compensée par la matrice de pondération.

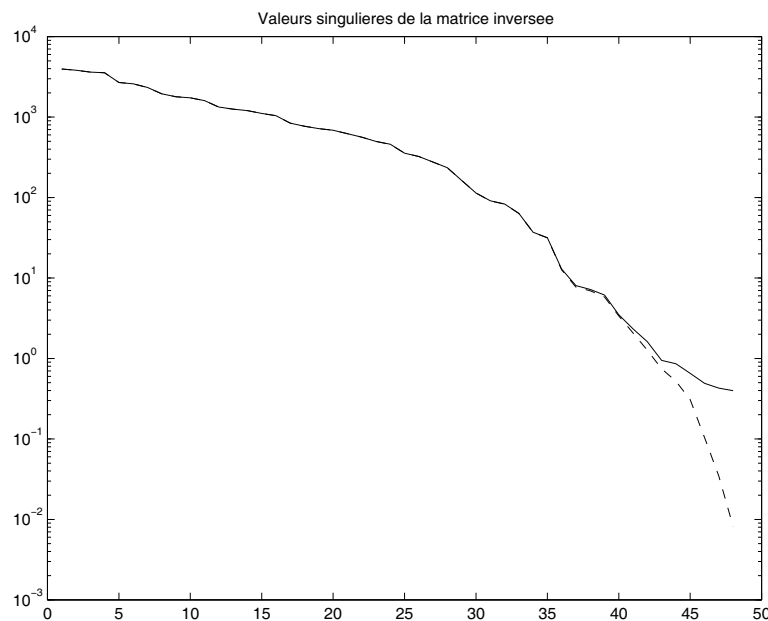


Figure 3-23 : valeurs singulières de ${}^T A_4 \cdot A_4$ avec (-) et sans pondération (- -)

3.4.3.1. Résultats numériques

Dans le Tableau 3-5 sont présentées les matrices Δ obtenues en comparant les modes propres réels identifiés aux modes exacts pour les 3 configurations. Les résultats sont satisfaisants, aucune erreur n'atteint 1 %.

Configuration	1			2			3		
Matrice Δ	0.9997	0.0000	-0.0003	1.0048	0.0026	-0.0006	0.9993	-0.0004	-0.0004
	0.0000	1.0000	0.0000	0.0026	1.0014	-0.0004	-0.0004	0.9996	-0.0002
	-0.0003	0.0000	1.0000	-0.0006	-0.0004	0.9998	-0.0004	-0.0002	0.9997

Tableau 3-5 : matrice Δ pour les 3 configurations de force non-linéaire

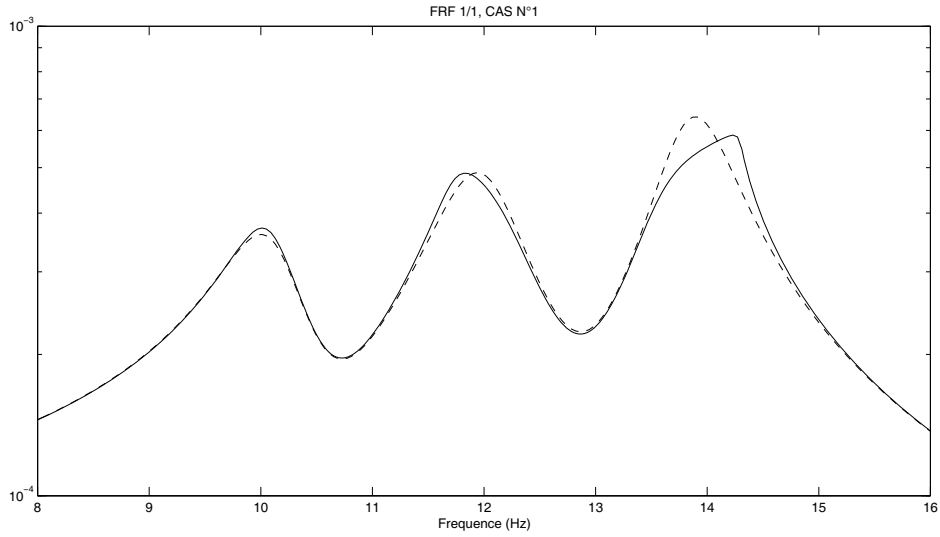


Figure 3-24 : FRF 1/1 linéaire (- -) et non-linéaire (-), cas n°1

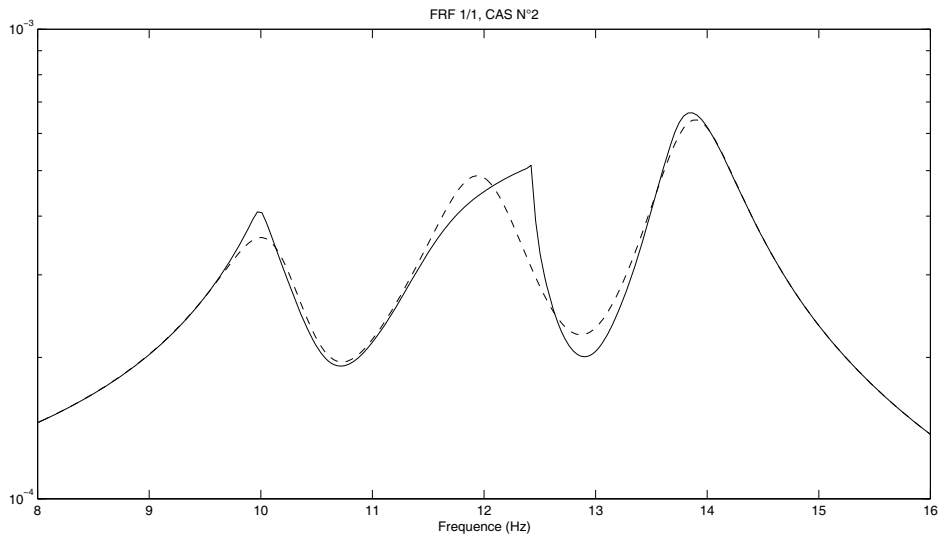


Figure 3-25 : FRF 1/1 linéaire (- -) et non-linéaire (-), cas n°2

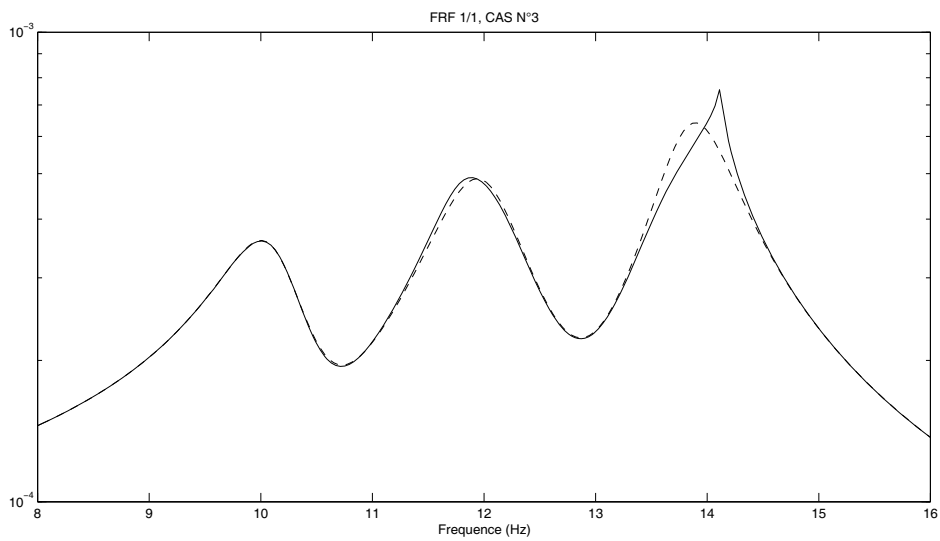


Figure 3-26 : FRF 1/1 linéaire (- -) et non-linéaire (-), cas n°3

Il s'avère en réalité que les non-linéarités simulées n'affectent pas la matrice de raideur associée au système, il n'y a donc pas de phénomène de "mélange" des modes. On peut par conséquent comparer directement les vecteurs propres réels identifiés aux vecteurs exacts. Ces résultats figurent dans les tableaux ci-dessous. Là encore, ils sont satisfaisants. L'erreur maximale sur les fréquences propres est de l'ordre de 3.10^{-4} , sur les MAC de 6.10^{-6} et sur les MSF de 3.10^{-4} .

Mode	Fréquence exacte (Hz)	Fréquence estimée (Hz)	MAC	MSF
1	10	10.0000	1.0000	0.0213
2	12	12.0000	1.0000	0.0040
3	14	14.0002	1.0000	0.0033

Tableau 3-6 : comparaison des modes réels exacts et estimés, cas n°1

Mode	Fréquence exacte (Hz)	Fréquence estimée (Hz)	MAC	MSF
1	10	9.9966	1.0000	0.2401
2	12	12.0006	1.0000	0.2231
3	14	14.0003	1.0000	0.0516

Tableau 3-7 : comparaison des modes réels exacts et estimés, cas n°2

Mode	Fréquence exacte (Hz)	Fréquence estimée (Hz)	MAC	MSF
1	10	9.9997	1.0000	0.0402
2	12	12.0000	1.0000	0.0001
3	14	14.0005	1.0000	0.0264

Tableau 3-8 : comparaison des modes réels exacts et estimés, cas n°3

La comparaison des modes complexes fournit des résultats semblables. On préfère présenter les matrices d'amortissement généralisé calculées à partir des modes complexes et réels identifiés (Tableau 3-9).

Les matrices obtenues sont tout à fait convenables, l'erreur maximale est inférieure à 2 %.

Configuration	1			2			3		
β	5.0009	4.9974	4.9994	5.0385	5.0697	5.0595	4.9965	4.9966	5.0105
	4.9974	5.0037	5.0026	5.0697	5.0269	4.9779	4.9966	4.9993	5.0002
	4.9994	5.0026	5.0025	5.0595	4.9779	5.0019	5.0105	5.0002	4.9984

Tableau 3-9 : matrice d'amortissement généralisé pour les 3 configurations de force non-linéaire

3.4.3.2. Résultats graphiques

Pour terminer cette étude sur simulation, on présente quelques synthèses de réponses non-linéaires. Les trois figures suivantes sont les diagrammes de Nyquist de la réponse au ddl 1 pour les 3 configurations de forces non-linéaires. Les réponses initiales (mesures simulées) sont représentées par des croix (+), les réponses recalculées par des cercles (o).

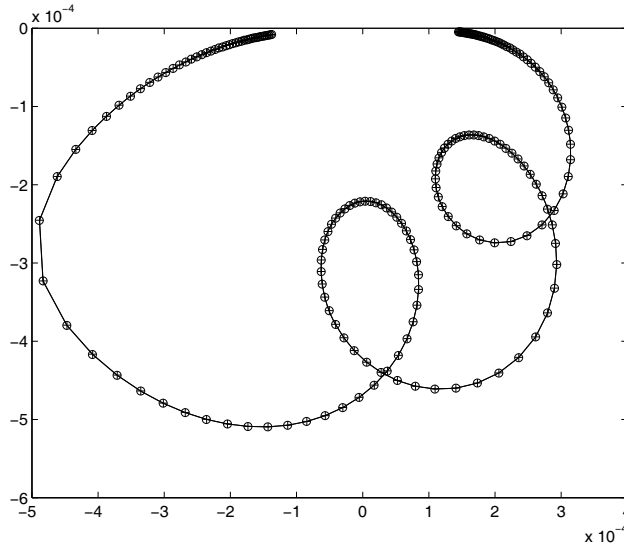


Figure 3-27 : réponse initiale (+) et synthétisée (o), cas n°1

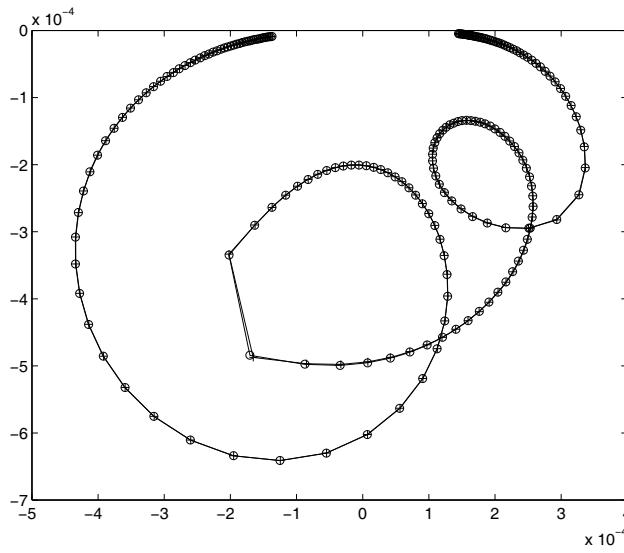


Figure 3-28 : réponse initiale (+) et synthétisée (o), cas n°2

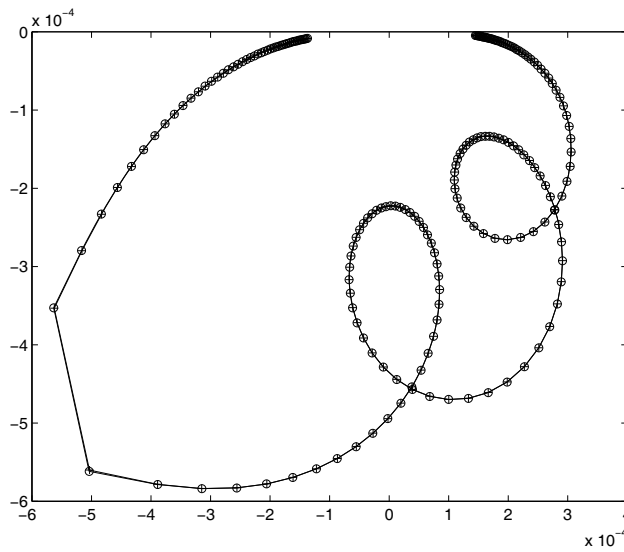


Figure 3-29 : réponse initiale (+) et synthétisée (o), cas n°3

3.4.4. Conclusion

L'étude de ce cas d'école relativement simple peut paraître triviale. Elle nous a néanmoins été d'une grande utilité pour la mise au point de la méthode globale non-linéaire, faisant notamment apparaître les problèmes de déficience de rang.

Elle nous permet de plus de quantifier la précision numérique de cette technique. On peut maintenant affirmer que les principales difficultés numériques ont été levées, et entreprendre sur des bases solides l'identification d'une structure non-linéaire réelle.

3.5. Validation de la méthode sur un cas-test expérimental

Comme nous l'avons déjà signalé, peu de travaux concernant les structures non-linéaires comportent des études expérimentales. Les études analytiques et numériques sont certes d'un grand intérêt pour comprendre des phénomènes ou mettre au point des techniques, mais la validation d'une méthode destinée à être appliquée sur des structures réelles doit passer par des tests expérimentaux. C'est pourquoi nous avons mis sur pied un banc d'essai particulièrement adapté à la validation de la méthode globale non-linéaire. Disposant au départ d'une structure quasiment linéaire connue, on a introduit des non-linéarités locales par contre-réactions et testé la méthode pour divers types et niveaux de forces non-linéaires.

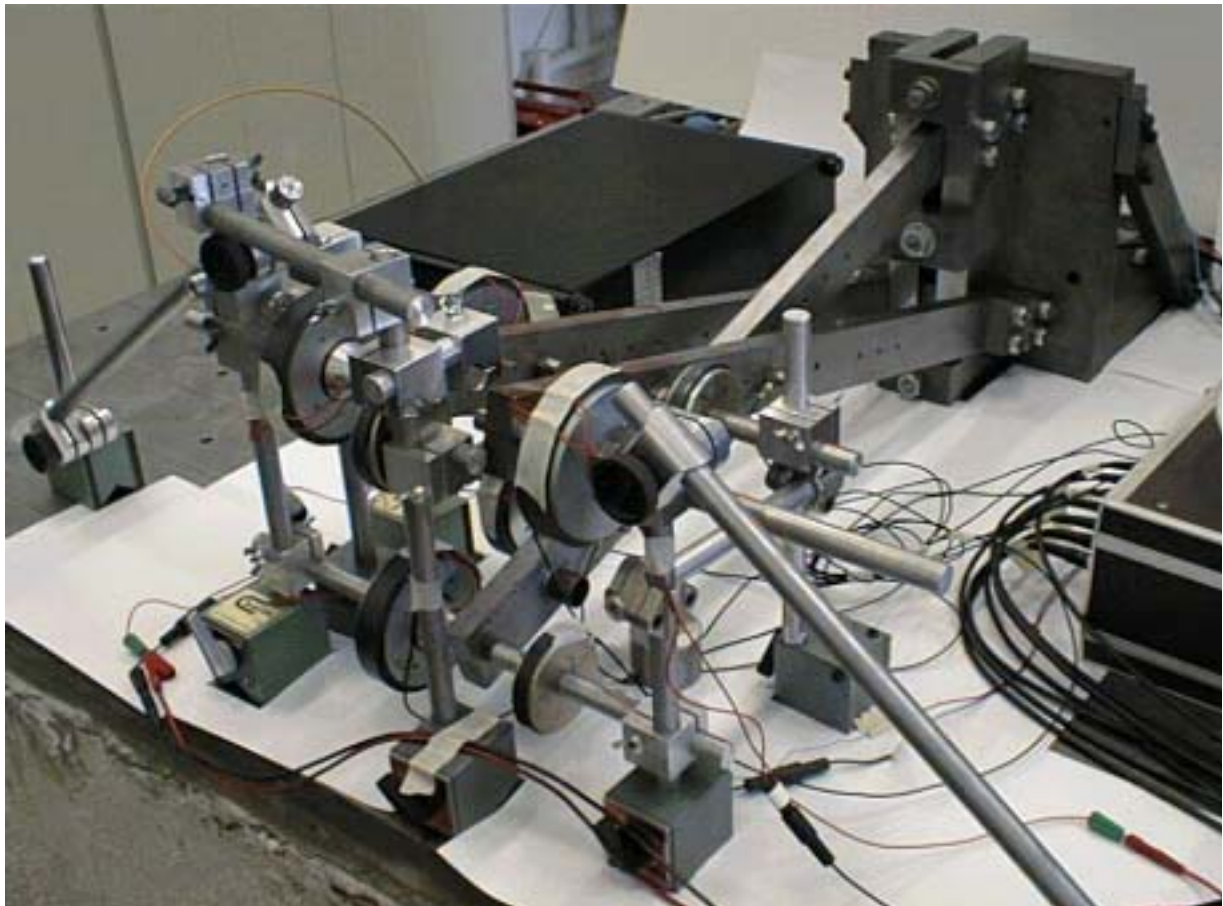


Figure 3-30 : vue d'ensemble du montage expérimental

3.5.1. Description du montage

Une particularité de la méthode globale non-linéaire est sa capacité d'identifier jusqu'à trois modes couplés. Nous avons donc étudié la structure la plus simple présentant trois modes couplés : il s'agit de trois poutres encastrées-libres (Figure 3-30). Leur disposition particulière était initialement prévue pour ajouter des éléments de couplage entre les poutres à mi-longueur, mais il s'est avéré que le couplage par la base était suffisant, l'encastrement n'étant pas parfaitement rigide.

3.5.1.1. Instrumentation

On montre Figure 3-31 un schéma des trois poutres. Les points numérotés de 1 à 6 sont tous instrumentés à l'aide d'accéléromètres. Trois excitations de référence sont appliquées aux points 1, 4 et 6. Une contre-réaction non-linéaire de raideur est générée au point 5 à l'aide d'un capteur de déplacement et d'une bobine excitatrice. De même, une contre-réaction d'amortissement est introduite au point 3 grâce à un capteur de vitesse et une bobine excitatrice.

L'ensemble de ces caractéristiques de mesure est résumé dans le Tableau 3-10.

On a de plus cherché à augmenter l'amortissement structural initialement très faible pour augmenter le couplage des modes. Des couronnes de cuivre solidaires des poutres sont placées à cet effet dans l'entrefer d'aimants fixés sur le bâti.

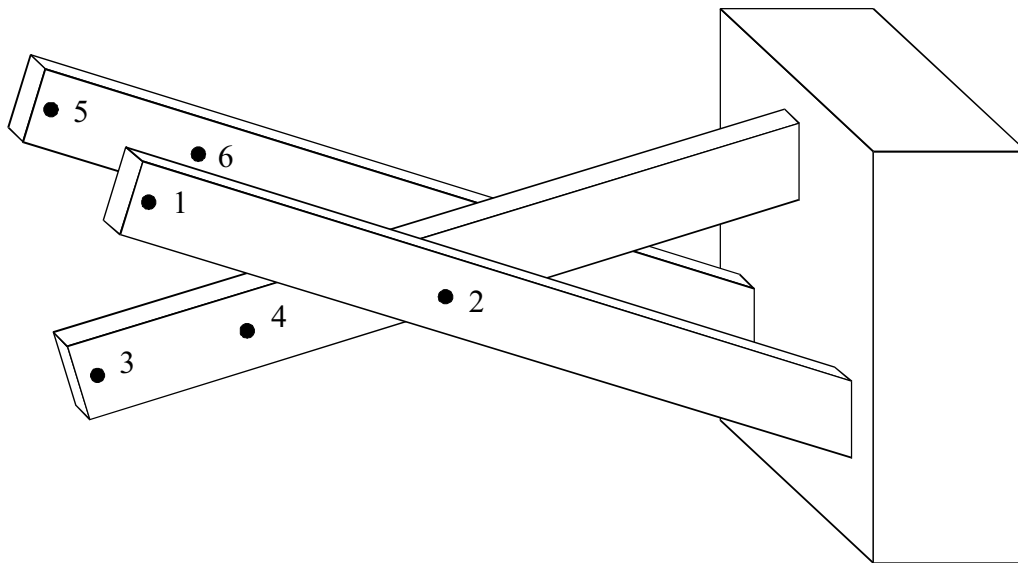


Figure 3-31 : schéma des trois poutres avec les 6 points mesurés

Point	1	2	3	4	5	6
Force de référence						
Contre-réaction non-linéaire						
Mesure d'accélération						
Mesure de vitesse						
Mesure de déplacement						

Tableau 3-10 : caractéristiques de mesure aux différents points

On peut se demander pourquoi trois forces de référence ont été utilisées. Or on a vu dans le premier chapitre de ce mémoire que pour approprier un mode parmi m modes couplés, il faut disposer d'au moins m excitations indépendantes. Cette règle ne se limite pas au cas de l'appropriation, et une identification correcte de modes couplés ne peut être obtenue que si le nombre d'excitations est du même ordre que le nombre de modes couplés, quelle que soit la technique d'identification considérée.

Comme on peut le constater sur la Figure 3-32, l'implantation de ces nombreux capteurs et actionneurs est relativement lourde à mettre en œuvre.

Précisons encore que les bobines d'excitation ne sont pas munies de cellules de force. En effet, elles sont fabriquées au LMA et des mesures de calibration ont permis de caractériser de façon très précise la relation force-courant de chacune d'elles. En introduisant dans le circuit d'alimentation une résistance étalon de 1Ω et en mesurant la tension à ses bornes, on a directement la force appliquée au coefficient de calibration près.

Cette mesure directe a nécessité quelques précautions particulières. Les charges délivrées par les accéléromètres sont amplifiées à l'aide d'une baie de modules Sferre AM 801, et les tensions qui en résultent subissent un léger déphasage dû aux filtres des amplificateurs. Ce déphasage est uniforme sur les 8 voies de la baie, mais n'apparaît pas sur les forces mesurées directement.

Nous avons donc caractérisé ce déphasage à l'aide d'une capacité étalon qui permet d'introduire des charges parfaitement connues à l'entrée des amplificateurs, et corrigé les mesures en conséquence.

3.5.1.2. Câblage

La câblage général du montage est représenté Figure 3-33 dans le cas où l'on applique des contre-réactions non-linéaires cubiques.

Les contre-réactions non-linéaires sont générées à partir des signaux mesurés (déplacement ou vitesse) en traversant successivement un amplificateur, un filtre passe-haut et deux multiplieurs. Le filtre passe-haut est utilisé pour éliminer la composante continue. Sa fréquence de coupure est réglée à 0.2 Hz. L'amplificateur permet de doser l'amplitude des forces non-linéaires et d'étudier la structure pour différents niveaux de non-linéarités, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

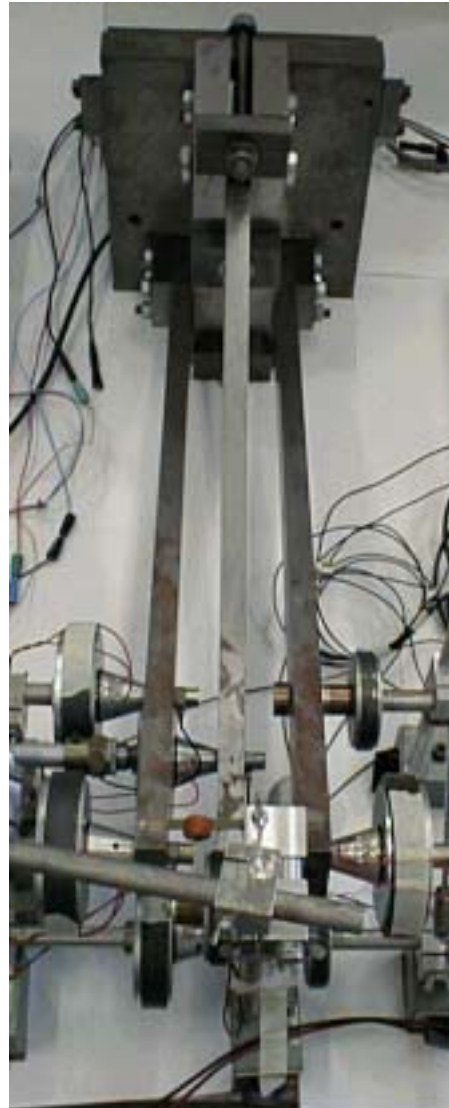


Figure 3-32 : vue de dessus

On présente Figure 3-34 une photographie du câblage des contre-réactions.

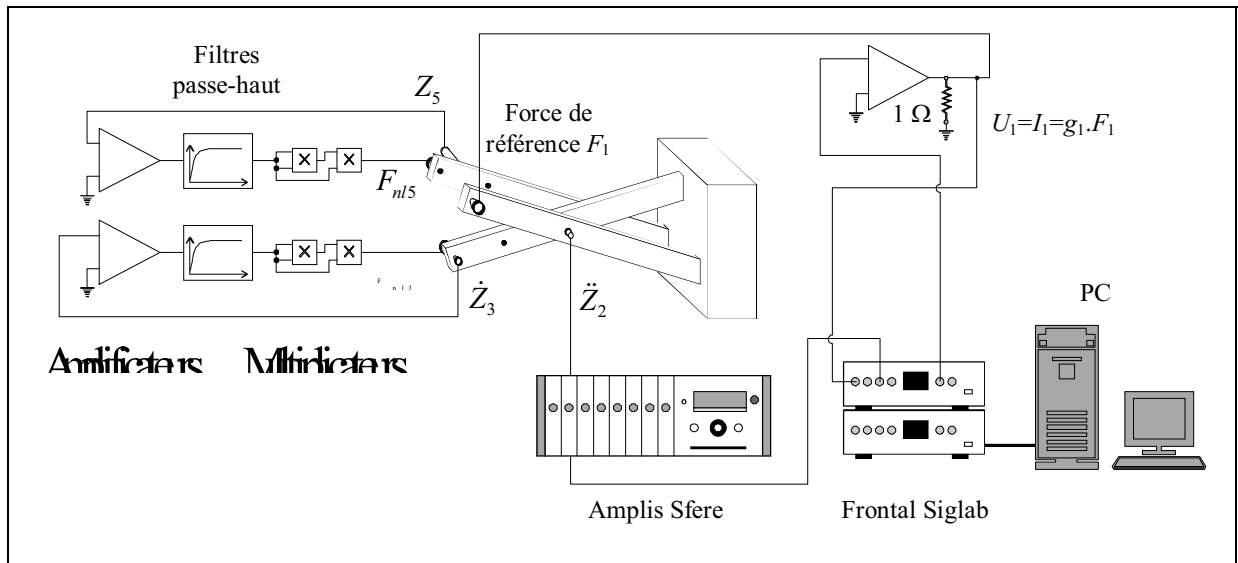


Figure 3-33 : schéma du câblage pour des contre-réactions cubiques

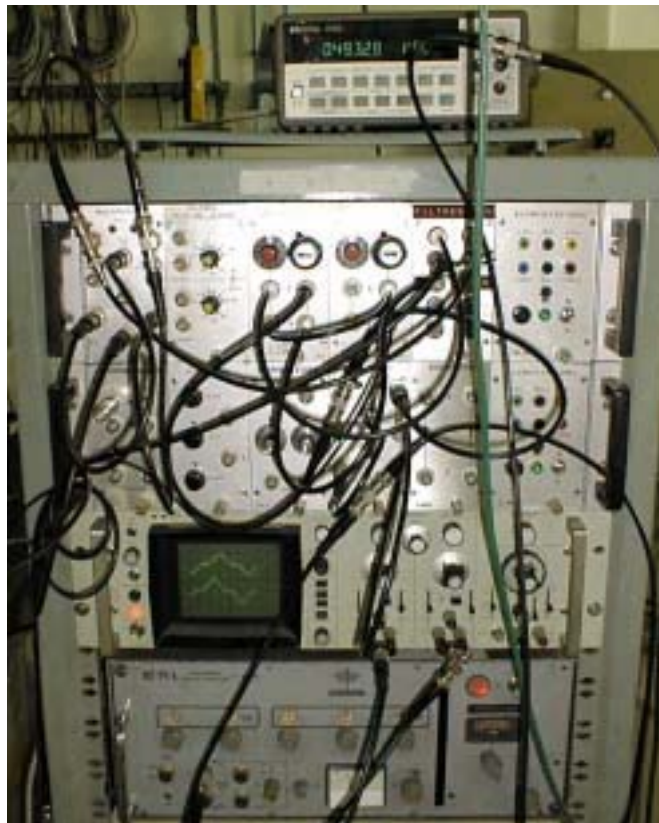


Figure 3-34 : câblage électrique des contre-réactions

3.5.1.3. Mesure

Les mesures ont été effectuées avec une chaîne d'acquisition Siglab 8 voies reliée à un PC. On a employé la technique du sinus pas-à-pas à force constante avec 80 points fréquentiels espacés de 0.05 Hz entre 33.5 et 37.5 Hz.

Un délai de 5 secondes entre deux mesures a été imposé pour assurer la stabilisation de la structure, portant le temps d'acquisition à environ 30 minutes pour chaque configuration d'excitation. Une série de mesure comportant trois excitations de référence nécessite donc 1h30.

3.5.2. Non-linéarités appliquées

Dans la méthode globale non-linéaire, les non-linéarités sont modélisées par des raideurs et amortissements cubiques, et ce pour deux raisons.

D'une part, il est communément admis que ce type de non-linéarité est souvent rencontré, et il n'est pas rare lors de mesures en sinus pas-à-pas de voir apparaître à l'oscilloscope une harmonique 3 se superposer au signal initial.

D'autre part, on a vu dans les développements théoriques présentés au paragraphe 3.3.3 que cette forme particulière menait à une expression simple des forces non-linéaires condensées.

Néanmoins, les perspectives d'application de cette méthode ne se restreignent pas au cas des non-linéarités cubiques, et on espère que ce modèle particulier permettra d'améliorer l'identification modale de structures présentant d'autres types de non-linéarités.

C'est pourquoi nous avons appliqué à la structure linéaire trois différents types de non-linéarités :

- raideur et amortissement cubiques,
- raideur et amortissement carrés impairs,
- frottement sec.

Les modèles mathématiques et représentations graphiques correspondants figurent dans le Tableau 3-11.

Nous allons maintenant présenter les mesures effectuées pour chacun de ces trois types.

3.5.2.1. Non-linéarités cubiques

Trois séries de mesure ont été effectuées en appliquant des non-linéarités cubiques de différentes amplitudes. On les nomme qualitativement "faibles", "moyennes" et "fortes". On entend par série de mesure les trois mesures relativement à chacune des forces de référence.

Les figures 3-35 et 3-36 montrent l'amplitude et le diagramme de Nyquist de la réponse mesurée au point d'excitation 1. Les courbes en trait pointillé représentent la réponse de la structure linéaire, celles en trait continu les réponses correspondant aux trois niveaux de contre-réactions cubiques.

Type	Modèle	Représentation
Raideur et amortissement cubiques	$\begin{cases} F_{nl5} = k_{nl} Z_5^3 \\ F_{nl3} = b_{nl} \dot{Z}_3^3 \end{cases}$	
Raideur et amortissement carrés	$\begin{cases} F_{nl5} = k_{nl} Z_5 Z_5 \\ F_{nl3} = b_{nl} \dot{Z}_3 \dot{Z}_3 \end{cases}$	
Frottement sec	$F_{nl5} = F_{frot} \frac{\dot{Z}_5}{ \dot{Z}_5 }$	

Tableau 3-11 : les trois types de non-linéarités appliquées

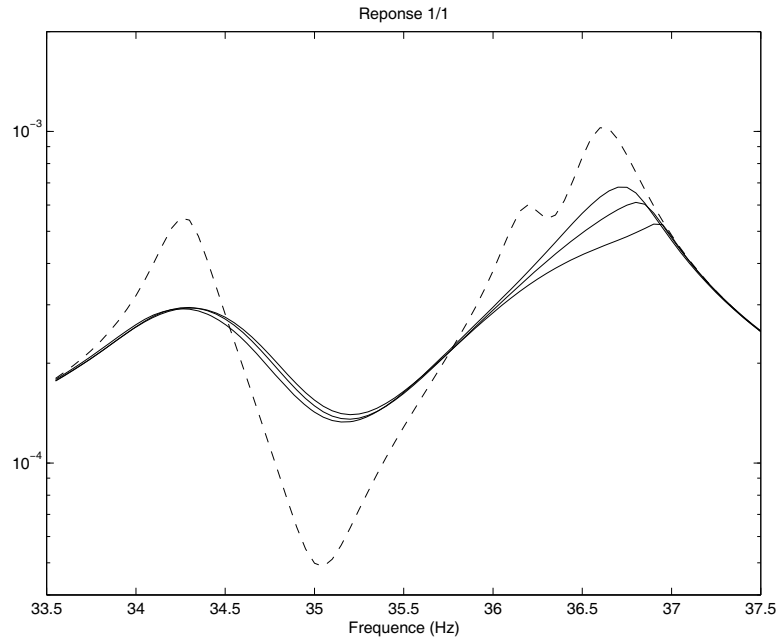


Figure 3-35 : amplitude de la réponse 1/1, structure linéaire (- -) et 3 niveaux de contre-réactions cubiques (-)

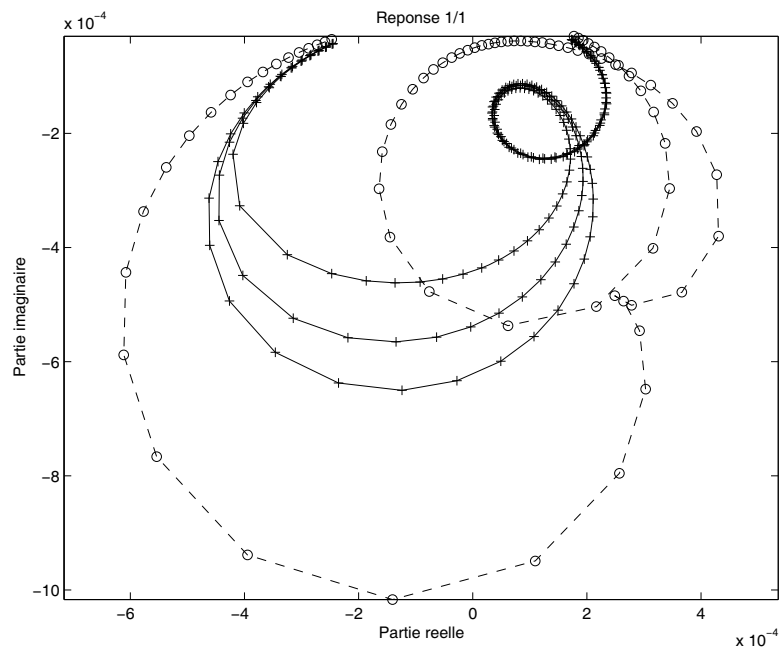


Figure 3-36 : Nyquist de la réponse 1/1, structure linéaire (○) et 3 niveaux de contre-réactions cubiques (+)

Ces courbes présentent des allures typiques de non-linéarités cubiques, mais on remarque qu'il y a également une forte augmentation de l'amortissement. Cela est dû au fait que l'on a utilisé pour alimenter les bobines de contre-réaction des amplificateurs Brüel & Kjaer de type 2706. Or ces amplificateurs ont une impédance de sortie faible, de l'ordre de quelques dizaines d'ohms. Ainsi le simple fait de les mettre sous tension fait circuler un courant dans les bobines en mouvement, générant une force électromagnétique d'amortissement. Une mesure du courant sur la plage de fréquence exploitée a de plus révélé que cette force était non-linéaire. Il en résulte que les forces non-linéaires réellement appliquées aux poutres ne sont pas

purement cubiques, mais sont la superposition des forces cubiques et de ces forces d'amortissement.

3.5.2.2. Non-linéarités carrées

Les mêmes mesures ont été effectuées avec des contre-réactions de puissance 2. On présente l'amplitude et le Nyquist de la réponse linéaire et des trois réponses non-linéaires.

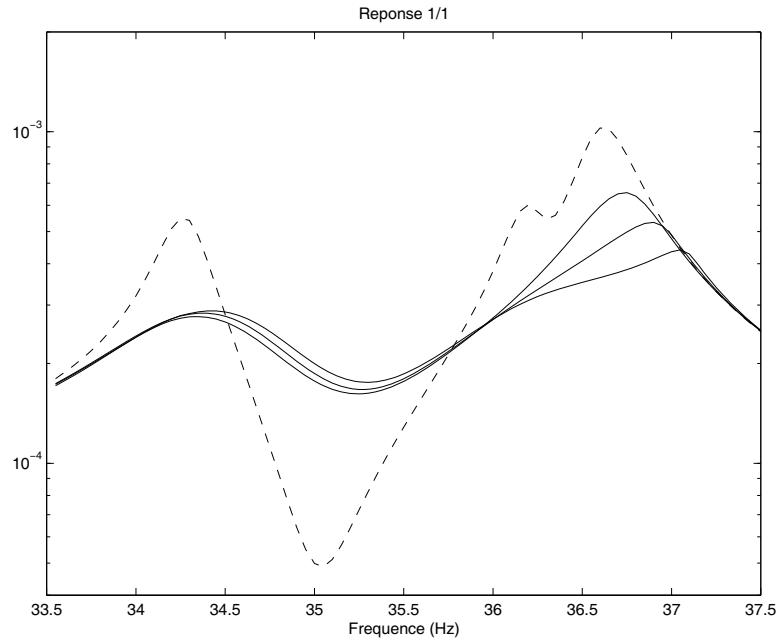


Figure 3-37 : amplitude de la réponse 1/1, structure linéaire (- -) et 3 niveaux de contre-réactions carrées (-)

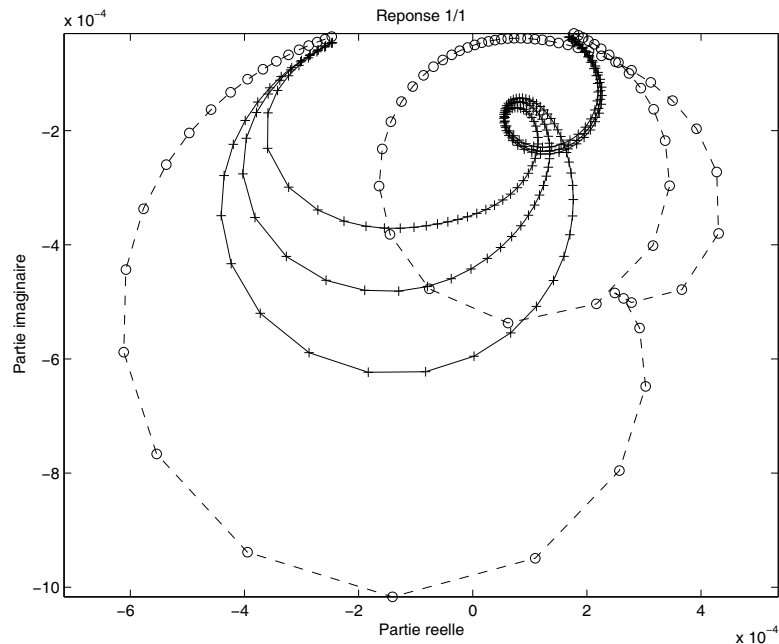


Figure 3-38 : Nyquist de la réponse 1/1, structure linéaire (O) et 3 niveaux de contre-réactions carrées (+)

On remarque que la forme générale des Nyquist est semblable à celle des contre-réactions cubiques. Il est donc légitime de penser que l'identification de ce type de non-linéarités avec un modèle cubique donnera de meilleurs résultats qu'une identification linéaire.

3.5.2.3. Frottement sec

Pour appliquer des forces de type frottement sec, nous mettons en contact avec la face supérieure de la troisième poutre une vis en Nylon solidaire d'une lame en bronze, elle-même reliée au bâti (Figure 3-39 et Figure 3-40). L'effort presseur de ce frotteur est "réglable" par rotation de la noix dans laquelle est serrée la lame de bronze.

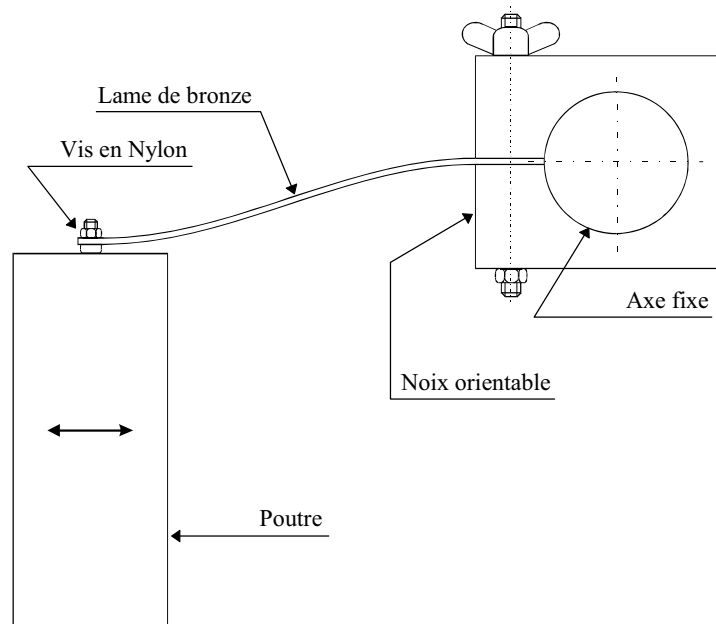


Figure 3-39 : schéma du frotteur avec le réglage de l'effort presseur

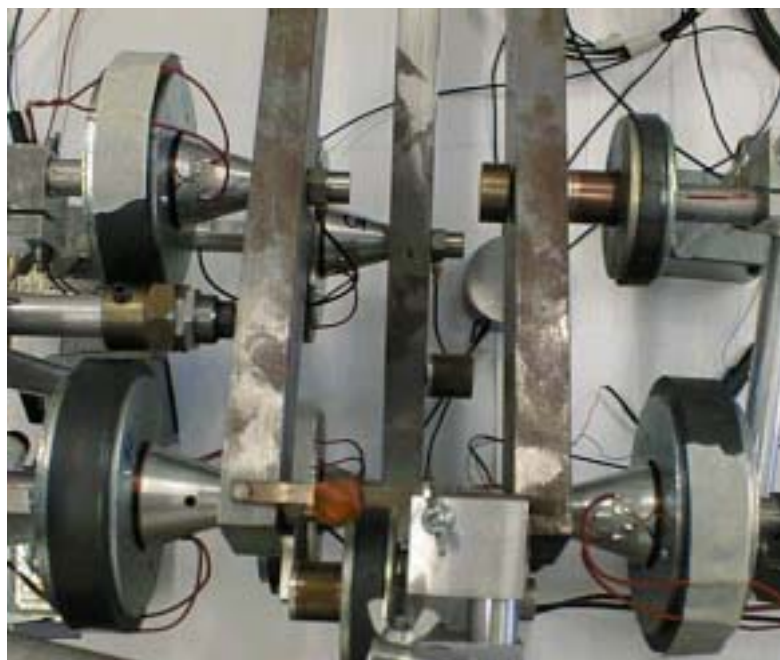


Figure 3-40 : détail de l'extrémité des trois poutres

Il est bien évident que les forces appliquées ne sont pas exactement conformes au modèle de Coulomb.

Deux niveaux de force non-linéaire seulement ont pu être appliqués. En effet, si l'on augmente trop l'effort presseur, il se produit des phénomènes d'adhérence dans les zones fréquentielles où l'amplitude est faible. On présente à nouveau Figure 3-41 et Figure 3-42 l'amplitude et le diagramme de Nyquist des réponses linéaire et non-linéaires.

Là encore, la forme globale des Nyquist n'est pas très éloignée de celle des non-linéarités cubiques.

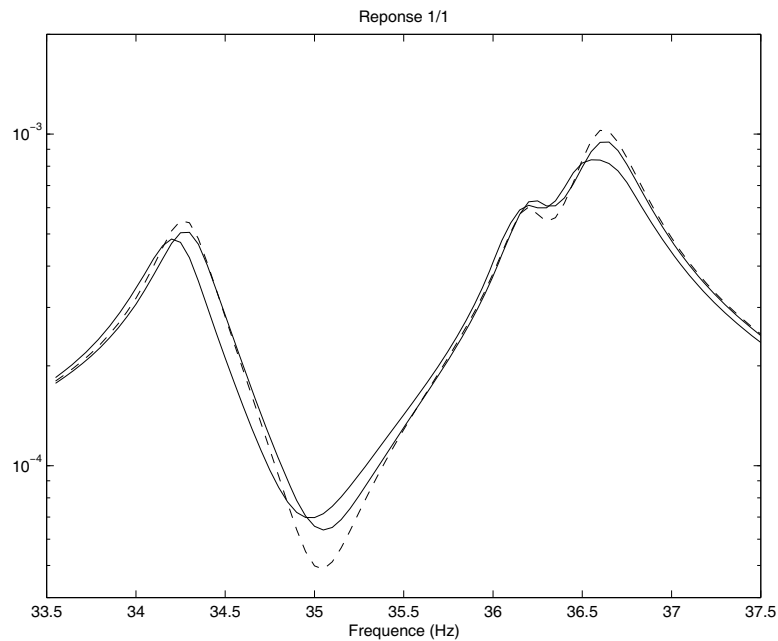


Figure 3-41 : amplitude de la réponse 1/1, structure linéaire (- -) et 2 niveaux de frottement (-)

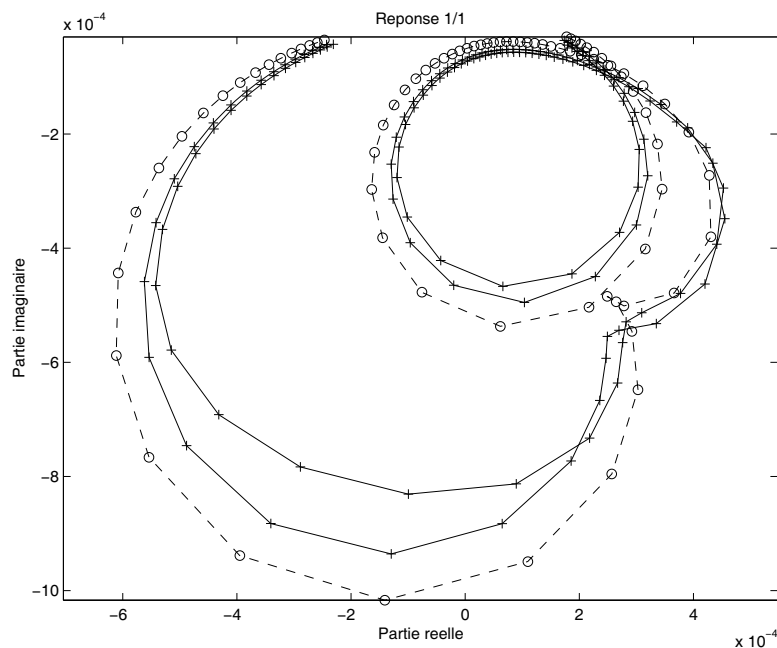


Figure 3-42 : Nyquist de la réponse 1/1, structure linéaire (O) et 2 niveaux de frottement (+)

3.5.3. Structure linéaire

L'identification des paramètres modaux de la structure linéaire est importante. Ses résultats constituent les données de référence auxquelles vont être comparés les résultats des identifications non-linéaires. Afin de s'assurer de leur validité, nous avons mené l'analyse modale avec trois méthodes différentes : la méthode globale linéaire, le lissage de fonctions de transfert et l'appropriation par le calcul.

La méthode globale linéaire employée est très simplement dérivée de la méthode globale non-linéaire : il suffit de tronquer le système $A_3 x = b_3$ (3.68) aux N_L paramètres linéaires. Il n'est alors plus besoin de procéder à la phase de pondération, et la synthèse de la réponse s'effectue sans avoir recours à la méthode itérative présentée en 3.3.6.

Pour le lissage de fonctions de transfert, la méthode linéaire du logiciel Modan a été employée [15].

Dans les trois cas, les trois excitations de référence ont été traitées simultanément.

Les fréquences et modes propres réels obtenus sont présentés dans les tableaux ci-dessous. On y donne également la distance relative entre les fréquences issues du lissage ou de l'appropriation et celles issues de la méthode globale. De même, les modes sont comparés par les critères de forme (MAC) et de norme (MSF) en considérant comme référence ceux issus de la méthode globale linéaire.

Mode 1				
Méthode		Globale linéaire	Lissage linéaire	Appropriation
Fréquence propre f_1 (Hz)		34.3244	34.2915	34.3022
Distance relative (%)			0.0960	0.0647
Vecteur propre réel Y_1	1	0.5155	0.4690	0.4895
	2	0.2045	0.1862	0.1943
	3	0.4858	0.4427	0.4621
	4	0.4119	0.3757	0.3921
	5	0.4472	0.4069	0.4244
	6	0.3843	0.3497	0.3645
MAC			1.0000	1.0000
MSF			0.9105	0.9500

Tableau 3-12 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 1 pour les 3 méthodes

Mode 2				
Méthode		Globale linéaire	Lissage linéaire	Appropriation
Fréquence propre f_2 (Hz)		36.2048	36.2028	36.2005
Distance relative (%)			0.0055	0.0118
Vecteur propre réel Y_2	1	0.3365	0.3322	0.3317
	2	0.1286	0.1272	0.1268
	3	-0.6315	-0.6202	-0.6193
	4	-0.5286	-0.5193	-0.5183
	5	0.3784	0.3711	0.3719
	6	0.3213	0.3149	0.3156
MAC			1.0000	1.0000
MSF			0.9824	0.9817

Tableau 3-13 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 2 pour les 3 méthodes

		Mode 3		
Méthode		Globale linéaire	Lissage linéaire	Appropriation
Fréquence propre f_3 (Hz)		36.6121	36.6105	36.6100
Distance relative (%)			0.0043	0.0058
Vecteur propre réel Y_3	1	0.7033	0.7033	0.6995
	2	0.2662	0.2662	0.2648
	3	-0.0468	-0.0516	-0.0501
	4	-0.0391	-0.0433	-0.0418
	5	-0.5067	-0.5037	-0.4986
	6	-0.4288	-0.4264	-0.4220
MAC			0.9999	0.9999
MSF			0.9979	0.9903

Tableau 3-14 : valeurs et vecteurs propres réels du mode 3 pour les 3 méthodes

Mise à part une différence notable sur la norme du premier mode, tous les résultats sont cohérents. On ne conservera comme paramètres de référence que ceux issus de la méthode globale linéaire.

Une représentation schématique des déformées modales peut être donnée en ramenant les trois poutres dans le même plan (Figure 3-43).

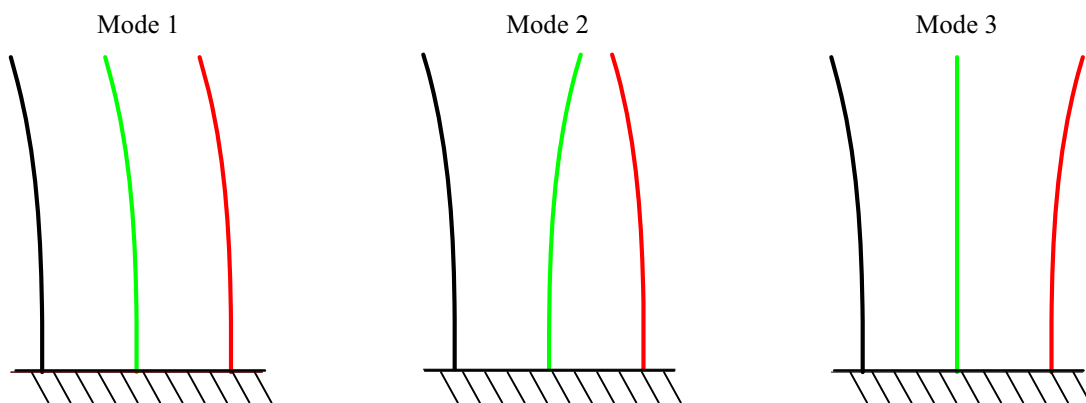


Figure 3-43 : représentation schématique des déformées modales des trois poutres

3.5.4. Structure non-linéaire

Connaissant maintenant les caractéristiques modales de la structure linéaire, nous pouvons examiner les résultats de l'identification non-linéaire.

Pour chaque type et niveau de non-linéarité, les paramètres modaux identifiés sont confrontés avec ceux de la structure linéaire de référence.

Les fréquences propres réelles sont comparées en utilisant le critère de distance relative, les modes propres réels en observant la matrice Δ définie par (3.86). Afin d'alléger la présentation, on ne donne que ses termes diagonaux notés δ_{ii} , i variant de 1 à 3.

Précisons que la distance relative sur les fréquences propres est donnée à titre indicatif, et ne saurait être considérée comme un critère de validité. Ces fréquences peuvent en effet se trouver modifiées par une variation de raideur, notamment lors de l'utilisation du frotteur.

Enfin, pour mettre en évidence l'amélioration de l'identification, nous avons effectué une identification par lissage linéaire. Les paramètres obtenus sont aussi comparés à ceux de la structure de référence.

3.5.4.1. Non-linéarités cubiques

Les résultats obtenus pour les trois niveaux de contre-réactions cubiques sont donnés ci-après. Les valeurs écrites en gras correspondent aux erreurs les plus importantes. On montre également les synthèses non-linéaires de la réponse 1/1.

Niveau faible

Mode	1		2		3	
	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.3959	34.3859	36.2524	36.2101	36.6660	36.6887
Distance relative (%)	0.2079	0.1792	0.1313	0.0147	0.1470	0.2092
δ_{ii}	0.9709	0.9997	1.0017	1.0599	1.0088	0.9238

Tableau 3-15 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités cubiques faibles

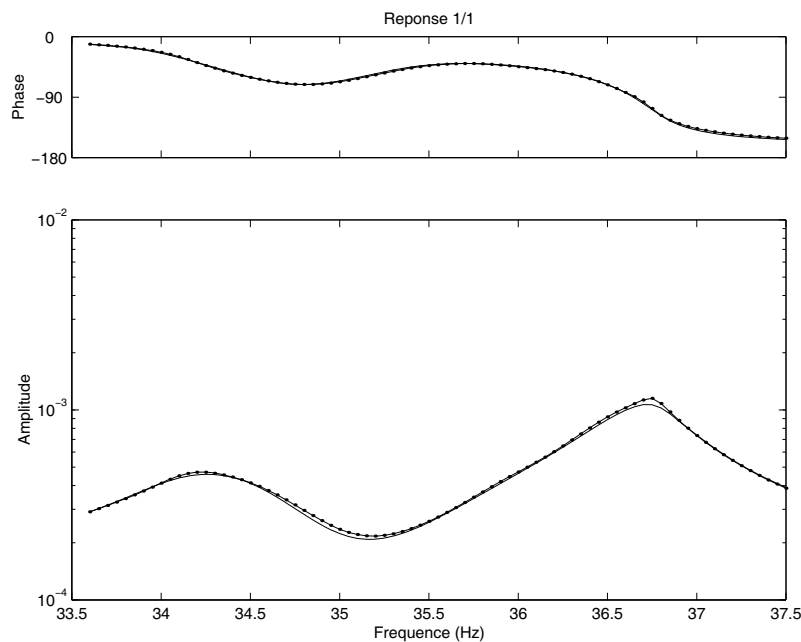


Figure 3-44 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), non-linéarités cubiques faibles

Niveau moyen

Mode	1		2		3	
	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.4122	34.4045	36.2667	36.2215	36.7009	36.7511
Distance relative (%)	0.2552	0.2332	0.1708	0.0462	0.2420	0.3796
δ_{ii}	0.9869	0.9893	1.0088	1.0673	1.0212	0.8885

Tableau 3-16 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités cubiques moyennes

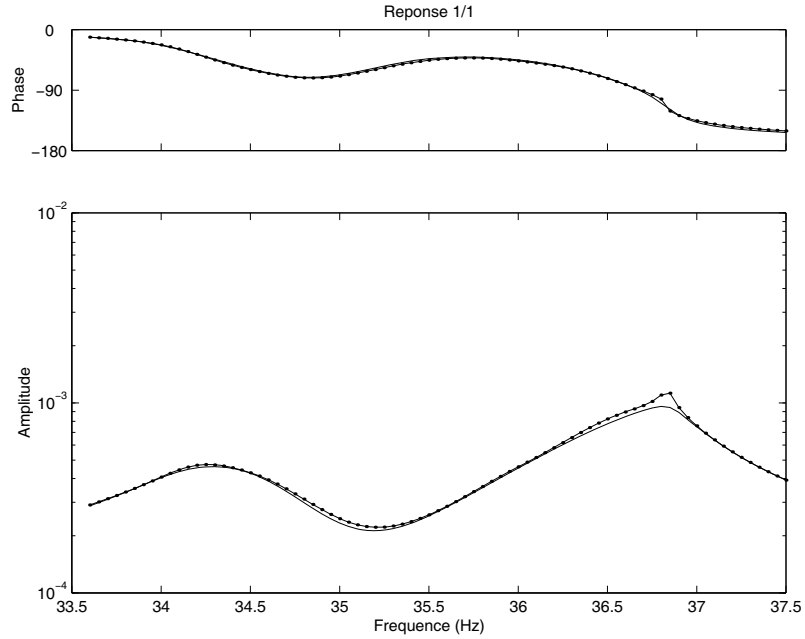


Figure 3-45 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), non-linéarités cubiques moyennes

Niveau fort

Mode	1		2		3	
	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.4157	34.4147	36.2728	36.2275	36.7504	36.8235
Distance relative (%)	0.2651	0.2631	0.1874	0.0626	0.3762	0.5773
δ_{ii}	1.0048	0.9640	1.0177	1.0985	1.0468	0.8460

Tableau 3-17 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités cubiques fortes

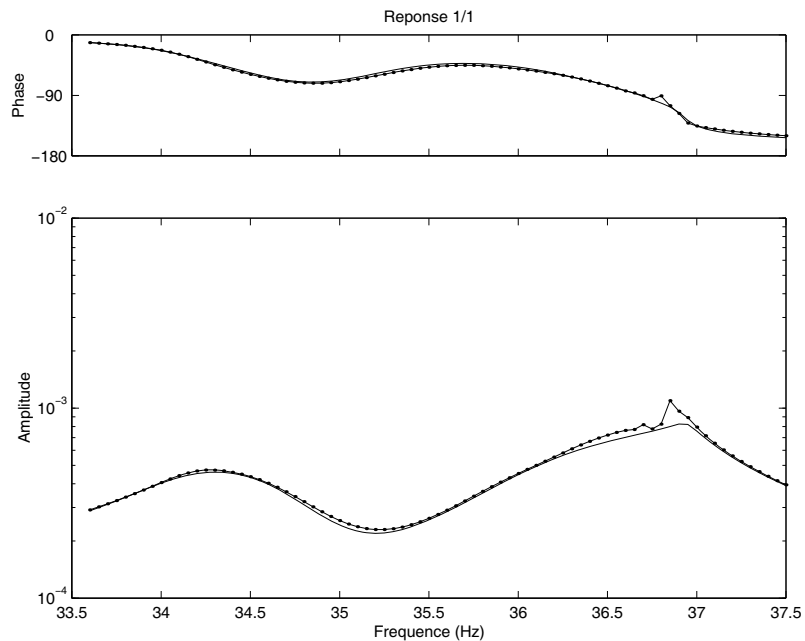


Figure 3-46 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), non-linéarités cubiques fortes

On constate que les fréquences estimées sont proches de celles de la structure de référence, quelle que soit la méthode d'identification utilisée. En revanche, les modes propres réels issus du lissage linéaire **s'éloignent** des modes de référence au fur et à mesure que le niveau des non-linéarités **augmente**, jusqu'à une erreur de 15 % pour le troisième mode. Les erreurs relatives aux modes issus de la méthode globale non-linéaire sont **toujours inférieures** et ne dépassent pas 5 %.

La réponse synthétisée ne se superpose pas correctement à la réponse mesurée, surtout lorsque le niveau des contre-réactions est fort. Cela peut s'expliquer par le fait que les forces appliquées ne sont pas **purements cubiques** (voir 3.5.2.1). Les paramètres non-linéaires estimés ne suffisent donc pas à représenter les non-linéarités de façon satisfaisante. La forme particulière de la réponse synthétisée correspondant au niveau fort provient d'une non-convergence du calcul itératif, confirmant l'hypothèse que les paramètres non-linéaires sont surestimés.

Malgré ce défaut, les paramètres modaux sont **mieux estimés** par la méthode globale non-linéaire. On montre ci-après à titre de comparaison les synthèses obtenues pour les trois niveaux de non-linéarité à l'aide du lissage linéaire du logiciel Modan. Ces synthèses sont effectivement de moins bonne qualité que celles de la méthode non-linéaire malgré les défauts de ces dernières.

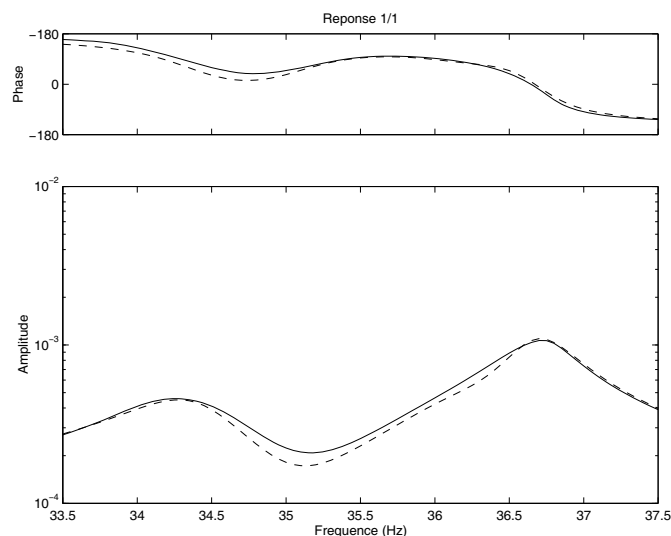


Figure 3-47 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse linéaire (Modan) (- -), non-linéarités cubiques faibles

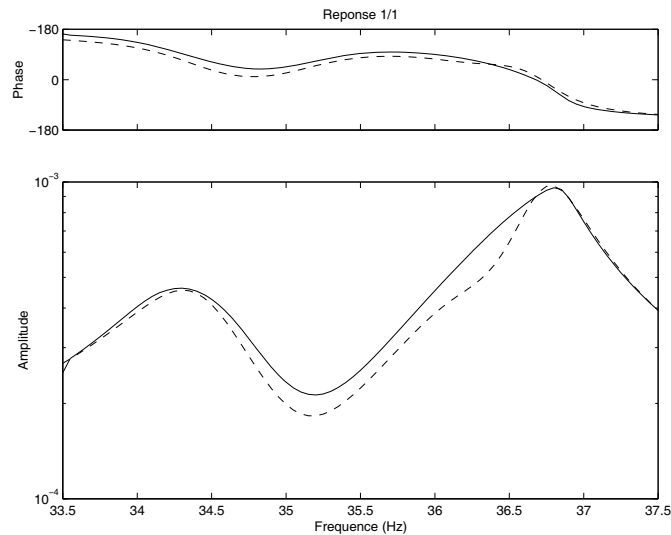


Figure 3-48 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse linéaire (Modan) (- -), non-linéarités cubiques moyennes

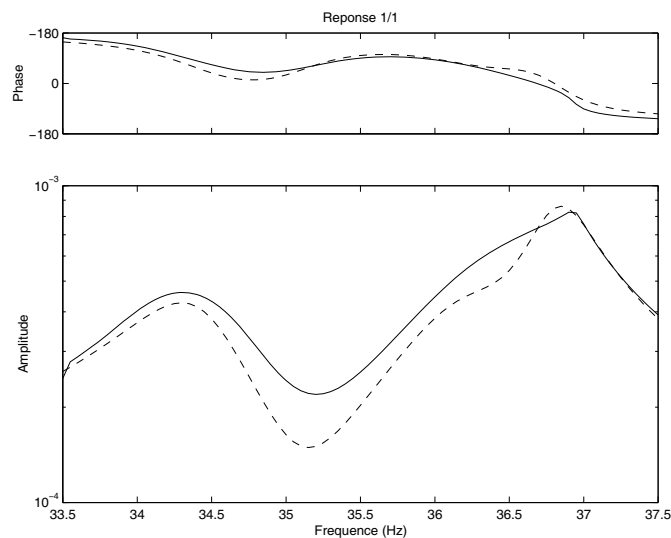


Figure 3-49 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse linéaire (Modan) (- -), non-linéarités cubiques fortes

3.5.4.2. Non-linéarités carrées

Les résultats relatifs aux non-linéarités de type carré impair sont analogues. On constate à nouveau que les modes estimés par lissage linéaire **s'éloignent** des modes de référence au fur et à mesure que le niveau des non-linéarités **augmente**.

Les modes issus de la méthode non-linéaire sont **moins proches** des modes de référence que dans le cas de contre-réactions cubiques, ce qui est tout à fait normal puisque le modèle de non-linéarités (cubique) **ne correspond plus** à la forme des forces non-linéaires (carrée). Ce phénomène est également visible sur les synthèses non-linéaires des réponses, de moins bonne qualité que dans le cas précédent. La réponse synthétisée pour le niveau moyen de contre-réaction montre clairement que les paramètres non-linéaires ont été surestimés, et on constate à nouveau un phénomène de non-convergence du calcul itératif pour le niveau fort.

Néanmoins, la distance entre les modes estimés et les modes de référence caractérisée par les termes δ_{ii} reste **faible**, excepté pour le niveau fort où elle atteint 10 % (mode 3).

Niveau faible

Mode	1		2		3	
Méthode	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.4160	34.4218	36.2535	36.2176	36.6873	36.7101
Distance relative (%)	0.2660	0.2836	0.1343	0.0353	0.2050	0.2676
δ_{ii}	0.9740	0.9984	1.0068	1.1149	1.0093	0.9431

Tableau 3-18 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités carrées faibles

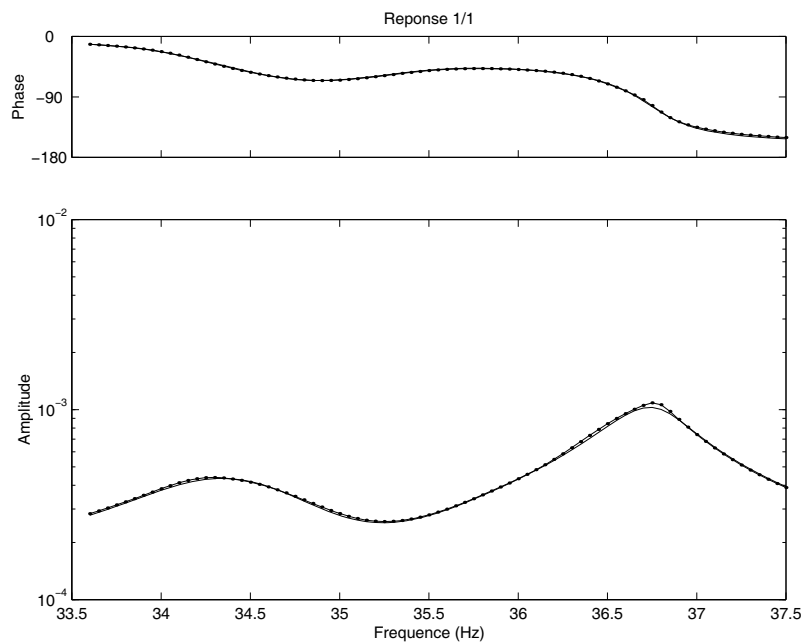


Figure 3-50 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), non-linéarités carrées faibles

Niveau moyen

Mode	1		2		3	
Méthode	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.4448	34.4579	36.2780	36.2369	36.7769	36.8510
Distance relative (%)	0.3496	0.3888	0.2017	0.0887	0.4481	0.6524
δ_{ii}	0.9973	1.0211	1.0144	1.1882	1.0388	0.8800

Tableau 3-19 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités carrées moyennes

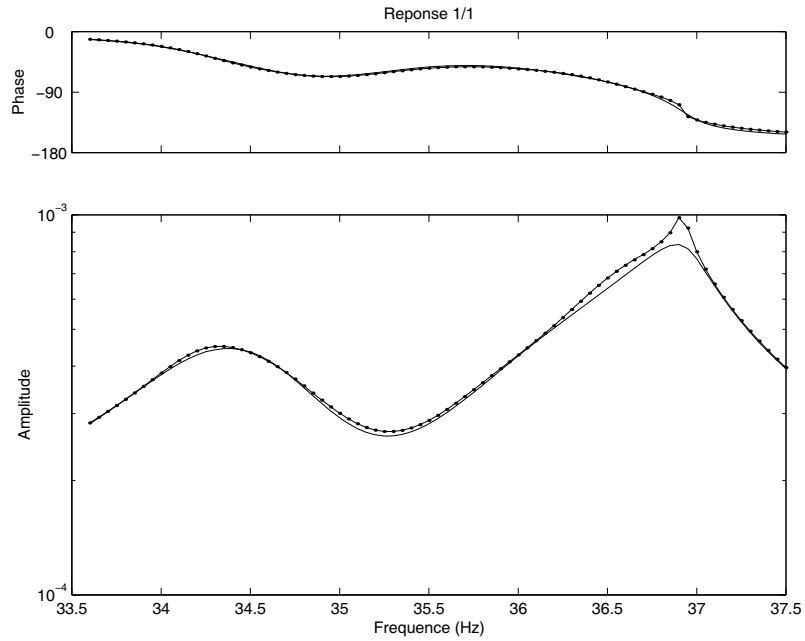


Figure 3-51 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), non-linéarités carrées moyennes

Niveau fort

Mode	1		2		3	
Méthode	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.4701	34.4883	36.2970	36.2499	36.8992	36.9952
Distance relative (%)	0.4227	0.4773	0.2540	0.1247	0.7781	1.0465
δ_{ii}	1.0212	1.0115	1.0241	1.3230	1.0951	0.9084

Tableau 3-20 : comparaison des paramètres modaux, non-linéarités carrées fortes

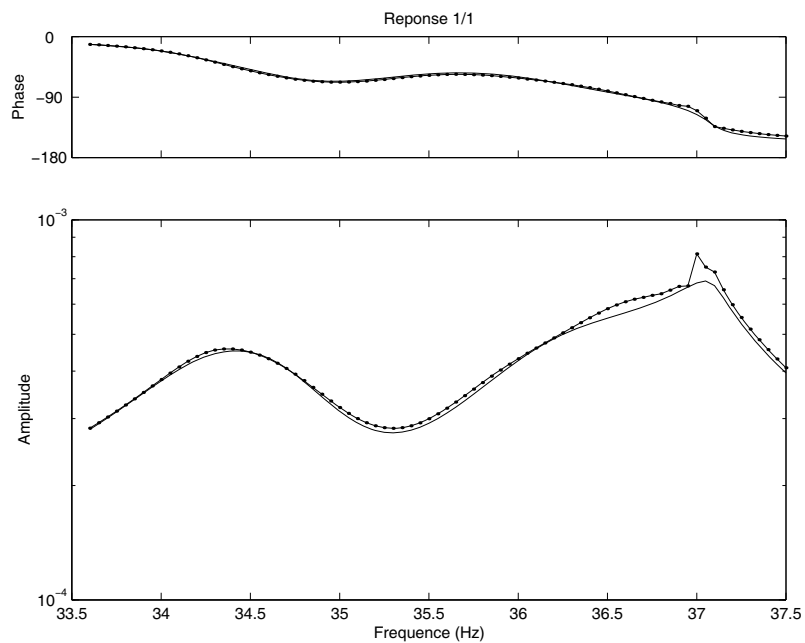


Figure 3-52 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), non-linéarités carrées fortes

3.5.4.3. Frottement sec

Bien que les réponses paraissent peu affectées par la présence de frottement, les modes estimés par lissage linéaire s'avèrent à nouveau relativement éloignés des modes de référence, alors que la distance des modes issus de la méthode non-linéaire n'excède pas 6%.

Niveau faible

Mode	1		2		3	
Méthode	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.3368	34.3196	36.2193	36.2223	36.6299	36.6161
Distance relative (%)	0.0361	0.0140	0.0402	0.0484	0.0485	0.0109
δ_{ii}	0.9865	0.9236	0.9857	0.9277	0.9998	0.9765

Tableau 3-21 : comparaison des paramètres modaux, frottement faible

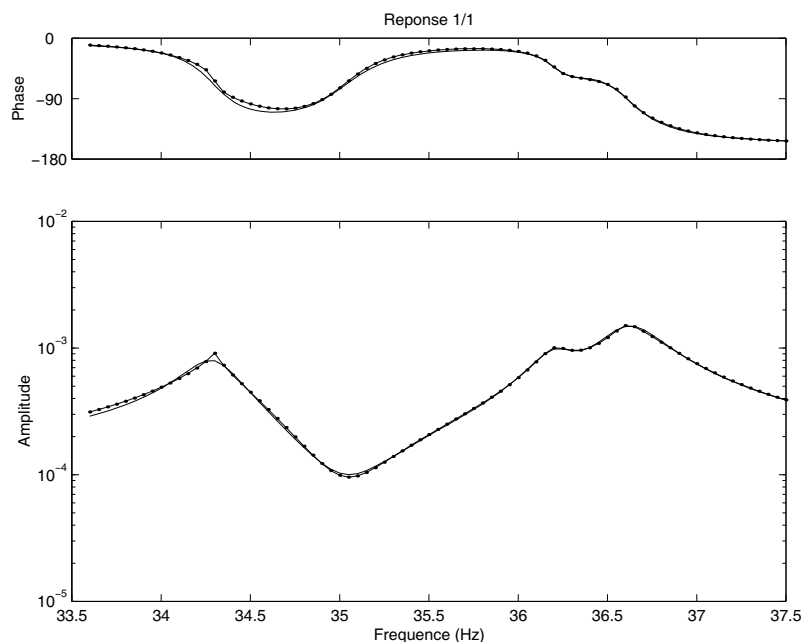


Figure 3-53 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), frottement faible

Niveau moyen

Mode	1		2		3	
Méthode	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire	Globale non-linéaire	Lissage linéaire
Fréquence propre f_v (Hz)	34.2565	34.2399	36.1740	36.1775	36.5878	36.5707
Distance relative (%)	0.1983	0.2462	0.0852	0.0753	0.0665	0.1132
δ_{ii}	0.9870	0.8766	0.9893	0.9412	0.9923	0.9951

Tableau 3-22 : comparaison des paramètres modaux, frottement moyen

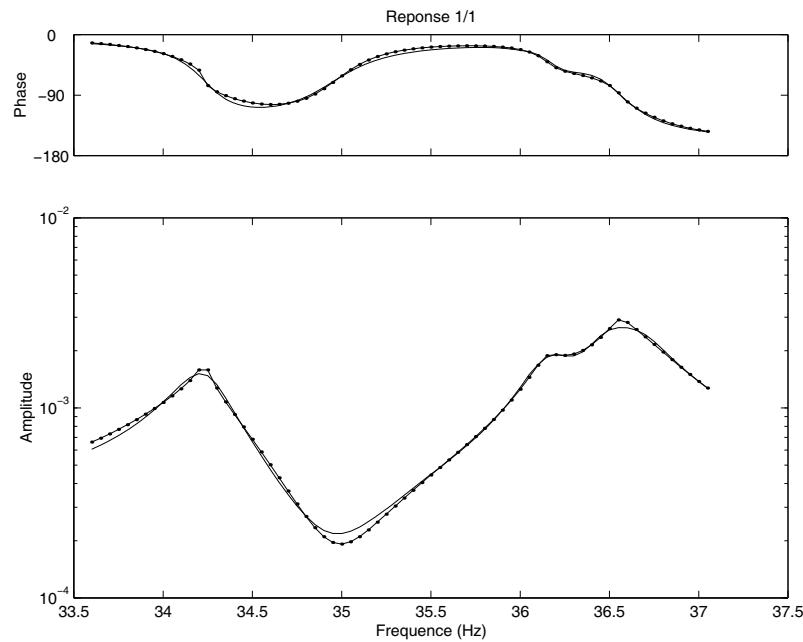


Figure 3-54 : réponse 1/1, mesure (-) et synthèse (•), frottement moyen

3.5.5. Conclusion

L'étude de ce cas-test expérimental a nécessité de nombreuses semaines de travail et une certaine persévérance. En effet, le montage initial comportait trois pots vibrants fournissant les excitations de référence et deux bobines de contre-réaction. L'excitation par pot n'a pas permis d'obtenir des mesures satisfaisantes, la liaison entre la bobine mobile et la structure étant sujette à des vibrations de haute fréquence très néfastes. Grâce au soutien de l'équipe technique, des bobines supplémentaires ont pu être fabriquées rapidement, conduisant à une réorganisation complète de l'instrumentation pour la mise en place des 5 excitations sans contact d'excellente qualité.

Ces efforts n'ont pas été vains, les résultats sont très satisfaisants.

En effet, les nombreuses mesures effectuées nous ont permis de montrer que la méthode globale non-linéaire améliore considérablement la qualité des modes estimés, et ce non seulement dans le cas de non-linéarités de raideur et d'amortissement cubiques, mais également en présence de raideur et d'amortissement carrés impairs et de frottement.

3.6. Conclusion

Une nouvelle méthode d'identification des structures faiblement non-linéaires a été présentée. Son objectif n'est pas de localiser et caractériser les non-linéarités de façon précise, mais de prendre en compte leurs effets sur la réponse de la structure afin d'améliorer l'estimation du système linéaire qui lui est associé. En effet, le nombre, le type et la localisation des non-linéarités présentes dans une structure ne sont en général pas connus.

Elle présente la particularité de pouvoir identifier jusqu'à trois modes couplés. La principale difficulté liée au traitement de plusieurs modes réside dans le nombre très important de

paramètres à identifier. Elle est levée en faisant appel à une technique de condensation des mesures sur une sous-base réelle représentative de l'espace modal étudié.

Un modèle particulier de forces non-linéaires ayant été choisi, l'identification des paramètres est effectuée par résolution d'un système linéaire surdéterminé. Des techniques de régularisation ont été mises en œuvre pour pallier aux éventuelles singularités.

L'étude d'une simulation numérique a permis de vérifier le fonctionnement de cette technique et de quantifier sa précision numérique.

Le cas-test expérimental est constitué d'une structure linéaire sur laquelle sont appliquées des contre-réactions non-linéaires locales, permettant ainsi de comparer les résultats obtenus à un système de référence. L'observation des réponses non-linéaires synthétisées confirme le fait que la modélisation utilisée ne suffit pas à représenter correctement l'effet des non-linéarités, néanmoins l'objectif principal est atteint. On a en effet montré que les résultats issus de la méthode globale non-linéaire sont toujours meilleurs que ceux provenant d'une méthode d'identification linéaire, bien que différents types de non-linéarité aient été appliqués.

Conclusion générale

Conclusion générale

Trois nouvelles méthodes relatives à l'identification modale des structures ont été présentées dans ce mémoire.

La première est une technique d'**appropriation expérimentale** basée sur une théorie issue du LMA, qui permet de mesurer directement sur une structure linéaire les paramètres modaux du système conservatif associé.

La seconde, utilisant la même théorie d'appropriation, effectue l'**extraction** des pulsations et modes propres **réels** du système conservatif associé à un système dynamique linéaire à partir des pulsations et modes propres **complexes** du système dissipatif.

Enfin, la troisième est une méthode **globale** d'identification de structures **faiblement non-linéaires** présentant des modes **couplés**.

L'appropriation expérimentale consiste en l'application sur une structure d'un jeu de forces d'excitation harmoniques à la pulsation propre réelle de l'un de ses modes. Les amplitudes et phases des forces sont déterminées pour éliminer la contribution des modes adjacents éventuellement couplés.

La théorie d'appropriation développée au LMA repose sur l'exploitation d'un critère de **résonance de phase** constituant un excellent détecteur de modes, même en présence de fréquences propres très voisines.

L'application de cette théorie à des mesures effectuées en multi-excitations aléatoires a donné lieu à l'élaboration d'une technique d'analyse modale appelée **appropriation par le calcul**. Agissant a posteriori sur les fonctions de réponse fréquentielles mesurées, elle permet d'estimer **rapidement** et de façon **quasi-systématique** les pulsations et vecteurs propres réels dans la bande analysée, à condition que les excitateurs soient en nombre suffisant et convenablement positionnés. Cet accès aux caractéristiques modales du **système conservatif** associé à la structure constitue un avantage par rapport aux techniques de lissage de fonctions de transfert vis-à-vis du recalage de modèle, ce dernier étant en général conservatif.

L'appropriation expérimentale s'appuie sur les résultats de l'appropriation par le calcul en ce qui concerne le nombre de modes présents et la première estimation de leur fréquence propre. Elle consiste ensuite en l'application d'un nombre de configurations indépendantes de forces harmoniques égal au nombre d'excitateurs. Ces mesures permettent de calculer le critère de résonance de phase et les forces appropriées du mode considéré. On peut alors ajuster la fréquence d'excitation et les tensions d'alimentation des excitateurs pour tenter de l'isoler.

Le fait d'effectuer les mesures en **excitation sinusoïdale** permet de s'affranchir des erreurs induites par l'excitation aléatoire et de concentrer l'énergie introduite sur le seul mode concerné. On peut donc avec des excitateurs de faible puissance qui modifient peu le comportement de la structure obtenir lors des mesures des niveaux de vibration du même ordre de grandeur que ceux de la structure réelle en fonctionnement.

Par ailleurs, les différentes configurations d'excitation sont déterminées de façon à ce que l'**amplitude** globale de vibration soit quasi **constante**. On s'assure ainsi que les éventuelles

non-linéarités travaillent de façon similaire pour chaque configuration. Le modèle linéaire identifié représente alors le comportement non-linéaire pour un niveau d'amplitude connu.

L'étude d'un **cas-test simulé** a mis en évidence le fait que l'appropriation de modes fortement couplés avec un nombre limité de forces d'excitation était **difficile**, mais un post-traitement des réponses appropriées a montré que l'on pouvait tout de même en extraire les vecteurs propres réels avec une **bonne précision**.

La caractérisation détaillée des moyens d'acquisition utilisés et l'application de l'appropriation expérimentale à une **structure industrielle** ont confirmé la validité de cette technique. Sa mise en œuvre à travers un logiciel souple et convivial a permis son intégration dans l'entreprise PSA Peugeot-Citroën, partenaire industriel de cette étude.

De nombreuses approches différentes existent dans la littérature pour traiter de l'**extraction des modes réels** du système conservatif associé à une structure à partir des **modes complexes** du système dissipatif. Qu'elles soient basées sur la construction de pseudo-matrices de masse et de raideur ou sur une rotation des modes complexes, aucune de ces méthodes ne semble s'être imposée.

Nous avons proposé une nouvelle technique basée sur l'**appropriation par le calcul**. L'idée générale est simple : on peut à partir des paramètres modaux du système dissipatif simuler par superposition modale des fonctions de réponse fréquentielle relatives à des degrés de liberté d'excitation quelconques. Ces fonctions peuvent ensuite être soumises au calcul d'appropriation, fournissant ainsi une estimation des pulsations et modes propres réels.

Un point essentiel à résoudre concernait le **choix des degrés de liberté d'excitation**. On a choisi de baser ce choix sur le **critère de qualité d'appropriation**. Deux méthodes de sélection ont été proposées : la sélection d'une configuration d'excitation unique appropriant au mieux tous les modes et la sélection d'une configuration optimale par mode.

Une recherche itérative des **pulsations propres réelles** est effectuée en utilisant le **paramètre de résonance de phase**. Le calcul des **forces appropriées** permet ensuite de déduire les **modes propres réels** des réponses appropriées.

Un calcul aux moindres carrés exploitant la projection des modes complexes sur la base des modes réels donne accès à une estimation de la **matrice d'amortissement généralisé** complète. Cette dernière permet enfin de **reconstruire** les modes complexes afin de les comparer aux modes initiaux.

Une validation de cette méthode sur un **système simulé** a été présentée. Elle correspond à un cas particulièrement sévère, plusieurs modes étant fortement couplés par l'amortissement. Les résultats sont satisfaisants. Les erreurs d'estimation sont beaucoup plus faibles que celles relatives à la méthode dite standard applicable en présence d'amortissement proportionnel.

Un **cas-test expérimental** a également été présenté. Il est constitué d'une structure linéaire présentant trois modes de fréquences proches, sur laquelle des amortissements locaux ont été introduits. On a montré que bien que l'augmentation d'amortissement modifiait de façon notable les modes complexes, les modes réels extraits variaient très peu.

Enfin, l'application de notre méthode à une **structure industrielle** a permis de s'assurer qu'elle est utilisable dans un contexte classique de mesures en vibrations du point de vue du nombre de degrés de liberté et de modes mesurés.

Une nouvelle méthode d'identification des **structures faiblement non-linéaires** fait l'objet du troisième et dernier chapitre de ce mémoire.

Son objectif est d'améliorer l'identification modale de telles structures en conservant une approche classique et sans chercher à identifier les non-linéarités de façon précise. En effet, on ne connaît dans la majorité des cas ni leur type, ni leur nombre, ni leur localisation.

Une des particularités de cette technique est qu'elle permet de traiter simultanément plusieurs modes couplés, d'où son appellation de **méthode globale**. Elle met en œuvre à cet effet une **condensation** des réponses mesurées sur un nombre de degrés de liberté fictifs égal au nombre de modes considérés. Cette procédure conduit à une réduction importante du nombre de paramètres non-linéaires à identifier, principal obstacle lors de l'identification de modes couplés.

Le choix d'un **modèle particulier** de non-linéarité conduit à une expression simple des forces non-linéaires condensées. L'estimation des paramètres non-linéaires correspondants se ramène alors à la résolution d'un **système linéaire surdéterminé**. On a montré que le nombre de paramètres non-linéaires à identifier pouvait être inférieur au nombre de non-linéarités, rendant le système à résoudre **singulier**. Cette difficulté a été levée par la mise en œuvre de techniques de **régularisation**.

Après avoir identifié le modèle non-linéaire, on en déduit les **modèles linéaires** conservatif et dissipatif associés à la structure. De plus, une **synthèse** des réponses non-linéaires permet de qualifier le modèle obtenu par comparaison avec les réponses mesurées.

Cette nouvelle méthode a été validée sur un **système simulé**, puis testée sur une **structure réelle**. Des non-linéarités locales ont été appliquées par contre-réaction à la structure initialement linéaire. On a ainsi pu montrer que les modèles linéaires identifiés par la méthode présentée étaient **plus proches** du système de référence que ceux issus d'une technique d'identification linéaire classique, bien que **différents types** de non-linéarités aient été considérés.

Améliorations possibles et perspectives de recherche

Comme tout travail de recherche, on ne saurait affirmer que celui-ci est exhaustif et définitif. Nous allons donc proposer pour chacune des méthodes présentées quelques idées pouvant donner lieu à des études supplémentaires.

L'**appropriation par le calcul** est certainement parmi les techniques étudiées la plus aboutie. Cela provient essentiellement du fait qu'elle a fait l'objet d'une thèse précédente, et qu'elle a pu depuis être testée sur de nombreuses structures, chaque nouveau cas de figure suggérant des améliorations possibles.

Nous avons tout de même rencontré une difficulté qui n'est pas encore résolue. Nous avons vu que le paramètre de résonance de phase constituait un excellent détecteur de modes. Cette qualité s'explique par le fait que son calcul prend en compte l'ensemble des degrés de liberté mesurés. Mais ce caractère global peut conduire à la non-détection de modes lorsque ceux-ci sont très locaux et ne répondent que sur quelques ddl. On observe en général une allure du paramètre qui suggère effectivement la présence d'un mode, mais sans que ce paramètre ne s'annule. Il est alors impossible de mener à bien le calcul d'appropriation, la fréquence propre et l'amortissement réduit étant respectivement estimés par l'intersection du paramètre avec l'axe des abscisses et sa pente à cette intersection. Plusieurs améliorations peuvent être envisagées pour pallier à ce défaut :

- ✓ une sélection manuelle des degrés de liberté retenus pour le calcul d'appropriation peut être effectuée par observation des FRF autour de la fréquence concernée,
- ✓ cette sélection peut aussi être automatisée, ou semi-automatisée, le logiciel proposant une pré-sélection modifiable par l'opérateur,
- ✓ si le nombre de modes locaux non-identifiés est faible, on peut soustraire des réponses la contribution des autres modes et traiter les différences obtenues par une technique de lissage.

Une autre amélioration possible de l'appropriation par le calcul est son couplage systématique avec un lissage de fonctions de transfert. En effet, le calcul des forces appropriées et par voie de conséquence des modes propres réels s'effectue uniquement sur un point fréquentiel de mesure. Cela peut conduire à des erreurs importantes en présence de réponses bruitées. En revanche, la fréquence propre et l'amortissement réduit estimés par interpolation sur plusieurs points fréquentiels sont plus fiables. On peut donc envisager un lissage automatique des FRF autour des fréquences propres en fixant les valeurs propres complexes à partir des résultats de l'appropriation. On ne recalculerait alors que les numérateurs, liés aux modes propres complexes et aux masses généralisées.

L'**appropriation expérimentale** doit dans les mois à venir être mise en application sur un nombre plus important de structures. Il est vraisemblable que sa confrontation à des cas variés

fera apparaître des manques et entraînera des améliorations. Parmi les améliorations techniques possibles, on peut d'ores-et-déjà soumettre les suivantes :

- ✓ l'application des forces appropriées sur un balayage fréquentiel autour de la fréquence propre d'un mode permettrait d'estimer l'amortissement et la masse généralisés correspondants, de la même façon qu'en appropriation par le calcul,
- ✓ la mise en œuvre de l'appropriation expérimentale n'est possible qu'après avoir effectué des mesures préliminaires, par exemple en multi-excitations aléatoires décorrélées, suivies d'une appropriation par le calcul ; cette phase peut s'avérer inutile sur des structures simples pour lesquelles une observation des réponses à l'oscilloscope suffit à déterminer approximativement les fréquences propres ; il faudrait alors rendre l'appropriation expérimentale possible sans données modales initiales.

Une perspective de recherche importante va s'ouvrir avec le développement des systèmes de mesure vibratoire par voie optique. La technique dénommée ESPI (*Electronic Speckle Pattern Interferometry*) permet de mesurer via une caméra CCD spécifique la réponse d'une structure sous excitation harmonique. Le nombre de degrés de liberté mesurés est alors sans commune mesure avec celui de la technique accélérométrique, puisqu'on passe de quelques dizaines à plusieurs centaines de milliers. En revanche, on est actuellement limité à la mesure des déplacements dans une seule direction dite de sensibilité, portée en chaque point par la bissectrice des rayons incident et réfléchi par la structure.

Un tel système est actuellement opérationnel dans les laboratoires de l'entreprise PSA Peugeot-Citroën. De nombreux essais ont eu lieu, mais la majorité portent sur des structures présentant des modes isolés soumises à une seule force d'excitation.

L'application de ce type de mesure à des modes couplés ne pourra se faire qu'en utilisant l'appropriation expérimentale. On aura donc recours à une double mesure : une mesure accélérométrique limitée au strict minimum pour mener à bien cette appropriation, et une mesure optique pour caractériser les modes excités de façon précise. Les modes mesurés par voie optique n'étant pas normés, il faudra les relier aux mesures accélérométriques. On sera donc amené à localiser dans l'image les pixels correspondants aux points instrumentés, et à prendre en compte la direction de sensibilité en chacun de ces points. Si le nombre et le placement des excitateurs ne permet pas d'approprier correctement certains modes, on peut envisager d'effectuer une correction des mesures optiques à l'aide d'une technique similaire à celle présentée dans ce mémoire.

L'exploitation des modes obtenus dans des techniques de recalage de modèle nécessitera de relier les pixels des images à la géométrie de la structure. On pourra alors limiter la description des modes aux points correspondant aux noeuds du maillage élément-fini. Une technique simple permettant ce lien entre image et modèle est utilisée dans l'entreprise PSA Peugeot-Citroën, elle est basée sur une saisie manuelle de certains points caractéristiques conduisant à l'estimation d'une matrice de localisation du modèle dans l'espace. On peut imaginer de tester des méthodes différentes, exploitant par exemple une image initiale de la structure au repos éclairée par un réseau de franges. En effet, une telle image permet de reconstruire la forme tridimensionnelle de la pièce illuminée à l'aide de techniques basées par exemple sur la transformée de Fourier ou la méthode des ondelettes.

Enfin, on peut imaginer à plus long terme d'établir une relation directe entre les mesures optiques et l'excitation de la structure, on entend par là l'utilisation des mesures optiques pendant la phase d'appropriation. Cela sous-entend que l'on serait capable pour chaque

configuration de force appliquée d'extraire en quelques secondes et de façon automatique les amplitudes et phases des réponses de la structure. Le recalage de la fréquence et le calcul des nouvelles configurations de force et de tension seraient similaires à ceux de l'appropriation expérimentale actuelle, excepté le fait qu'ils prendraient en compte un nombre de degrés de liberté plus important. L'avantage d'une telle approche est la minimisation de l'instrumentation physique de la structure, quelques accéléromètres étant tout de même nécessaires à la normalisation des modes mesurés. Bien entendu, cette idée suppose un dialogue permanent entre les moyens d'excitation, d'acquisition optique et de calcul. Cela paraît difficilement envisageable avec le matériel actuel, mais ne semble pas techniquement impossible.

Concernant la méthode d'**extraction des paramètres modaux du système conservatif à partir de ceux du système dissipatif**, il est également vraisemblable que son application à des cas plus variés fera apparaître des besoins d'amélioration.

D'autre part, cette méthode est actuellement mise en œuvre dans un programme simple qui pourrait faire l'objet d'une mise en forme plus conviviale.

Signalons par ailleurs qu'une étude de la sensibilité de cette méthode au bruit constituerait un complément important de sa caractérisation. On peut envisager d'introduire du bruit sur les données d'entrée, à savoir les paramètres modaux du système dissipatif, ou de simuler des FRF bruitées à partir de paramètres exacts et d'en extraire par lissage un nouveau système dissipatif.

En outre, on a vu que cette méthode est particulièrement efficace lorsque le système traité comporte des modes proches couplés par l'amortissement. Lorsque ce n'est pas le cas, la méthode dite standard (ou de normalisation à $2j\omega$) peut s'avérer suffisante et nécessite un temps de calcul beaucoup plus court. On pourrait donc essayer de limiter l'utilisation de notre méthode aux modes qui le nécessitent.

Ceci pourrait s'effectuer en calculant d'abord les modes réels par la méthode standard, puis en estimant la matrice d'amortissement généralisé et enfin en reconstruisant les modes complexes, de la même manière que dans notre méthode. La comparaison des modes complexes initiaux et reconstruits permettrait d'identifier les modes isolés convenablement traités et les modes couplés par l'amortissement. Notre technique basée sur l'appropriation ne serait alors appliquée qu'à ces derniers. Cette association de deux méthodes apporterait certainement un gain de temps appréciable.

Enfin, une recherche plus approfondie pourrait être menée sur la sélection de configurations optimales d'excitation. On a vu que la technique proposée basée sur le critère de qualité d'appropriation donnait de bons résultats. Néanmoins, les configurations étant choisies en augmentant progressivement le nombre d'excitateurs, on ne peut affirmer avoir déterminé la configuration optimale pour un nombre d'excitateurs donné. En toute rigueur, une recherche exhaustive de cette configuration optimale nécessiterait le calcul du critère de qualité d'appropriation pour toutes les combinaisons de degrés de liberté possibles. Cela n'est évidemment pas envisageable dès lors que le nombre de degrés de liberté mesurés est supérieur à une dizaine. Des techniques de recherche de solutions optimales dans un espace vaste existent et pourraient être testées, l'utilisation d'algorithmes génétiques ou de réseaux neuronaux conduirait plus rapidement à la solution. Ces techniques étant relativement lourdes

à mettre en œuvre, il ne nous semble pas utile de les intégrer dans notre méthode, mais leur application à des cas-tests particuliers permettraient de comparer leurs résultats avec ceux de la sélection que nous opérons.

La méthode globale d'identification modale de structures faiblement non-linéaires présentant des modes couplés peut elle-aussi être sujette à des améliorations.

D'abord nous avons vu lors de sa présentation théorique qu'elle pouvait a priori s'appliquer aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Pour des raisons que nous avons mentionnées et qui sont essentiellement liées à la structure testée, les essais de mesures temporelles n'ont pas abouti à des résultats intéressants. Bien que l'approche fréquentielle soit fortement privilégiée au LMA, une étude plus approfondie de la méthode globale dans le domaine temporel permettrait de caractériser ses limites de validité en traitant des non-linéarités plus fortes et en comparant les résultats avec une autre méthode.

Un point particulier mériterait également une étude complémentaire, il s'agit de la synthèse des réponses non-linéaires. La technique itérative choisie présente l'avantage d'être simple et rapide, mais on peut envisager de la confronter à d'autres méthodes de résolution d'équations non-linéaires comme celle de Runge-Kutta.

Ce travail pourrait éclaircir les problèmes d'existence et d'unicité de la solution. On a vu en effet que le modèle non-linéaire déterminé conduisait parfois à une divergence de la synthèse par calcul itératif. Un critère de convergence pourrait être recherché, constituant une contrainte supplémentaire appliquée aux paramètres non-linéaires identifiés.

Enfin, nous n'avons pu par manque de temps appliquer la méthode globale non-linéaire à une structure industrielle. Le Laboratoire de Mécanique Appliquée étant résolument orienté vers les techniques transférables en milieu industriel, cette étape constituerait un gage de crédibilité supplémentaire.

Bibliographie

Chapitre 1

- [1] Asher, G. W., *A method of normal mode excitation utilizing admittance measurement*, Proceedings of National Specialists' Meetings, IAS, Dynamics and Aeroelasticity, 1958
- [2] Bonneau, E., *Détermination des caractéristiques vibratoires d'une structure à partir de l'expression de la puissance complexe*, La Recherche Aérospatiale n° 130, 1969, pp 45-51
- [3] Clerc, D., *Méthode de recherche des modes propres par calcul de l'excitation harmonique optimum d'après les résultats bruts d'essais de vibrations*, Note technique Onéra n° 119
- [4] Cooper, J. E., Hamilton, M. J., Wright, J. R., *Experimental evaluation of normal mode force appropriation methods using a rectangular plate*, Xth IMAC, 1992, pp 1327-1333
- [5] Cooper, J. E., Wright, J. R., *To fit or to tune ? - That is the question*, XVth IMAC, 1997, pp 1353-1359
- [6] Deck, A., *Méthode d'appropriation automatique des forces d'excitation dans l'essai au sol d'une structure d'avion*, Euromech 22 "Dynamic of Mechanics" Newcastle, 1970
- [7] Fillod, R., Piranda, J., *Research method of the eigenvalues and generalized elements of a linear mechanical structure*, Shock and Vibration Bull. n° 48, 3, 1978, pp 5-12
- [8] Foltête, E., *Appropriation expérimentale, notice d'utilisation*, LMARC, Université de Franche-Comté, 1997
- [9] Fraeys de Veubeke, B. M., *Déphasages caractéristiques et vibrations forcées d'un système amorti*, Académie Royale de Belgique - Bulletin de la Classe des Sciences, série 5, vol. XXXIV, 1948, pp 628
- [10] Gibert, R. J., *Vibrations des structures - Interactions avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires*, CEA-EDF INRIA, Ecole d'été d'analyse numérique, 1988
- [11] Gauzy, H., *Détermination de la masse généralisée à partir de la mesure de la phase*, La Recherche Aérospatiale n° 102, 1964
- [12] Ibanez, P., Blakely, K. D., *Automatic force appropriation - A review and suggested improvements*, IInd IMAC, 1984, pp 903-907
- [13] Nash, M., *Use of the Multivariate Mode Indicator Function for normal mode determination*, VIth IMAC, 1988, pp 740-744

- [14] Otte, D., Van der Auweraer, H., Debille, J., Leuridan, J., *Enhanced force vector appropriation methods for normal mode testing*, XIth IMAC, 1993, pp 1310-1316
- [15] Piranda, J., *Analyse modale et recalage de modèle*, Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Franche-Comté, 156 pages, 1994
- [16] Ratsifandrihana, L., *Amélioration des procédures d'identification modale des structures*, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, n° d'ordre 456, 140 pages, 1995
- [17] de Vries, G., *Le problème de l'appropriation des forces d'excitation dans l'essai de vibration*, La Recherche Aérospatiale n° 102, 1964
- [18] Williams, R., Crowley, J., Vold, H., *The Multivariate Mode Indicator Function in modal analysis*, IIIrd IMAC, 1985, pp 66-70

Chapitre 2

- [19] Ahmadian, H., Gladwell, G. M. L., Ismail, F., *Extracting real modes from complex measured modes*, XIIIth IMAC, 1995, pp 507-510
- [20] Balmès, E., *New results on the identification of normal modes from experimental complex modes*, XIIth IMAC, 1994, pp 1576-1582
- [21] Fillod, R., *Contribution à l'identification des structures mécaniques linéaires*, Thèse, Université de Franche-Comté, 1980
- [22] Holmes, P. S., Wright, J. R., Cooper, J. E., *Optimum exciter placement for normal mode force appropriation using an a priori model*, XIVth IMAC, 1996, pp 1-7
- [23] Ibrahim, S. R., *Computations of normal modes from identified complex modes*, AIAA Journal, Vol. 21, n° 3, 1983, pp 446-451
- [24] Ibrahim, S. R., Sestieri, A., *Existence and normalization of complex modes in post experimental use in modal analysis*, XIIIth IMAC, 1995, pp 483-489
- [25] Imamovic, N., Ewins, D. J., *Optimization of excitation DOF selection for modal test*, pp 1945-1951
- [26] Imregun, M., Ewins, D. J., *Realisation of complex mode shapes*, XIth IMAC, 1993, pp 1303-1309
- [27] Kozànek, J., *The qualification number of a complex vector*, Mech. Mach. Theory Vol.22, n° 4, 1987, pp 391-392
- [28] Lallement, G., Inman, D. J., *A tutorial on complex eigenvalues*, XIIIth IMAC, 1995, pp 490-495

- [29] Lenoir, D., Cogan, S., Lallement, G., Bricout, J. N., *Model updating by modal synthesis of experimental forced responses*, XVIth IMAC, 1998, pp 399-405
- [30] Naylor, S., Cooper, J. E., Wright, J. R., *On the estimation of modal matrices with non-proportional damping*, XVth IMAC, 1997, pp 1371-1378
- [31] Niedbal, N., *Analytical determination of real normal modes from measured complex modes*, Proceedings of the 25th Structures Dynamics and Materials Conf., Palm Springs, 1984, pp 292-295
- [32] Wei, M. L., Allemang, R. J., Brown, D. L., *Real-normalization of measured complex modes*, Vth IMAC, 1987, pp 708-712
- [33] Zhang, Q., Lallement, G., *Three normal modes calculation methods based on identified complex modes*, 10th Modal Analysis Seminar, Leuven Belgium, 1985
- [34] Zhang, Q., *Identification modale et paramétrique de structures mécaniques auto-adjointes et non auto-adjointes*, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, 1987

Chapitre 3

- [35] Atkins, P. A., Tomlinson, G. R., Wright, J. R., *Force appropriation of simple nonlinear systems*, XIIIth IMAC, 1995, pp 146-157
- [36] Atkins, P., Worden, K., *Identification of a Multi-Degree-Of-Freedom nonlinear system*, XIVth IMAC, 1996, pp 1023-1028
- [37] Avitabile, P., O'Callahan, J., *Efficient techniques for forced response involving discrete nonlinearities*, ISMA 18, 1990, pp 857-871
- [38] Benhafsi, Y., Penny, J. E. T., Friswell, M. I., *Identification of damping parameters of vibrating systems with cubic stiffness nonlinearity*, XIIIth IMAC, 1995, pp 623-629
- [39] Chong, Y. H., Imregun, M., *Modal Parameter Extraction methods for non-linear systems*, XVIth IMAC, 1998, pp 728-736
- [40] Dippery, K. D., Weaver Smith, S., *An optimal control approach to nonlinear system identification*, XVIth IMAC, 1998, pp 637-643
- [41] Ewins, D. J., *Influence of nonlinearities on modal tests*, Euromech 280, Ecully, France, 1991, pp 3-11
- [42] Fahey, S. O'F., Nayfeh, A. N., *Experimental nonlinear identification of a single structural mode*, XVIth IMAC, 1998, pp 737-745

- [43] Feldman, M., Braun, S., *Description of free responses of SDOF systems via the phase plane and Hilbert transform : the concepts of envelope and instantaneous frequency*, XVth IMAC, 1997, pp 973-979
- [44] Feldman, M., Braun, S., *Identification of non-linear system parameters via the instantaneous frequency : application of the Hilbert transform and Wigner-Ville techniques*, XIIIth IMAC, 1995, pp 637-642
- [45] Feldman, M., *Vibration analysis of non-symmetric elastic force systems via the Hilbert transform*, XIVth IMAC, 1996, pp 1017-1022
- [46] Ferreira, J. V., Ewins, D. J., *Algebraic nonlinear impedance equation using multi-harmonic describing function*, XVth IMAC, 1997, pp 1595-1601
- [47] Fey, R. H. B., de Kraker, A., van Campen, D. H., *Periodic solutions and their stability of reduced dynamic systems with local nonlinearities*, ISMA 18, 1990, pp 409 - 420
- [48] Fillod, R., Lallement, G., Piranda, J., Raynaud, J. L., *Global method of modal identification*, IIIrd IMAC, 1985, pp 1145-1151
- [49] Fillod, R., Piranda, J., Bonnacase, D., *Taking nonlinearities into account in modal analysis by curve fitting of transfer functions*, IIIrd IMAC, 1985, pp 88-95
- [50] Foltête, E., Fillod, R., Raynaud, J. R., *Global modal parameter estimation of weak nonlinear structures with coupled modes - Experimental study*, IUATM/IFTToMM Symposium on Synthesis of Nonlinear Dynamical Systems, Riga, Latvia, 1998
- [51] Friswell, M. I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D., *Using Linear Model Reduction to compute the receptance of structures with local cubic nonlinearities*, ISMA 19, 1994, pp 79-90
- [52] Huang, L., Iwan, W. D., *Approximate methods for calculation of nonlinear instantaneous mode shapes*, XVth IMAC, 1997, pp 987-994
- [53] Huang, L., Iwan, W. D., *Modal identification of nonlinear systems using successive approximation model*, XVth IMAC, 1997, pp 995-1002
- [54] Jezequel, L., Budiwantoro, B., *A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic systems*, ISMA 18, 1990, pp 395-407
- [55] Jezequel, L., Lamarque, C. H., *Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory*, Journal of Sound and Vibration, 149(3), 1991, pp 429-459
- [56] Majed, R., Lallement, G., Raynaud, J. L., *Effects of localized non-linearities on the dynamic behavior of an articulated beam system*, XIIIth IMAC, 1995, pp 630-636
- [57] Mohammad, K., Tomlinson, G. R., *Estimating physical parameters of linear and nonlinear structures*, ISMA 18, 1990, pp 873-887

-
- [58] Mousrij, A., Fillod, R., Raynaud, J. L., *Identification modale des structures faiblement non-linéaires par excitations harmoniques*, Bulletin SFM, Revue Française de Mécanique n 1994-1, 1994, pp 43-51
- [59] Mousrij, A., *Identification modale des structures mécaniques linéaires et faiblement non-linéaires*, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, 1993
- [60] Piranda, J., Fillod, R., Foltête, E., *Modal identification of non-linear structures*, ISMA 23, International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium, 1998
- [61] Raynaud, J. L., *Exploitation simultanée des données spatiales et fréquentielles dans l'identification modale linéaire et non linéaire*, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, n d'ordre 22, 114 pages, 1986
- [62] Setio, S., Setio, H. D., Jezequel, L., *A method of non-linear modal identification from frequency response tests*, Journal of Sound and Vibration, 158(3), 1992, pp 497-515
- [63] Setio, S., Setio, H. D., Lamarque, C., Jezequel, L., *Introduction of nonlinear modes to compute the steady-states response of MDOF systems*, ISMA 18, 1990, pp 889-899
- [64] Shi, Z., Richard Houghton, J., *Nonlinear parametric identification of a rubber coupling using vibration test and matrix-exponential method*, XIVth IMAC, 1996, pp 197-203
- [65] Song, H. W., Wang, W. L., *Non-linear system identification using frequency domain measurement data*, XVIth IMAC, 1998, pp 746-752
- [66] Staszewski, W. J., Chance, J. E., *Identification of nonlinear systems using wavelets - Experimental study*, XVth IMAC, 1997, pp 1012-1016
- [67] Tao, D. L., Sainsbury, M. G., *Comparison between the Time-Domain Fourier Filter Output and the Non-Linear Auto-Regressive methods for non-linear modal identification*, XIVth IMAC, 1996, pp 547-553
- [68] Thouverez, F., Jezequel, L., *Identification of a localized nonlinearity*, Journal of Sound and Vibration, 33(6), 1998, pp 935-945
- [69] Thouverez, F., Jezequel, L., *Identification of NARMAX models on a modal base*, Journal of Sound and Vibration, 189(2), 1996, pp 193-213
- [70] Thouverez, F., Jezequel, L., *Identification of a localized nonlinearity*, Euromech 280, Ecully, France, 1991, pp 111-116
- [71] Tickenov, A., *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Ed. MIR, Moscou, édition française, 1974
- [72] Tomlinson, G. R., *Linear or Nonlinear - that is the question*, ISMA 19, 1994, pp 11-32

- [73] Wardle, R., Worden, K., King, N. E., *Classification of nonlinearities using neural network*, XVth IMAC, 1997, pp 980-986
- [74] Weiland, M., Link, M., *A Direct Parameter Estimation method for weak nonlinear systems*, XIVth IMAC, 1996, pp 525-531
- [75] Worden, K., Manson, G., *Random vibration analysis of a nonlinear system using the Volterra series*, XVth IMAC, 1997, pp 1003-1011
- [76] Wyckaert, K., Vanherck, P., van Brussel, H., Sas, P., *Predictive response calculation of linear structures coupled with local non-linear elements : an experimental approach*, ISMA 18, 1990, pp 421-440
- [77] Zhang, L., *An imposed epsilon decomposition approach for structural system identification*, International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Aachen, 1991

Annexe

Comportement dynamique des systèmes linéaires discrets

On présente dans cette annexe les **notations** et **relations de base** relatives à la dynamique des systèmes linéaires.

A.1. Modèle dynamique linéaire

Un modèle discret type est l'assemblage de masses par des raideurs et des amortissements. Pour modéliser la dynamique d'un tel système, on associe à chaque degré de liberté i une masse m_i , les raideurs k_{ij} et les amortissements b_{ij} qui le relient aux autres ddl j . On note N le nombre de ddl.

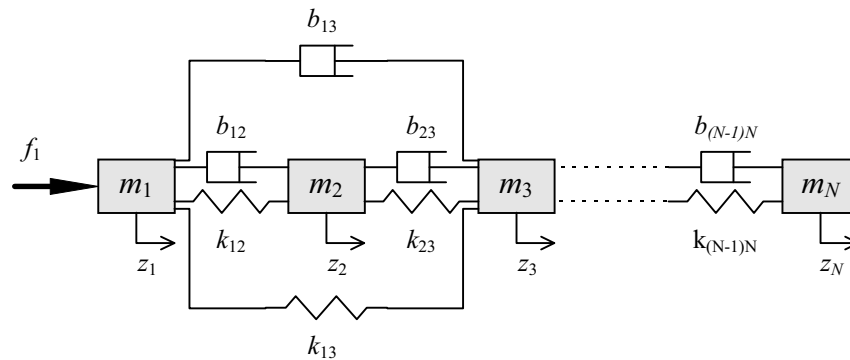


Figure A-1 : schéma élémentaire d'un système dynamique linéaire

Représentons les masses, raideurs et amortissements associés à cette discrétisation par des matrices :

$$\begin{matrix} & & j & N \\ M = & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline i & m_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline N & & \\ \hline \end{array} & K = & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline i & k_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline N & & \\ \hline \end{array} & B = & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline i & b_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline N & & \\ \hline \end{array} & (A.1)
 \end{matrix}$$

On se place dans l'hypothèse restrictive que ces matrices sont carrées d'ordre N , symétriques à valeurs réelles. La matrice M est supposée définie positive, et les matrices B et K définies non-négatives.

Notons f_i la force appliquée sur le ddl i . L'état du système est représenté par les variables z_j caractéristiques de chaque ddl. On peut regrouper ces variables et les forces d'excitation dans les vecteurs Z et F :

$$\begin{matrix} Z = & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline j & z_j \\ \hline \\ \hline N & \\ \hline \end{array} & F = & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline i & f_i \\ \hline \\ \hline N & \\ \hline \end{array} & (A.2)
 \end{matrix}$$

A.2. Modélisation des systèmes conservatifs

A.2.1. Définition

Soit un système dynamique défini par ses matrices masse, amortissement et raideur. Ce système est dit conservatif si la matrice d'amortissement est nulle : $B = 0$. Dans ces conditions, il n'y a plus aucune dissipation d'énergie au sein du système et sa réponse impulsionnelle est permanente. Cela ne correspond à aucune structure réelle, mais c'est la démarche la plus couramment adoptée lorsqu'on modélise des structures par la méthode des éléments-finis car on est en pratique incapable de modéliser les amortissements.

L'équation d'équilibre du SCA s'écrit :

$$M \ddot{Z}(t) + K Z(t) = F(t) \quad (\text{A.3})$$

La solution particulière harmonique (réponse forcée) du problème (A.3) est donnée par :

$$\left[K - \omega^2 M \right] Z = F \quad (\text{A.4})$$

A.2.2. Solution du système homogène : régime libre

L'équation caractéristique du système homogène correspondant au régime libre est donnée par :

$$\left[K - \omega_v^2 M \right] Y_v = 0 \quad (\text{A.5})$$

Ce système linéaire admet N valeurs propres réelles positives $\lambda_v = \omega_v^2$, et N vecteurs propres associés Y_v . On regroupe les valeurs propres du SCA dans la matrice spectrale diagonale Λ et les vecteurs propres dans la matrice modale Y . On peut montrer facilement que les vecteurs propres satisfont les propriétés d'orthogonalité relativement aux matrices M et K :

$${}^T Y M Y = E_N \quad {}^T Y K Y = \Lambda \quad (\text{A.6})$$

A.2.3. Solution particulière : réponse forcée harmonique

La base modale Y étant complète, tout vecteur $Z(t)$ peut être représenté sur cette base :

$$Z(t) = Y Q(t) \quad (\text{A.7})$$

où $Q(t)$ est le vecteur caractérisant la participation de chaque mode dans la réponse Z . En appliquant à la relation (A.4) la transformation modale qui consiste à multiplier à gauche par ${}^T Y$, et compte tenu des relations d'orthonormalité, on obtient :

$$Z = Y \left(\Lambda - \omega^2 E_N \right)^{-1} {}^T Y F \quad \forall \omega \neq \omega_v \quad (\text{A.8})$$

soit en développant :

$$Z = \sum_{v=1}^N \frac{Y_v^T Y_v F}{\omega_v^2 - \omega^2} \quad \forall \omega \neq \omega_v \quad (\text{A.9})$$

Cette relation extrêmement simple met en évidence une propriété des systèmes conservatifs : l'amplitude de la réponse tend vers l'infini lorsque la pulsation ω tend vers une pulsation propre.

A.3. Modélisation des systèmes dissipatifs

On considère maintenant le Système Dissipatif Associé à une structure (SDA) caractérisé par les matrices M , B et K . L'équation d'équilibre dynamique s'écrit :

$$M \ddot{Z}(t) + B \dot{Z}(t) + K Z(t) = F(t) \quad (\text{A.10})$$

Afin de se ramener à un problème différentiel à deux matrices du premier ordre, on pose :

$$X(t) = \begin{bmatrix} Z(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Il vient alors :

$$\begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}(t) \\ \ddot{Z}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

soit :

$$\boxed{U} \dot{X}(t) - \boxed{A} X(t) = \boxed{\tilde{F}(t)} \quad (\text{A.13})$$

Les matrices U et A sont carrées réelles symétriques d'ordre $2N$.

A.3.1. Solution du système homogène : régime libre

L'équation caractéristique du système homogène associé est un problème aux valeurs propres :

$$(A - s_v U) X_v = 0 \quad (\text{A.14})$$

Sous réserve que l'amortissement de chaque mode soit inférieur à l'amortissement critique, ce problème admet $2N$ solutions propres apparaissant par paires complexes conjuguées (s_v, X_v) et (\bar{s}_v, \bar{X}_v) .

s_v est la $v^{\text{ème}}$ valeur propre complexe du SDA.

Le vecteur propre associé est $X_v = \begin{bmatrix} dY_v \\ s_v dY_v \end{bmatrix}$ où dY_v est le $v^{\text{ème}}$ vecteur propre complexe du SDA.

Les caractéristiques modales s_v et ${}_dY_v$ du système dissipatif peuvent être respectivement regroupées dans les matrices spectrale S et modale ${}_dY$.

Le choix de normalisation des modes propres du système dissipatif ne doit pas être négligé. Il joue notamment un rôle important dans la comparaison de ces modes avec ceux du système conservatif. Les relations d'orthonormalité sont au nombre de quatre correspondant aux quatre sous-matrices constituant A et U :

$${}^T_dY B {}_dY + S {}^T_dY M {}_dY + {}^T_dY M {}_dY S = D \quad (\text{A.15})$$

$${}^T\bar{Y} B {}_dY + \bar{S} {}^T\bar{Y} M {}_dY + {}^T\bar{Y} M {}_dY S = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$S {}^T_dY M {}_dY - {}^T_dY K {}_dY = DS \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{S} {}^T\bar{Y} M {}_dY S - {}^T\bar{Y} K {}_dY = 0 \quad (\text{A.18})$$

On constate que ces relations sont nettement moins simples que celles du système conservatif, et que la "norme" dépend ici des matrices masse et amortissement. On fixe cette "norme" en choisissant une valeur particulière de la matrice diagonale D . Deux "normes" particulières sont fréquemment utilisées :

- "norme 1" : la matrice D est la matrice unité d'ordre N , $D_v = 1$,
- "norme $2j\omega$ " : les termes de D sont proportionnels aux pulsations propres amorties, $D_v = 2j_d\omega_v$.

Si l'on note ${}_dY_{v1}$ le $v^{\text{ème}}$ mode complexe "normé à 1" et ${}_dY_{v2j\omega}$ le même mode "normé à $2j\omega$ ", le passage d'une norme à l'autre s'effectue à l'aide de la relation :

$${}_dY_{v2j\omega} = \sqrt{2j_d\omega_v} {}_dY_{v1} \quad (\text{A.19})$$

A.3.2. Solution particulière : réponse forcée harmonique

Un calcul analogue à celui de la réponse forcée harmonique du système conservatif aboutit à la relation suivante :

$$Z = \sum_{v=1}^N \frac{{}_dY_v {}^T_dY_v F}{j\omega - s_v} + \sum_{v=1}^N \frac{{}_d\bar{Y}_v {}^T_d\bar{Y}_v F}{j\omega - \bar{s}_v} \quad (\text{A.20})$$

Cette relation est appliquée dans la plupart des techniques d'analyse modale par lissage de fonctions de transfert pour calculer la synthèse de la réponse forcée à partir des modes complexes identifiés.

A.4. Influence de l'amortissement

L'extraction des modes réels du SCA à partir des modes complexes du SDA constitue une étape souvent incontournable dans la démarche d'étude dynamique d'une structure. Le principal objectif de ce paragraphe est de donner les propriétés qui lient les modes complexes aux modes réels dans le cas particulier de l'amortissement proportionnel.

A.4.1. Amortissement généralisé

En projetant la réponse $Z(t)$ sur la base des modes réels du SCA (A.7) dans l'équation d'équilibre du SDA (A.10), on obtient :

$$MY\ddot{Q}(t) + BY\dot{Q}(t) + KYQ(t) = F(t) \quad (\text{A.21})$$

En appliquant la transformation modale, il vient :

$${}^T Y M Y \ddot{Q}(t) + {}^T Y B Y \dot{Q}(t) + {}^T Y K Y Q(t) = {}^T Y F(t) \quad (\text{A.22})$$

On définit la matrice d'amortissement généralisé β par :

$$\beta = {}^T Y B Y \quad (\text{A.23})$$

Cette matrice est carrée d'ordre N , réelle, symétrique.

A.4.2. Amortissement proportionnel

La matrice d'amortissement généralisé est en principe une matrice pleine, mais on distingue le cas particulier où elle est **diagonale**, on dit dans ces conditions que l'amortissement est **proportionnel**. Nous allons constater que cette hypothèse dite **de Basile** conduit à des propriétés importantes des modes complexes du SDA.

On peut montrer qu'une condition **nécessaire et suffisante** pour que la matrice β soit diagonale est :

$$B M^{-1} K = K M^{-1} B \quad (\text{A.24})$$

On montre par ailleurs qu'une condition **suffisante** est que la matrice d'amortissement B soit une combinaison linéaire de puissances des matrices masse et raideur :

$$B = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha} M^{\alpha} + c_{\beta} K^{\beta} \quad (\text{A.25})$$

A.4.3. Relations entre les pulsations propres

Sous l'hypothèse d'amortissement proportionnel, la partie imaginaire d'une pulsation propre complexe s_v du SDA est égale à la pulsation propre amortie correspondante $d\omega_v$.

De plus, sa partie réelle est liée au terme diagonal d'amortissement généralisé β_{vv} relatif au mode considéré :

$$s_v = -\frac{\beta_{vv}}{2} + j {}_d\omega_v = -\varepsilon_v {}_d\omega_v + j {}_d\omega_v \quad (\text{A.26})$$

On définit le coefficient d'amortissement (ou amortissement réduit) ε_v relatif au mode v par :

$$\varepsilon_v = \frac{\beta_{vv}}{2 {}_d\omega_v} \quad (\text{A.27})$$

Les pulsations propres amorties sont liées aux pulsations propres réelles du SCA par :

$${}_d\omega_v = \omega_v \sqrt{1 - \varepsilon_v^2} \quad (\text{A.28})$$

A.4.4. Relations entre les vecteurs propres

L'hypothèse d'amortissement proportionnel confère aux modes complexes du SDA les propriétés suivantes :

- si les vecteurs propres complexes du SDA sont normés à 1, leurs parties réelles et imaginaires sont opposées :

$$\text{Re}({}_dY_1) = -\text{Im}({}_dY_1) \quad (\text{A.29})$$

- s'ils sont normés à $2j\omega$, leurs parties imaginaires sont nulles et leurs parties réelles sont égales aux modes réels du SCA :

$$\text{Re}({}_dY_{2j\omega}) = Y \quad , \quad \text{Im}({}_dY_{2j\omega}) = 0 \quad (\text{A.30})$$

Dans les deux cas, les composantes d'un vecteur propre complexe ${}_dY_v$ sont colinéaires. Si ce vecteur est "normé à 1", elles sont portées par la deuxième bissectrice du plan complexe. Le passage à la "norme $2j\omega$ " consiste à appliquer une rotation de $\pi/4$ et une homothétie centrée à l'origine de rapport $\sqrt{2}\omega_v$, le nouveau vecteur propre étant porté par l'axe des réels (voir Figure A-2).

On constate que l'extraction des vecteurs propres du SCA à partir de ceux du SDA est extrêmement simple sous l'hypothèse d'amortissement proportionnel. Elle correspond à la méthode que nous avons baptisée "standard" dans le second chapitre de ce mémoire.

A.4.5. Réponse forcée harmonique

L'hypothèse d'amortissement proportionnel conduit enfin à une expression simplifiée de la réponse forcée harmonique du système dissipatif :

$$Z = \sum_{v=1}^N \frac{Y_v^T Y_v F}{\omega_v^2 + j\omega\beta_{vv} - \omega^2} \quad (\text{A.31})$$

A.4.6. Amortissement non-proportionnel

Si l'hypothèse de Basile est souvent acceptable pour des structures simples présentant un amortissement purement structural, elle ne l'est pas dans des cas plus complexes, par exemple en présence d'amortissements locaux.

Néanmoins, il est important de souligner que dans tous les cas, la contribution des termes extra-diagonaux de la matrice d'amortissement généralisé n'a d'importance que lorsque la structure considérée présente des modes proches en fréquence.

On considère en général que ces termes n'auront pas d'effet sur la réponse dès lors que la distance qui sépare deux modes adjacents est supérieure au triple de la bande à -3dB du mode le plus amorti. Des modes qui ne respectent pas cette propriété sont dits **couplés d'un point de vue fréquentiel**. Si de plus les termes extra-diagonaux correspondants ne sont pas négligeables, on dit que les modes sont **couplés par l'amortissement**.

En présence d'amortissement non-proportionnel, les propriétés qui lient les pulsations et modes du SDA à ceux du SCA ne sont plus vérifiées. Les composantes d'un mode complexe ne sont plus colinéaires et on constate une "ouverture" du bouquet de phase d'autant plus importante que les termes extra-diagonaux de la matrice d'amortissement généralisé sont importants (Figure A-2).

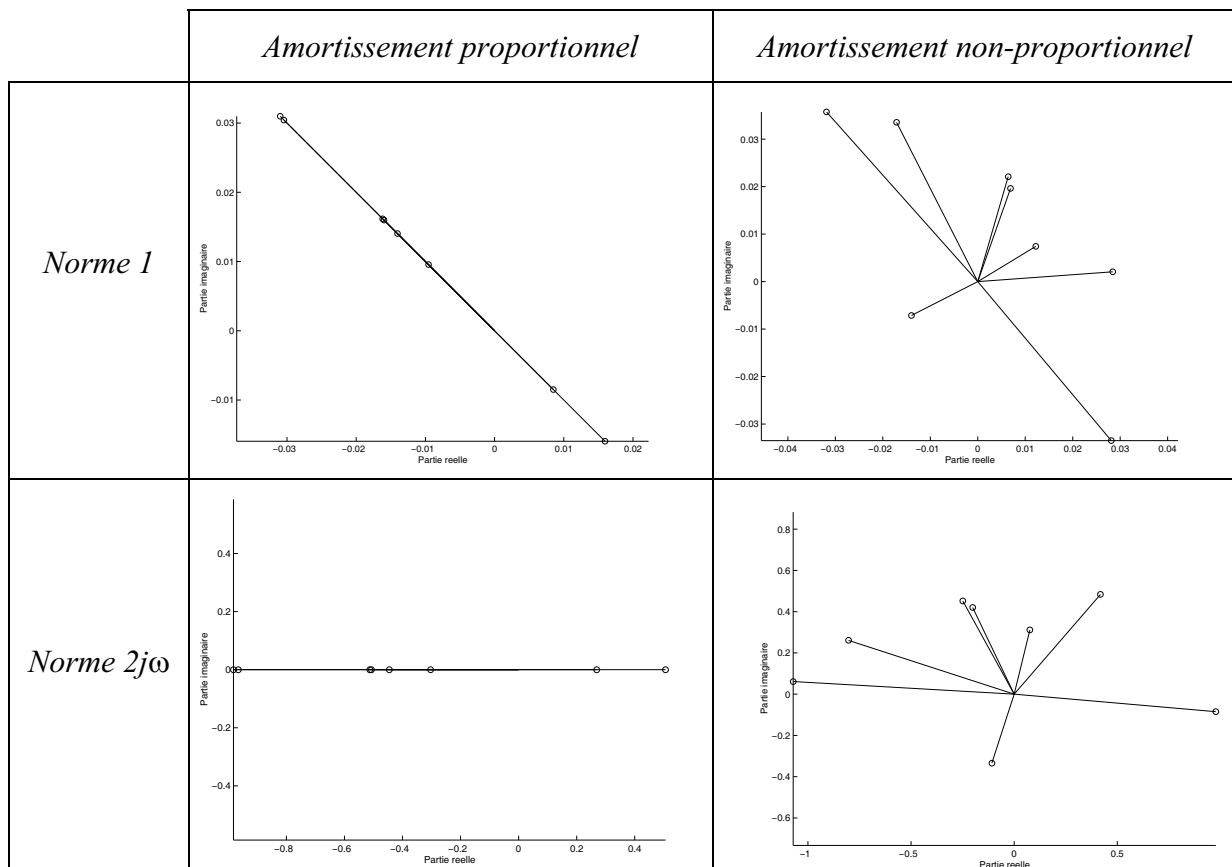


Figure A-2 : exemple de mode propre complexe

IDENTIFICATION MODALE DE STRUCTURES LINÉAIRES ET FAIBLEMENT NON-LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Trois nouvelles méthodes d'identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires sont proposées dans ce mémoire.

La mise en œuvre **expérimentale** de la méthode d'**appropriation** développée au Laboratoire de Mécanique Appliquée permet de mesurer directement sur la structure les modes propres réels du système conservatif qui lui est associé. Elle est particulièrement adaptée à l'utilisation de moyens de mesure optique tels que l'interférométrie holographique.

On présente ensuite une technique d'**extraction des modes propres réels à partir des modes propres complexes** du système dissipatif.

Les modes réels sont estimés par calcul d'appropriation sur des fonctions de réponse fréquentielle simulées par superposition des modes complexes.

Enfin, une **méthode globale d'identification de structures faiblement non-linéaires** présentant des modes couplés a été étudiée. Son objectif n'est pas de localiser et identifier les non-linéarités de façon précise, mais de prendre en compte leurs effets sur les réponses de façon simple.

Ces trois techniques sont validées sur des tests simulés et expérimentaux.

MODAL IDENTIFICATION OF LINEAR AND WEAKLY NONLINEAR STRUCTURES

ABSTRACT

Three new methods for the modal analysis of linear and weakly nonlinear structures are proposed.

The **experimental implementation of the appropriation** method developed by the Laboratory of Applied Mechanics allows the real eigenmodes of the associated conservative system to be measured directly on the structure. It is particularly well adapted applications using optical measurements such as holographic interferometry.

A new technique is then presented to **transform the complex modes** of the dissipative system into **the real ones** of the conservative system.

The real modes are estimated by applying the appropriation technique to responses obtained from simulations using the complex modes.

Finally, a **global modal identification method** is proposed for **weakly nonlinear structures** having **coupled modes**. The procedure allows the effects of the nonlinearities to be accounted for in the responses in a simple manner without requiring them to be localised or identified in a precise way.

These three techniques have been validated using simulated and experimental tests.

SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

MOTS-CLÉS

Dynamique, identification, analyse modale, appropriation, non-linéaire

U.F.R. des Sciences et Techniques
de l'Université de Franche-Comté
Route de Gray
25 030 Besançon Cedex